Transcription en LaTeX d'un article aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Bost et Connes

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 279-284, 1992 279

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Produits eulériens et facteurs de type III

JEAN-BENOÎT BOST ET ALAIN CONNES

Résumé. Nous établissons un lien précis entre mécanique statistique quantique et théorie des nombres en construisant un système dynamique $(\mathscr{H}, \sigma_1)$ où $\mathscr{H}$ est une C*-algèbre de Hecke non commutative, dont la fonction de partition est la fonction ζ de Riemann. Nous démontrons l'existence d'une transition de phase avec brisure spontanée de symétrie, qui fait intervenir l'action du groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}_{ab}/\mathbb{Q}$.

Euler products and type III factors

Abstract. We establish a precise relation between quantum statistical mechanics and number theory by the construction of a C* dynamical system $(\mathscr{H}, \sigma_1)$ where $\mathscr{H}$ is a non-commutative Hecke C*-algebra, whose partition function is the Riemann ζ function. We show the existence of a phase transition with spontaneous symmetry breaking which involves the action of the Galois group of $\overline{\mathbb{Q}}_{ab}/\mathbb{Q}$.

Soit S le foncteur de la catégorie des espaces de Hilbert dans elle-même qui associe à un espace de Hilbert $\mathfrak{h}$ l'espace de Hilbert $\mathrm{S}\mathfrak{h} = \oplus \mathrm{S}^n\mathfrak{h}$ somme directe des puissances symétriques $\mathrm{S}^n\mathfrak{h}$ dotées du produit scalaire tel que :

$$(1) \qquad \langle \xi_1\xi_2 \ldots \xi_n, \eta_1\eta_2 \ldots \eta_n \rangle = \sum_\sigma \prod_{j=1}^n \langle \xi_j, \eta_{\sigma(j)} \rangle$$

où σ parcourt le groupe des permutations de $\{1, ..., n\}$. Si T est un opérateur non borné autoadjoint dans $\mathfrak{h}$, ST est l'opérateur non borné autoadjoint tel que

$$(2) \qquad (\mathrm{ST})(\xi_1 \ldots \xi_n) = (\mathrm{T}\xi_1) \ldots (\mathrm{T}\xi_n), \qquad \forall \xi_j \in \text{Domaine T}.$$

Si T est traçable et de norme < 1, alors ST est traçable et l'on a

$$(3) \qquad \mathrm{Trace}(\mathrm{ST}) = \det(1 - \mathrm{T})^{-1}.$$

Pour tout $\xi \in \mathfrak{h}$ on définit un opérateur $b^*(\xi)$ dans $\mathrm{S}\mathfrak{h}$ comme la fermeture de l'opérateur de multiplication par ξ :

$$(4) \qquad b^*(\xi)\eta = \xi\eta, \qquad \forall \in \mathrm{S}^n\mathfrak{h}.$$

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5470708m/f285.item.
Note présentée par ALAIN CONNES.
0764-4442/92/03150279 $2.00
Transcription : Denise Vella-Chemla, août 2023.

Ces opérateurs et leurs adjoints $b(\xi) = (b^*(\xi))^*$ vérifient les relations de commutation canoniques [5] :

$$(5) \qquad [b^*(\xi), b(\eta)] = \langle \xi, \eta \rangle, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{h}.$$

En particulier pour $\mathfrak{h}$ de dimension 1 les opérateurs b^* et b correspondants dans $\mathrm{S}\mathfrak{h}$ donnent l'unique représentation irréductible de la relation $bb^* - b^*b = 1$. L'opérateur bb^* admet alors $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}$ comme spectre simple et cette écriture caractérise les opérateurs autoadjoints admettant $\mathbb{N}^*$ comme spectre simple.

Le lemme suivant caractérise les opérateurs autoadjoints admettant pour spectre simple le sous-ensemble $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}_+$ formé des nombres premiers. C'est une traduction immédiate du théorème de factorisation d'Euclide.

Lemme 1. *Soit* T *un opérateur autoadjoint dans* $\mathfrak{h}$*. Pour que* T *admette* $\mathscr{P}$ *comme spectre simple, il faut et il suffit que* ST *admette* $\mathbb{N}^*$ *comme spectre simple.*

L'égalité (3) appliquée à T^{-s}, $\mathrm{Re}(s) > 1$, correspond évidemment à la décomposition de la fonction ζ de Riemann en produit eulérien. Le foncteur S et les relations de commutation canoniques (5) sont les ingrédients essentiels de la deuxième quantification des physiciens théoriciens. Ainsi le lemme 1 suggère de remplacer l'étude du sous-ensemble de $\mathbb{R}$ par celle du système dynamique non commutatif constitué par

(a) l'algèbre (des observables) engendrée par les opérateurs $b(\xi), b^*(\eta)$; $\xi, \eta \in l^2(\mathscr{P})$ dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N}^*) = \mathrm{S}\, l^2(\mathscr{P})$,

(b) l'évolution σ_t de cette algèbre définie par :

$$(6) \qquad \sigma_t(x) = e^{itH_b} x e^{-itH_b}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où l'"hamiltonien" H_b, est l'opérateur

$$(7) \qquad H_b \varepsilon_n = (\log n) \varepsilon_n$$

dans la base orthonormale canonique ε_n de $l^2(\mathbb{N}^*)$. La définition précise de la C^*-algèbre des observables, formée d'opérateurs *bornés* dans $\mathfrak{h}_b = l^2(\mathbb{N}^*)$, ainsi que sa structure sont contenues dans la proposition suivante.

Proposition 2.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *l'égalité suivante définit une isométrie* μ_n *de* $l^2(\mathbb{N}^*)$ *dans* $l^2(\mathbb{N}^*)$:

$$\mu_n \varepsilon_k = \varepsilon_{kn} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

2. La C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les opérateurs $\mu_n, n \in \mathbb{N}^*$ est le produit tensoriel infini : $C^*(\mathbb{N}^*) = \bigotimes_{p \in \mathscr{P}} \tau_p$ des C^*-algèbres τ_p engendrées par $\mu_p, p \in \mathscr{P}$.

3. Chaque C^*-algèbre τ_p est isomorphe à la C^*-algèbre de Tœplitz.

4. L'égalité $\sigma_t(x) = e^{itH_b} x e^{-itH_b}, x \in C^*(\mathbb{N}^*)$ définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $C^*(\mathbb{N}^*)$.

Les C^*-algèbres de Toeplitz sont nucléaires, de sorte que la définition du produit tensoriel $\otimes\tau_p$ est non ambiguë. Pour un tel système dynamique non commutatif, une notion essentielle, issue de la mécanique statistique quantique est la suivante (cf. [4], chap. 1).

Définition 3. Soient (B, σ_t) une C^*-algèbre unifère munie d'un groupe à un paramètre d'automorphismes, φ un état sur B et $\beta \in]0, \infty[$. On dit que φ *vérifie la condition* KMS_β *relativement à* σ_t si et seulement s'il existe pour tous $x, y \in \mathrm{B}$ une fonction holomorphe $\mathrm{F}_{x,y}$ bornée continue au bord dans la bande $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\, z \in [0, \beta]\}$ telle que $\mathrm{F}_{x,y}(t) = \varphi(x\sigma_t(y))$ et $\mathrm{F}_{x,y}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(y)x)$.

On n'a, en général, ni existence ni unicité d'états KMS_β.

Théorème 4.

(a) *Pour tout* $\beta > 0$, *il existe un unique état* KMS_β *sur* $C^*(\mathbb{N}^*)$ *; c'est un produit tensoriel infini* $\varphi_\beta = \bigotimes_{p \in \mathscr{P}} \varphi_{\beta,p}$ *où* $\varphi_{\beta,p}$ *est l'état sur l'algèbre de Tœplitz dont la liste des valeurs propres est* $\{(1 - p^{-\beta})p^{-n\beta}, n \in \mathbb{N}\}$

(b) *Pour* $\beta > 1$, *l'état* φ_β *est de type* I_∞ *et donné par*

$$\varphi_\beta(x) = \zeta(\beta)^{-1}\, \mathrm{Trace}\, (e^{-\beta \mathrm{H}_b} x), \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*).$$

(c) *Pour* $\beta = 1$, *l'état* φ_β *est factoriel de type* III_1, *et donné par :*

$$\varphi_1(x) = \mathrm{Trace}_\omega(e^{-\mathrm{H}_b} x), \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$$

où Trace_ω *est la trace de Dixmier.*

(d) *Pour* $0 < \beta \leq 1$, *l'état* φ_β *est factoriel de type* III_1, *et le facteur associé est le facteur d'Araki-Woods* R_∞.

Blackadar [3] avait démontré que φ_1 est factoriel de type III.

Rappelons de plus que la trace de Dixmier d'un opérateur comme $e^{-H}x$ est égale au résidu en $s = 1$, si celui-ci a un sens, de la fonction $s \to \mathrm{Trace}(e^{-sH}x)$ ([1], chap. 5). Nous interprétons maintenant la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ en termes adéliques. Soit P le groupe algébrique des matrices triangulaires de la forme $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix}$, h inversible. Considérons l'anneau localement compact commutatif A_f des adèles finies sur $\mathbb{Q}$. Notons R le sous-anneau compact maximal, il est ouvert dans A_f. La proposition suivante identifie $C^*(\mathbb{N}^*)$ à la C^*-algèbre de convolution des fonctions P_R-biinvariantes sur $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}$. Rappelons que si G est un groupe localement compact moyennable, la C^*-algèbre du groupe $C^*(\mathrm{G})$ est la C^*-algèbre engendrée dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathrm{G}, ds)$ de la représentation régulière gauche (ds est une mesure de Haar à gauche sur G) de G par l'action de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ par convolution :

(8) $$(\lambda(f)\xi)(s) = \int_{\mathrm{G}} f(t)\xi(t^{-1}s)dt.$$

Soit ds la mesure de Haar à gauche sur $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}$ normalisée par

(9) $$\int_{\mathrm{P}_{\mathrm{R}}} ds = 1.$$

Proposition 5.

1. *Soient* $p \in \mathscr{P}, \mathrm{K} = \mathbb{Q}_p, \mathrm{R} = \mathbb{Z}_p$. *La fonction caractéristique* $1_{\mathrm{P}_{\mathrm{R}}} = e$ *de l'ouvert* $\mathrm{P}_{\mathrm{R}} \subset \mathrm{P}_{\mathrm{K}}$ *définit un idempotent* $e \in \mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{K}})$ *et la* C^**-algèbre réduite* $\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{K}})_e$ *est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Tœplitz* τ_p.
2. *La* C^**-algèbre* $\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})$ *est le produit tensoriel infini* $\underset{p\in\mathscr{P}}{\otimes}(\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathbb{Q}_p}), e_p)$.
3. *La fonction caractéristique* $1_{\mathrm{P}_{\mathrm{R}}} = e$ *de l'ouvert* $\mathrm{P}_{\mathrm{R}} \subset \mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}$ *définit un idempotent* $e \in \mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})$ *et la* C^**-algèbre réduite* $\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})_e$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{C}^*(\mathbb{N}^*)$.

La notion de produit tensoriel infini de couples (B_ν, e_ν) de C^*-algèbres sans unité et idempotents $e_\nu = e_\nu^* \in B_\nu$ se définit comme limite inductive en utilisant les morphismes $x \to x \otimes e_\nu$. L'idéal bilatère J engendré par l'idempotent $e \in \mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})$ n'est pas dense dans $\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})$ et les C^*-algèbres considérées ne sont pas équivalentes au sens de Morita. Rappelons qu'un *poids* φ sur une C^*-algèbre B est une application linéaire de $\mathrm{B}^+ = \{x \in \mathrm{B}\ ;\ \varphi(x^*x) \geq 0\}$ dans $[0, +\infty]$. Un poids est dit *semi-fini* si, et seulement si, $\{x \in \mathrm{B}\ ;\ \varphi(x^*x) < \infty\}$ est dense (en norme) dans B et semi-continu inférieurement (s.c.i.) s'il l'est pour la topologie normique sur B^+.

Si G est un groupe localement compact, on construit un poids canonique φ sur $\mathrm{C}^*(\mathrm{G})$, semi-fini et semi-continu inférieurement (s.c.i.) tel que $\varphi(f) = f(e)$ pour $f \in L^1(\mathrm{G})$ suffisamment régulière. C'est le poids de Plancherel. Quand G n'est pas unimodulaire, ce poids n'est pas une trace. Soit alors Δ le module de G :

(10) $$d(t^{-1}) = \Delta(t)^{-1}dt, \qquad d(ts) = \Delta(s)dt.$$

Le poids de Plancherel vérifie la condition KMS_1 relativement au groupe à un paramètre $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathrm{C}^*(\mathrm{G}))$ tel que :

(11) $$\sigma_t(f)(s) = f(s)\Delta(s)^{it}, \qquad \forall s \in \mathrm{G}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les groupes P_{K}, K=$\mathbb{Q}_p$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}$, ne sont pas unimodulaires et le module Δ est donné par l'égalité :

(12) $$\Delta\left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix}\right) = |h|.$$

L'idempotent $e \in \mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})$ (prop. 5) est invariant par le groupe σ_t d'automorphismes modulaires du poids de Plancherel et la restriction de σ_t à l'algèbre réduite $\mathrm{C}^*(\mathbb{N}^*) \simeq \mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})_e$ est identique au groupe d'évolution de la proposition 2.4.

Théorème 6.

1. Pour tout $\beta > 0$ il existe (à normalisation près) un unique poids semi-fini semi-continu inférieurement (s.c.i.) et KMS_β sur le système dynamique $(\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}), \sigma_t)$.

2. Pour $\beta = 1$, φ_β est le poids de Plancherel. Le poids φ_β est factoriel de type III_1 pour $\beta \in]0, 1]$ et le facteur associé est le facteur d'Araki-Woods R_∞ [1].

3. La C^*-algèbre $\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})$ est canoniquement isomorphe au produit croisé de $\mathrm{C}_0(\mathrm{A}_f)$ par l'action par homothéties du groupe A_f^* et pour $\beta > 1$, le poids φ_β est le poids dual de la mesure μ_β :

$$\mu_\beta(f) = \zeta(\beta)^{-1} \int_{\mathrm{A}_f^*} |j|^\beta f(j) d^*j$$

   où d^*j désigne la mesure de Haar sur A_f^*. Ce poids φ_β est factoriel de type I_∞ $(\beta > 1)$.

L'isomorphisme $\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}) = \mathrm{C}_0(\mathrm{A}_f) \rtimes \mathrm{A}_f^*$ dépend du choix de l'isomorphisme de Fourier entre A_f et le groupe dual. Pour $f \in \mathrm{C}_0(\mathrm{A}_f)$ suffisamment régulière la fonction $\beta \to \mu_\beta(f)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ ([8], [9]) et l'égalité $\widehat{\mu}_\beta = \varphi_\beta$ persiste pour $0 < \beta < 1$.

Étudions maintenant la relation entre les C^*-algèbres $\mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}) = \mathrm{B}$ et $\mathrm{C}^*(\mathbb{N}^*) = \mathrm{B}_e$ grâce au bimodule $\mathrm{B}e$ des fonctions sur $\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}/\mathrm{P}_{\mathrm{R}}$. Rappelons quelques généralités sur les C^*-modules et les représentations associées. Étant donnée une C^*-algèbre C et un module à droite $\mathscr{E}$ sur C, muni d'une application sesquilinéaire $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathrm{C}$, notée $\langle \xi, \eta \rangle$; $\xi, \eta \in \mathscr{E}$, on dit que $\mathscr{E}$ est un C^*-module sur C si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

(α) $\langle \xi a, \eta b \rangle = a^* \langle \xi, \eta \rangle b, \;\; \forall a, b \in \mathrm{C}$; $\forall \xi, \eta \in \mathscr{E}$

(β) $\langle \xi, \xi \rangle \in \mathrm{C}^+, \;\; \forall \xi \in E$

(γ) $\mathscr{E}$ est complet pour la norme $\xi \to \| \langle \xi, \xi \rangle \|^{1/2}$.

On note $\mathrm{End}_{\mathrm{C}}(\mathscr{E})$ la C^*-algèbre des endomorphismes de $\mathscr{E}$.

Lemme 7. *Soient* C *une* C^**-algèbre unifère,* $\mathscr{E}$ *un* C^**-module sur* C*,* $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathrm{C})$ *un groupe à un paramètre d'automorphismes,* φ_β *un état* KMS_β *sur* C*, et* $\mathfrak{h}_{\varphi_\beta}$ *l'espace de Hilbert de la représentation* GNS *de* C *associée à* φ_β*.*

(a) Soit $\mathfrak{h}_\beta$ la complétion de $\mathscr{E}$ pour le produit scalaire : $\langle \xi, \eta \rangle = \varphi_\beta(\langle \xi, \eta \rangle), \; \forall \xi, \eta \in \mathscr{E}$. Alors l'action de $\mathrm{End}_{\mathrm{C}}(\mathscr{E})$ dans $\mathscr{E}$ se prolonge par continuité à $\mathfrak{h}_\beta$.

(b) Il existe une unique représentation unitaire de C^0 dans $\mathfrak{h}_\beta$ telle que $\rho(a)\xi = \xi \sigma_{-i\beta/2}(a), \; \forall \xi \in \mathscr{E}, a \in \mathrm{C}$.

La démonstration résulte de l'identification de $\mathfrak{h}_\beta$ avec le produit tensoriel de C^*-modules $\mathscr{E} \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{h}_{\varphi_\beta}$.

Considérons alors le C^*-module sur $\mathrm{C}^*(\mathbb{N}^*)$ obtenu en munissant $\mathrm{B}e$ du produit scalaire $\langle \xi, \eta \rangle = \xi^* \eta \in e\mathrm{B}e = \mathrm{C}^*(\mathbb{N}^*), \mathrm{B} = \mathrm{C}^*(\mathrm{P}_{\mathrm{A}_f})$. Pour $\beta \in]0, \infty[$, soit φ_β l'unique état KMS_β sur $\mathrm{C}^*(\mathbb{N}^*)$ et $\mathfrak{h}_\beta$ l'espace de Hilbert associé par le lemme 7 au couple $(\mathscr{E}, \varphi_\beta)$. Le lemme 7 (a) montre que la

C^*-algèbre $C^*(P_A)$ et donc le groupe P_A sont représentés unitairement dans $\mathfrak{h}_\beta$.

Par construction $\mathscr{E}$ est un espace de fonctions sur l'espace homogène $\Delta = P_{A_f}/P_R$. Pour toute place finie p le quotient $T_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p}$, est l'arbre de $SL(2,\mathbb{Q}_p)$ avec un bout privilégié et Δ est le produit restreint de ces arbres. L'action de P_A sur Δ préserve cette structure.

Le sous-groupe $P_\mathbb{Q} \subset P_A$ agit transitivement sur Δ que l'on identifie ainsi à $P_\mathbb{Q}/P_\mathbb{Z}$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, soit $\varepsilon_\alpha \in \mathscr{E}$ la fonction caractéristique de $\{\alpha\} \subset \Delta$.

Lemme 8. *Soit $\beta \in]0,+\infty[$. Les vecteurs $\varepsilon_\alpha, \alpha \in \Delta$, sont totaux dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{h}_\beta$. On $\|\varepsilon_\alpha\| = 1$ et le produit scalaire $\langle \varepsilon_{\alpha'}, \varepsilon_\alpha\rangle$ est déterminé par la fonction de type positif $\Psi_\beta(g) = \langle g\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha\rangle_\beta, g \in P_\mathbb{Q}$ donnée par :*

(α) $\Psi_\beta(g) = 0$ si $g \notin N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Q} \right\}$

(β) $\Psi_\beta\left(\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \prod p^{-k_p\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}$

où $b = \prod p^{k_p}$ est la décomposition facteurs premiers du dénominateur de la fraction en irréductible $n = a/b$.

Pour $\beta = 1$ les vecteurs $\varepsilon_x, x \in \Delta$, forment une base orthonormale de $\mathfrak{h}_\beta$ de sorte que $\mathfrak{h}_1 = l^2(\Delta)$. En général, la décomposition $\Delta = \bigcup \Delta_k, k \in \mathbb{Q}_+^*$ de Δ en orbites de N : $\Delta_k = N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \varepsilon_1$ donne une décomposition de $\mathfrak{h}_\beta$ en sous espaces $\mathfrak{h}_{\beta,k}$ deux à deux orthogonaux.

Nous déterminons le commutant de $P_\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{h}_\beta$ grâce à la C^*-algèbre “de Hecke” suivante. Les orbites de l'action de $P_\mathbb{Z}$ à gauche dans $\Delta = P_\mathbb{Q}/P_\mathbb{Z}$ sont finies, leur longueur définit une fonction $\alpha \to l(\alpha)$ de Δ dans $\mathbb{N}^*$. L'algèbre involutive $\mathscr{H}_f$ des fonctions $P_\mathbb{Z}$ biinvariantes sur $P_\mathbb{Q}$, à support fini dans $P_\mathbb{Q}/P_\mathbb{Z}$ est définie par :

(a) $(f_1 * f_2)(g) = \sum_{P_\mathbb{Q}/P_\mathbb{Z}} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1}g)$

(b) $f^*(g) = \overline{f}(g^{-1})$.

L'algèbre $\mathscr{H}_f$ contient comme sous-algèbre commutative l'algèbre de Hecke des fonctions $PSL(2,\mathbb{Z})$-biinvariantes sur $PGL^+(2,\mathbb{Q})$, car $PGL^+(2,\mathbb{Q})$ agit transitivement sur Δ qui s'identifie à $PGL^+(2,\mathbb{Q})/PSL(2,\mathbb{Z})$.

Pour toute double classe $\gamma \in P_\mathbb{Z}\backslash P_\mathbb{Q}/P_\mathbb{Z}$, soient $\delta(\gamma) = l(\gamma)/l(\gamma^{-1})$ et $e_\gamma \in \mathscr{H}_f$ la fonction caractéristique de $\{\gamma\}$.

Proposition 9. *Soit $\beta \in]0,+\infty[$.*

1. *L'égalité suivante définit une représentation unitaire ρ_β de l'algèbre opposée $\mathscr{H}_f^o$* dans $\mathfrak{h}_\beta$

$$\rho_\beta(e_\gamma)\varepsilon_\alpha = \delta(\gamma)^{\beta/2} \sum_{\alpha' \in \alpha\cdot\gamma} \varepsilon_{\alpha'}.$$

2. $\rho_\beta(\mathscr{H}_f^o)$ *engendre le commutant de l'action de* $\mathrm{P}_\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{h}_\beta$.

3. *La norme de* $\rho_\beta(x), x \in \mathscr{H}_f$, *est indépendante de* β *et définit par complétion une* C^**-algèbre* $\mathscr{H}$ *à laquelle* ρ_β *se prolonge.*

4. *Le vecteur* ε_1 *est séparateur pour* $\rho_\beta(\mathscr{H})''$ *et définit un état* $\varphi_\beta(x) = \langle \rho_\beta(x)\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle$ *sur* $\mathscr{H}$ *qui est* KMS_β *relativement au groupe d'automorphismes* $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(\mathscr{H}), \sigma_t(e_\gamma) = \delta(\gamma)^{it} e_\gamma$.

Le sous espace cyclique $\mathfrak{h}_\beta^{(1)} = \overline{\rho_\beta(\mathscr{H})\varepsilon_1}$ est l'espace des vecteurs fixes pour le sous groupe $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \subset \mathrm{P}_\mathbb{Q}$.

Comme $\mathrm{P}_\mathbb{Q}$ commute avec $\rho_\beta(\mathscr{H})$, l'action de $\mathbb{Q}^*$ dans $\mathscr{L}(\mathfrak{h}_\beta)$ par automorphismes intérieurs laisse $\rho_\beta(\mathscr{H})$ invariant point par point, de sorte que l'extension de cette action à $\mathrm{A}_f^* \subset \mathrm{P}_{\mathrm{A}_f}$ définit par passage au quotient une action par automorphismes $\theta_j \in \mathrm{Aut}(\mathscr{H})$, indépendante de β, du groupe compact $\mathrm{C}=\mathrm{A}_f^*/\mathbb{Q}^*$ des classes d'idèles finies. L'action de C sur $\mathscr{H}$ commute avec l'action σ_t de $\mathbb{R}$. La C^*-algèbre $\mathscr{H}^\mathrm{C} = \{x \in \mathscr{H} \,; \theta_j(x) = x,\ \forall j \in \mathrm{C}\}$ des points fixes de C est canoniquement isomorphe à la C^*-algèbre $\mathrm{C}^*(\mathbb{N}^*)$. La C^*-algèbre $\mathscr{H}^\mathbb{R} = \{x \in \mathscr{H} \,;\ \sigma_t(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$ est canoniquement isomorphe à la C^*-algèbre $\mathrm{C}^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ du groupe discret $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Le théorème suivant, qui est le résultat principal de cette Note, montre l'existence d'une transition de phase pour $\beta = 1$, avec brisure spontanée de symétrie, pour le système dynamique non commutatif $(\mathscr{H}, \sigma_t)$.

THÉORÈME 10.

(a) *Pour* $0 < \beta \leq 1$, *il existe un unique état* KMS_β *sur* $\mathscr{H}$ *(pour l'évolution* σ_t*) ; cet état est factoriel de type* III_1, *invariant par* C *et sa restriction à* $\mathrm{C}^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *est la fonction de type positif* Ψ_β.

(b) *Pour* $\beta > 1$, *les états* KMS_β *sur* $\mathscr{H}$ *et extrémaux sont de type* I *et paramétrés par les caractères injectifs* $\chi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *; la restriction de* $\varphi_{\beta,\chi}$ *à* $\mathrm{C}^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *est donnée par l'égalité :*

$$\varphi_{\beta,\chi}(e_\gamma) = \zeta(\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \chi(\gamma)^n.$$

L'action du groupe compact C sur l'ensemble des états extrémaux pour $\beta > 1$ est non triviale et c'est l'action naturelle du groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$. Pour $\beta = 1$, la représentation de $\mathrm{P}_\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{h}_1$ est la représentation induite de la représentation triviale de $\mathrm{P}_\mathbb{Z}$. Qu'elle soit factorielle et de type III a été démontré indépendamment par Binder ([2]).

COROLLAIRE 11. *Pour* $\beta \in]0, 1]$ *la représentation de* $\mathrm{P}_\mathbb{Q}$ *dans* $\mathfrak{h}_\beta$ *est factorielle de type* III_1. *Elle est réductible et de type* I_∞ *pour* $\beta > 1$.

Bien que l'étude ci-dessus soit limitée à l'aspect "théorie de la mesure" du système dynamique non commutatif $(\mathscr{H}, \sigma_t)$, l'opérateur H_b admet une racine carrée supersymétrique D ([6], [7]) qui permet de définir sur $\mathscr{H}$ un module θ-sommable et d'en définir la géométrie non commutative [4]. Dans une Note ultérieure, nous étudierons cette géométrie ainsi que l'analogue des résultats ci-dessus pour un corps global arbitraire.

Note remise le 6 avril 1992, acceptée le 9 avril 1992.

Références bibliographiques

[1] H. Araki, E. J. Woods, A classification of factors, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, 4, 1968, p. 51-130.

[2] M. Binder, Induced factor representations of discrete groups and their type, *J. Funct. Anal.* (à paraître).

[3] B. E. Blackadar, The regular representation of restricted direct product groups, J. Funct. Anal., 25, 1977, p. 267-274.

[4] A. Connes, *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris, 1990.

[5] P. A. M. Dirac, The quantum theory of the emission and absorption of radiation, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 114, 1927, p. 243-265.

[6] B. Julia, Statistical theory of numbers, in *Number Theory and Physics, Les Houches Winter School*, J.-M. Luck, P. Moussa et M. Waldschmidt éd., Springer-Verlag, 1990.

[7] D. Spector, Supersymmetry and the Möbius inversion function, *Comm. Math. Phys.*, 127, 1990, p. 239-252.

[8] J. Tate, Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta function, in *Algebraic Number Theory*, J. W. S. Cassels et A. Fr{ohlich éd., Academic-Press, 1967.

[9] A. Weil, Fonction zêta et distributions, *Séminaire Bourbaki*, n° 312, juin 1966.

I.H.É.S., 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette.

Qu'y a-t- il de nouveau aujourd'hui
dans le travail d'un mathématicien ?
Échange entre Alain Connes et Jean-Christophe Yoccoz

Jean-Christophe Yoccoz : Le travail des mathématiciens a changé et nous travaillons de plus en plus de manière collective. Il y a une cinquantaine d'années, les gens voyageaient moins. Ils entretenaient des correspondances postales, mais les collaborations n'étaient pas aussi courantes. La plupart des articles étaient signés d'un seul auteur. C'était encore le cas à mes débuts. Aujourd'hui, il y a beaucoup plus de congrès et de travaux collectifs. Cette évolution s'est produite au cours de notre génération et s'est intensifiée depuis 10 ou 15 ans. Les articles cosignés par deux ou trois auteurs sont devenus la norme. Pour ma part, j'ai différents collaborateurs, en France, au Brésil, en Italie. Nous nous voyons assez régulièrement, ce qui suppose des voyages.

Alain Connes : Comme dans d'autres domaines, cette évolution produit des effets pervers : il faut désormais filtrer une information devenue pléthorique. D'une part, on a moins de temps à consacrer à chaque article et d'autre part, il se développe une redondance considérable, comme dans le domaine de la physique théorique, par exemple. C'est un peu moins vrai en mathématiques ; néanmoins, la communication se fait à un niveau plus superficiel. En contrepartie, internet et les moteurs de recherche ont modifié le paysage en profondeur. Auparavant, on valorisait beaucoup une certaine forme d'érudition mathématique. Aujourd'hui, Google fournit instantanément toutes les références dont on peut avoir besoin sur à peu près n'importe quel sujet. C'est un outil formidable qui soulage énormément la mémoire. C'est une sorte de mémoire collective - métaphoriquement, bien sûr, car ce n'est la mémoire de personne, mais chacun peut y accéder et y puiser ce qu'il cherche. C'est un très grand progrès.

Jean-Christophe Yoccoz : Il faut préciser que même si le nombre d'acteurs a augmenté dans notre discipline, il reste très faible par rapport à d'autres domaines comme la biologie. Qui plus est, dans le même temps, le champ disciplinaire mathématique a connu une grande expansion. De ce fait, les mathématiciens sont peu nombreux à travailler sur le même problème dans le monde. La situation est très différente de celle qui prévaut lorsqu'il s'agit par exemple de trouver un vaccin contre le Sida : étant donné l'urgence de l'enjeu, on comprend qu'il y ait un grand nombre d'équipes mobilisées pour essayer de résoudre un tel problème. En mathématiques, sauf sur quelques problèmes particulièrement palpitants, la règle est plutôt l'absence de concurrence. C'est donc un domaine particulier notamment du fait de sa démographie et d'une quasi-absence de pression économique.

Le travail en commun correspond à une évolution assez générale des sciences. La production de connaissances est devenue collective dans beaucoup de domaines. En médecine, en physique, les grandes expérimentations, comme celles du LHC

Entretien mené par Marc Kirsch, © La lettre du Collège de France, n°33, mai 2012.

au CERN, requièrent la collaboration de plusieurs centaines, voire de milliers de chercheurs, ingénieurs, techniciens, etc. de différentes disciplines. Elles ne peuvent plus être maîtrisées en totalité par un individu.

Jean-Christophe Yoccoz : En mathématiques, les collaborations sont d'ampleur plus modeste. Mais la classification des groupes simples, par exemple, a mobilisé environ 200 auteurs et représente environ 10 000 pages, répartis en un grand nombre d'articles de 50 à 100 pages. À l'échelle de notre discipline, c'est un travail aux dimensions énormes, où en effet personne ne contrôle totalement l'ensemble de la preuve, parce qu'elle est simplement trop longue. Reste qu'en mathématiques, les signataires d'un article savent et comprennent tout ce qu'il contient, ce qui n'est pas le cas dans des articles présentant des recherches interdisciplinaires de grande envergure. Un mathématicien n'utilise jamais un théorème dont il n'a pas compris la démonstration.

La question de la preuve mathématique a souvent intéressé les philosophes. Wittgenstein, par exemple, dit qu'on doit avoir de la preuve une perception unifiée. Est-ce possible pour des preuves aussi longues ?

Alain Connes : Il peut y avoir des preuves en apparence très longues qui restent maîtrisables. Un mathématicien, s'il connaît bien le sujet, va y repérer des points stratégiques. En effet, une démonstration n'est pas homogène, il y a des articulations essentielles, c'est là que les choses se passent. Le mathématicien doit avoir la capacité de repérer ces points cruciaux et ensuite de hiérarchiser la démonstration en quelque sorte, de manière à en extraire l'essentiel, de telle sorte qu'elle se mette à exister en tant qu'entité propre. L'un des aspects essentiels du travail mathématique est un travail de hiérarchisation. En outre, certaines complications se dissipent au cours de l'histoire. Quand on examine par exemple les écrits de Descartes et la manière dont il utilisait en son temps les coordonnées dites "cartésiennes", on a l'impression d'une grande complication, notamment parce que les nombres négatifs n'étaient pas d'utilisation courante. Une fois qu'on a su manipuler les nombres réels, puis les nombres complexes, une fois qu'on a compris la hiérarchie des structures, que l'on a adopté les bonnes notations, toute cette complication, qui était pour ainsi dire sans contenu, a disparu pour laisser place à une grande simplicité. Il y a donc un énorme travail de simplification qui est l'objet d'un effort constant et qui sera sûrement réalisé pour la classification des groupes simples. Tant que ce processus est en cours, on n'a pas encore vraiment fini de comprendre, on n'a pas vraiment hiérarchisé les concepts importants, et les choses paraissent compliquées.

Il y a donc d'une part un travail historique collectif de hiérarchisation et de simplification, et d'autre part le travail propre du mathématicien qui a la connaissance d'un domaine et une sorte de virtuosité de la preuve et de la compréhension.

Jean-Christophe Yoccoz : Ou une technique, qui demande une pratique constante pour conserver sa fluidité. Ce volet technique de l'activité est nécessaire, mais pas suffisant.

Alain Connes : L'activité mathématique exige une pratique quotidienne. Si l'on s'interrompt trop longtemps, le savoir-faire s'érode. Les automatismes se perdent. C'est heureusement transitoire. On peut comparer cela à l'expérience des musiciens : Arthur Rubinstein disait "quand j'arrête de jouer une journée, je l'entends, quand j'arrête deux jours, le public l'entend." Par ailleurs, il y a une part tout aussi importante de l'activité mathématique qui, elle, est stable : celle qui consiste à manipuler des images mentales. Qu'un profane essaie de lire un article, il ne verra qu'une collection de formules sans signification. Mais un mathématicien qui a travaillé suffisamment dans un certain domaine - forcément limité - a construit des images mentales qui sont mobilisées dès qu'il aborde des questions relatives à ce champ d'activité : le sens apparaît immédiatement, il saute aux yeux.

Jean-Christophe Yoccoz : Même dans un domaine familier, pour certains articles difficiles du fait de leur longueur ou de leur technicité, il arrive qu'on ait du mal à comprendre jusqu'au moment où une image mentale se forme brusquement et permet de dépasser le mot à mot abstrait du déchiffrage des formules.

À quoi correspond cette image mentale ? Est-elle la représentation de quelque chose ou au contraire une pure construction ? Pour beaucoup de gens, les mathématiques sont comme une langue étrangère, mais tout le monde partage un savoir de base fait de nombres et d'objets géométriques élémentaires, qui semble être une sorte de production de l'évolution, un bagage mathématique inné de notre espèce. Vos images mentales renvoient-elles à des objets de même nature, mais plus complexes ?

Jean-Christophe Yoccoz : Les nombres entiers sont des images concrètes de ce genre, que tout le monde partage. Je ferais une analogie avec la physique. Certains postulats de physique classique permettent d'associer des images à la théorie, comme en balistique, où l'on peut voir les trajectoires des objets. On conserve là un rapport assez simple à l'observation, et on appréhende des propriétés élémentaires, comme le sont les propriétés des nombres entiers ou de la géométrie. Mais il y a des domaines de la physique où l'observation est beaucoup moins immédiate, comme l'électromagnétisme ou la mécanique quantique.

Quant à la nature des objets mathématiques, la position platonicienne est dominante parmi les mathématiciens. Même ceux qui la contestent se comportent en pratique comme s'ils étaient platoniciens : ils découvrent et manipulent des objets mathématiques comme s'ils étaient réels.

Alain Connes : Au départ, et jusqu'au XIX^{e} siècle, une grande partie des mathématiques était très proche de la physique. Mais il s'est produit une évolution à l'intérieur même des mathématiques. Sans chercher à garder une relation directe à la physique et au monde extérieur, les mathématiciens ont découvert un univers extraordinaire. Prenons l'exemple ce qu'on appelle le monde p-adique, dans la théorie des nombres : c'est un monde qui existe en autant de versions qu'il y a de nombres premiers. Le monde réel correspond à une seule de ces versions. Il y a donc autant de ces mondes que de nombres premiers, et ces mondes ont une cohérence aussi belle, aussi éclatante, que le monde "réel" de la physique. Les mathématiques ne sont absolument pas limitées à la géométrie ou au nombre, elles sont une source extraordinaire de création de concepts. En réalité, elles englobent tout, c'est-à-dire que la plupart des qualités que l'on rencontre dans le monde réel, si on les comprend vraiment, ont, je le pense, une formulation mathématique.

On aurait pu penser que les mathématiques sont créées par l'homme en un processus adaptatif, comme une adaptation de l'homme à la réalité, ce qui expliquerait ce fait stupéfiant que des relations intrinsèquement mathématiques et produites à partir d'objets purement mathématiques puissent rendre compte de phénomènes physiques comme si elles étaient les lois qui les régissent. Or, les mathématiciens ont en fait ouvert des portes, découvert des horizons qui n'ouvrent pas simplement vers le monde réel, mais vers bien d'autres mondes, incroyablement cohérents, mais qui n'ont aucune relation au monde "réel", au sens de la physique classique. Il faudrait dire plutôt aucune réalisation dans le monde réel...

Jean-Christophe Yoccoz : Oui, parce que l'informatique, par exemple, leur donne des applications nouvelles, et je ne pense pas seulement à des applications comme la cryptographie. L'informatique repose sur les mêmes principes de validation et de contrôle que les mathématiques. Je comparerais volontiers leurs relations à celles qui existent entre la chimie et la physique : la chimie est tournée davantage vers l'industrie et les applications ; de même, l'informatique est gouvernée par les applications. Mais elles ont le même principe de fonctionnement, respectivement, que la physique et les mathématiques. Et de même que les chimistes créent des produits qui n'existent pas forcément dans la nature, les informaticiens créent des choses qui ont une structure mathématique et qui n'existent pas dans le monde.

Alain Connes : J'avoue avoir une confiance démesurée dans le pouvoir explicatif des mathématiques pour notre compréhension du monde et une profonde aversion pour la tendance trop répandue à vouloir construire notre compréhension de la réalité sur le modèle classique qui est valide jusqu'à une certaine échelle, mais n'a plus de validité pour les objets microscopiques, sur lesquels règne le quantique. Le quantique a un pouvoir explicatif qui est bien loin d'être passé dans la culture de la société dans laquelle nous vivons. Pensez à l'électron ou aux équations de la physique quantique concernant l'électron : il y a là une merveille. À partir d'un point de départ extrêmement simple - le principe d'exclusion de Pauli, qui stipule que les électrons ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique - on reconstitue le tableau périodique des éléments. C'est vertigineux ! Une telle explication ne rentre pas dans le schéma évolutionniste. Sans être aucunement mystique, je crois que la nature est beaucoup plus subtile et complexe qu'on ne le pense, mais qu'elle a des ingrédients extrêmement simples et que ces ingrédients sont de nature mathématique. Notre perception par les sens ne nous donne qu'une image très partielle de la réalité, la couleur par exemple ne capture que trois paramètres dans l'infinité de ceux qui régissent la distribution d'intensité des fréquences de la lumière. Les mathématiques ont permis de simplifier, de modéliser des parties de la réalité extérieure, au point que l'on peut finir par douter de l'idée que les mathématiques seraient créées pour expliquer le monde extérieur, à partir du monde matériel qui nous entoure. J'en suis arrivé à imaginer un point de vue radicalement inverse, selon lequel c'est en fait le monde mathématique qui préexiste et c'est de ce monde que surgit une certaine image, celle que nous percevons dans le monde physique. Mais nous sommes bien loin de comprendre l'explication fondamentale, qui est, je pense, beaucoup plus simple et plus mathématique qu'on ne le croit.

Ces aspects de la culture scientifique, pourtant cruciaux, sont très peu diffusés et compris. Le premier pas, c'est la physique quantique : notre monde est envahi d'objets quantiques - laser, puces électroniques, etc. - mais nous n'avons pas intégré la dimension quantique dans notre culture. Nous vivons dans un monde quantique et nous continuons à penser comme si nous vivions dans un monde classique.

Jean-Christophe Yoccoz : Sur la question de la construction, j'ajouterais une autre analogie avec la physique : de la même façon que les physiciens créent des instruments, comme le télescope, pour explorer l'univers physique, les mathématiciens créent des instruments pour analyser des réalités mathématiques. Il y a une part de découverte et il y a une part d'invention. Les techniques mathématiques sont des créations humaines, au même titre que les instruments physiques.

Les mathématiques ont d'ailleurs permis de donner une réalité physique à des opérations logiques et mathématiques sous la forme de l'ordinateur. Quelle place occupe cet instrument dans les mathématiques d'aujourd'hui ? L'ordinateur est-il capable de démonstrations au même sens que le mathématicien ?

Jean-Christophe Yoccoz : Non. Tout d'abord, il faut indiquer que la question ne se réduit pas au seul problème des preuves. L'ordinateur est un outil d'exploration incomparable. Si l'on veut démontrer quelque chose, il faut avoir une certitude raisonnable que c'est vrai. L'ordinateur permet par exemple de découvrir des contre-exemples, de tester des propositions, etc. Il permet d'observer des phénomènes intéressants, ne serait-ce que par la réitération massive, impossible sans lui, de calculs complexes.

Alain Connes : L'ordinateur démultiplie la puissance de calcul. Dans les travaux sur les anneaux de Witt, par exemple, on rencontre des polynômes très compliqués : il serait extrêmement long de les calculer et les manipuler à la main mais on obtient le résultat très facilement à l'aide d'un petit programme informatique, ce qui permet d'acquérir très vite une familiarité avec ces objets qui ont l'air exotiques au premier abord. Pourtant, cet usage de l'informatique pour l'exploration ne doit pas faire oublier un autre aspect très important, qui concerne les preuves formelles. L'ordinateur peut faire bien plus que traiter des cas particuliers : il est capable de faire des démonstrations générales. Il le fait de manière très efficace, non pas en tant que démonstrations, au sens de déductions logiques, mais en faisant fonctionner le calcul formel.

En pratique je l'utilise très souvent de la manière suivante. Dans un contexte donné, je veux savoir si une formule est vraie : tout seul, je ne peux la vérifier que sur un très petit nombre de cas et je suis encore à la merci d'une erreur de calcul. La machine est capable, elle, de la démontrer (par le calcul formel) pour des valeurs telles que toute erreur puisse être écartée tant la vérification est convaincante. Donc, après avoir expérimenté de la sorte, je suis sûr que c'est vrai. Bien sûr, il reste ensuite à trouver la démonstration directe, mais ce n'est pas le plus difficile. Il ne s'agit pas d'un test de cas particuliers : c'est un calcul formel qui m'indique que ma formule est vraie. Cette puissance de calcul formel offre des ressources exceptionnelles.

Au cours de l'histoire des sciences s'est posée la question de la fiabilité des instruments. Peut-on se fier à ce qu'on voit des corps célestes avec la lunette astronomique ? Ce qu'on voit au microscope est-il une image fiable de la réalité ou un artéfact ? Peut-on transposer cette question à l'ordinateur ? Sait-on ce que fait l'ordinateur ? Quelles sont ses limites ?

Jean-Christophe Yoccoz : Il y a une différence entre la simulation numérique, où les marges d'erreur ne sont pas totalement contrôlées, et la démonstration assistée par ordinateur, où en principe on contrôle les erreurs. Dans le premier cas, le rôle de l'ordinateur est de suggérer des réponses et des pistes de recherche, la validation de celles-ci restant à la charge du mathématicien. Dans le deuxième cas, le mathématicien confie à l'ordinateur ce processus de validation. Mais les erreurs peuvent se trouver dans l'écriture du programme...

Souvent, les preuves par ordinateur sont fondées sur l'exploration d'un nombre gigantesque de cas, comme dans le cas du théorème des quatre couleurs (qui stipule qu'on peut colorier n'importe quelle carte découpée en régions connexes de sorte que deux régions limitrophes reçoivent toujours deux couleurs distinctes). De ce fait, même si on peut être sûr que c'est vrai, ce ne sont pas des preuves satisfaisantes pour un mathématicien.

Alain Connes : Il y a des limites à l'utilisation de l'ordinateur pour produire des énoncés - y compris des preuves - de manière formelle. On ne peut pas omettre la question du sens, qui à mes yeux est largement aussi importante que celle de la nature des objets mathématiques. La question cruciale est de comprendre pourquoi certains énoncés ont un sens, tandis que d'autres, fussent-ils vrais et prouvés presque mécaniquement par l'ordinateur, sont totalement inintéressants et dépourvus de sens.

Il y a deux activités humaines qui pour le moment échappent totalement à l'ordinateur et qui sont une part intégrante et vraiment fondamentale des mathématiques : premièrement, l'esprit humain est capable, souvent dans des situations très complexes, après avoir fait beaucoup d'expérimentations, de calculs, etc., de dégager un concept. C'est un point essentiel.

La seconde activité inaccessible à l'ordinateur, c'est le raisonnement par analogie. Le mathématicien est capable, lorsqu'il est confronté à une difficulté donnée, de reconnaître que la situation n'est pas très différente d'une autre qu'il a rencontrée dans un autre contexte, parfois très éloigné, et de se servir de cette analogie pour résoudre le nouveau problème. Cela concerne également le sens. C'est difficilement objectivable : on sait qu'il y a quelque chose d'analogue, mais cela relève d'une intuition et non d'une perception explicite et bien formulée. Il faudrait beaucoup de temps pour la cristalliser, de même qu'il est difficile, dans la phase de création de concept, de donner une définition fixée. Il y a là tout un système de maturation et de distillation réalisée par l'esprit humain. C'est un pouvoir extraordinaire, dont l'ordinateur me semble très éloigné.

L'ordinateur introduit donc une nouvelle manière de travailler, mais pas une rupture qualitative. De fait, l'histoire des mathématiques a un aspect cumulatif et construit un ensemble cohérent, tandis que d'autres sciences sont sujettes à des bouleversements, à des renversements de paradigme qui peuvent conduire à laisser à l'abandon toute une partie de l'édifice, devenu pratiquement inutilisable.

Jean-Christophe Yoccoz : L'histoire des mathématiques présente une singularité. En physique ou en biologie, avant d'arriver à des concepts fondamentaux comme l'électron ou l'ADN, il a fallu des siècles. Les objets qui sont maintenant considérés comme fondamentaux n'ont émergé que tardivement. En mathématiques, c'est l'inverse. Au commencement, il y a les nombres entiers ou les formes géométriques élémentaires. Ce sont les concepts mathématiques essentiels à partir desquels on bâtit des concepts de plus en plus sophistiqués, comme une pyramide de connaissances posée sur la pointe. Les concepts qui sont à la base de l'édifice sont aussi les premiers du point de vue historique. C'est pourquoi il est si crucial qu'il n'y ait pas d'erreur : la démonstration fixe les choses, elle constitue une validation et permet de bâtir sur un fonds solide. C'est différent en physique par exemple, où la théorie a toujours ses limites - on le voit dans le cas de la mécanique classique, par exemple - et où l'on peut revenir sur ces théories.

Alain Connes : De fait, en physique théorique, les règles "culturelles" ne sont pas du tout les mêmes. Dans un article de physique théorique, la justification rigoureuse n'a pas un poids aussi important qu'en mathématiques. Dans les deux cas, il faut convaincre, mais les modalités sont différentes. Contrairement au physicien, le mathématicien ne peut pas se passer d'une démonstration rigoureuse. C'est une caractéristique générale des mathématiques.

Parcours d'un mathématicien
Alain Connes

Voilà, donc je m'excuse par avance pour le côté narcissique de mon exposé. Mais je veux dire, ça fait partie du jeu et bon, on m'a demandé de parler de mon parcours. Et donc, je vais vous expliquer un certain nombre de choses que vous ne trouverez pas dans d'autres conférences et que vous ne trouverez nulle part. La première scène, si vous voulez, elle se produit au lycée Thiers, donc à Marseille en l'année 1966, et c'est au mois de mai et je suis en train de passer le concours de l'École Normale Supérieure. Et c'est la première épreuve. Une épreuve qui dure six heures. Je suis assis sur un banc et j'ai un voisin immédiat. On nous donne le problème de math et mon voisin. Il commence à écrire, à gratter. Moi, je lis l'énoncé du problème. Et puis une heure passe et mon voisin, il continue à écrire. Moi, je ne comprend pas l'énoncé du problème. J'arrive pas, ça ne va pas quoi... Je veux dire. Au bout de deux heures, je regarde tout seul et je réfléchis à rien. Mon voisin écrit. Trois heures, Ça dure six heures, trois heures, rien. Quatre heures. 5. Rien. 6 heures. Je sors de la salle en rendant pratiquement copie blanche et en sortant de la salle, je trouve la solution du problème. Bon, alors là, normalement, la conclusion s'impose. Mais j'avais une bande de copains formidables. J'avais une bande de copains extraordinaires. Ils m'ont dit "Tu ne peux pas faire ça, tu ne peux pas t'arrêter, on va aller se baigner à Cassis !", donc ils m'emmènent me baigner au lieu de rentrer chez moi et de broyer du noir. Ils m'emmènent me baigner à Cassis. On se baigne et tout ça, je commence à me détendre, tout ça. Puis, le lendemain, je dis "j'y retourne". Allez hop ! Puis j'ai été reçu à l'École Normale. Donc, si vous voulez, ce à quoi j'ai réfléchi avant de faire cette conférence, c'est à essayer de vous donner des trucs qui pourront vous servir vraiment. Donc, quand on parle de ténacité, qu'est-ce que cela veut dire ? La ténacité, ça ne veut pas dire qu'on est têtu, etc. Non, ça veut dire que quand les circonstances sont les pires qu'elles puissent être (et là, c'était le cas, je veux dire l'épreuve principale, 6 heures, rien) donc, quand les circonstances sont les pires qu'elles puissent être, eh bien, il ne faut pas renoncer. Quand on peut continuer, il le faut. Il faut continuer. Voilà. C'est ça qui s'est produit au début, au tout début.

Et donc, je suis rentré à l'École Normale et à l'École Normale, j'ai trouvé une ambiance absolument extraordinaire, c'est-à-dire qu'à l'époque, on ne nous obligeait à rien, on ne nous obligeait à rien et en particulier, on ne nous obligeait pas à passer l'agreg. Et ce qui comptait simplement, c'était de se poser des problèmes les uns aux autres et d'essayer de les résoudre, etc. C'était ça l'ambiance de l'École et au bout de trois ou quatre ans, j'avais un prof qui était Gustave Choquet et j'avais été séduit par une théorie qui s'appelle l'analyse standard, qui existe toujours. Mais je ne m'étais pas aperçu au moment où j'avais été séduit par cette théorie qu'en fait, c'était quelque chose qui était un peu chimérique. Et mon prof Gustave Choquet m'avait envoyé à une école d'été de physique qui existe toujours, l'école d'été des Houches,

Conférence donnée dans le cadre du cycle Maths pour tous le 18.12.2017 à l'École Normale Supérieure, à Paris, visionnable ici https://www.youtube.com/watch?v=QfZLKxKTS2c qui a été créée par Cécile de Witt et qui est un endroit extrêmement intéressant pour la communication, justement, de gens plus chevronnés avec des étudiants. Et donc bon, je vais écouter des cours à l'École d'été des Houches et j'avais été repéré à ce moment-là et on m'avait envoyé l'année d'après... on m'avait invité à Seattle, aux Etats-Unis, au Battelle Institute, et on m'avait invité là. J'étais jeune marié et j'avais décidé d'accepter l'invitation. C'était surtout pour visiter les Etats-Unis. Et puis, avec ma femme, on était passés voir mon frère Bernard, qui était à ce moment-là à Princeton. C'était le mois de juillet et à Princeton, il faisait une température terrible. Mais vous savez, la chaleur humide, et il y avait un seul endroit dans le campus qui était agréable. C'était le Book Store. Donc, avec Danye, ma femme, on avait passé l'après-midi au Book Store. Et bon, à l'époque, je n'avais pas trop internet. Il y avait vraiment des livres très intéressants et j'avais cherché un livre parce que je savais qu'on avait décidé de traverser le Canada en train. Au lieu de prendre l'avion pour aller de Princeton, de New York à Seattle, on avait décidé d'aller au Canada, et ensuite, de traverser tout le Canada en train. Mais ça prenait cinq jours. Je m'étais dit cinq jours sans rien. Ça va faire beaucoup. Je vais essayer de trouver un bouquin de math et puis de le lire pendant le trajet, j'avais beaucoup hésité. J'avais regardé pas mal de bouquins, j'avais hésité entre pas mal de bouquins. J'avais fini par en prendre un, et je l'avais regardé, j'avais essayé de le comprendre, je ne comprenais pas tout. J'avais essayé de le comprendre pendant le trajet en train canadien. Il y avait des grandes plaines qu'on traversait pendant des jours et des jours et des jours. Et puis, on était arrivé à Vancouver et à Victoria, l'île de Victoria et enfin on était arrivé à Seattle au bout d'une semaine.

Et à Seattle, quand on arrive, j'étais allé au Battelle Institute pour regarder le programme des conférences. Et à ma grande stupéfaction, j'avais trouvé que l'auteur du livre, que j'avais acheté complètement par hasard quand j'étais passé à Princeton, faisait des conférences là. À ce moment-là, je me suis dit... Ah vraiment, si vous voulez, c'est quelque chose de tout à fait extraordinaire qui arrive, donc en fait, je n'écouterai aucune autre conférence. Je n'irai qu'à celle-là. C'étaient des conférences sur les algèbres de von Neumann, mon premier sujet et donc voilà, von Neumann, il est connu surtout pour autre chose, que les algèbres de von Neumann. Mais c'est lui, si vous voulez, qui a développé ce qu'on appelle les algèbres d'opérateurs. Et le personnage central qui était derrière le livre que j'avais acheté, c'est un mathématicien japonais qui s'appelle Tomita. Et dans l'histoire, c'est aussi une histoire tout à fait extraordinaire, donc je continue en vous racontant des histoires. J'espère que c'est OK. Tomita, si vous voulez, c'est un mathématicien japonais qui a échappé par miracle à la guerre entre le Japon et les Etats-Unis. Il était sourd depuis l'âge de deux ans et comme il était sourd, dans le régiment dans lequel il était, on l'a exempté d'aller dans l'expédition qui devait être faite, parce que comme il était sourd, il n'entendait pas bien les ordres. Ils l'ont laissé tranquille. Or, tout le régiment a été anéanti dans l'expédition qu'ils ont faite. Lui, il a trouvé une théorie absolument géniale, mais il avait un mal fou à communiquer et c'est un autre mathématicien japonais qui s'appelle

Takesaki, qui a écrit un livre dans ces années-là sur la théorie de Tomita, la théorie que Tomita avait inventée. Et donc, si vous voulez, ce qui s'est produit, c'est que j'ai écouté les conférences de Takesaki sur la théorie de Tomita et donc c'était toute une théorie assez nouvelle, etc. Et quand je suis rentré en France. Je me suis décidé à aller au séminaire de Jacques Dixmier. Donc, si vous voulez, Jacques Dixmier faisait un séminaire sur les algèbres d'opérateurs, algèbres d'opérateurs qui avaient été inventées par von Neumann. Elles ont été inventées pour comprendre la mécanique quantique. Pour comprendre ce qu'on appelle les sous-systèmes.

En mécanique quantique, donc, il y avait un formalisme de la mécanique quantique qui avait été bien développé et von Neumann voulait comprendre les sous-systèmes et il y a des sous-systèmes qui correspondent à des factorisations de l'espace de Hilbert. Mais en fait, von Neumann, avec Murray, avait découvert d'autres factorisations et il avait découvert trois types d'algèbres qu'on appelle les algèbres de von Neumann. Il y a ce qu'on appelle les algèbres de type I qui sont très simples. Il y a le type II, qui est beaucoup plus incompréhensible, et le type III, c'est ce qui reste, c'étaient les autres.

Alors quand je suis rentré, il y avait le séminaire Dixmier. Donc je suis allé pour la première fois au séminaire Dixmier et dans le séminaire Dixmier, Dixmier a proposé un sujet qui était la classification des algèbres et il a distribué des articles qu'ensuite on devait exposer dans son séminaire pour expliquer aux autres. Alors là aussi, j'ai levé la main pour avoir un article, je suis allé chercher l'article et quand je suis rentré en train en banlieue, il m'est apparu quelque chose de complètement évident qui était que l'article qu'il m'avait donné pour l'exposer dans le séminaire Dixmier, qui était a priori sur un sujet totalement différent, était en fait parfaitement relié à la théorie de Tomita. Et ça a été ça le début de ma thèse. Donc, en fait, ce que j'ai fait, j'ai écrit une petite lettre à Jacques Dixmier. Il m'a dit "Bon, votre lettre n'a qu'une demi page, ce n'est pas assez détaillé, etc. Renvoyez-moi une lettre plus détaillée.". Je lui ai envoyé une lettre plus détaillée. Je suis allé le voir dans son bureau et la seule chose qu'il m'ait dite lorsque je suis allé le voir, il m'a dit "Foncez !". Et à partir de là, les choses se sont déroulées de manière naturelle mais il y a eu une espèce de concours de circonstances qui a fait qu'au début au moins, les choses se sont passées de manière absolument merveilleuse. Alors, après, il y a eu une période, bien sûr, où il fallait faire des calculs extrêmement compliqués, etc. Et il y a eu un moment effectivement où il y a eu, si vous voulez, dans une vie entière, il y a très peu de moments comme ça. Il y en a peut être deux ou trois au grand maximum. Il y a eu un jour ou j'amenais Danye à son lycée et je rentrais en voiture et à un moment donné, il y avait un feu rouge. Alors là, je me suis rendu compte. Mon cerveau s'est rendu compte qu'il y avait une chose qui était complètement évidente, qui était devant moi, que je n'avais pas vue avant, et qui permettait de complètement débloquer la situation. Qu'est-ce que c'était ? C'était la chose suivante. C'était que Tomita et Takesaki, donc, avaient démontré, si vous voulez, que si on a une algèbre comme ça, qu'on appelle algèbre de

von Neumann. Si on donne un état de l'algèbre, c'est une chose assez compliquée, on a automatiquement un groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre. Mais ce qui n'était absolument pas clair, c'était que ça, ça dépendait d'un état de l'algèbre. Qu'est-ce qui se passe lorsqu'on change l'état de l'algèbre ? Ce que j'ai compris lorsque j'étais au feu rouge, c'est qu'en fait, lorsqu'on change l'état, le groupe à un paramètre ne change pratiquement pas.
Il ne change pas. Si vous voulez. Si on néglige ce qu'on appelle les automorphismes intérieurs, qui sont les automorphismes qui apparaissent naturellement lorsqu'on prend un espace non-commutatif, lorsqu'on prend une algèbre non-commutative, automatiquement, les automorphismes qui viennent de la non-commutativité, lorsqu'on les efface, l'ambiguïté disparaît. Alors quel a été, si vous voulez, le message, quelle a été la conséquence philosophique de ce truc-là. C'est un truc qui m'a suivi toute mon existence mathématique. C'est le fait que la non-commutativité implique, engendre le temps, implique une évolution temporelle. Alors, je n'ai pas fait de transparent là-dessus, mais pour vous expliquer ce que c'est que la non-commutativité, il faut que je vous raconte à nouveau une histoire qui explique comment elle a été découverte en physique. Elle a été découverte en physique par Heisenberg. Donc Heisenberg était un physicien et à un moment donné, il était, je crois, à Göttingen et il a été victime d'un rhume des foins qui était terrible et qui faisait qu'à l'époque, on ne pouvait pas le soigner de manière efficace. La seule manière de soigner le rhume des foins, c'était d'envoyer les gens sur une île où il n'y avait pas de pollen. On l'a envoyé sur une île qui s'appelle Heligoland et bon, alors il était dans cette île, il était logé par une vieille dame et là, il s'est attelé à faire des calculs. Il était en train de faire des calculs et vers les 4 heures du matin, il a eu une illumination. Il a compris. En fait, il a vu un espèce de paysage qui s'est dévoilé sous ses yeux. Il a compris que les quantités physiques, par exemple, si vous écrivez $e = mc^2$ ou que vous mettiez c^2 fois m, ça fait pareil.

Heisenberg a compris que lorsqu'on regarde un système microscopique, ce n'est pas pareil. C'est-à-dire que si vous multipliez la position d'une particule par le moment ou le moment par la position, vous n'obtenez pas le même résultat. Et ça, c'était quelque chose de faramineux qu'il a trouvé. Et ce qu'il raconte dans ses mémoires, il raconte qu'au lieu d'aller se coucher lorsqu'il a fait cette découverte, il ne pouvait pas. Il est allé gravir un piton rocheux qui était au bord de l'île et il a attendu le lever du soleil en haut d'un piton rocheux. Donc, si vous voulez, la chose extraordinaire, c'est que les quantités physiques au niveau microscopique ne commutent pas. C'est ça qui a complètement débloqué la mécanique quantique et c'est ça qui a entraîné von Neumann à développer les algèbres de von Neumann parce que les algèbres de von Neumann sont précisément, si vous voulez, les algèbres qui vont rentrer dans la physique de la mécanique quantique. Et alors ? Donc, l'apport que j'ai fait dans ma thèse, si vous voulez, c'était de comprendre, justement, qu'en fait cette non-commutativité, elle va engendrer le temps de manière complètement canonique, complètement naturelle. Alors ça, bien sûr, ça a donné un tas d'invariants de ces algèbres. Ça a permis de les classifier, mais bien sûr, ça a pris beaucoup de temps de les classifier, c'est-à-dire que ça a aussi permis de résoudre le type III. Ça a permis de le réduire. C'est ce que j'ai fait dans la deuxième partie de ma thèse, c'est de réduire le type III au type II avec des automorphismes. Mais bien sûr, après, il fallait classifier les types II au moins dans le cas hyperfini et classifier les automorphismes, ça a pris, ça m'a pris un temps absolument considérable et il y a eu une période de mon existence mathématique qui a été très, très propice pour ça. Ça a été la période de mon service militaire. Alors bien sûr, vous allez rigoler parce que si j'avais fait vraiment mon service militaire, ça aurait été très difficile de faire des maths. Mais bon, j'ai eu de la chance. J'ai fait mon service militaire en coopération avec les pays sous développés, avec le Canada anglais.

Donc, c'était quand même drôlement sympa. Alors, j'étais dans une petite université qui est l'université de Kingston, dans l'Ontario. Et là, à nouveau, je veux dire, on a rencontré des gens extrêmement extraordinaires, humainement, autour de nous, dans un petit groupe. Et le fait que cette université n'était pas une université centrale, ce n'était pas Princeton, etc. Ça donnait une liberté de pensée qui est incroyable, c'est-à-dire si vous voulez, ça permet dans une petite université, ou bien si vous êtes dans un endroit comme ça, d'être un peu décalé. Ça permet de ne pas avoir le poids de la science, de toutes les connaissances, etc., sur les épaules, et ça permet d'avoir une certaine liberté. Donc, j'ai ressenti cette liberté peut-être plus que jamais dans cet endroit-là. Donc moi, j'étais très content à ce moment-là puisque j'avais pratiquement terminé ce que je voulais faire qui était de comprendre les facteurs, de comprendre le type III, etc.

Et puis, je suis rentré en France et quand je suis rentré en France, j'ai été invité à l'IHES à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Et là, quand je suis arrivé, j'ai eu un sacré choc, c'est-à-dire que je suis allé au déjeuner là où les gens vont déjeuner d'habitude, il y a une petite cafétéria et il y avait des gens qui parlaient de math. Je ne comprenais absolument pas ce qu'ils racontaient. C'est-à-dire que si vous voulez, j'étais un spécialiste d'un sujet pointu, bien sûr très difficile, mais je n'étais pas... je ne connaissais pas, par exemple, ce que c'est que le complexe de De Rham, etc. Il y avait tous ces trucs-là qui me passaient largement au-dessus de la tête et j'ai eu de la chance à nouveau. J'ai eu vraiment beaucoup de chance. J'ai rencontré un mathématicien qui s'appelle Dennis Sullivan qui, à l'époque, était l'un des piliers de l'IHES. Ça, c'était en 1976. Et ce mathématicien, il avait la propriété suivante, très, très unique. Il avait la propriété suivante, qui était que quand il voyait quelqu'un de nouveau, il venait s'asseoir à côté de lui, et il lui posait des questions en commençant par "Sur quoi vous travaillez ?". Bon, alors, on discutait avec lui et au début, on pensait qu'il était complètement idiot, parce qu'il posait des questions naïves, si vous voulez. Puis ça continuait comme ça et il continuait à poser des questions de nature naïve. Et puis, au bout d'une dizaine de questions, vous vous aperceviez que vous ne compreniez pas de quoi vous parliez.

Il avait un pouvoir socratique absolument extraordinaire. Donc, j'ai commencé à discuter, à discuter en détail avec lui, etc. Et en discutant avec lui, il m'a appris un tas de choses, m'a appris quantité de choses que je ne connaissais pas. Il m'a appris la géométrie et ce qui m'embêtait beaucoup, c'était que les travaux que j'avais faits sur les algèbres de von Neumann, si vous voulez, ça paraissait être dans un endroit assez excentré des mathématiques. Il y a une espèce de paysage des mathématiques et dans ce paysage, il y a des endroits qui sont vraiment tout à fait au centre. Et puis, il y a des endroits qui sont beaucoup plus périphériques et j'avais l'impression que c'était relié à la physique, bien sûr, mais j'avais l'impression que les algèbres de von Neumann, c'était quelque chose quand même qui restait assez périphérique. Et je me suis rendu compte, en discutant avec Dennis Sullivan, qu'en fait, on pouvait associer à une donnée géométrique qui est parfaitement connue, qui est ce qu'on appelle un feuilletage, on pouvait lui associer une algèbre de von Neumann. Et qu'est ce que ça permettait de faire ? Ça permettait d'illustrer la classification que j'avais faite à partir d'objets géométriques qui étaient des objets géométriques parfaitement compréhensible. Le plus simple des feuilletages, vous savez, le feuilletage, vous avez pensé à un feuilletage inversé. C'est en gros. C'est un espace comme ici, le tore. Mais le feuilletage, ce sont les lignes qui s'enroulent ici. Mais ce qui est frappant dans un feuilletage, c'est le fait qu'alors que l'espace total est compact et fini, si vous voulez, les feuilles là dans l'enroulement, sont infinies, c'est-à-dire que les feuilles, lorsqu'on regarde localement comme à droite, on voit quelque chose qui est très simple, c'est un produit. Mais lorsqu'on regarde globalement les feuilles, elles ne reviennent pas au même endroit. Elles s'enroulent indéfiniment, d'accord. Alors ça a été un point absolument crucial parce que les feuilletages, en géométrie, les gens savent très bien ce que c'est. Et ils en ont quantités d'exemples. Et il se fait que la classification que j'avais faite avec les facteurs de type III_λ, de type III, etc, qui paraissait quelque chose d'assez bizarre et d'assez reculée, d'assez excentrée dans le paysage mathématique, en fait, elle était parfaitement illustrée par les feuilletages les plus naturels, les plus géométriques qu'on puisse imaginer. Par exemple, ce feuilletage-là, c'est un feuilletage de type II_∞. Et si on prend par exemple un feuilletage géodésique et cyclique, c'est un feuilletage de type III, etc. Donc, si vous voulez, ça, ça, donnait un sens aux objets algébriques que j'avais trouvés, ça leur donnait un sens géométrique. Une autre rencontre qui a été absolument cruciale pour moi à ce moment-là, c'était en 78, j'étais invité à donner une conférence d'une heure au Congrès international des mathématiciens. J'ai été très frappé par la chose suivante, c'est que quand j'ai fait mon exposé, je l'avais préparé et préparé, préparé. Quand j'ai fait mon exposé, bien sûr, mon exposé était sur mes résultats, sur la classification des facteurs. Mais à la fin, j'avais rajouté des résultats sur les feuilletages, une annexe, et alors de manière très, très bizarre, pour moi, la partie sur les feuilletages, c'est une partie complètement triviale et par contre, la partie vraiment vraiment dure, très, très dure, c'était la partie sur les algèbres d'opérateurs. Après mon exposé, Armand Borel est venu me voir et il était tout excité par la partie sur les feuilletages.

Et du coup, il m'a invité à Princeton et j'ai été invité à Princeton dans l'année

78-79 et là, à Princeton, j'ai fait une rencontre qui allait jouer un rôle essentiel dans ma vie mathématique. C'est la rencontre de mon collaborateur qui s'appelle Henri Moscovici, qui est professeur à Colombus, aux Etats-Unis, et avec lequel, si vous voulez, j'ai vraiment collaboré, la plupart de mes articles ont été écrits en collaboration avec lui. Il faut aussi que je vous raconte une autre histoire sur Princeton. J'avais un collègue à l'École Normale qui avait fait un séjour à Princeton avant, très longtemps avant. Je crois qu'il avait fait un séjour pendant qu'on était encore élèves à l'École. Et c'était quelqu'un d'assez gros. Et alors qu'il était un peu rond, il avait passé un an à Bristol et quand il était revenu, il était absolument filiforme. On lui avait demandé "Mais qu'est ce qui s'est passé ?". Il nous avait raconté qu'il avait passé un an à Princeton, qu'il n'avait parlé à personne, qu'il n'avait parlé à personne, c'est-à-dire que c'était un endroit qui était tellement, comment dire, hiérarchisé, etc., qu'en fait, il n'avait réussi à parler à personne. Donc, il y avait ce côté-là, il y avait ce côté-là, vraiment, à Princeton. Et moi, j'ai eu une chance inouïe qui a été de rencontrer Henri et avec Henri, bien sûr, on a tout de suite commencé à travailler et on a collaboré ensemble.

Donc, si vous voulez, quel point essentiel est apparu jusque-là ? Quel était le point essentiel ? En fait, j'ai compris à ce moment-là, à cause des feuilletages, j'ai compris la portée de ce qui se passait parce qu'en fait, ce qui se passe, si vous voulez, lorsque vous regardez ce type d'espace, ce qui se passe, c'est que l'on a en fait un espace qui, si on essaye de chercher sa cardinalité au niveau ensembliste du mot... Si on regarde l'espace des feuilles d'un feuilletage, d'accord, si on regarde l'espace des orbites ici, si on regarde l'espace des feuilles d'un feuilletage, on s'aperçoit que si on prend la théorie des ensembles ordinaires, cet ensemble a la cardinalité du continu. Mais qu'en fait, on ne peut pas le mettre en bijection avec le continu de manière constructive. En fait, on s'aperçoit qu'il est impossible, on peut le démontrer, il est impossible de construire une injection de cet ensemble dans les nombres réels. Donc, en fait, je me suis aperçu très, très progressivement que ces espaces en fait, si on cherchait à les comprendre de la manière usuelle avec la théorie des fonctions, etc., on n'y arriverait absolument pas et que la seule manière de les comprendre, c'était de leur associer une algèbre non-commutative. Et c'est là le début de la géométrie non-commutative. Pourquoi est ce que c'est le début ? Le tout début, parce que l'algèbre des fonctions associée à un tel espace ne voit cet espace qu'au niveau de la théorie de la mesure. Or, la théorie de la mesure, c'est une théorie extrêmement floue qui vous permet de déchirer l'espace en plusieurs parties, etc. Mais qui n'en donne pas la topologie, qui ne donne pas tout le reste. Et graduellement, la géométrie non-commutative, c'est une théorie qui a permis, si vous voulez, de redéfinir, de reconstruire toutes les notions habituelles qui vont de la théorie de la mesure, bien sûr, à la topologie, à la géométrie différentielle et même à la vraie géométrie, à la géométrie riemannienne. Si vous voulez, dans le cas commutatif, des espaces comme ça, en fait, ce qui s'est dévoilé à ce moment-là, c'est qu'il y avait tout un univers complètement nouveau, d'espaces complètement nouveaux qui ne demandaient qu'à être compris. Mais dans la compréhension, il était d'abord nécessaire de savoir que ce serait forcément intéressant. Pourquoi était-on sûr que ce serait intéressant ? On était sûr que ça serait intéressant parce qu'un tel espace était automatiquement un objet dynamique. C'est-à-dire qu'un tel espace a automatiquement son propre temps, il engendre son propre temps, alors qu'un espace ordinaire comme une variété, etc., c'est statique, ça ne bouge pas. Alors que ces espaces-là, ils tournent avec le temps. Donc c'est quelque chose d'absolument extraordinaire. Donc, on savait que ce serait tout à fait extraordinaire. Mais bon, bien sûr, après, il fallait développer la théorie et donc il fallait développer la géométrie. Si vous voulez, des espaces dans les corps, ils ne commutent pas. Le premier exemple, bien sûr, c'était l'exemple qu'avait trouvé Heisenberg, c'est-à-dire l'exemple de la mécanique quantique. Donc, il fallait complètement retrouver, redéfinir la géométrie pour ces espaces.

Alors, quand on parle de géométrie, bien sûr, bon, en mathématiques, il y a toutes sortes de géométries que les gens ont inventées et qui sont plus ou moins élaborées. Mais bon, la géométrie la plus, la plus pertinente, la plus importante, c'est la géométrie de l'espace dans lequel on vit. Donc, en fait, c'est ça qui va m'intéresser, c'est ça qui m'a intéressé pendant des années. C'est la géométrie de l'espace dans lequel on vit. Et ce qui est tout à fait étonnant, c'est qu'en fait, ce travail est basé sur la mécanique quantique, il est basé sur le formalisme quantique, etc. En fait, je réponds à une question qui était posée par Riemann dans sa leçon inaugurale. Dans sa leçon inaugurale, Riemann était parfaitement conscient du fait que la notion de géométrie qu'il avait formulée, lui, à partir de Gauss, etc., à partir de ce qu'on savait à l'époque, la notion que Riemann avait formulée n'était pas nécessairement une notion qui continuerait à avoir du sens dans l'infiniment petit. Qu'est-ce que ça veut dire ? Il était clair à son époque que ça couvrait les grandes distances, mais Riemann était extrêmement précautionneux. Et ce qu'il explique, c'est que les raisons pour lesquelles il ne croit pas que ça continue à avoir un sens dans l'infiniment petit, c'est que le concept de corps solide ou le concept de rayon lumineux n'a plus de sens dans l'infiniment petit. En fait, on est tout de suite dans le domaine quantique quand on regarde ça. Donc oui, il écrit explicitement dans ses écrits que dans l'infiniment petit, il est tout à fait probable que la notion de géométrie ne sera pas conforme à ce qu'elle est, à celle qu'il avait donnée dans sa leçon inaugurale. Alors, en fait, ce qui se produit, donc, il continue bien sûr et continue. Et il explique d'ailleurs qu'en fait, le fondement des rapports métriques doit être cherché dans les forces de liaison qui agissent dans l'espace. Je ne sais pas comment il a fait pour avoir cette intuition absolument extraordinaire. Donc, ce que dit Riemann, si vous voulez, c'est que pour comprendre vraiment la géométrie de l'espace dans lequel on vit, il faut en fait comprendre les forces qui tiennent les choses ensemble. Alors, bien sûr, depuis Riemann, il y a eu des progrès absolument extraordinaires par rapport à ce qu'a dit Riemann. C'est que, bien sûr, il faut la non-commutativité.

Cela conduit directement au domaine qui est la physique, qui ne fait pas partie des math. Mais bon, il explique en quel sens la réflexion mathématique est cruciale pour ça.

Et ce qui est très important, surtout, c'est que Riemann fait référence à Newton. Et Newton avait pressenti lui aussi que lorsqu'on va dans des distances beaucoup plus petites, celles qu'on ne peut pas observer avec l'œil, il y aura sûrement de nouvelles forces qui apparaîtront. Donc, ce que dit Newton, c'est que l'attraction de la gravité ou du magnétisme, et l'électricité sont visibles à grande distance. Donc, on peut les observer de manière usuelle. Mais bien sûr, on sait tout ce qui va se passer à distance.

Les distances eaucoup plus courtes échappent à l'observation. Et il y a un livre que je vous recommande sur l'histoire de la physique des particules dont l'auteur est Abraham Pais et dans lequel il explique justement comment, en 1895, c'était après Riemann, puisque Riemann s'était dans les années 1860, entre 1895 et maintenant, on a réussi au niveau vision dans l'infiniment petit, à augmenter la vision par un facteur 10. C'est quelque chose de colossal et en faisant cela, en fait, le vrai microscope, le vrai microscope qui a permis de voir dans cette toute petite distance, c'est le LHC.

D'accord ? C'est au LHC, en fait, qu'on a réussi à percer la structure à un niveau beaucoup plus, beaucoup plus petit. Mais lorsqu'on parle de distances beaucoup plus petites, ça revient à dire des énergies beaucoup plus grandes. Donc maintenant, effectivement, on arrive à 10 TeV, c'est-à-dire à 10 puissance 13 électronvolts.

Donc, ce qui s'est produit, c'est que le formalisme que j'avais dû mettre au point pour des raisons purement mathématiques, pour faire la géométrie des espaces non-commutatifs, s'est révélé, ce formalisme, dans les années 85, à partir du moment où je suis rentré au Collège de France, il s'est révélé incroyablement adapté pour comprendre la structure géométrique de l'espace dans lequel on vit. Mais à partir des résultats expérimentaux, c'est-à-dire pour arriver à comprendre que l'espace dans lequel on vit n'est pas simplement le continu à toutes les échelles, qu'il a une structure fine, mais que cette structure fine, en fait, elle est exactement, selon les mots de Riemann, dictée par les forces qui agissent dans l'infiniment petit.

Et alors, comment est-ce que le paradigme a changé ? Ça, je peux parfaitement l'expliquer. Le paradigme a changé de la manière suivante. Donc, le but du voyage ?

Si vous voulez, ce à quoi on est arrivé dans les années très récentes, c'est à comprendre cet espèce d'énorme mécanisme qu'on appelle le modèle standard couplé avec la gravitation. Mais le comprendre comme étant simplement la gravitation, simplement sur un espace qui est plus subtil, qui est plus compliqué et qui a une structure plus fine que celle de l'espace ordinaire. Mais alors, que se passe-t-il au niveau des concepts ? Au niveau des concepts, ce qui se passe, c'est quelque chose de très simple à comprendre. Au moment de Riemann, au moment où Gauss, etc., définissaient leur métrique, les mesures des distances étaient faites en essayant de prendre le chemin le plus court qui va du point A au point B.

C'est ce qui est montré ici sur cette image et en fait, il y a eu toute une expédition qui a été faite à la fin de la Révolution et puis jusqu'aux années 1799, par deux Français. Je ne sais pas si vous avez entendu parler de ça, mais c'est eux qui ont mesuré le méridien. C'est eux qui ont essayé de définir l'unité de longueur en mesurant la distance entre Dunkerque et Barcelone et à partir de leurs mesures. Bon, il y a eu toutes sortes d'épisodes, mais à partir de la mesure, on a défini une unité de longueur qu'on appelait le mètre.

Et quand j'allais à l'école, on apprenait que l'unité de longueur, c'était le mètre-étalon qui était déposé au Pavillon de Breteuil, près de Paris. C'était une barre de platine. Mais les choses ont évolué. C'est l'ancienne géométrie qui consiste à mesurer les longueurs comme ça.

Mais ce qui s'est produit, il s'est produit quelque chose d'extraordinaire qui est qu'un jour, il y avait une réunion de la conférence des poids et mesures. Et il y a quelqu'un dans la salle qui a dit “votre unité de longueur, eh bien, elle change de longueur.”. C'est embêtant quand même si l'unité de longueur change de longueur. Et qu'est ce qui s'était produit ? Ce qui s'était produit, c'est que l'homme en question avait mesuré le mètre étalon en le comparant à la longueur d'onde du krypton.

Et il s'était aperçu que la longueur changeait. De fil en aiguille, les physiciens ont beaucoup réfléchi et ils en sont arrivés à définir l'unité de longueur non plus comme étant le mètre-étalon qui est déposé quelque part au pavillon de Breteuil, etc. Il faut bien réfléchir que quand vous dites l'unité de longueur, c'est le mètre-étalon déposé au Pavillon de Breteuil, si vous voulez unifier le système métrique dans la galaxie, si vous expliquez aux gens d'une autre planète de notre système solaire que pour mesurer leur lit, il faut qu'ils viennent au Pavillon de Breteuil, ce sera un peu compliqué, donc il a trouvé une bien meilleure solution.

Ils ont trouvé une bien meilleure solution qui était de définir l'unité de longueur. D'abord, ils l'ont pris à partir de la longueur d'onde, du krypton, etc. Après, ils ont défini à partir de la longueur d'onde de ce qu'on appelle la transition hyperfine du césium. Le césium a une certaine transition hyperfine dans la longueur d'onde. C'est une longueur d'onde de type micro-ondes qui est de l'ordre de 3,5 cm et ça permet de mesurer de manière très, très efficace.

Et alors ? Évidemment, là, ça change tout. Parce que si, par exemple, on définissait l'unité de longueur à partir du spectre de l'hydrogène, par exemple, l'hydrogène est présent dans tout l'univers. Donc là, ce serait parfaitement valable. D'accord. Alors, il se fait que la transition entre l'ancienne définition du maître localisé à Breteuil et la définition à partir de la longueur d'onde du spectre du césium, c'est exactement la transition entre l'ancienne géométrie et la géométrie non-commutative.

C'est exactement ça.

C'est une géométrie de type spectral, de nature spectrale. Et donc, c'est ça, le changement, c'est le changement de l'unité de longueur. Donc, c'est une géométrie de nature spectrale et en plus, si vous voulez la non-commutativité, il y a la non-commutativité de l'algèbre, elle est pratiquement imposée par ce qu'on appelle les théories de jauge. Les physiciens ont découvert les interactions fortes, par exemple, ils ont découvert qu'il n'y a pas seulement l'électrodynamique, mais qu'il y a aussi des interactions fortes qui tiennent ensemble les quarks dans un atome.

Et pour cela, ils ont eu besoin de théories de jauge non-abéliennes. Eh bien, c'est ça, c'est ça qui est vraiment à la racine du fait que l'espace a une toute petite structure fine qui est non-commutative.

Donc, il y a une saga, une saga très, très longue que je ne veux pas vous raconter. Mais je vous raconterai seulement la fin, il y a eu des hauts et des bas, c'est-à-dire ? J'ai eu des collaborateurs, comme Chamseddine, avec qui on a donc fait un modèle si vous voulez, un modèle de l'espace-temps qui était basé sur ces idées-là, sur la structure hyperfine, sur la structure qui vient de la géométrie non-commutative. Il y a eu des hauts et des bas.

Il y a eu, en 98, la découverte du neutrino, du mélange des neutrinos, les modèles de Calabi-Yau. Donc là, on a abandonné, on a abandonné pendant un certain nombre d'années. Après, on est revenu en 2005 avec une nouvelle idée qui était de changer une dimension. Tout a marché. Formidable. Sauf qu'en 2008, il y a eu. Il y a eu une exclusion de la masse du Higgs qui contredisait notre travail.

Par exemple, j'ai écrit un blog, j'avais écrit en citant Lucrèce qui parle des gens qui se réjouissent du malheur des autres. Donc effectivement, là, on était très malheureux, très malheureux. Et puis il y a eu une période, donc ça, c'était à partir de 2008. Et puis, il y a eu une espèce de résurrection à nouveau, simplement, c'est la raison pour laquelle je vous dis ça, c'est qu'il ne faut jamais se décourager.

Faut jamais se décourager.

Il y a eu une période de découragement qui était très longue à partir de 2008 et en 2012, mon collaborateur m'a envoyé un mail et il m'a dit la chose suivante, il m'a dit : "Ecoute, il y a 3 équipes différentes de physiciens qui ont réussi à stabiliser le modèle standard jusqu'à le rendre compatible avec la masse du Higgs." Bon, alors d'accord, je continue à lire son mail et il me dit "ils ont fait ça en rajoutant un champ scalaire qui vérifie certaines propriétés de couplage avec le vide.". Puis, je continue à lire son message, il me dit : "ce champ scalaire, on l'avait dans notre article de 2010, mais on l'avait négligé.". Donc en fait, on l'avait. En fait, on s'était découragé. Quoi ? C'est-à-dire qu'on avait dit : "Le champ scalaire, il ne change rien.". Si on avait été courageux, vraiment courageux, on l'aurait pris en compte et on aurait vu que tout marchait merveilleusement. Donc voilà ça, c'est pour ce côté-là.

Et en fait, donc, ce qui s'est produit si vous voulez, au niveau de mon développement mathématique, c'est qu'après avoir développé la théorie qu'on appelle la géométrie non-commutative, donc c'est une théorie qui est quand même... je ne voudrais pas vous faire croire que c'est une théorie qui est simple, c'est une théorie qui est très élaborée, elle a un tas de relations avec un tas de concepts différents, etc. Et en gros, chacun des concepts qui intervient dans la géométrie dont on a l'habitude doit être modifié et on le regarde d'une manière complètement différente.

Même l'intégrale, même la notion d'intégrale est changée, elle est remplacée par ce qu'on appelle la trace de Dixmier et qui est un concept qui a été inventé par Dixmier et qui joue un rôle absolument central dans cette théorie. Bon, elle est reliée à un tas d'autres théories, mais je ne voulais pas vous embêter avec ça. Maintenant, je vais vous expliquer ça...

Alors en fait, il s'est produit un autre phénomène assez bizarre, c'est que dans l'année 1996, j'ai été à nouveau invité à Seattle. Je ne pouvais pas refuser si j'étais à nouveau invité à Seattle, et c'était pour l'anniversaire d'Atle Selberg, qui était un grand théoricien des nombres, et j'avais été invité parce qu'avec mon collaborateur Jean-Benoît Bost, on avait écrit un article dans lequel on trouvait qu'on avait ce qu'on appelle une transition de phase sur un système de mécanique statistique et on trouvait que la fonction de partition du système était la fonction zêta de Riemann.

Donc, comme cette conférence était une conférence sur la fonction zêta de Riemann, ils m'avaient invité, alors j'avais bien fait, j'avais un peu suivi le même parcours qu'avant. Je m'étais arrêté à Victoria, puis après, j'étais allé à Seattle et à Seattle, j'avais donné ma conférence et après la conférence, j'avais vu Selberg qui m'avait dit : "It is not clear that what you are doing will be related to...". Si vous voulez, bien sûr, on connaît la fameuse conjecture. Il m'avait dit ça, il m'avait dit ça. Et bon, évidemment, je veux dire, on aime bien aussi être provoqué, on aime bien que les gens vous critiquent. Ça manque pas, ça, en mathématiques, pas de difficulté là-dessus.

Et d'ailleurs, je dois rajouter une chose, c'est que non seulement les gens vous critiquent, mais vous avez de bons amis qui vous répercutent les critiques. Donc ça ne manque pas, mais ça a un côté positif. Ça a un côté positif parce que non seulement il faut être accrocheur, mais il faut être capable d'être, de transformer la frustration que vous avez lorsque les gens vous critiquent en énergie positive. Cela, c'est une qualité absolument cruciale. C'est une qualité essentielle, c'est-à-dire que si quelqu'un vous critique d'une manière ou d'une autre, il faut arriver à prendre ça et à le considérer comme un potentiel d'énergie, pas comme quelque chose de négatif. Il faut être capable de se distancier par rapport à soi-même et de le voir comme une énergie positive. D'accord, donc, quand je suis rentré de Seattle au lieu de... je ne me suis pas occupé du décalage horaire. C'est-à-dire ? Je suis resté sur l'heure de Seattle, je suis resté sur l'heure de Seattle et ce que j'ai fait, c'est que pendant une semaine, je n'ai pas travaillé.

Je lisais le livre qui s'appelle *The Staff*, je ne sais pas si vous connaissez ce livre, c'est un livre sur les astronautes et sur Apollo 13, etc. Sur toute cette histoire, c'est un livre magnifique. Bon, je lisais ce livre, je l'ai lu, je l'ai dégusté sur place, on aurait pu, j'aurais pu le lire en quelques heures.

Mais en fait, je l'ai dégusté petit à petit et au bout d'une semaine, j'ai compris qu'en fait, ce que les gens cherchaient lorsqu'ils cherchaient une réalisation spectrale des zéros de zêta, ils la cherchaient tous sous la forme de ce qu'on appelle un spectre d'émission, c'est-à-dire un spectre d'émission, c'est un spectre, vous aurez un fond noir et vous aurez des raies d'émission. Par exemple, si vous prenez du sodium et que vous le chauffez, le sodium va vous donner un spectre. Si vous faites passer la lumière à travers un prisme, il va vous donner un certain nombre de raies très brillantes, mais bien isolées comme ça, sur un fond noir. D'accord, mais en fait, ce n'est pas comme ça qu'on a vu les spectres pour la première fois. Les spectres, c'est Fraunhofer qui les a découverts vraiment et il les a découverts en prenant la lumière qui venait du soleil, on avait déjà regardé cette lumière à travers un prisme, le prisme décompose la lumière en couleurs différentes, les couleurs de l'arc en ciel.

Mais ce qu'a fait Fraunhofer, il a eu une idée géniale. Il a eu l'idée géniale de regarder ça au microscope. Et quand il a regardé au microscope, il s'est aperçu qu'en fait, il y avait plein de raies noires. D'abord, il a nettoyé son truc, d'accord. Et puis, en fait, il s'est aperçu que quel que soit l'instrument qu'il prenait, il y avait les mêmes raies noires. Et alors ? L'histoire merveilleuse qui était derrière, c'est qu'après, il y a Bunsen et Kirchhoff qui ont réussi en chauffant des corps comme le sodium, etc., à produire les mêmes raies, mais à les produire comme spectres d'émission. Pas comme des raies noires, l'inverse, sauf qu'il manquait encore d'essayer avec la lumière du soleil. Il y avait des raies noires qu'on ne pouvait pas produire par émission. Alors évidemment, les physiciens sont toujours malins, ils ont dit ces raies noires, c'est un nouveau corps qu'on va appeler Hélium, comme le soleil, bien sûr, quand ils l'ont appelé Hélium, bien sûr, c'est un peu comme la matière noire.

Vous allez me dire qu'est-ce que c'est que cette histoire ? Sauf qu'il y a eu une éruption du Vésuve. Et quand ils ont fait les spectres d'émission de la lave du Vésuve, ils ont trouvé de l'hélium dedans. D'accord donc, ce que j'avais compris en rentrant de Seattle, c'était qu'en fait, au lieu de chercher un spectre d'émission, ce qui était ce que les gens cherchaient, mais il y avait un signe "-" qui ne marchait pas, il y avait toujours un signe "-" dans la formule qui ne marchait pas.

En fait, il fallait chercher le spectre comme un spectre d'absorption. Et alors ? J'avais déjà l'espace non-commutatif qu'il fallait pour ça. J'avais déjà l'espace non-commutatif qu'il fallait. Et je savais démontrer que cet espace non-commutatif donnait les bons termes dans ce qu'on appelle la formule de Riemann. Mais j'avais vu alors après, bien sûr, comme je savais qu'il fallait chercher un spectre d'absorption. J'ai regardé si ça, effectivement, ça donnait la réalisation spectrale. Et alors, le miracle, c'est que ça donnait la réalisation spectrale.

C'est ça que j'ai compris en rentrant de Seattle. Après une période d'ennui total, que je ne recommanderais jamais assez. Il n'y avait pas de mails à cette époque. Moi, je n'étais pas connecté. D'accord. C'était une période qui était propice à laisser le cerveau fonctionner parce que je lisais autre chose. Je ne faisais pas de math. D'accord. Je lisais autre chose et au bout d'un moment, c'est venu comme quelque chose qui est devenu complètement naturel. Et alors, qu'est ce que ça voulait dire ?

Mais ça voulait dire que cette géométrie très abstraite qui était venue de loin, n'est-ce pas, et qui était venue de von Neumann, qui était venue de Heisenberg, etc. Elle avait l'air de marcher, elle avait l'air de marcher aussi bien pour l'espace dans lequel on vit que pour l'espace sans doute le plus difficile qui existe, qui est celui qui comprend la nature des nombres premiers, de l'ensemble des nombres premiers, parce que ce qui est derrière la réalisation spectrale, la fonction d'état, etc., c'est exactement la nature de l'ensemble des nombres premiers. Alors ça, c'était le point de départ, c'était le point de départ. J'ai écrit une petite note aux Comptes-Rendus. J'ai été invité à Princeton.

Et alors là, ce qui s'est produit, moi, j'appelle ça un gag, je trouve ça très marrant. C'est-à-dire que j'ai fait ma conférence à Princeton. Bon, etc. C'est vrai que ce qu'il faut savoir, c'est que le sujet en question, qui est l'hypothèse de Riemann dès qu'on s'approche, c'est un sujet qui est miné. Donc, il faut savoir que c'est protégé par des montagnes de scepticisme. D'accord. Mais toujours est-il que bon, j'avais trouvé quand-même quelque chose.

Je suis allé là bas. J'ai fait mon exposé, j'avais sûrement compris quelque chose, si vous voulez, c'était la compréhension de la formule de Riemann-Weil sous forme de formule de traces. Et puis, il y a deux personnes que je connaissais et que je connais très bien. Il y a une personne avec laquelle j'avais collaboré, Paula Cohen et Bombieri qui ont fait un canular. En fait, un canular pour le 1$^{\text{er}}$ avril, c'est-à-dire le 1$^{\text{er}}$ avril, vous savez, d'habitude, on fait des canulars, on voit des trucs. Donc, ils ont envoyé un canular par email en disant qu'après ma conférence, il y avait un Russe qui était là et qui avait réussi à démontrer l'hypothèse de Riemann. Bon, alors c'était très drôle.

J'ai rigolé, etc. Sauf que je n'avais pas réalisé ça, c'était en 98, en mars 98, et je n'avais pas réalisé que ce canular allait être envoyé un peu partout. Alors c'est envoyé un peu partout. Forcément, il y a des gens qui l'ont pris au sérieux. Et alors ? Ce qui est absolument incroyable, c'est qu'il a été pris au sérieux. C'était en 1998. C'est une année où le Congrès international des mathématiciens avait lieu à Berlin. Bon, je n'ai rien contre les Allemands, mais bon, si vous voulez, il y a eu, en gros, il y a eu des Allemands qui ont pris ça au sérieux. Et alors, qu'est ce qu'ils ont décidé de faire ?

C'est quelque chose qui est absolument incroyable. Je m'en suis rendu compte seulement récemment parce que je veux dire, à l'époque, j'avais ignoré ce jeu. Je haussais les épaules. Qu'est-ce qu'ils ont décidé de faire ? Ils ont décidé d'inviter pour parler une heure au congrès, la personne qui était la mieux placée pour être mon compétiteur. D'accord. Donc, au lieu de m'inviter, moi, par exemple, ils ont invité une personne qui travaillait sur le même sujet et ils lui ont donné un boulevard.

Et bon bah, je me souviens que Selberg, quand je l'ai revu la même année, c'était après le congrès. Il m'a dit qu'il n'avait jamais entendu un exposé aussi vide. Et moi, je ne savais pas à cette époque-là, je n'avais pas regardé, j'ai regardé récemment et j'ai été estomaqué parce que je me suis aperçu que cet exposé, en fait, c'est un exposé qui reprenait mes idées sans vraiment les citer. Ou plutôt en les citant avec ce que Grothendieck appelle la technique pouce. La technique pouce, c'est la suivante si ça peut vous servir, c'est... vous savez, vous empruntez l'idée de quelqu'un. Mais vous ne voulez pas vraiment le citer. Vous mettez son article en bibliographie, mais vous le citez pour autre chose. Ça marche très, très bien. D'accord, donc ça, c'est le prototype de ce qui m'est arrivé à ce moment-là. C'est le prototype de l'expérience qui arrive lorsqu'on s'approche de ce sujet, lorsque on s'intéresse à ce sujet-là, etc.

Mais d'un autre côté, on ne peut pas avoir peur. Il ne faut pas avoir peur. Ça, c'est une chose absolument essentielle. Il faut être capable de supporter ce genre d'avanies sans en tirer de conséquences. Et justement, en essayant de les transformer en énergie positive. D'accord, alors, ce qui s'est produit depuis ? Je vais, je ne vais pas tarder... je ne sais pas. Qu'est-ce qui s'est produit depuis. Si vous voulez, ce qui s'est produit depuis ce moment-là, c'est la chose suivante. C'est que j'ai collaboré avec Katia Consani. Et à l'époque, à l'époque de Grothendieck, je n'avais qu'une idée, c'était de fuir les sujets que Grothendieck traitait. Pourquoi ? Parce qu'il y avait une sorte de snobisme autour. Il y avait une espèce de cour qui l'entourait, etc. C'est pour ça que j'avais fait des algèbres d'opérateurs. Donc là, j'ai commencé à apprendre la géométrie algébrique avec Katia Consani.

Et en 2014, ça ne fait pas longtemps. Ça veut dire qu'il ne faut jamais se décourager. En 2014, on a fait une découverte tout à fait incroyable. C'est qu'on a découvert que cet espace non-commutatif que j'avais utilisé pour faire la réalisation spectrale, etc., mais que les gens pouvaient considérer comme un espace tout à fait bizarre parce que non-commutatif, etc., en fait, c'était l'espace des points d'un topos de Grothendieck d'une simplicité incroyable, qu'on appelle le topos des fréquences, simplement la demi-droite produit semi-direct par l'action, par les entiers, par multiplication. Donc, c'est quelque chose qui est merveilleusement simple. Mais quand on calcule les points de ce topos, parce que la notion de topos, elle est suffisamment subtile pour que lorsque vous calculez les points, ça soit quelque chose. C'est en général très, très difficile lorsque vous calculez les points de ce topos. Vous trouvez un espace non-commutatif et cet espace non-commutatif, c'est exactement l'espace que j'avais construit pour avoir la réalisation spectrale.

Et qu'est ce que ça nous a donné avec Katia Consani ? Ça nous a donné sur cet espace le faisceau structurel, c'est-à-dire avant, on n'aurait jamais imaginé cela et on a vu, on a compris que ce faisceau structurel, c'était en fait un faisceau qu'on appelle tropical, c'est-à-dire qui est relié à ce qu'on appelle la géométrie tropicale. Et donc, ça nous permet d'avancer. Ça nous permet d'avancer. J'ai fait mes deux derniers cours du Collège en grande partie là-dessus.

Donc ça nous a permis, si vous voulez, on n'est pas loin du but. Bien sûr, on ne peut pas le dire tant qu'on n'est pas arrivé au but, on ne peut rien dire. On ne peut absolument rien dire. Et si on disait quelque chose ? Les gens nous taperaient dessus à coups de marteau. Il faut surtout ne rien dire, mais si vous voulez, ce qu'on a découvert, peu importe qu'on arrive ou pas. Parce que dans cette conjecture, ce qui est merveilleux, c'est que si on connait vraiment les dessous des mathématiques, on s'aperçoit que cette conjecture, elle est à la racine de la plupart des concepts qui ont été élaborés au XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Je ne vous ferai pas une description, mais en fait, dans presque chacun des concepts mathématiques qui ont été développés, ils ont été développés avec ça en tête, derrière, donc ici, en fait, on est arrivé à un espace. Bon, maintenant, ça progresse aussi : on est arrivé à un espace qui est beaucoup plus, comment dire, géométrique, qui est beaucoup plus compréhensible, mais qui n'est, comment dire ? qui n'est compréhensible que parce que Grothendieck a eu cette merveilleuse idée des topos. Et cette idée des topos de Grothendieck, en fait, cette idée-là, elle a la même relation avec la géométrie non-commutative que la relation qui existe dans le programme de Langlands entre la théorie de Galois et les fonctions automorphes. Donc, c'est exactement la même, la même relation qui apparaît encore.

Alors pour terminer, juste une chose que je voulais dire, c'est qu'il y a une autre collaboration qui a été cruciale et qui est ce qu'on a réussi à faire avec Chamseddine et Mukhanov qui est un chercheur qui fait de la cosmologie, donc ce qu'on a réussi à faire : on a réussi à comprendre quelle était la racine profonde du modèle standard couplé avec la gravitation. Parce qu'avant, on mettait la structure fine dont je parlais, on la mettait à partir des expériences, on partait des résultats expérimentaux et tout ça, on disait qu'il fallait telle algèbre pour que ça colle avec l'expérience. Et on n'avait aucune raison conceptuelle de dire pourquoi il fallait mettre cette algèbre et pas une autre. Et ça, cette raison, on l'a trouvée et on l'a trouvée par un concours de circonstances. On cherchait à résoudre un problème géométrique, purement géométrique, et en résolvant ce problème géométrique, on est tombé sur la bonne algèbre de Clifford qu'on avait mise à la main avant.

Donc c'est ça. Et il y a un théorème très profond qui permet de montrer qu'on a réalisé comme ça toutes les variétés. C'est un théorème qui, géométriquement, est basé sur sur ce genre d'images. Voilà donc je crois que je vais m'arrêter. J'ai oublié de vous dire quelque chose. D'accord, mais bon, j'ai oublié de vous dire quelque chose, c'est qu'en fait, ce qui sous-tend mon exposé est quelque chose qui avait déjà été compris par Shakespeare.

Je vais vous dire ce que Shakespeare écrit, il y a la traduction aussi, mais j'ai essayé de traduire. Shakespeare est toujours bien meilleur que sa traduction. Donc, ce que dit Shakespeare, c'est la chose suivante :

> *There is a tide in the affairs of men,*
> *Which taken at the flood, leads on to fortune.*
> *Omitted, all the voyage of their life*
> *Is bound in shallows and in miseries.*
> *On such a full sea are we now afloat.*
> *And we must take the current when it serves*
> *Or lose our ventures.*

> *Il est une marée dans les affaires des hommes,*
> *Qui, prise à son apogée, conduit à la fortune.*
> *Ignorée, tout le voyage de leur vie*
> *Est confiné aux bas-fonds et aux écueils.*
> *Sur une telle mer, nous sommes maintenant à flots*
> *Et devons suivre le courant quand il forcit*
> *Ou réduire à néant nos projets.*

C'est la seule chose que je veux que vous reteniez : quand vous voyez la marée, il faut la suivre. Mais il faut la sentir, bien sûr, il faut sentir qu'elle est là, d'accord. C'est l'intuition. C'est ce qu'on appelle intuition, c'est quelque chose qui est impossible à définir. C'est pas quelque chose que l'on peut rationnaliser, mais c'est quelque chose qui est fondamental dans le métier qu'on fait.

(Applaudissements).

L'un des étudiants de l'ENS qui ont organisé le cycle Maths pour tous : Merci beaucoup pour cet exposé. Si vous avez des questions, n'hésitez pas. On a un peu de temps, je pense.

Question : Shakespeare a dit je crois que le monde est un théâtre, est-ce pareil pour les mathématiques ?

Oui, il y a beaucoup de vrai et c'est formidable que vous ayez dit ça parce que ça me permet de vous expliquer ce que c'est qu'un topos. C'est formidable, c'est absolument formidable, je vais vous expliquer ce que c'est qu'un topos. Le théâtre usuel des mathématiques, c'est la théorie des ensembles. On connaît tous la théorie des ensembles, on connaît les groupes, on connaît les algèbres, on connaît... C'est le théâtre usuel des mathématiques. Qu'est-ce que c'est qu'un topos ? C'est quelque chose d'extraordinaire parce que... le théâtre est le même, les acteurs sont les mêmes, ... Mais il y a derrière les coulisses une espèce de Deus Ex Machina, qui rend les choses variables, qui introduit une variabilité.

Ça veut dire que dans la théorie des ensembles, il va y avoir une variabilité et ça veut dire quelque chose d'extraordinaire qui est qu'un espace géométrique, il n'est pas perçu par ce qu'il est, il n'est pas au devant de la scène du tout. C'est le Deus ex machina qui est dans les coulisses, qui fait varier les choses. Et c'est en comprenant comment les choses varient qu'on comprend l'espace géométrique qui est caché derrière ça. C'est purement du théâtre, c'est purement du théâtre.

La théorie des ensembles ordinaire, c'est le théâtre statique, mais le topos est beaucoup plus intéressant. D'accord, ça, c'est une idée fondamentale de Grothendieck, mais vous, vous ne la verrez jamais expliquée comme ça dans les bouquins.

Question : C'est une question peut-être un peu souvent posée, mais est-ce que pour vous, on découvre les mathématiques, c'est quelque chose qui existe sans la rationalité de l'homme ?

Bien sûr. Alors, bien sûr, on découvre... La raison... J'ai eu cette très longue discussion dans ce livre avec Changeux, avec Jean-Pierre Changeux, je vais dire... Jean-Pierre Changeux voulait démontrer qu'en fait, les mathématiques, c'était le fonctionnement du cerveau.

Mais non. Mais à mon avis, ça ne tient pas. Et la raison pour laquelle ça ne tient pas, c'est la chose suivante, c'est que grâce aux mathématiques, on explique le tableau de Mendeleïev, on explique, si vous voulez, pourquoi il y a des corps chimiques, etc., etc. Bon, alors, la comparaison que je prends toujours, je prends deux comparaisons. La comparaison que je prends, c'est, prenez Watson et Crick. Quand Watson et Crick découvrent la structure en double hélice de l'ADN, ils la découvrent, ils ne l'ont pas inventée. Ce n'est pas eux qui l'ont inventée. Les maths, c'est exactement ça, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que... Et surtout maintenant qu'on a l'ordinateur. Si vous voulez, c'est terrible maintenant, ça, je n'en ai pas parlé. Mais le fait d'avoir des ordinateurs et des ordinateurs qui sont tellement puissants, ça permet de se colleter à la réalité mathématique. Mais tout le temps, tout le temps. C'est-à-dire que quel que soit le problème que vous avez, vous pouvez toujours le tester avec l'ordinateur, toujours.

Et si c'est un problème de calcul symbolique, vous pouvez le résoudre avec l'ordinateur. Donc, je vais dire, l'ordinateur, il n'invente pas. Je vais dire merde, on lui met un problème, d'accord, je veux dire, il vous dit si ce que vous avez trouvé est correct ou pas, etc. Donc non, c'est une vraie réalité, c'est une vraie réalité. Ce n'est pas une réalité qui est réalisée concrètement dans le monde tel qu'il est, mais c'est une réalité qui est tout aussi résistante, tout aussi impossible à modifier que la réalité extérieure.

Ça, c'est sûr, c'est certain. On invente des outils, car Watson et Crick observent la double hélice. Ils utilisent le microscope électronique. On invente des outils, mais il y a une réalité qui est là, une réalité qui est là, qui est impossible à modifier.

Question : Toujours dans la même optique, est-ce que vous pensez que l'on pourrait aussi découvrir des intuitions qui nous étaient auparavant totalement cachées, et qu'on se retrouve à faire des maths avec des choses qui sortent de pouvoirs humains, récemment découverts et qu'une nouvelle branche que l'on explore...

Quel genre de pouvoir récemment découvert ?

Suite de la question de l'étudiant : C'est-à-dire, par exemple, quand vous traitez de sujets comme les topos par exemple, ce ne sont pas des choses que directement, on pourrait saisir par l'intuition qui n'est pas éduquée mathématiquement. Est-ce que, *d'après vous, après une maîtrise du domaine, maîtrise plus ou moins relative, on pourrait approcher une intuition…*

Mais alors, c'est une très bonne question. C'est une très bonne question parce que l'esprit humain n'est pas n'est pas entraîné au quantique. L'esprit humain est entraîné au classique et donc l'esprit humain en particulier a l'habitude de donner toujours une image classique de choses quantiques. Ce qui est certain, c'est qu'il y a de plus en plus d'instruments maintenant qui sont basés sur le quantique. Par exemple, il y a un instrument qui fabrique des nombres aléatoires, qui est fait par des Suisses et avec un téléphone portable, on fabrique des nombres aléatoires, on les fabrique avec du quantique et le quantique est de plus en plus répandu maintenant. Et alors ? Si on arrivait effectivement à s'entraîner au quantique, à entraîner, bon... c'est évident que le quantique ne servait pas beaucoup pour la sélection naturelle jusqu'à présent, donc on n'est pas entraînés à ça. Mais si on arrivait effectivement à se familiariser beaucoup plus avec l'optique quantique, avec le quantique, etc., c'est absolument évident qu'on ferait des progrès. C'est évident. Ça, c'est évident.

Je ne parle pas du machine learning et de l'intelligence artificielle parce que pour moi, c'est exactement l'opposé de ce qu'on fait en math, c'est-à-dire de chercher à comprendre et de chercher à inventer, à inventer des outils, donc à trouver les concepts qui sont derrière ce qu'on découvre. Et ça, bon le machine learning, il résout des problèmes. Mais si on résout un problème sans savoir comment, ce n'est pas vraiment intéressant.

Question : J'ai une question sur ce papier que vous avez écrit avec Mukhanov. J'ai eu l'impression que vous travaillez avec une métrique riemannienne mais notre notre monde n'est pas riemannien. Bon, ça marche aussi ? ou…

Bien sûr, ça marche. Mais la vraie réponse, c'est la suivante, la vraie réponse est que quand on fait ça, les physiciens le savent très bien, c'est que quand on fait la théorie des champs et quand on fait les intégrales fonctionnelles, etc., il y a un truc qu'on appelle l'astuce du I_ε de Feynmann, c'est-à-dire qu'on rajoute au propagateur un terme I_ε, et si on réfléchit bien à ce que ça signifie, ça signifie qu'on travaille en euclidien. Donc, en fait, on veut faire les intégrales fonctionnelles en euclidien et la vraie intégrale fonctionnelle qu'on veut faire, dans ce cas-là, c'est qu'on prend deux espaces riemanniens à trois dimensions et on regarde les cobordismes entre les deux et on fait l'intégrale euclidienne là-dessus, d'accord ? Mais c'est parfaitement vrai ce que vous dites.

Est-ce que vos théories mathématiques permettent de bien comprendre ce qu'est l'intrication quantique ?

Ah, c'est... Alors là, je suis parti encore pour une heure... Alors là, merveilleuse question, bien sûr, mais j'ai déjà fait des exposés qui sont sur Internet là-dessus. Si vous voulez, c'est une question merveilleuse. Pourquoi ? Parce que ce que je vous ai expliqué, c'est qu'un objet non-commutatif engendre son propre temps. Donc, il est évident qu'on veut comprendre en quel sens c'est relié au temps qui nous est familier, etc. On a beaucoup réfléchi à ça et j'ai eu un épisode que je raconte, qu'on raconte dans notre livre *Le théâtre quantique* avec un physicien qui s'appelle Carlo Rovelli.

Et si vous voulez ce qui se produit, c'est la chose suivante. J'ai réfléchi beaucoup plus, beaucoup plus encore, après, sur ce temps qui apparaît, etc. Et ce qu'on a dit dans le livre sur le théâtre quantique, on a une phrase qui résume l'idée. La phrase, c'est "*L'aléa du quantique est le tic tac de l'horloge divine.*", c'est-à-dire que c'est l'aléatoire du quantique, le fait que quand on fait une expérience deux fois, on fait passer un électron à travers une toute petite fente et on regarde l'endroit où il arrive.

Il n'arrivera jamais au même endroit. On connaît seulement la probabilité, donc ça, c'est l'aléa du quantique, et la théorie qui est basée là-dessus, si vous voulez, c'est que justement, cet aléa quantique engendre le temps. Mais en fait, quand on y réfléchit plus avant et à cause de l'intrication, on s'aperçoit qu'on commet tout le temps une erreur. Toute la physique qu'on connaît, elle est écrite par des équations en fonction du temps.

Pour revenir à mon année de maths spé, j'avais un prof de maths spé et une fois, il m'avait fait passer au tableau et il m'avait dit "Monsieur Connes ? Quel est le paramètre ?" *(AC dessine une courbe dans l'espace devant lui.)* J'ai réfléchi, réfléchi... Puis, au bout d'un moment, j'avais dit "C'est le temps !". Il était très content. Donc vous voyez, toutes les équations de la physique, sont écrites comme des dt, dt^2. Ce que je pense en fait, pour répondre à ça, et je répondrai à votre question.

Je pense que le temps n'est qu'une variable émergente et que la vraie variabilité... puisque nous, nous attribuons toute variabilité au passage du temps. Mais je pense que la vraie variabilité est plus primitive que le temps et que cette vraie variabilité, c'est l'aléa du quantique. Alors, quelle est la signification de l'intrication, la signification de l'intrication, c'est que l'aléa du quantique, il est synchronisé dans deux événements qui sont en corrélation. Il est synchronisé, c'est-à-dire au lieu d'être purement aléatoire et purement indépendant. Il est synchronisé. Donc, il faudrait une réflexion très profonde, que je ne suis pas capable d'avoir, et qui consisterait à dire que la variabilité dans la physique, elle vient de l'aléa du quantique et que le temps n'est qu'un phénomène émergeant et comprendre l'intrication de cette manière-là. Parce que l'intrication est incompréhensible, sinon. Pourquoi elle est incompréhensible ? Parce que ce que dit l'intrication d'un phénomène de mécanique quantique qui est intriqué, c'est que vous allez avoir, dès que vous faites une observation sur A, ça va se répercuter immédiatement sur B. Mais ça ne transmettra pas d'informations, mais quand même, ce sont deux évènements qui sont causalement indépendants. Donc vous ne pouvez pas dire qu'il y en a un qui est avant l'autre. Donc, c'est complètement incompréhensible. Et ce que je dis, c'est que justement, l'erreur, l'hérésie terrible, c'est de tout essayer d'écrire en fonction du temps et qu'on a besoin d'une réflexion plus profonde et qui devrait être basée sur ces choses-là.

C'est une deuxième question qu'on doit vous poser souvent aussi, mais est ce que pour vous, l'hypothèse de Riemann est vraie ?

Eh bien là, je ne résiste pas à la tentation. Je ne résiste pas à la tentation, mais je n'ai pas le droit d'en parler. C'est qu'on est en train de terminer un livre dont on a rendu les épreuves aujourd'hui chez Odile Jacob et dans lequel on raconte une histoire qui est l'histoire d'un mathématicien, un peu comme moi, qui a suffisamment travaillé sur cette hypothèse et qui est prêt à vendre son âme au Diable. Alors, il est prêt à vendre son âme au Diable, pas pour récupérer de la jeunesse ou quoi que ce soit, parce que bon, il en a marre. Il est découragé, il veut savoir, il veut vendre son âme au Diable. Et alors, si vous voulez, le problème, c'est comment rencontrer le Diable. Et en fait, un jour, il va à une conférence sur le machine learning. Alors là, lui, il faisait un tas de calculs, si vous voulez, un tas de trucs, et il reconnaît dans les calculs que fait le gars parce que vous savez, on dit en mathématiques "le diable est dans les détails". Il reconnaît dans l'exposé du gars, du spécialiste de machine learning, il reconnaît le Diable. Alors, je ne vais pas vous raconter la suite de l'histoire parce que vous la saurez dans un livre, je ne vous la raconte pas à l'avance.

Tu ne veux pas que je raconte, Danye ? Je ne vous la raconte pas, mais vous verrez que c'est une histoire très, très élaborée, et à la fin du bouquin, eh bien, il y a un truc comme ça, voilà. Bon, maintenant, voilà. Donc je vais dire, comme je le disais dès le départ, on ne peut rien savoir tant qu'on n'est pas au bout et sans doute qu'il ne faudrait pas arriver au bout parce qu'il y a un autre aspect des mathématiques dont je n'ai pas parlé, parce que c'est un aspect plus, comment dire, plus difficile.

C'est toujours la peur de se tromper et j'imagine que si on arrivait au bout, on ne vivrait plus parce qu'on aurait constamment la peur d'avoir fait une erreur quelque part. Et ce serait une situation absolument invivable. D'accord, ce n'est pas souhaitable, vraiment. D'accord, voilà. En tout cas, vous aurez tous les détails bientôt de l'histoire, cette histoire du Diable.

Une dernière question : Oui, c'est peut être un peu prosaïque, mais tout à l'heure, vous avez parlé des ordinateurs ? Vous avez dit que vous pouviez résoudre des calculs symboliques ou qu'on pouvait se confronter à la réalité. Mais vous-même, vous l'utilisez ou... ?

Terriblement, terriblement.

En ce moment, je suis branché sur les grosses machines de Polytechnique pour faire un calcul. Je l'utilise terriblement.

Terriblement, bien sûr, bien sûr. C'est formidable. C'est formidable parce que dès qu'on a un peu de pratique, on arrive à mettre n'importe quel problème. Par exemple, le problème le plus bizarre auquel vous puissiez penser, vous penserez "non, on ne peut pas le faire résoudre par ordinateur, si, si.". Et on peut comprendre un tas de choses, un tas de choses. Même pour des problèmes de géométrie, etc. Donc, parce que surtout, la visualisation, la capacité à visualiser, le *manipulate* et tout ça.

C'est formidable. C'est formidable. C'est un outil merveilleux, merveilleux, merveilleux, merveilleux. Je ne dirai jamais assez que c'est un outil merveilleux.

Dernière question, oui.

Dernière question : Vous diabolisez, apparemment, le machine learning, il y a quelque chose qui ne va pas avec le machine learning. Alors moi, je voudrais comprendre, justement. Le machine learning, c'est encore un autre domaine, qu'est ce que vous avez essayé de faire avec le machine learning, en fait, et qui vous énerve, et que vous n'arrivez pas à faire ?...

Imaginez que le machine learning vous dise "l'hypothèse de Riemann est vraie." mais ne vous donne pas de raison, ne vous donne pas de concepts qui ont été inventés pour l'occasion, etc. Ce serait triste, triste à mourir. Donc, ce que je reproche, je ne reproche pas, mais je veux dire, j'ai compris à un moment donné, en discutant avec Alain Prochiantz l'analogie qu'il y avait entre la sélection naturelle et le machine learning. C'est vrai qu'on arrive à un résultat, mais si on arrive par exemple à un résultat, et qu'on ne comprend pas pourquoi et qu'on n'en dégage pas un concept. Je suis frustré. Personnellement, je suis très, très frustré. Si ce n'est pas renouvelable...

Il faut que vous en tiriez une énergie positive ;-)

Comment ? Ah oui, en tirer une énergie positive, là, je veux dire, il y a de quoi faire. Bien sûr, bien sûr. Non, mais je ne dis pas, mais pour le moment, ça ne marche pas terrible, parce que quand on a le machine learning au téléphone, c'est vraiment pas terrible. "Répétez, je ne comprends pas ce que vous dites.". Bon, ça va s'améliorer, ça, c'est sûr.

L'organisateur : Merci beaucoup, encore une fois pour votre exposé.

(Applaudissements).

Préface de *Mathématiques, tout-en-un pour la Licence*, de J.-P. Ramis et A. Warusfel par A. Connes

Les mathématiques constituent l'ossature de la science moderne et sont une source intarissable de concepts nouveaux d'une efficacité incroyable pour la compréhension de la réalité matérielle qui nous entoure. Ainsi l'apprentissage des mathématiques est devenu indispensable pour la compréhension du monde par la science. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée. Essayer de justifier les mathématiques par leurs applications pratiques n'a guère de sens, tant ce processus de création est sous-tendu par la soif de connaître et non l'intérêt immédiat.

Les mathématiques restent l'un des domaines dans lequel la France excelle et ceci malgré la mutilation des programmes dans le secondaire et l'influence néfaste d'un pédagogisme dont l'effet principal est de compliquer les choses simples.

Vues de loin les mathématiques apparaissent comme la réunion de sujets distincts comme la géométrie, qui a pour objet la compréhension du concept d'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, science de l'infini et du continu, la théorie des nombres etc... Cette division ne rend pas justice à l'un des traits essentiels des mathématiques qui est leur unité profonde de sorte qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence. En ce sens les mathématiques ressemblent à un être biologique qui ne peut survivre que comme un tout et serait condamné à périr si on le découpait en morceaux en oubliant son unité fondamentale.

L'une des caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques c'est la possibilité donnée à tout étudiant de devenir son propre maître et en ce sens il n'y a pas d'autorité en mathématiques. Seules la preuve et la rigueur y font la loi. L'étudiant peut atteindre par le travail une maîtrise suffisante pour pouvoir s'il le faut tenir tête au maître. La rigueur c'est être sûr de soi, et à l'âge où l'on construit sa personnalité, se confronter au monde mathématique est le moyen le plus sûr de construire sur un terrain solide. Il faut, si l'on veut avancer, respecter un équilibre entre les connaissances qui sont indispensables et le "savoir-faire" qui l'est autant. On apprend les maths en faisant des exercices, en apprenant à calculer sans l'aide de l'ordinateur, en se posant des questions et en ne lâchant pas prise facilement devant la difficulté. Seule la confrontation réelle à la difficulté a une valeur formatrice, en rupture avec ce pédagogisme qui complique les choses simples et mélange l'abstraction mathématique avec le jeu qui n'a vraiment rien à voir. Non, les mathématiques ne sont pas un jeu et l'on n'apprend pas les mathématiques en s'amusant.

L'ouvrage qui suit est un cours soigné et complet idéal pour apprendre toutes les Mathématiques qui sont indispensables au niveau de la Licence. Il regorge d'exercices (700) qui incitent le lecteur à réfléchir et ne sont pas de simples applications de recettes, et respecte parfaitement l'équilibre nécessaire entre connaissances et savoir-faire, permettant à l'étudiant de construire des images mentales allant bien au-delà de simples connaissances mémorisées. Il s'agit d'un ouvrage de référence pour la Licence, non seulement pour les étudiants en mathématiques mais aussi pour tous ceux qui s'orientent vers d'autres disciplines scientifiques. Il insiste sur la rigueur et la précision et va au fond des notions fondamentales les plus importantes sans mollir devant la difficulté et en respectant constamment l'unité des mathématiques qui interdit tout cloisonnement artificiel. Il répond à une demande de tant de nos collègues d'un ouvrage qui les aide à "redresser la barre", mais sera aussi un atout merveilleux pour l'étudiant travaillant seul par la cohérence et la richesse de son contenu.

Il est l'œuvre d'une équipe qui rassemble des mathématiciens de tout premier plan ayant une véritable passion pour l'enseignement. Il était grand temps !

Transcription en LaTeX Denise Vella-Chemla, mars 2023.

Alain Connes : Donc au départ, on pourrait aborder les mathématiques en les considérant comme faisant partie de la physique, comme étant un langage qui est développé pour mieux comprendre le monde physique qui nous entoure ; et effectivement, on s'aperçoit que les mathématiques ont cette efficacité remarquable dans ce domaine-là. Et très souvent, on a de l'extérieur une compréhension de ces choses qui est beaucoup trop superficielle, et un exemple que je voulais prendre, c'est la version à laquelle on aboutit maintenant sur la réalité physique.

Donc le réel physique n'est rien d'autre que la superposition de possibles imaginaires. Et je ne donnerai pas la formule mais dans cette phrase, il y a quelque chose d'extraordinaire, c'est que les nombres imaginaires, les nombres complexes sont impliqués, et ces nombres, par même leur nom, comme nombres imaginaires, au début, étaient des fictions mathématiques.

Donc il y a cette efficacité incroyable des mathématiques dans le monde physique qui bouleverse même notre conception philosophique de ce que c'est que la réalité et qui met en question, bien sûr, le matérialisme comme idée un peu naïve parce que le matérialisme est une théorie qui se base sur une compréhension partielle des choses et qui identifie le réel au matériel.

Or d'après ce que j'ai dit, justement, le fait que le réel soit cette superposition de possibles imaginaires montre bien à quel point la réalité est bien plus subtile. Mais en fait, au bout d'un moment, on s'aperçoit qu'il y a un voyage propre, à l'intérieur du monde mathématique, qui devient disjoint du monde physique, et le principal outil qui permet justement de débuter ce voyage et de commencer, c'est l'analogie ; c'est le fait que l'esprit humain est capable de voir entre des domaines très très différents certains reflets, certaines correspondances, et à partir de ces reflets, de ces correspondances, de transposer, de transplanter des idées qui était valables dans un domaine, de les transplanter dans un autre domaine ; c'est ainsi que les mathématiciens ont découvert des pans entiers de mathématiques qui n'ont rien à voir avec le monde physique, et qu'il serait illusoire de vouloir trouver dans le monde physique. C'est ce qu'on appelle par exemple le monde p-adique. Le monde p-adique, c'est le monde dans lequel par exemple, l'entier deux est tout petit, et quand, par analogie, on transplante les concepts que l'on a pour les nombres réels, on s'aperçoit, un petit peu comme Alice au pays des merveilles qui découvre 36 choses, que l'on n'aurait jamais soupçonnées.

Donc c'est la première chose, la première chose, c'est que justement il y a un monde des mathématiques, qui n'est absolument pas soumis au monde de la physique et lorsqu'on explore ce monde beaucoup plus avant, on s'aperçoit en fait que dans ce monde mathématique, il y a par exemple des choses vraies mais non démontrables.

Transcription d'une vidéo écoutable ici https://www.youtube.com/watch?v=i08kF-NLVS4

Alors ça, c'est quelque chose qui est assez difficile à expliquer, j'ai essayé de l'expliquer dans un livre qu'on a écrit avec Lichnerowicz et Schützenberger, par la fable du lièvre et la tortue. Alors ce serait techniquement compliqué à expliquer mais c'est un exemple typique d'un énoncé mathématique, dont on sait qu'il est vrai, on sait aussi qu'il est indémontrable dans ce qu'on appelle l'arithmétique de Peano, c'est à dire par des moyens simples, et la raison pour laquelle on sait qu'il est vrai, c'est ce qu'on appelle la théorie des ordinaux, la théorie des ensembles, la théorie de Zermelo-Fraenkel, etc.. Donc en fait, on a depuis réussi à voir que si on prend des énoncés simples, des énoncés arithmétiques qu'on peut formuler de manière simple, et en fait, on sait que la plupart de ces énoncés sont indémontrables, c'est-à-dire que la proportion des énoncés qui sont vrais mais non démontrables tend vers un, c'est à dire que la plupart des énoncés qui sont vrais sont en fait indémontrables. Et l'image qu'il faut garder en tête pour la relation entre le mathématicien et cette réalité mathématique que j'appelle réalité mathématique archaïque, parce que justement, il y a des choses vraies mais qu'on n'arrive pas à percevoir de manière directe, c'est la même relation qu'il y a entre la réalité extérieure et un tribunal : dans le tribunal, vous avez des données, alors en mathématique, c'est ce que l'on appelle les axiomes, et à partir de ces données, vous pouvez faire un certain nombre de déductions c'est ce que fait le mathématicien lorsqu'il travaille. Mais, il serait faux d'identifier les déductions qui sont faites à l'intérieur du tribunal avec la réalité extérieure et ceci pour des raisons évidentes.

Alain Connes J'ai écrit ce livre *Le spectre d'Atacama* avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, donc l'une est littéraire, l'autre est un grand scientifique, un mathématicien et le thème général, l'idée générale, c'est un roman scientifique, c'est un nouveau genre et on veut, en fait, faire découvrir des idées profondes à la fois sur les mathématiques et sur la physique, mais de telle sorte qu'elles soient accessibles, qu'on arrive à en avoir une idée en lisant vraiment le livre comme un roman. L'histoire, le roman, qui est un roman d aventures, met en scène trois personnages, qui sont trois scientifiques ; d'un côté, il y a un mathématicien qui connaît bien la physique ; il y a un as de l'informatique qui va jouer un rôle essentiel ; et il y a une physicienne qui est rescapée d'un séjour dans le quantique. En fait, le personnage central on peut dire au niveau scientifique, c'est le spectre. Cette notion de spectre, c'est une notion qui est commune à la physique et aux mathématiques. Elle a d'abord été identifiée par Newton lorsqu'il décomposait la lumière avec un prisme. Et c'est ce qu'on voit dans les arcs-en-ciel, mais elle est devenue aussi une notion essentielle en mathématiques au début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle en gros. Et on s'est aperçu à un moment donné que les deux notions coïncidaient, c'est à dire qu'on pouvait expliquer les spectres de la physique, les spectres qu'on reçoit par exemple des étoiles très lointaines, des galaxies, qu'on pouvait les expliquer par les mathématiques. Et ce qu'on a essayé de faire, j'espère qu'on a réussi, c'est de rendre ce thème parfaitement compréhensible, de le rendre sensible, de le faire passer sans être dogmatique, c'est-à-dire sans des quantités d'explications, etc., mais en lisant le livre, en le lisant comme un roman d'aventures.

Il peut être lu vraiment comme un roman d'aventures, il y a des scènes, vraiment, qui se produisent et qui sont tout à fait extraordinaires. A travers cette lecture, il y a une osmose qui se produit et on arrive à comprendre ce que c'est que les spectres, la musique des formes et le message doit passer. Il y a un autre message qui est important dans le livre, et en gros, je peux le résumer sous la forme suivante : c'est que nous vivons une période de transition que tout le monde connaît, je veux dire qu'il y a de plus en plus de machines et en particulier, il y a ce qu'on appelle le machine learning qui va remplacer, bientôt, quand on va téléphoner à une compagnie, au lieu d'avoir "faites le 1, etc.", et puis finalement on a quelqu'un, on n'aura jamais quelqu'un, on n'aura que le machine learning. Donc en fait, ce roman est un plaidoyer pour les concepts ; c'est un plaidoyer pour essayer de résister à cette dérive du monde actuel qui fait qu'on abandonne notre individualité et on le fait en fait consciemment, c'est-à-dire que les gens qui sont sur facebook, etc. ils abandonnent consciemment, ce sont eux qui le font, qui donnent leur individualité, et en fait, il y a un message très important à la fin du livre qui est que nous devons sauver nos âmes, nous devons sauver nos âmes en échappant à cette tentation, cette tentation qui ferait de chacun de nous une espèce de cellule dans un corps beaucoup plus grand, dont l'âme nous échapperait totalement. Et le rôle dans le livre du machine learning est tenu par le Diable et heureusement, il y a un autre personnage central qui intervient, qui est la spiritualité, et qui termine le livre de manière optimiste, c'est-à-dire qu'il y a un

Transcription d'une vidéo écoutable ici https://www.youtube.com/watch?v=qPA5DywLFeI message que l'on doit écouter, et qui résume en gros cette idée que les concepts sont tellement plus importants et les concepts créés par l'homme comme celui du topos, les concepts sont tellement importants par rapport à cette dérive actuelle dans laquelle on se laisse glisser...

Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes

M. J. Tits (Bruxelles)

§ 1 – Introduction

1. Les groupes de Lie complexes simples[1], connus grâce aux travaux de W. Killing et de E. Cartan, sont les *groupes classiques* : $\mathbf{A}_n = \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C}), \mathrm{B}_n = \mathrm{PO}_{2n+1}(\mathbb{C}), \mathbb{C}_n = \mathrm{PS}_{p_{2n}}(\mathbb{C}), \mathrm{D}_n = \mathrm{PO}^+_{2n}(\mathbb{C})(n \geqslant 3)$, et les *groupes exceptionnels*, au nombre de cinq : $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$[2].

On a envisagé depuis longtemps[3] des groupes classiques définis sur un corps quelconque[4]. Dans un travail récent [2], C. Chevalley définit pour tout groupe simple complexe G et tout corps K un groupe G_K que l'on peut appeler “l'analogue de G sur K”[5]. La méthode de Chevalley repose sur une analyse détaillée de la structure des groupes simples complexes ; elle est purement algébrique et diffère essentiellement de la méthode usuelle de définition des groupes classiques sur K qui peut être qualifiée de “géométrique”. La question se pose alors naturellement de définir géométriquement des analogues sur K de tous les groupes complexes simples, et en particulier des groupes exceptionnels.

La recherche d'interprétations géométriques des groupes exceptionnels a donné lieu à de nombreux travaux qui ont permis notamment la mise en évidence de liens étroits existant entre ces groupes et l'algèbre des octaves de Cayley (cf. par ex. [3], [6], [10], [11], [7]). Les interprétations des groupes exceptionnels obtenues dans ce cadre se prêtent cependant mal, pour diverses raisons, au “passage à un corps quelconque”[6]. Abordant par une voie nouvelle le problème de l'interprétation géométrique des groupes simples complexes, j'ai été conduit (cf. notamment [12], [13], [14], [15], [16]) à associer à chacun de ces groupes G une “géométrie” $\Gamma(G)$ ayant un groupe d'automorphismes isomorphe à G[7] ; à titre d'exemple, la géométrie associée au groupe $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ est la géométrie projective complexe à n dimensions et $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ est le groupe des projectivités de cette géométrie. Partant d'une définition géométrique des géométries $\Gamma(G)$, où intervient explicitement le corps $\mathbb{C}$, j'ai proposé, dans l'introduction de [15][8], une façon de définir des “analogues des $\Gamma(G)$ sur un corps quelconque K”, les géométries $\Gamma_K(G)$ ainsi obtenues possédant – si elles existent – des groupes

Associé du Fonds National de la Recherche Scientifique.

[1] J'entends : algébriquement simples, c'est-à-dire dénués de tout sous-groupe invariant.

[2] Les notations $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C}), \mathrm{PO}_{2n+1}(\mathbb{C})$, etc. sont celles de J. Dieudonné [4] ; $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes.

[3] Cf. [4], [17], et les index bibliographiques de ces ouvrages.

[4] “Corps” signifie dans cette conférence corps commutatif, sauf mention expresse du contraire.

[5] Il faut souligner le fait que, pour G et K donnés, le groupe G_K est *unique*. Lorsque G est un groupe orthogonal, G_K est le groupe orthogonal de même dimension sur K, correspondant à une forme quadratique d'indice maximal.

[6] Notons d'ailleurs qu'il s'agit, en fait, d'interprétations, non des groupes exceptionnels eux-mêmes, mais de certaines formes réelles de ces groupes dont il n'existe pas d'équivalent sur tout corps.

[7] Le langage des “géométries”, employé ici, a été introduit dans [16] ; dans les autres articles cités, j'utilisais celui des “espaces”. Les deux modes d'expression sont équivalents en ce sens que toute proposition exprimée en langage de géométrie peut être traduite en terme d'espace et vice-versa ; il faut noter, toutefois, que le langage des géométries a sur l'autre l'avantage de conduire généralement à des énoncés plus ramassés et plus symétriques, mais qu'il est, en contrepartie, plus éloigné de l'intuition géométrique usuelle.
Il faut prendre garde au fait que le groupe G n'est pas nécessairement le groupe de *tous* les automorphismes de la géométrie $\Gamma(G)$.

[8] Au langage près ; cf. la note précédente.

d'automorphismes G_K généralisant naturellement les groupes d'automorphismes G des géométries $\Gamma(G)$[9]. Deux questions importantes restaient posées : la géométrie $\Gamma_K(G)$ existe-t-elle quels que soient G et K ? (la réponse est évidemment affirmative lorsque G est un groupe classique ; dans [15] je donnais des indications permettant d'arriver à la même conclusion dans le cas du groupe $\mathbf{E}_6$), et dans l'affirmative, les groupes G_K sont-ils identiques aux groupes G_K de Chevalley ? Il faut noter que, même dans le cas des groupes classiques, la réponse à cette seconde question n'est pas évidente : les groupes classiques G_K obtenus par le procédé géométrique décrit ci-dessus coïncident par définition même avec les groupes classiques sur K usuels, mais il n'en va pas de même pour les groupes "des types classiques" de Chevalley[10].

Comme on peut s'y attendre, la réponse aux deux questions posées ci-dessus est affirmative. La façon la plus directe d'obtenir ce résultat, consiste à étendre aux groupes de Chevalley la théorie des géométries associées $\Gamma(G)$. Ceci m'a conduit à étudier les fondements axiomatiques de cette théorie c'est-à-dire à rechercher quelles sont les classes de groupes auxquels elle s'applique. Cette axiomatique et son application aux groupes de Chevalley font l'objet principal de la présente conférence.

En s'efforçant de simplifier la méthode de E. Cartan pour la détermination des groupes simples complexes, E. Witt [19], et plus tard E. B. Dynkin [5], ont été amenés à associer à ces groupes certains schémas que j'appelle schémas de Witt-Dynkin (cf. fig. 1)[11]. Outre les groupes G et les géométries associées $\Gamma(G)$, interviendront ici, de façon essentielle, des schémas généralisant les schémas de Witt-Dynkin ; la théorie que j'exposerai est une théorie axiomatique des liens existant entre ces trois types d'êtres. Pour y arriver, je commencerai par analyser ces liens dans un cas particulier, celui de la classe des groupes projectifs $\mathrm{PGL}_{n+1}(C)$; les géométries associées sont les géométries projectives complexes des diverses dimensions et les schémas sont les schémas $\mathbf{A}_n$ de la figure 1.

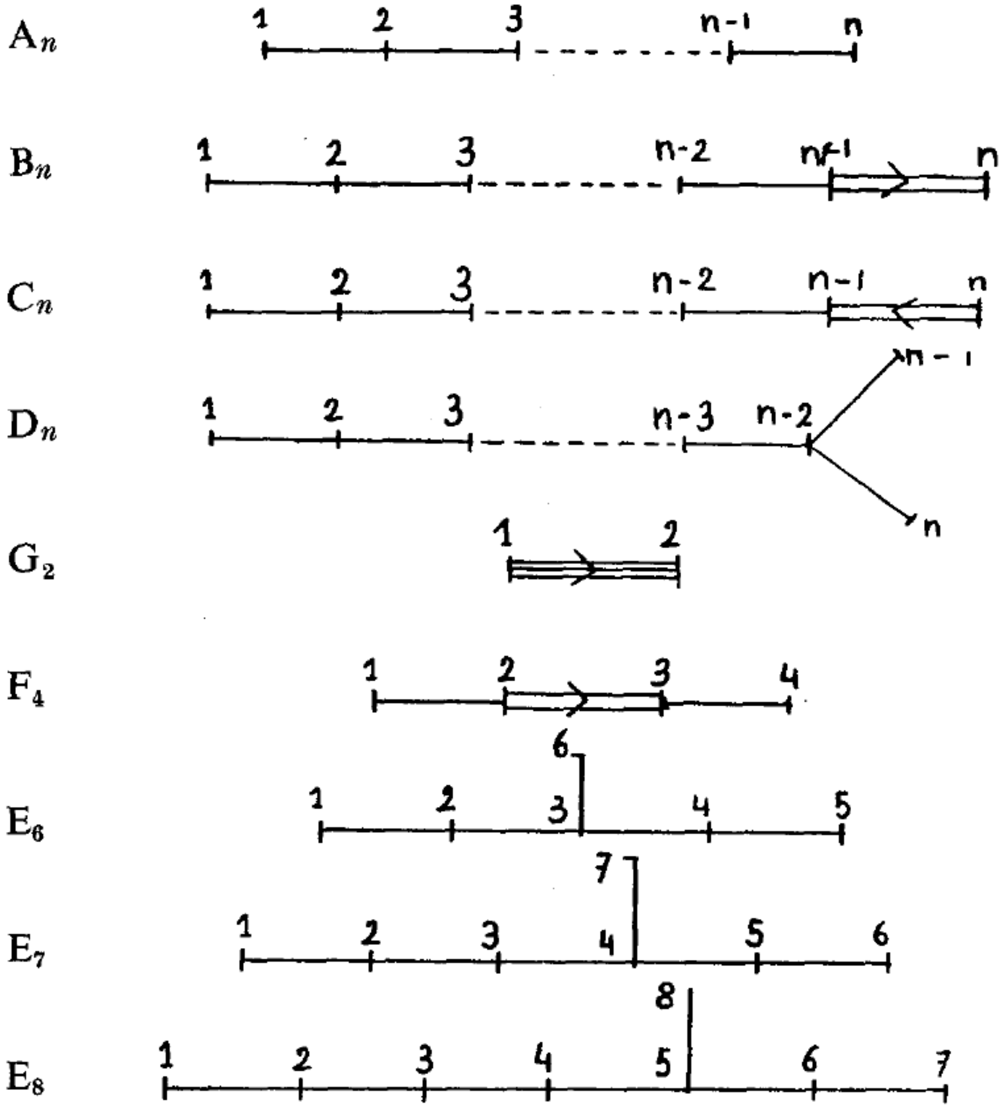
Il me paraît difficile de donner une démonstration générale, c'est-à-dire comportant un traitement simultané des divers groupes, et raisonnablement simple de l'existence des groupes de Chevalley définis géométriquement, de la façon décrite ci-dessus ; ceci met en évidence un avantage du procédé de définition de Chevalley. En ce qui concerne leur application aux groupes de Chevalley – elles en ont bien d'autres sur lesquelles j'espère revenir ultérieurement – les considérations générales développées ici sont donc à envisager sous l'angle suivant : ces groupes étant définis, et leur existence démontrée, par voie algébrique, elles fournissent la possibilité de leur appliquer les fécondes méthodes d'investigations géométriques. Il convient de noter à ce propos que les résultats obtenus permettent non seulement d'associer une géométrie déterminée à tout groupe de Chevalley, mais encore d'obtenir aisément de nombreuses propriétés, du type notamment des propriétés d'incidence

[9]Dans le cas du groupe $\mathbf{E}_6$, par exemple, G_K est le groupe $G_p^{(K)}$ dont il est question dans [15] (p. 36).

[10]Dans [2], C. Chevalley indique que les groupes G_K sont "presque certainement" identiques aux groupes usuels dans les cas classiques. J'ai démontré qu'il en est bien ainsi, par une méthode géométrique dont j'indiquerai ici le principe (cf. n° 9) en me bornant, pour le détail, à traiter un cas particulier (cf. n° 10). Une autre démonstration du même fait, basée sur la théorie des représentations linéaires, a été donnée par P. Cartier ; elle n'a pas jusqu'ici, à ma connaissance, fait l'objet d'une publication.

[11]Ces schémas, qui portent dans la littérature des noms divers, ont été introduits par H. S. M. Coxeter à l'occasion de l'étude des polytopes réguliers et des groupes finis engendrés par des réflexions. Le mode de représentation faisant intervenir des traits doubles et triples orientés est celui que j'ai introduit dans [14]. Les sommets des schémas de la fig. I sont numérotés pour faciliter la suite de l'exposé.

des variétés linéaires dans un espace projectif, des diverses géométries ainsi définies (cf. [14], [15], [16]).



§ 2. – Analyse d'un exemple : géométries et groupes projectifs

2. Nous désignerons par $\mathscr{P}_n$ l'espace projectif complexe[12] à n dimensions. La géométrie[13] de cet espace est caractérisée par la donnée des points, droites, plans, 3-plans, ..., hyperplans (= $(n-1)$-plans), et, si ces variétés sont données abstraitement (et non comme des ensembles de points), de leur relation d'incidence entre elles. Associons à l'espace $\mathscr{P}_n$ le schéma $\mathbf{A}_n$ de la figure 1, les sommets 1, 2, ..., n étant associés respectivement à la famille des points, des droites, ..., des hyperplans

[12] Tout ce que nous disons dans ce § est en fait valable sur un corps quelconque, commutatif ou non, possédant un antiautomorphisme (c'est-à-dire isomorphe à son opposé).

[13] L'emploi des mots "géométrie" et "espace" dans ce § est guidé par des considérations faisant appel à l'usage courant plus qu'à la logique. Au § 4, nous restreindrons la portée du terme "géométrie" en lui donnant une signification précise.

de $\mathscr{P}_n$; nous allons examiner les propriétés de la correspondance ainsi établie.

Il apparaît en premier lieu que les sommets du schéma sont rangés par ordre de dimension croissante des variétés qu'ils représentent. Cependant, cette propriété fait intervenir la notion de dimension que nous désirons écarter en vue des généralisations ; par ailleurs, le sens de la numérotation des sommets du schéma $\mathbf{A}_n$ nous importe peu, une inversion de ce sens correspondant à une dualité de $\mathscr{P}_n$. Nous retiendrons par contre une autre expression des liens existant entre l'ordre des sommets du schéma $\mathbf{A}_n$ et les propriétés des variétés linéaires de $\mathscr{P}_n$. Désignons par $\mathscr{F}_s$ la famille de variétés linéaires de $\mathscr{P}_n$ correspondant au sommet s du schéma $\mathbf{A}_n$ (c'est-à-dire, la famille des $(s-1)$-plans de $\mathscr{P}_n$). On voit alors que

(2.1) *Deux sommets a et b du schéma $\boldsymbol{A}_n$ sont séparés par un troisième sommet c si et seulement si deux variétés appartenant aux familles $\mathscr{F}_a$ et $\mathscr{F}_b$ sont incidentes entre elles dès qu'elles sont incidentes à une même variété de la famille $\mathscr{F}_c$.*

Certaines relations entre espaces projectifs de diverses dimensions se retrouvent aussi sur les schémas associés. Ainsi, la donnée dans $\mathscr{P}_n$ d'un $(i-1)$-plan ϖ conduit à la considération de deux nouveaux espaces projectifs, un espace à $i-1$ dimensions dont les points, les droites, ..., les hyperplans sont les points, les droites,..., les $(i-2)$-plans de $\mathscr{P}_n$ incidents à ϖ, et un espace à $n-i$ dimensions dont les points, les droites, ..., les hyperplans sont les i-plans, les $(i+1)$-plans, ..., les hyperplans de $\mathscr{P}_n$ incidents à ϖ ; ceci est à rapprocher du fait que si on retire du schéma $\mathbf{A}_n$ le sommet i et les traits qui y aboutissent, le schéma restant se décompose en un schéma $\mathbf{A}_{i-1}$ et un schéma $\mathbf{A}_{n-i}$. Pour exprimer simplement le lien entre les deux faits précédents, nous introduirons la notion de *somme directe* de deux espaces projectifs, être géométrique obtenu en considérant simultanément les deux espaces en question et en déclarant chaque variété du premier espace incidente à chaque variété du second.

(2.2) *On associera à la somme directe de deux espaces la réunion disjointe des schémas associés à ces espaces.*

Moyennant cette convention, la constatation faite ci-dessus peut s'exprimer comme suit :

(2.3) *Les variétés linéaires de $\mathscr{P}_n$ incidentes à une variété donnée, appartenant à la famille $\mathscr{F}_s$, constituent l'être géométrique (espace projectif ou somme directe d'espaces projectifs) dont le schéma associé s'obtient en retirant du schéma $\mathbf{A}_n$ le sommet s et les traits qui y aboutissent.*

Notons que (2.1) est une conséquence immédiate de (2.2) et (2.3).

Soient $G^{(n)}$ le groupe des projectivités de $\mathscr{P}_n$, et $G_1^{(n)}, G_2^{(n)}, ..., G_n^{(n)}$ les sous-groupes de $G^{(n)}$ formés respectivement par les projectivités conservant un point, une droite, ..., un hyperplan, deux à deux incidents, donnés dans $\mathscr{P}_n$. Les points, les droites, ..., les hyperplans de $\mathscr{P}_n$ peuvent alors être représentés, de la façon usuelle, par les classes latérales à droite de $G_1^{(n)}, G_2^{(n)}, ..., G_n^{(n)}$ dans $G^{(n)}$ (c'est-à-dire par les points des espaces homogènes $G^{(n)}/G_1^{(n)}, G^{(n)}/G_2^{(n)}, ..., G^{(n)}/G_n^{(n)}$), et deux variétés linéaires sont incidentes si et seulement si les classes latérales qui leurs correspondent ont une intersection non vide. Ainsi, tout propriété de l'espace $\mathscr{P}_n$ peut se traduire sous forme d'une propriété du groupe $G^{(n)}$ et des sous-groupes $G_i^{(n)}$; en particulier, les liens existant, comme il a été vu plus haut, entre les espaces projectifs $\mathscr{P}_n$ des diverses dimensions et les schémas $\mathbf{A}_n$, donnent lieu à des liens entre ces mêmes schémas et les divers groupes $G^{(n)}$ et $G_i^{(n}$, liens que nous n'expliciterons pas ici, la question devant être reprise dans un cadre plus large au paragraphe suivant.

§ 3 – Systèmes complets de géométries, schémas associés, collections

3. Une *géométrie* $\Gamma(\mathscr{E};\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,...,\mathscr{F}_n;\iota;\mathbf{A})$ sera caractérisée par la donnée d'un ensemble d'*éléments* $\mathscr{E}$, répartis en *familles* $\mathscr{F}_i$, d'une *relation d'incidence* ι – relation binaire réflexive et symétrique définie sur cet ensemble – et d'un *groupe*[14] *d'"automorphismes"* de la structure ainsi définie, c'est-à-dire de permutations des éléments de $\mathscr{E}$ *conservant chaque famille* $\mathscr{F}_i$ ainsi que la relation ι. On devra admettre, pour la simplicité de l'exposé, que certaines des familles $\mathscr{F}_i$ puissent être vides. Le nombre n des familles $\mathscr{F}_i$, que nous supposerons fini, sera appelé l'*indice* de la géométrie Γ.

Exemples. (3.1) Soient K un corps quelconque, commutatif ou non, $\mathscr{P}_n$ l'espace projectif à n dimensions sur K, $\mathscr{F}_i$ l'ensemble des variétés linéaires de dimension $i-1$ de $\mathscr{P}_n$, $\mathscr{E}$ la réunion des ensembles $\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,\ldots,\mathscr{F}_n$, ι la relation d'incidence usuelle entre variétés linéaires de $\mathscr{P}_n$ et $\mathbf{A}$ le groupe des projectivités (transformations linéaires) de $\mathscr{P}_n$. Nous appellerons *géométrie de* $\mathscr{P}_n$, ou *géométrie projective à n dimensions sur K,* la géométrie $\Gamma(\mathscr{E};\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,...,\mathscr{F}_n;\iota;\mathbf{A})$.

(3.2) Soient K et $\mathscr{P}_n$ définis comme ci-dessus, et considérons une polarité τ (resp., K étant supposé commutatif, une hyper-quadrique χ) non dégénérée, donnée dans $\mathscr{P}_n$. Une variété linéaire à $i-1$ dimensions est dite appartenir à τ (resp. à χ) si elle est contenue dans sa variété polaire, à $n-i$ dimensions, par rapport à τ (resp. si elle est contenue dans χ) ; soient $\mathscr{F}_i$ l'ensemble de ces variétés, $\mathscr{E}$ la réunion des $\mathscr{F}_i$, r la valeur maximum de i telle que $\mathscr{F}_i$ ne soit pas vide, ι la relation d'incidence usuelle entre éléments de $\mathscr{E}$, et $\mathbf{A}$ le groupe des projectivités de $\mathscr{P}_n$ conservant τ (resp. χ). Nous appellerons *géométrie de la polarité* τ (*de l'hyperquadrique* χ) la géométrie $\Gamma(\mathscr{E};\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,...,\mathscr{F}_r;\iota;\mathbf{A})$, sauf si K est commutatif, $n=2r-1$, et si τ est la polarité par rapport à une hyper-quadrique χ (resp. si $n=2r-1$ et si la polarité τ associée à χ n'est pas dégénérée). On sait que, dans cette dernière éventualité, les variétés à $r-1$ dimensions appartenant à τ (ou à χ) se répartissent en deux "modes", $\mathscr{F}'_r$, et $\mathscr{F}''_r$, tels que toute variété à $r-2$ dimensions appartenant à τ (à χ) soit l'intersection de deux variétés à $r-1$ dimensions de modes contraires, bien déterminées ; désignons par $\mathscr{E}^+$ le complémentaire de $\mathscr{F}_{r-1}$ dans $\mathscr{E}$, par $\mathbf{A}^+$ le sous-groupe de $\mathbf{A}$ formé des projectivités conservant chacun des modes de variétés à $r-1$ dimensions, $\mathscr{F}'_r$, et $\mathscr{F}''_r$, et par ι^+ la relation d'incidence ι élargie par la convention suivante : deux variétés à $r-1$ dimensions de modes contraires seront incidentes (pour ι^+) si leur intersection est une variété à $r-2$ dimensions ; nous appellerons alors, dans ce cas, géométrie de τ (ou de χ), la géométrie $\Gamma(\mathscr{E}^+;\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,...,\mathscr{F}_{r-2},\mathscr{F}'_r,\mathscr{F}''_r;\iota^+;\mathbf{A}^+)$.

(3.3) Nous appellerons *somme directe* de deux géométries $\Gamma'(\mathscr{E}';\mathscr{F}'_1,...,\mathscr{F}'_{n'};\iota';\mathbf{A}')$ et $\Gamma''(\mathscr{E}'';\mathscr{F}''_1,...,\mathscr{F}''_{n''};\iota'';\mathbf{A}')$ la géométrie $\Gamma(\mathscr{E}'\cup\mathscr{E}'';\mathscr{F}'_1,...,\mathscr{F}'_{n'},\mathscr{F}''_1,...,\mathscr{F}''_{n''};\iota;\mathbf{A}'\times\mathbf{A}'')$, où $\mathbf{A}$' $\times$

[14]La considération du groupe $\mathbf{A}$ n'est pas toujours indispensable et il y a parfois intérêt à en faire abstraction, c'est-à-dire à envisager des géométries définies seulement comme ensembles d'éléments répartis en familles et munis d'une relation d'incidence. Pour faire rentrer ces géométries "agroupales" dans le cadre de notre étude, il suffit de convenir que le groupe $\mathbf{A}$ qui leur correspond est réduit à l'élément neutre.

A" opère de la façon naturelle sur $\mathscr{E}' \cup \mathscr{E}''$, et où la relation d'incidence ι est définie comme suit : ι se réduit respectivement à ι' et à ι'' sur $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}''$, et tout élément de $\mathscr{E}'$ est incident (pour ι) à tout élément de $\mathscr{E}''$.

(3.4) Etant donné un élément quelconque $a \in \mathscr{E}$, que nous supposerons pour fixer les idées appartenir à la famille $\mathscr{F}_1$, nous appellerons *géométrie résiduelle de la géométrie* $\Gamma(\mathscr{E}; \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n; \iota; \mathbf{A})$ par rapport à l'élément a, la géométrie $\Gamma'(\mathscr{E}'; \mathscr{F}'_2, \ldots, \mathscr{F}'_n; \iota'; \mathbf{A}')$ définie comme suit : $\mathscr{E}'$ est l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ incidents à a et n'appartenant pas à $\mathscr{F}_1$[15], $\mathscr{F}'_i = \mathscr{E}' \cap \mathscr{F}_i$ est l'ensemble des éléments de $\mathscr{F}_i$ incidents à a, ι' est la restriction de ι à $\mathscr{E}'$ et **A**' est le groupe des éléments de **A** qui conservent a, considéré comme opérant sur $\mathscr{E}'$.

Nous dirons qu'un ensemble, fini ou infini, de géométries est un *système complet* si toute géométrie résiduelle d'une géométrie de l'ensemble est isomorphe à une géométrie de l'ensemble. Il en est ainsi par exemple de l'ensemble des géométries projectives des diverses dimensions sur un corps donné K quelconque.

4. Considérons un système complet Σ de géométries, et demandons-nous s'il est possible, comme dans le cas des géométries projectives (cf. § 2), d'associer biunivoquement aux géométries P du système Σ des "schémas" $S(P)$ tels que la condition suivante soit remplie :

(4.1) Les "sommets" du schéma $S(\Gamma)$ représentent les familles d'éléments de Γ, et le schéma associé à la géométrie résiduelle de Γ par rapport à un élément a s'obtient en retirant de $S(\Gamma)$ le sommet correspondant à la famille à laquelle appartient a.

La réponse est en général négative. En effet, pour qu'il existe de tels schémas, il est évidemment nécessaire que toute géométrie Γ appartenant à Σ possède la propriété suivante :

(4.2) Les géométries résiduelles de Γ par rapport à deux éléments quelconques d'une même famille sont isomorphes entre elles. Nous allons voir que cette condition est aussi suffisante pourvu qu'on donne un sens suffisamment large au mot "schéma".

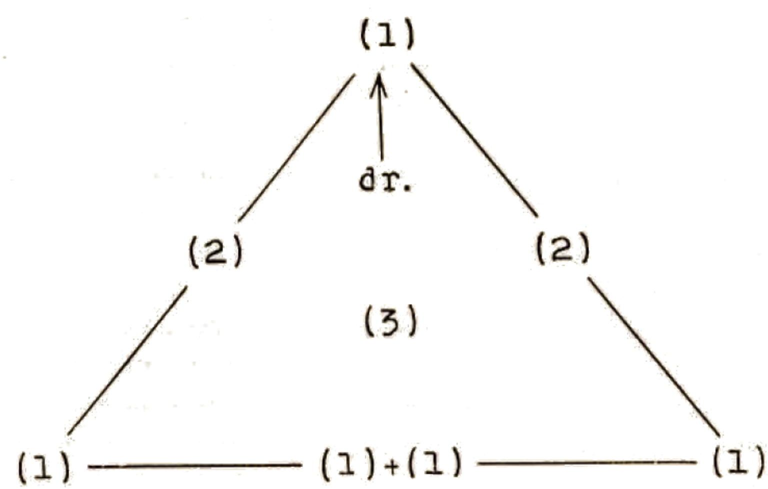
Considérons un système complet Σ de géométries possédant toutes la propriété (4.2). Nous commencerons par définir la *géométrie* $\Gamma_{i_1,\ldots,i_r}$ *résiduelle d'une géométrie* Γ *par rapport à un ensemble de familles d'éléments de* Γ*,* $\mathscr{F}_{i_1}, \ldots, \mathscr{F}_{i_r}$. S'il est possible de trouver des éléments $a_{i_1} \in \mathscr{F}_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \in \mathscr{F}_{i_r}$, Γ_{i_1} sera la géométrie résiduelle de Γ par rapport à a_{i_1}, Γ_{i_1,i_2} la résiduelle de Γ_{i_1} par rapport à $a_{i_2}, \ldots$, et $\Gamma_{i_1,\ldots,i_r}$ la résiduelle de $\Gamma_{i_1,\ldots,i_{r-1}}$ par rapport à a_{i_r} ; sinon, $\Gamma_{i_1,\ldots,i_r}$ sera la "géométrie vide" (sans élément) d'indice $n-r$, n étant l'indice de Γ. La condition (4.2) étant remplie pour *toutes* les géométries de Σ, la géométrie $\Gamma_{i_1,\ldots,i_r}$, ainsi définie, ne dépend pas de l'ordre des indices $i_1, \ldots, i_r$ ni du choix des éléments $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$.

On pourra à présent associer aux géométries de Σ des schémas satisfaisant à la condition (4.1) en

[15] On peut songer aussi à la géométrie Γ'' constituée par *tous* les éléments de $\mathscr{E}$ incidents à a. Toutefois, nous serons amenés dans la suite à considérer surtout des géométries Γ telles que deux éléments distincts d'une même famille ne soient jamais incidents ; pour de telles Γ, Γ'' est la somme directe de Γ' et de la géométrie réduite au seul élément a.

procédant comme suit. Soit $\Gamma \in \Sigma$ une géométrie d'indice n. Considérons un simplexe S à $n-1$ dimensions dont nous mettons les sommets $s_1, ..., s_n$ en correspondance avec les familles d'éléments de $\Gamma, \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$; attachons ensuite à chaque face $(s_{i_1}, ..., s_{i_r})$ de S un symbole représentant la géométrie résiduelle de Γ par rapport à l'ensemble de toutes les familles $\mathscr{F}_i$ avec $i \neq i_1, ..., i_r$, ainsi que des signes individualisant autant qu'il est nécessaire les divers sommets de cette face. L'ensemble formé par le simplexe S et les symboles et signes attachés à ses diverses faces constituera le schéma $S(\Gamma)$ associé à la géométrie Γ.

Un exemple permettra de mieux comprendre la construction précédente. Soit Σ le système des géométries projectives et des sommes directes de géométries projectives sur un corps donné quelconque, commutatif ou non, possédant des antiautomorphismes.



Représentons par (n) la géométrie projective à n dimensions et par $+$ l'opération de somme directe. Le schéma associé à la géométrie (3), par exemple, est alors celui de la fig. 2. La flèche indique celui des trois sommets du simplexe qui correspond aux droites de (3) ; aucun signe n'est nécessaire pour distinguer les points et les droites des géométries (2), ni les points et les plans de la géométrie (3), ceci en vertu du principe de dualité.

Nous avons ainsi montré la possibilité d'associer aux géométries d'un système complet Σ de géométries possédant la propriété (4.2) des schémas satisfaisant à la condition (4.1). On voit cependant que les schémas obtenus sont plus complexes que ceux de la fig. 1, et qu'en particulier une représentation graphique plane fait défaut pour les schémas associés aux géométries d'indice $n \geqslant 4$. Nous nous proposons d'indiquer à présent comment on peut, sous certaines conditions, simplifier les schémas introduits ici et, en particulier, les ramener dans le cas des géométries projectives aux schémas $\mathbf{A}_n$ de la fig. 1.

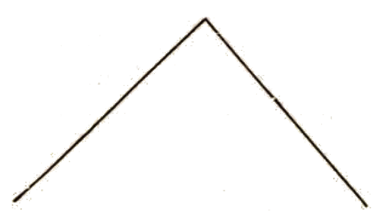
Nous appellerons *schéma à k dimensions* d'une géométrie Γ la partie du schéma de Γ constituée par les faces de dimension $\leqslant k$ du simplexe correspondant et les symboles et signes qui leurs sont attachés. Remarquons alors que, dans la construction des schémas associés aux géométries de Σ, les symboles représentant les diverses géométries de Σ peuvent être remplacées par des signes quelconques (y compris, éventuellement, le "signe vide", c'est-à-dire l'absence de signe), et qu'*il n'est pas nécessaire que les signes utilisés soient tous différents entre eux* ; il suffit, en effet, qu'ils permettent de distinguer entre elles les géométries de même indice n qui auraient même schéma à $n-2$ dimensions. Une remarque analogue peut être faite pour les signes individualisant les sommets. En particulier, s'il existe un entier k tel que la condition suivante soit remplie :

(4.3_k) Les schémas à k dimensions des géométries de Σ sont tous différents deux à deux, et les sommets du schéma $S(\Gamma)$ de toute géométrie $P \in \Sigma$ sont individualisés autant qu'il est nécessaire par la donnée du schéma partiel à k dimensions.

Il est inutile d'attacher aucun signe ou symbole aux faces de dimension $> k$ des simplexes constituant les schémas $S(\Gamma)$, et ceux-ci se réduisent alors simplement aux schémas à k dimensions correspondants. Notons encore, dans le cadre de la même remarque, qu'il y a intérêt à supprimer systématiquement – c'est-à-dire à remplacer par le "signe vide" – les symboles représentant des géométries qui sont des sommes directes ; lorsqu'on fait cette convention, les schémas associés aux géométries de Σ jouissent de la propriété suivante :

(4.4) Le schéma associé à la somme directe de deux géométries est la réunion disjointe des schémas associés à ces géométries.

Pour illustrer les remarques précédentes, reprenons l'exemple du système Σ des géométries projectives et des sommes directes de géométries projectives sur un corps K possédant des antiautomorphismes. Σ contenant une seule géométrie d'indice 1, le symbole correspondant (1) peut être supprimé (ou, éventuellement, remplacé par un point). En vertu de la convention générale préconisée ci-dessus nous supprimerons aussi le symbole $(1)+(1)$, tandis que le symbole (2) sera remplacé par un simple trait.



Enfin, on peut supprimer tous les signes et symboles attachés aux simplexes de dimension > 1, le système Σ jouissant de la propriété (4.3_1). Avec ces conventions, le schéma de la fig. 2, par exemple, devient celui de la fig. 3, qui n'est autre que le schéma $\mathbf{A}_3$ (à une déformation près conservant le schéma à 1 dimension, le seul qui importe ici).

5. Dans la suite, nous aurons fréquemment à considérer des ensembles $G(G_1, ..., G_n)$ formés d'un groupe G et de sous-groupes de celui-ci, $G_1, ..., G_n$, en nombre n fini. Nous donnerons le nom de *collection d'indice n* à un tel ensemble. La *somme directe* de deux collections $G(G_1, ..., G_n)$ et $G'(G'_1, ..., G'_{n'})$ sera la collection $(G \times G')(G_1 \times G', ..., G_n \times G', G \times G'_1, ..., G \times G'_{n'})$.

Généralisant ce qui a été vu au § 2 à propos des groupes projectifs, nous pouvons associer à toute collection $G(G_1, ..., G_n)$ une géométrie $\Gamma(\mathscr{E}; \mathscr{F}_1, ..., \mathscr{F}_n; \iota; \mathbf{A})$, définie comme suit : la famille $\mathscr{F}_i$ est l'ensemble G/G_i , des classes latérales à droite de G_i dans G, $\mathscr{E}$ est la réunion des $\mathscr{F}_i$, deux éléments de $\mathscr{E}$ sont incidents pour ι si leur intersection – lorsqu'on les considère comme sous-ensembles de G

– n'est pas vide, et $\mathbf{A}$ est le groupe G opérant de la façon usuelle sur $\mathscr{E}$; ce groupe est isomorphe à G/U, où U est l'intersection

$$\bigcap_{g\in G,\ i}(g^{-1}G_i g),$$

c'est-à-dire le plus grand sous-groupe invariant de G contenu simultanément dans tous les G_i. La géométrie Γ ainsi définie sera encore notée $\Gamma(G; G_1, ..., G_n)$.

Les géométries $\Gamma(\mathscr{E}; \mathscr{F}_i; \iota; \mathbf{A}) = \Gamma(G; G_i)$ ne sont pas des géométries quelconques. En particulier, elles possèdent les propriétés suivantes :

(5.1) $\mathbf{A}$ est transitif sur chaque famille $\mathscr{F}_i$.

(5.2) Aucune des familles $\mathscr{F}_i$ n'est vide.

(5.3) Deux éléments distincts d'une même famille ne sont jamais incidents.

(5.4) $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_j$ étant deux familles données quelconques, $\mathbf{A}$ est transitif sur les couples d'éléments incidents (a, a') avec $a \in \mathscr{F}_i$ et $a' \in \mathscr{F}_j$.

(5.5) Il est possible de choisir dans chaque famille $\mathscr{F}_i$ un élément a_i, de façon que les a_i soient deux à deux incidents.

On peut, à l'aide de ces propriétés, donner des géométries $\Gamma(G; G_i)$ et des systèmes complets de telles géométries les caractérisations très simples que voici :

Pour qu'une géométrie $\Gamma(\mathscr{E}; \mathscr{F}_i; \iota; \boldsymbol{A})$ *soit de la forme* $\Gamma(G; G_i)$*, il faut et il suffit qu'elle possède les propriétés* (5.1), (5.3), (5.4) *et* (5.5), *ou encore, les propriétés* (4.2), (5.3), (5.4) *et* (5.5).

Pour que les géométries d'un système complet soient toutes de la forme $\Gamma(G; G_i)$*, il faut et il suffit qu'elles possèdent les propriétés* (5.1), (5.2) et (5.3).

Considérons, en effet, une géométrie $\Gamma(\mathscr{E}; \mathscr{F}_i; \iota; \mathbf{A})$ possédant la propriété (5.5), et soient a_i des éléments choisis comme dans l'énoncé de cette propriété et $\mathbf{A}_i$ le groupe des éléments de $\mathbf{A}$ conservant a_i. Formons la géométrie $\Gamma(\mathbf{A}\ ;\ \mathbf{A}_i) = \Gamma(\mathscr{E}'; \mathscr{F}'_i; \iota'; \mathbf{A}')$. Les $\mathscr{F}'_i$ sont des sous-ensembles de $\mathscr{F}_i$ et ι' est une relation plus fine que la restriction de ι à $\mathscr{E}'$. Il est facile de voir que $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}'_i$ si et seulement si Γ possède la propriété (5.1) et que $\iota = \iota'$ si elle possède en outre les propriétés (5.3) et (5.4). De plus, la propriété (4.2) est une conséquence immédiate de la propriété (5.1) qui, à son tour, résulte des propriétés (5.4), (5.5) et (4.2). La première proposition énoncée ci-dessus se trouve ainsi démontrée, et la seconde s'en déduit immédiatement si l'on observe que (5.4) ne fait qu'exprimer la propriété (5.1) pour les résiduelles de Γ par rapport à ses divers éléments (Γ étant supposée posséder elle-même la propriété (5.1)) tandis que (5.5) exprime l'existence de résiduelles successives de Γ possédant la propriété (5.2).

Notons que si une géométrie $\Gamma(\mathscr{E}; \mathscr{F}_i; \iota; \mathbf{A})$ jouit des propriétés (5.1), (5.3), (5.4) et (5.5), elle peut se mettre d'une infinité de façon sous la forme $\Gamma(G; G_i)$, la forme $\Gamma(\mathbf{A}\ ;\ \mathbf{A}_i)$ envisagée plus haut étant *minimum*, en ce qu'on la déduit de toute autre forme $\Gamma(G; G_i)$ en passant au quotient par le plus grand sous-groupe invariant U de G contenu dans l'intersection des G_i, c'est-à-dire que les collections $(G/U)(G_1/U, ..., G_n/U)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n)$ sont isomorphes.

6. Les conditions définissant un système complet de géométries de la forme $\Gamma(G; G_i)$ ont été données au n° 5 sous forme "géométrique" ; nous nous proposons de les exprimer à présent en termes de

groupes. Pour cela, nous devrons au préalable dire quelques mots concernant les résiduelles des géométries $\Gamma(G; G_i)$.

Étant donnée une géométrie $\Gamma(G; G_i)$, désignons par $\Gamma^{(j)}(\mathscr{E}^{(j)}; \mathscr{F}_i^{(j)}(i \neq j); \iota^{(j)}; \mathbf{A}^{(j)})$ sa résiduelle par rapport à la famille $\mathscr{F}_j$ correspondant à G_j. Il résulte de la définition de $\Gamma(G; G_i)$ que $\mathscr{F}_i^{(j)} = G_j/(G_i \cap G_j)$ est l'ensemble des classes latérales à droite de $G_i \cap G_j$ dans G_j, et que $\mathbf{A}^{(j)}$ est le groupe G_j opérant de la façon usuelle sur cet ensemble. Est-ce à dire que $\Gamma^{(j)}$ s'identifie avec la géométrie $\Gamma'^{(j)}\Gamma(G_j; G_i \cap G_j(i \neq j))$? La réponse est en général négative ; les deux géométries en question ont les mêmes éléments, mais la relation d'incidence $\iota'^{(j)}$ de $\Gamma'^{(j)}$ est plus fine que la relation $\iota^{(j)}$: deux éléments $(G_i \cap G_j)g = (G_i g) \cap G_j$ et $(G_k \cap G_j)g' = (G_k g') \cap G_j (g, g' \in G_j)$ sont incidents pour $\iota'^{(j)}$ lorsque $(G_i g) \cap (G_k g') \cap G_j \neq 0$, tandis qu'ils sont incidents pour $\iota^{(j)}$ dès que $(G_i g) \cap (G_k g') \neq 0$. Un simple calcul montre que ces conditions sont équivalentes si et seulement si on a l'identité suivante :

$$(G_i G_j) \cap (G_k G_j) = (G_i \cap G_k) G_j, \tag{6.1}$$

où AB désigne l'ensemble des éléments de la forme ab avec $a \in A$ et $b \in B$. Si cette identité est vérifiée quels que soient i et k, on a $\Gamma^{(j)} = \Gamma'^{(j)}$; sinon, la relation $\iota^{(j)}$ est strictement moins fine que la relation $\iota'^{(j)}$ et puisque les géométries $\Gamma^{(j)}$ et $\Gamma'^{(j)}$ ont le même groupe, la première ne peut jouir de la propriété (5.4). Nous voyons donc que

La géométrie $\Gamma^{(j)}$ résiduelle d'une géométrie $\Gamma(G; G_i)$ par rapport à la famille correspondant à G_j est une géométrie de la même forme si et seulement si la relation (6.1) *est vérifiée quels que soient i et k ; on a alors $\Gamma^{(j)} = \Gamma(G_j; G_i \cap G_j(i \neq j))$.*

Nous sommes à présent en mesure d'exprimer en termes de groupes les conditions pour qu'un ensemble de géométries de la forme $\Gamma(G; G_i)$ constitue un système complet. Pour simplifier l'énoncé, nous supposerons les géométries envisagées mises sous leur forme minimum (cf. n° 5) $\Gamma(\mathbf{A}; \mathbf{A}_i)$, les collections $\mathbf{A}(\mathbf{A}_i)$ jouissant de la propriété suivante :

(6.2) Le groupe $\mathbf{A}$ ne possède pas de sous-groupe invariant non trivial contenu dans l'intersection des $\mathbf{A}_i$.

Etant donné un ensemble de collections $\boldsymbol{A}^\lambda(\boldsymbol{A}_i^\lambda)$ jouissant de la propriété (6.2), *pour que les géométries $\Gamma^\lambda = \Gamma(\mathbf{A}^\lambda; \mathbf{A}_i^\lambda)$ forment un système complet, il faut et il suffit que les conditions* (6.3) *et* (6.4) *ci-après soient remplies :*

(6.3) Pour tous λ, i, j, k,

$$(\mathbf{A}_i^\lambda \mathbf{A}_j^\lambda) \cap (\mathbf{A}_k^\lambda \mathbf{A}_j^\lambda) = (\mathbf{A}_i^\lambda \cap \mathbf{A}_k^\lambda)\mathbf{A}_j^\lambda;$$

(6.4) Soit U_j^λ le plus grand sous-groupe invariant de $\mathbf{A}_j^\lambda$ contenu dans l'intersection $\bigcap_i \mathbf{A}_i^\lambda$. Alors, la collection $\mathbf{B}^\lambda(\mathbf{B}_i^\lambda(i \neq j))$, avec $\mathbf{B}^\lambda = \mathbf{A}_j^\lambda/U_j^\lambda$ et $\mathbf{B}_i^\lambda = (\mathbf{A}_i^\lambda \cap \mathbf{A}_j^\lambda)/U_j^\lambda$, est isomorphe à une collection $\mathbf{A}^\mu(\mathbf{A}_i^\mu)$ qui sera nommée la *résiduelle de la collection $\boldsymbol{A}^\lambda(\boldsymbol{A}_i^\lambda)$ par rapport à $\boldsymbol{A}_j^\lambda$.*

7. En combinant les principaux résultats des n^os^ 4, 5 et 6, nous pouvons énoncer les conclusions suivantes.

Soit $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$ un ensemble de collections satisfaisant aux conditions (6.2), (6.3) *et* (6.4). *Les géométries $\Gamma^\lambda = \Gamma(\mathbf{A}^\lambda; \mathbf{A}_i^\lambda)$*, associées à ces collections jouissent des propriétés (5.1), (5.2) *et* (5.3) *et forment un système complet ; on peut donc leur associer, selon le n^o 4, des schémas $S^\lambda = S(\Gamma^\lambda)$ que nous dirons aussi associés aux collections $\boldsymbol{A}^\lambda(\boldsymbol{A}_i^\lambda)$. Entre les collections $\boldsymbol{A}^\lambda(\boldsymbol{A}_i^\lambda)$, les géométries Γ^λ et les schémas S^λ associés existent les liens suivants :*

(7.1) *le groupe de la géométrie Γ^λ est le groupe $\boldsymbol{A}^\lambda$;*

(7.2) *les familles d'éléments $\mathscr{F}_i^\lambda$ de la géométrie Γ^λ et les sommets s_i^λ du schéma S^λ sont en correspondance biunivoque canonique avec les $\boldsymbol{A}_i^\lambda$; les notations seront supposées choisies de telle façon que les $\boldsymbol{A}_i^\lambda, \mathscr{F}_i^\lambda$ et s_i^λ correspondants soient affectés du même indice i ;*

(7.3) *la géométrie et le schéma associés à la collection résiduelle de $\boldsymbol{A}^\lambda(\boldsymbol{A}_i^\lambda)$ par rapport à $\boldsymbol{A}_i^\lambda$ sont respectivement la géométrie résiduelle de Γ^λ par rapport à $\mathscr{F}_i^\lambda$ et le schéma résiduel de S^λ par rapport à s^λ, c'est-à-dire, le schéma obtenu en retirant de S^λ le sommet s_i^λ et tous les éléments de S^λ auxquels il appartient ;*

(7.4) *si la collection $\boldsymbol{A}^\lambda(\boldsymbol{A}_i^\lambda)$ est la somme directe de deux autres collections de l'ensemble considéré, la géométrie Γ^λ et le schéma S^λ sont respectivement la somme directe des géométries et la juxtaposition des schémas associés à celles-ci.*

Tout système complet de géométries jouissant des propriétés (5.1), (5.2) *et* (5.3) *peut être obtenu comme système des $\Gamma^\lambda = \Gamma(\boldsymbol{A}^\lambda; \boldsymbol{A}_i^\lambda)$ pour un choix convenable, bien déterminé, des collections $\boldsymbol{A}^\lambda(\boldsymbol{A}_i^\lambda)$.*

§ 4 – Les groupes de Chevalley

8. Pour toute algèbre de Lie complexe simple $\mathfrak{g}$ et tout corps commutatif K, C. Chevalley définit, dans [2], un groupe bien déterminé G_K. Nous appellerons *groupes de Chevalley sur K* les groupes G_K et les produits directs d'un nombre fini de tels groupes. À toute algèbre de Lie complexe semi-simple est ainsi associée un groupe de Chevalley sur tout corps commutatif.

La base de l'application des résultats du § 3 aux groupes de Chevalley est fournie par l'observation suivante : il existe un procédé permettant de choisir dans chaque groupe de Chevalley G des sous-groupes G_i en nombre fini de façon que, pour un corps K donné, l'ensemble des collections $G(G_i)$ satisfasse aux conditions (6.2), (6.3) et (6.4) et que, de plus, le schéma S associé à la collection $G(G_i)$, selon les conclusions du n^o 7, soit le schéma de Witt-Dynkin de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspondant à G[16].

Pour être complet, nous donnerons ici la définition des groupes G_i, bien qu'elle ne soit pas explicitement utilisée dans la suite. Le corps K sera supposé donné une fois pour toutes. Supposons tout d'abord que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspondant à G soit simple et reprenons la terminologie et

[16] Il faudrait dire, en toute rigueur, que les schémas de Witt-Dynkin *peuvent* être pris, en conformité avec le n^o 7, comme schémas associés des collections $G(G_i)$.

les notations de Chevalley. Soient $a_1 ..., a_l$ un système fondamental de racines de $\mathfrak{g}$ et $\mathscr{A}_i (i = 1, ..., l)$ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires des racines $a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_l$. Alors, G_i est le sous-groupe de G engendré par $\mathfrak{U}, \mathfrak{H}$ et les $\mathfrak{X}_{-r}$, avec $r \in \mathscr{A}_i$ (cf. [2]). Si $\mathfrak{g}$ est une somme directe d'algèbre simples $\mathfrak{g}^\lambda$, la collection $G(G_i)$ sera la somme directe des collections $G^\lambda(G_i^\lambda)$ correspondant à ces algèbres. En s'appuyant sur les résultats de Chevalley, on vérifie sans peine que les collections $G(G_i)$ ainsi définies satisfont effectivement aux conditions (6.2), (6.3) et (6.4) et qu'on peut prendre pour schéma associé à la collection $G(G_i)$ le schéma de Witt-Dynkin de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

Nous énoncerons encore deux autres propriétés des collections $G(G_i)$, qui se déduisent aussi des résultats de Chevalley et qui nous serviront plus loin (cf. n° 9) à donner une nouvelle caractérisation des groupes de Chevalley et des collections $G(G_i)$.

(8.1) Lorsque le rang l de l'algèbre $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire l'indice de la collection $G(G_i)$) est au moins égal à 2, le groupe G est engendré par les sous-groupes G_i.

Notons qu'il résulte immédiatement de cette propriété et de la propriété (6.4), que

(8.1') Lorsque $l \geqslant 2$, G est engendré par deux quelconques des groupes G_i.

(8.2) Si $l \geqslant 2$, le plus grand sous-groupe invariant de $G_i \cap G_j$ contenu dans le groupe $U = \bigcap_i G_i$ est, quels que soient i et j, le produit $U_i U_j$, où U_i désigne, comme précédemment (cf. (6.4)), le plus grand sous-groupe invariant de G_i contenu dans U. En d'autres termes, on a

$$\bigcap_{g \in G_i \cap G_j} g^{-1} U g = \Big(\bigcap_{g \in G_i} g^{-1} U g\Big)\Big(\bigcap_{g \in G_j} g^{-1} U g\Big)$$

Il est intéressant de noter la signification géométrique de ces propriétés. Si on pose $\Gamma(G; G_i) = \Gamma(\mathscr{E}; \mathscr{F}_i; \iota; G)$, la proposition (8.1) peut encore s'exprimer ainsi :

(8.3) Lorsque Γ est d'indice $l > 1$, on ne peut pas décomposer l'ensemble $\mathscr{E}$ en deux sous-ensembles propres $\mathscr{E}^{(1)}$ et $\mathscr{E}^{(2)}$ totalement non incidents, c'est-à-dire tels qu'un élément de $\mathscr{E}^{(1)}$ et un élément de $\mathscr{E}^{(2)}$ ne soient jamais incidents.

La proposition (8.1') peut se traduire :

(8.3') Lorsque $l > 1$, on ne peut décomposer la réunion de deux familles $\mathscr{F}_i$ données quelconques en deux sous-ensembles propres totalement non incidents.

En d'autres termes :

(8.3") Soit $l > 1$. Etant donnés arbitrairement deux familles $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_j$ d'éléments de Γ et deux éléments p et q de $\mathscr{F}_i$, il existe toujours une suite finie $p = p_1, p_2, ..., p_m = q$ formée d'éléments appartenant alternativement à $\mathscr{F}_i$ et à $\mathscr{F}_j$, ayant respectivement p et q comme premier et dernier élément, et telle que deux éléments consécutifs quelconques soient incidents.

Enfin, la proposition (8.2) est équivalente à la suivante :

(8.4) Soient p et q deux éléments quelconques de Γ, incidents entre eux, et $\Gamma(\mathscr{E}(p); \mathscr{F}_i(p); \iota(p); G(p))$ la géométrie résiduelle de Γ par rapport à p. Le groupe des éléments de G qui conservent q ainsi que tous les éléments de Γ incidents à q induit sur $\mathscr{E}(p)$ le groupe de *tous* les éléments de $G(p)$ conservant q et tous les éléments de $\mathscr{E}(p)$ incidents à q.

9. K désignera, comme précédemment, un corps commutatif quelconque, donné une fois pour toute. Pour simplifier le langage, nous appellerons schémas de Witt-Dynkin – sans plus – les schémas de Witt-Dynkin des algèbres de Lie complexes semi-simples, c'est-à-dire les schémas de la fig. 1 et les juxtapositions d'un nombre fini de tels schémas. En vertu des définitions posées au numéro précédent, à tout schéma de Witt-Dynkin sont associés un groupe de Chevalley sur K, G, une "collection sur K", $G(G_i)$, et une "géométrie sur K", $\Gamma(G; G_i)$.

Les schémas de Witt-Dynkin renferment quatre types de liaisons, l'absence de trait, le trait simple, double, triple ; en d'autres termes, ils sont tous composés des quatre schémas "élémentaires" suivants :

$A_1 \times A_1$ A_2 B_2 G_2

Étant donnée la correspondance biunivoque existant entre les schémas de Witt-Dynkin, les collections sur K et les géométries sur K, il est naturel de dire[17] que les collections sur K sont toutes "composées" des quatre collections "élémentaires" correspondant aux schémas de la fig. 4, et que les géométries sur K sont toutes "composées" des quatre géométries "élémentaires" correspondant à ces schémas, à savoir, respectivement, la somme directe $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$ de deux géométries projectives à une dimension sur K, la géométrie projective $\Pi_{2,K}$ à deux dimensions sur K, la géométrie $\Lambda_{3,K}$ d'une polarité nulle de l'espace projectif à 3 dimensions sur K, et une certaine géométrie Φ_K dont nous ne donnerons pas la description explicite. Il reste à déterminer suivant quelle loi s'effectue cette "composition" des collections et des géométries. Les propriétés générales des collections et des géométries sur K, mentionnées plus haut (n° 8), sont évidemment des éléments de cette loi ; on peut voir qu'ils la caractérisent en fait complètement, ce que nous exprimerons encore sous la forme des propositions suivantes :

(9.1) *La collection sur K correspondant à un schéma de Witt-Dynkin donné quelconque est entièrement caractérisée par les propriétés* (6.2), (6.3), (6.4), (8.1) *et* (8.2), *une fois données les collections sur K correspondant aux schémas de la fig. 4.*

(9.2) *La géométrie sur K correspondant à un schéma de Witt-Dynkin donné quelconque est entièrement caractérisée par les propriétés* (5.1), (5.2), (5.3), (8.3) *et* (8.4), *une fois données les géométries sur $K, \Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}, \Pi_{2,K}, \Lambda_{2,K}, \Phi_K$, correspondant aux schémas de la fig. 4.*

On doit chaque fois supposer, bien entendu, que les relations fondamentales (7.2) et (7.3) entre les collections ou les géométries d'une part, et les schémas associés de l'autre, sont satisfaites.

[17] Nous devons à P. Libois cette remarque, qui est à la base des développements de ce n°.

Nous ne démontrerons ici, à titre d'exemple, les deux propositions précédentes, que dans le cas particulier des groupes de type $\mathbf{A}_3$ (cf. n° 10). Des indications concernant d'autres groupes, notamment les groupes des types exceptionnels $\mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7$, et $\mathbf{E}_8$, sont données dans [15] et [16].

Il est à noter que les propriétés (5.1), (5.2), etc., outre qu'elles constituent une définition axiomatique des géométries associées aux groupes de Chevalley, sont un outil très maniable pour l'étude de ces géométries. Les développements du n° 10, et ceux qu'on peut trouver dans les deux articles [15] et [16] précités, montrent en effet qu'on peut déduire de ces propriétés générales, par des raisonnements assez simples et de type standard, des propriétés fondamentales spécifiques des diverses géométries en question (telles, par exemple, que les axiomes d'incidence des géométries projectives).

10. Conformément à ce qui a été annoncé ci-dessus, nous nous proposons à présent de déterminer la géometrie sur K, $\Gamma(\mathscr{E};\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_3;\iota;\mathbf{A})$, correspondant au schéma $\mathbf{A}_3$ de la fig. 1 (la famille $\mathscr{F}_i$ correspond par hypothèse au sommet n° i du schéma), en nous appuyant uniquement sur les propositions générales des n$^{\text{os}}$ 5, 7 et 8, et sur la connaissance des géométries $\Pi_{1,K}\times\Pi_{1,K}$ et $\Pi_{2,K}$ correspondant aux deux premiers schémas de la fig. 4 (nous n'aurons pas besoin des autres). Nous appellerons respectivement *points, droites* et *plans* les éléments des familles $\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$.

Il résulte de la correspondance fondamentale (7.3) entre géométries et schémas résiduels, que les géométries résiduelles de Γ par rapport à un point p, une droite d, un plan ϖ, sont respectivement une géométrie $\Pi_{2,K}$ – dont les points et les droites sont respectivement les droites et les plans de Γ incidents à p – une géométrie $\Pi_{1,K}\times\Pi_{1,K}$, une géométrie $\Pi_{2,K}$ – dont les points et les plans sont respectivement les points et les droites de Γ incidents à ϖ. Nous pouvons donc, en particulier, énoncer les propositions suivantes :

(10.1) *Si deux droites d et e sont incidentes à un même point p, il existe un et un seul plan incident à d, e et p.*

(10.2) *Si un point et un plan sont incidents à une même droite, ils sont incidents entre eux.*

(10.3) *Si deux points p et q sont incidents à un même plan ϖ, il existe une et une seule droite incidente à p, q et ϖ.*

De (10.1) et (10.2), il résulte immédiatement que

(10.4) *Deux droites incidentes à un même point sont simultanément incidentes à un et un seul plan.*

Soient p et q deux points distincts quelconques. En vertu de la proposition (8.3"), il existe certainement une suite finie : $p=p_0,d_1,p_1,d_2,...,p_n=q$, dont les éléments sont alternativement des points et des droites, et telle que deux éléments consécutifs quelconques soient incidents. Le plan ϖ incident à d_1 et d_2 (cf. (10.4)) est aussi incident à p_1 et p_2 (cf. 10.2)), donc il existe une droite incidente à p et p_2. On montre de même, de proche en proche, l'existence d'une droite incidente à p et p_3, d'une droite incidente à p et p_4,..., et finalement, d'une droite d incidente à p et q. Celle-ci est unique ; en effet, s'il existait une autre droite e jouissant de la même propriété, les droites d et e seraient incidentes à un même plan (cf. (10.4)) qui serait lui-même incident à p et q (cf. (10.2)), et ceci contredirait la proposition (10.3). Nous avons ainsi montré que

(10.5) *Deux points distincts quelconques sont incidents simultanément à une et une seule droite.*

Considérons à présent un point p quelconque et une droite d non incidente à p, et soient q un point incident à d, e la droite déterminée par p et q (cf. 10.5) et ϖ le plan déterminé par d et e (cf. (10.4)). ϖ est incident à p (cf. (10.2)), et il est le seul plan incident simultanément à p et d ; en effet, tout plan jouissant de cette propriété est incident à q (cf. (10.2)) donc aussi à e (cf. (10.3) et (10.5)), or il existe un seul plan incident simultanément à d et e (cf. (10.4)). En conclusion,

(10.6) *Une droite et un point non incidents entre eux sont incidents simultanément à un et un seul plan.*

Le schéma $\mathbf{A}_3$ étant symétrique par rapport au sommet 2, on peut intervertir les mots "point" et "plan" dans les énoncés précédents. En particulier, les propositions (10.5) et (10.6) donnent lieu, de cette façon, aux suivantes :

(10.7) *Deux plans distincts quelconques sont incidents simultanément à une et une seule droite.*

(10.8) *Une droite et un plan non incidents entre eux sont incidents simultanément à un et un seul point.*

Il résulte des diverses propriétés démontrées ci-dessus, et du fait que la géométrie résiduelle de Γ par rapport à un plan est une géométrie $\Pi_{2,K}$ que les points, droites et plans de Γ peuvent être identifiés avec les points, droites et plans d'un espace projectif $\mathscr{P}_3$ à trois dimensions sur K, la relation ι étant la relation d'incidence usuelle. Il nous reste donc à déterminer le groupe $\mathbf{A}$.

Nous savons que les éléments de $\mathbf{A}$ qui conservent un plan ϖ induisent sur celui-ci le groupe de toutes les projectivités (à deux dimensions). On en déduit sans grande peine, par un raisonnement faisant intervenir la simplicité des groupes $\mathrm{PSL}_3(K)$ et $\mathrm{PSL}_4(K)$ (les notations sont celles de J. Dieudonné [4]), que $\mathbf{A}$ contient le groupe $\mathrm{PSL}_4(K)$ des projectivités unimodulaires de $\mathscr{P}_3$ et qu'il est contenu dans le groupe $\mathrm{PGL}_4(K)$ de toutes les projectivités de $\mathscr{P}_3$. Appliquant alors la proposition (8.4) en prenant pour p et q respectivement un point et un plan, on trouve finalement que $\mathbf{A}$ ne peut être que le groupe $\mathrm{PGL}_4(K)$ tout entier.

Remarques. La proposition (8.4) a été utilisée seulement dans la détermination du groupe $\mathbf{A}$, et non dans celle de l'ensemble $\mathscr{E}$, des familles $\mathscr{F}_i$ et de la relation d'incidence ι. On peut éviter entièrement l'emploi de cette proposition en utilisant l'existence d'une géométrie correspondant au schéma $\mathbf{A}_4$; il faut noter que l'on sort ainsi du système complet minimum contenant la géométrie Γ envisagée. Ces remarques sont encore valables pour les géométries projectives de dimension quelconque sur K ; je ne sais pas dans quelle mesure elles le restent pour les géométries associées aux autres groupes de Chevalley.

11. *Remarques concernant le cas des corps de caractéristique 2 et 3.*

Les flèches figurant sur les deux derniers schémas de la fig. 4 expriment le fait que les géométries $\Lambda_{3,K}$ et Φ_K correspondant à ces schémas ne possèdent pas de propriété de dualité, c'est-à-dire que leurs deux familles d'éléments fondamentaux jouent des rôles non symétriques, contrairement à ce qui se passe pour les géométries $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$ et $\Pi_{2,K}$ correspondant aux deux premiers schémas de la fig. 4. Il y a cependant deux exceptions à cette règle, à savoir, la géométrie $\lambda_{3,K}$ lorsque K est un corps parfait de caractéristique 2 et la géométrie Φ_K lorsque K est un corps parfait de caractéristique 3 ; il en résulte que *si K est un corps parfait de caractéristique 2 (3), il n'y a pas lieu d'affecter d'une flèche les traits doubles (triples) des schémas de Witt-Dynkin.*

Si l'on supprime les flèches affectant les traits doubles sur la fig. 1, on constate que les schémas $\mathbf{B}_n$, et $\mathbf{C}_n$ deviennent identiques tandis que le schéma $\mathbf{F}_4$ devient symétrique c'est-à-dire invariant pour une permutation simultanée des sommets 1, 4 et des sommets 2, 3. Il en résulte que sur un corps parfait K de caractéristique 2, les groupes de types $(\mathbf{B}_n)$ et $(\mathbf{C}_n)$ sont isomorphes (ce qui est bien connu) et ont la même géométrie associée, tandis que le groupe $(\mathbf{F}_4)$ acquiert un automorphisme extérieur de type nouveau correspondant à une dualité de la géométrie associée. De même, sur un corps parfait K de caractéristique 3, le groupe $(\mathbf{G}_2)$ acquiert un automorphisme extérieur correspondant à une dualité de la géométrie associée.

12. *Les groupes de Chevalley d'ordre fini.*

Lorsque le corps K est un champ de Galois, les groupes de Chevalley sur K sont des groupes finis dont les ordres ont été déterminés par Chevalley. À toute algèbre semi-simple complexe $\mathfrak{g}$ de rang r, donc à tout schéma de Witt-Dynking $\mathfrak{g}$ à r sommets (nous représentons par le même symbole une algèbre et son schéma de Witt-Dynkin), on peut associer un système de r entiers $E(\mathfrak{g}) = \{e(i); i = 1, ..., r\}$, tels que l'ordre g du groupe de Chevalley G correspondant à $\mathfrak{g}$ sur le champ de Galois K_q de q éléments soit donné par la formule

(12.1) $$g = q^N.P\mathfrak{g}(q)$$

avec

(12.2) $$N = \textstyle\sum_{e(i)\in E(\mathfrak{g})}(e(i) - 1)$$

et

(12.3) $$P\mathfrak{g}(q) = \prod_{e(i)\in E(\mathfrak{g})} (q^{e(i)} - 1).$$

Les $e(i) \in E(\mathfrak{g})$ ont une signification topologique ; ce sont les entiers qui apparaissent dans le polynôme de Poincaré

$$\textstyle\prod(t^{2e(i)-1} + 1)$$

du groupe compact correspondant à $\mathfrak{g}$ (cf. [2]) ; en particulier, ils sont liés à la dimension d de l'algèbre $\mathfrak{g}$ par la relation

$$d = \Sigma(2e(i) - 1) = 2N + r.$$

$N = 1/2(d - r)$ est égal au nombre des racines positives de $\mathfrak{g}$. Nous reproduisons ci-dessous les systèmes d'entiers $E(\mathfrak{g})$ correspondant aux algèbres $\mathfrak{g}$ simples ; le système $E(\mathfrak{g})$ d'une somme directe d'algèbres simples est la réunion des systèmes d'entiers correspondant à ces algèbres.

$E(\mathbf{A}_r) = 2, 3, ..., r + 1$
$E(\mathbf{B}_r) = 2, 4, ..., 2r$
$E(\mathbf{C}_r) = 2, 4, ..., 2r$
$E(\mathbf{D}_r) = 2, 4, ..., 2r - 2, r$
$E(\mathbf{G}_2) = 2, 6$
$E(\mathbf{F}_4) = 2, 6, 8, 12$
$E(\mathbf{E}_6) = 2, 5, 6, 8, 9, 12$
$E(\mathbf{E}_7) = 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$
$E(\mathbf{E}_8) = 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30.$

Soient G un groupe de Chevalley sur un champ de Galois K_q ,$\mathscr{F}_i$ les familles d'éléments de la géométrie associée à ce groupe et n_i les nombres d'éléments de ces familles. Les $\mathscr{F}_i$ étant des espaces homogènes G/G_i de G, on a $n_i = g/g_i$ où g et g_i sont respectivement l'ordre de G, donné par la formule (12.1), et les ordres des G_i. Ceux-ci se déterminent aisément à partir des résultats de Chevalley et on trouve alors

(12.4) $$n_i = P\mathfrak{g}(q)/((q-1).P\mathfrak{g}_i(q)) = Q\mathfrak{g}_i(q),$$

où $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_i$ désignent respectivement le schéma de Witt-Dynkin correspondant à G et le schéma obtenu en retirant de celui-ci le sommet i correspondant à la famille $\mathscr{F}_i$[18], et où les P sont donnés par la formule (12.3).

La formule (12.4) renferme comme cas particuliers diverses formules énumératives classiques des géométries projectives sur les champs de Galois. Par exemple, le nombre $\nu_{r,s}$ des variétés linéaires à s dimensions de l'espace projectif à r dimensions sur K_q s'obtient en posant dans (12.4) $\mathfrak{g} = \mathbf{A}_r$ et $\mathfrak{g}_i = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_{r-s-1}$, ce qui donne.

$$\nu_{r,s} = Q_{\mathbf{A}_{r,s+1}}(q) = \frac{(q^{r+1}-1)(q^r-1)...(q^{r-s-1}-1)}{(q^{s+1}-1)(q^s-1)...(q-1)};$$

le nombre ρ_{2r-1} des points d'une hyperquadrique (non dégénérée) de dimension impaire $2r-1$ sur K_q s'obtient en faisant dans (12.4) $g = \mathbf{B}_r$ et $g_i = \mathbf{B}_{r-1}$, d'où

$$\rho_{2r-1} = Q_{\mathbf{B}_{r,1}}(q) = (q^{2r}-1)/(q-1);$$

etc.

Notons encore que le polynome Q figurant au second membre de la formule (12.4) a une signification topologique : il résulte en effet de la formule de Hirsch (cf. par ex. [8], [9]) que $Q_{\mathfrak{g},\mathfrak{i}}(t^2)$ est le polynome de Poincaré de la variété complexe constituée par la famille d'éléments correspondant au sommet i de $\mathfrak{g}$ dans la géométrie associée à $\mathfrak{g}$ sur le corps des nombres complexes. Par exemple, le polynome de Poincaré de la grassmannienne des variétés linéaires à s dimensions de l'espace projectif complexe à r dimensions est $Q_{\mathbf{B}_{r,s+1}}(t^2)$; le polynome de Poincaré d'une hyperquadrique complexe non dégénérée à $2r-1$ dimensions est $Q_{\mathbf{B}_{r,1}}(t^2)$; etc.

[18]Si l'on appelle comme précédemment (cf. (6.4)) U_i, le plus grand sous-groupe invariant de G_i contenu dans l'intersection de tous les G_j, le groupe G_i/U_i – et non G_i comme pourraient le laisser croire nos notations – est le groupe de Chevalley sur K correspondant à l'algèbre $\mathfrak{g}_i$.

13. *Les groupes de Chevalley sur le "corps de caractéristique 1".*

Nous avons vu au n° 9 que les groupes de Chevalley sur un corps donné K et les géométries sur K correspondant à tous les schémas de Witt-Dynkin sont déterminés, par l'intermédiaire des propositions générales des n$^{\text{os}}$ 5 à 8, dès qu'on connaît les géométries correspondant aux schémas de la fig. 4. On peut alors songer à associer à ces derniers d'autres géométries que celles indiquées au n° 9, et à rechercher si les propositions générales des n$^{\text{os}}$ 5 à 8 conduisent encore à associer aux autres schémas de Witt-Dynkin (ou éventuellement, à certains d'entre eux) des géométries univoquement déterminées. C'est ce que nous ferons ici.

Nous désignerons par $K = K_1$ le "corps de caractéristique 1" formé du seul élément $1 = 0$[19]. Il est naturel d'appeler *espace projectif à n dimensions sur K*, un ensemble $\mathscr{P}_n$ de $n+1$ points dont tous les sous-ensembles sont considérés comme des variétés linéaires, la dimension d'une variété étant le nombre de points qui la constituent diminué d'une unité, et *projectivité de $\mathscr{P}_n$*, une permutation quelconque de ces points. On définit alors, suivant (3.1), la *géométrie projective à n dimensions sur $K, \Pi_{n,K}$*.

Nous nous proposons de chercher à définir de façon naturelle des géométries sur K correspondant à tous les schémas de Witt-Dynkin, la géométrie $\Pi_{n,K}$ dont il est question ci-dessus correspondant au schéma $\mathbf{A}_n$. Suivant le principe exposé au début de ce n°, nous devons pour cela déterminer les géométries à associer aux quatre schémas de la fig. 4. Les deux premières sont déjà connues d'après ce qui précède ; ce sont les géométries $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$ et $\Pi_{2,K}$, que nous pouvons encore décrire comme les "géométries des polygones à 2 et 3 côtés", en posant la définition générale suivante :

on appellera *géométrie du polygone à n côtés* la géométrie d'indice 2, $\Gamma(\mathscr{E}; \mathscr{S}, \mathscr{C}; \iota; \mathbf{A})$, dont les familles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{C}$ se composent chacune de n éléments (sommets et côtés du polygone) que nous désignerons respectivement par $s_1, ..., s_n$ et $c_1, ..., c_n$, deux éléments s_i et c_j étant incidents pour ι si et seulement si $i = j$ ou $j+1$ (mod. n), et dont le groupe $\mathbf{A}$, isomorphe au groupe diédrique d'ordre $2n$, se compose de toutes les permutations des s_i et des c_i qui conservent la relation d'incidence.

Considérons, dans l'espace projectif $\mathscr{P}_3$ formé de quatre points 1, 2, 3, 4, une *polarité nulle*, c'est-à-dire une correspondance biunivoque points-plans τ telle que chaque point appartienne au plan correspondant, et que la relation "p appartient au plan correspondant à q" soit symétrique en les points p et q. Nous supposerons les points de $\mathscr{P}_3$ numérotés de telle façon que le plan 123 corresponde dans τ au point 2 ; alors, les plans 234, 341 et 412 correspondent respectivement aux points 3, 4 et 1, et les droites appartenant à τ sont les droites 12, 23, 34 et 41. Il en résulte que la *géométrie de la polarité nulle* τ, $\Lambda_{3,K}$ (cf. (3.2)), que nous associerons naturellement au troisième schéma de la fig. 4, est la géométrie du polygone à 4 côtés.

Si la proposition (9.2) reste valable sur le "corps" $K = K_1$, les géométries sur K correspondant aux schémas de la fig. 1, à l'exception de $\mathbf{G}_2$, doivent à présent être parfaitement déterminées par les propositions générales des n$^{\text{os}}$ 5 et 8. On peut voir qu'il en est bien ainsi. Pour être complet, nous devons encore parler du schéma $\mathbf{G}_2$; pour des raisons que nous indiquerons plus loin, il convient de lui associer la géométrie du polygone à 6 côtés.

[19] K_1 n'est généralement pas considéré comme un corps

Les deux familles d'éléments des géométries de polygones jouant toujours des rôles symétriques, les flèches affectant les deux derniers schémas de la fig. 4 doivent être supprimées dans le cas qui nous occupe. Lorsque nous parlerons, dans la suite, des schémas de Witt-Dynkin, il s'agira des schémas définis précédemment, abstraction faite des flèches affectant les traits doubles et triples. Avec cette convention, nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

On peut, de façon naturelle, associer aux schémas de Witt-Dynkin, des géométries sur $K = K_1$ jouissant des propriétés (5.1), (5.2), (5.3), (8.3) *et* (8.4). *Ces géométries sont entièrement caractérisées par le fait que les géométries associées aux quatre schémas de la fig. 4 sont respectivement les géométries des polygones à 2, 3, 4 et 6 côtés.*

Nous désignerons par $\Gamma(\mathfrak{g})$ la géométrie sur $K = K_1$ associée au schéma (à l'algèbre) $\mathfrak{g}$.

La formule (12.4) donnant les nombres d'éléments des familles des géométries associées aux groupes de Chevalley sur un champ de Galois K_q restent valables lorsque $q = 1$. Plus exactement, on constate que les deux termes de la fraction apparaissant au second membre de cette formule renferment un même nombre de fois le facteur $q - 1$, donc qu'elle prend, après simplification, une valeur déterminée, finie et non nulle, pour $q = 1$, à savoir

$$n_i = Q_{\mathfrak{g},i}(1) = (\prod_{e(m)\in E(\mathfrak{g}} e(m)/(\prod_{e(n)\in E(\mathfrak{g}_i)} e(n)),$$

où les notations sont celles introduites au n° 12, et cette valeur n_i est le nombre des éléments de la famille $\mathscr{F}_i$ de la géométrie $\Gamma(\mathfrak{g})$.

Le groupe G de la géométrie $\Gamma(\mathfrak{g})$ n'est autre que le *groupe de Weyl* de l'algèbre $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire le groupe (S) engendré par les symétries par rapport aux racines (cf. [18], p. 338)[20] ; son ordre est (cf. [2])

$$g = \prod_{e(i)\in E(\mathfrak{g})} e(i).$$

On notera que cette formule s'obtient à partir de la formule (12.1) en supprimant les facteurs $q-1$ apparaissant dans le polynome $P_{\mathfrak{g}}(q)$ du second membre et en posant ensuite $q = 1$.

Le groupe de Weyl étant un groupe de permutations des racines de l'algèbre $\mathfrak{g}$, ces dernières peuvent être représentées par des êtres définis dans la géométrie $\Gamma(\mathfrak{g})$. Ces êtres sont pour $\mathfrak{g} = \mathbf{A}_n$, les couples (a, b) formés d'un élément $a \in \mathscr{F}_1$[21] et d'un élément $b \in \mathscr{F}_n$ incidents ;
pour $\mathfrak{g} = \mathbf{B}_n = \mathbf{C}_n$, ou $\mathbf{G}_2$, les éléments des familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$;
pour $\mathfrak{g} = \mathbf{F}_4$, les éléments des familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_4$;
pour $\mathfrak{g} = \mathbf{D}_n, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$, respectivement les éléments des familles $\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_6, \mathscr{F}_6, \mathscr{F}_1$.

Réciproquement, on peut donner une définition générale des géométries $\Gamma(\mathfrak{g})$ basée sur la considération des racines de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

[20]Ce groupe est aussi étroitement lié au groupe de Galois de l'équations des racines de $\mathfrak{g}$, déjà considéré par E. Cartan dans [1] ; de façon plus précise, il en est un sous-groupe invariant et le groupe quotient correspondant est isomorphe au groupe des automorphismes du schéma $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire, des permutations des sommets qui conservent le schéma).

[21]Suivant une convention déjà adoptée précédemment, nous appelons $\mathscr{F}_i$ la famille de $\Gamma(\mathfrak{g})$ correspondant au sommet du schéma $\mathfrak{g}$ numéroté i sur la fig. 1.

Des considérations “géométriques” analogues à celles qui nous ont permis de définir une polarité nulle dans $\mathscr{P}_4$, conduisent aux définitions suivantes : une *hyperquadrique* de dimension $2n$ ou $2n+1$ sur K est un ensemble Q de $2(n+1)$ points répartis en $n+1$ couples, $a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n$, et ses *variétés linéaires* sont tous les sous-ensembles de Q ne contenant aucun des couples (a_i, b_i)[22] ; les hyperquadriques de dimensions $2n$ et $2n+1$ se distinguent entre elles par le fait que dans la première on répartit les n-plans (sous-ensembles de $n+1$ points) en deux modes suivant la parité du nombre de points a_i (ou b_i) qu'ils renferment. Une *projectivité* de l'hyperquadrique définie plus haut est une permutation quelconque des points $a_o, ..., b_n$ conservant le couplage. Avec ces définitions, la géométrie $\Gamma(\mathbf{B}_n) = \Gamma(\mathbf{C}_n)$ (resp. $\Gamma(\mathbf{D}_n)$) est la géométrie d'une hyperquadrique à $2n+1$ (resp. $2n$) dimensions sur K, définie comme au § 3 (cf. (3.2)). Notons incidemment que dans les hyperquadriques sur K se retrouvent plusieurs propriétés importantes des hyperquadriques sur un corps (au sens ordinaire) quelconque, parmis lesquelles, les propriétés fondamentales de l'hyperquadrique de Klein, et la trialité[23]

Nous sommes à présent en mesure de justifier le choix de la géométrie $\Gamma(\mathbf{G}_2)$, associée à $\mathbf{G}_2$. Lorsque K désigne un corps au sens ordinaire, la géométrie sur $K > \Phi_K$, associée à $\mathbf{G}_2$, jouit des propriétés suivantes : on peut représenter les éléments des familles $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_1$ de Φ_K respectivement par les points et certaines droites d'une hyperquadrique à 5 dimensions sur K de telle façon que l'ensemble des éléments de $\mathscr{F}_2$ incidents à un élément donné $p_1 \in \mathscr{F}_1$ soit représenté par l'ensemble des points appartenant à la droite correspondant à p_1, et que l'ensemble des éléments de $\mathscr{F}_1$ incidents à un élément donné $p_2 \in \mathscr{F}_2$ soit représenté par l'ensemble des droites contenant le point correspondant à p_2 et contenues dans un certain plan passant par ce point (cf. [14], p. 130, pour le cas où K est le corps des complexes) ; le groupe de la géométrie Φ_K est alors le groupe de toutes les projectivités de l'hyperquadrique qui conservent la famille des droites représentant les éléments de $\mathscr{F}_1$. Lorsque $K = K_1$, les propriétés précédentes définissent une géométrie Φ_K qui n'est autre que la géométrie du polygone à six côtés ; il est donc naturel de prendre celle-ci pour géométrie $\Gamma(\mathbf{G}_2)$. On arriverait d'ailleurs à la même conclusion en partant d'une définition générale des géométries $\Gamma(\mathfrak{g})$ basée sur la considération des racines de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

La géométrie $\Gamma(\mathbf{E}_6)$ est liée de la façon suivante à la structure des 27 droites d'une surface cubique Σ_3. On peut établir entre les droites de Σ_3 et les éléments de chacune des deux familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_5$ de $\Gamma(\mathbf{E}_6)$, une correspondance biunivoque telle que deux éléments de $\Gamma(\mathbf{E}_6)$ appartenant respectivement à $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_5$ soient incidents si et seulement si les droites correspondantes se coupent ; les éléments de $\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4$ et $\mathscr{F}_6$ correspondent alors respectivement aux couples, aux triples, à des quintuples et aux sextuples (sizains) de droites gauches deux à deux.

Nous ne parlerons pas ici des géométries $\Gamma(\mathfrak{g})$ correspondant aux autres groupes exceptionnels ; bornons-nous à signaler qu'elles se construisent toutes assez aisément à partir de la géométrie $\Gamma(\mathbf{E}_6)$, et que $\Gamma(\mathbf{F}_4)$ peut aussi être obtenue, plus simplement, par la considération de trois hyperquadriques à 6 dimensions en relation de trialité. Nous espérons revenir ultérieurement

[22]En réalité, les hyperquadriques définies ici sont seulement les analogues des hyperquadriques d'indice maximum sur un corps ordinaire.

[23]Une étude générale du principe de trialité a conduit Mlle F. Lenger à envisager des espaces formés de huit points couplés, qui ne sont autres que nos hyperquadriques à 6 dimensions sur K_1 (manuscrits non publiés, 1947).

sur ces questions.

Notons pour terminer que les schémas de Witt-Dynkin ne sont pas les seuls schémas formés de traits simples, doubles ou triples auxquels correspondent effectivement des géométries lorsqu'on associe aux schémas élémentaires de la fig. 4 les géométries des polygones à 2, 3, 4 et 6 côtés.

Références

[1] Cartan, E., Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu. *Amer. J. Math.*, 18 (1896), 1-61. Œuvres complètes, partie 1, vol. 1, 293-353, Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[2] Chevalley, C., Sur certains groupes simples. *Tôhoku Math. Journ.*, 7 (2), (1955), 14-66.

[3] Chevalley, C. et Schafer, R. D., The exceptional simple Lie algebras F_4 and $\mathbf{E}_6$, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 36 (1950), 137-141.

[4] Dieudonné, J., *La géométrie des groupes classiques.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

[5] Dynkin, E. B., La structure des algèbres de Lie semi-simples. *Uspeht Mat. Nauk*, 2 (20) (1947), 59-127. Cf. aussi *Transl. Amer. Math. Soc.*, n° 17.

[6] Freudenthal, H., Oktaven, Ausnahmegruppen, Oktavengeometrie. *Math. Inst. Rijksuniv.* Utrecht, 1951.

[7] ______, Beziehungen der $\mathbf{E}_7$ und $\mathbf{E}_8$ zur Oktavenebene, I, II, III, IV. *Indagationes Math.* 16 (1954), 218-230 et 363-368 ; 17 (1955), 151-157 et 277-285.

[8] Koszul, J. L., Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression. *Coll. de Topologie du C. B. R. M.*, Bruxelles, 1950, 73-81.

[9] Leray, J., Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibrés principaux. *Colloque de Topologie du C. B. R. M.,* Bruxelles, 1950, 101-115.

[10] Tits, J., Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels. *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.*, 39 (1953), 309-329.

[11] _______, Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels $\mathbf{E}_6$ et $\mathbf{E}_7$, *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.*, 40 (1954), 29-40.

[12] _______, Etude géometrique d'une classe d'espaces homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 466-468.

[13] _______, Sur les *R*-espaces. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 850-852.

[14] _______, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie. *Mém. Acad. Roy. Belg.*, 29 (3) (1955).

[15] _______, Sur la géométrie des *R*-espaces. *J. Math. P. et Appl.*, 36 (1957), 17-38.

[16] _______, Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 8 (1955-1957), 48-81.

[17] van der Waerden, B. L., *Gruppen von linearen Transformationen*, Berlin, J. Springer, 1935.

[18] Weyl, H., *Selecta.* Bâle-Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956.

[19] Witt, E., Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe. *Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, 14 (1941), 289-322.

La créativité en musique et en mathématiques

Pierre Boulez et Alain Connes[1]

INTRODUCTION : Bonsoir à tous, je vous souhaite la bienvenue au cœur de l'Ircam dans l'espace de projection pour cette rencontre inédite entre un mathématicien, entre Alain Connes, et un compositeur, Pierre Boulez. Alors, cette rencontre appartient au festival Agora, qui interroge la relation entre l'invention et la contrainte, entre finalement l'intuition et la logique. Et il nous semblait très important de placer ce soir ce point nodal de rencontre, cette tentative de rencontre entre deux mondes qui coexistent et qui, peut être, ont des choses à se dire.

Alors je voulais simplement vous signaler que, évidemment, il sera question de la déduction dans l'opération artistique comme de l'intuition dans l'opération mathématique. Et c'est le *comme* qui est une relation insondable et assez complexe. Gérard Assayag, directeur de l'Unité mixte de recherche CNRS-Ircam, va animer, s'il en est besoin, ce débat, en tout cas, va servir de catalyseur. Et je voulais aussi dire que ce débat s'inscrit dans le cadre de la conférence Mathématiques et musique, conférence internationale qui a lieu au moment d'Agora.

Peut être que cette conférence décrètera l'irréductibilité entre l'invention artistique et l'invention mathématique. Mais irréductible est un terme qui a été interrogé par les mathématiciens. Donc, nous restons dans le domaine mathématique. En guise de lancer, je ne voulais faire qu'une citation, comme on fait souvent en France pour commencer ou pour terminer, une citation du plus intuitif et peut être du plus déductif de tous les esprits, Leibniz, qui disait et qui parlait certainement aux compositeurs autant qu'aux scientifiques : *"Le monde parfait est le monde le plus simple en hypothèses et le plus riche en phénomènes."*.

Je cède la parole à Gérard Assayag.

1. Cette conférence s'est tenue à l'IRCAM le 15 juin 2011. Elle est visionnable à l'adresse : https://medias.ircam.fr/x70ce3e$_{pierre-boulez-et-alain-connes-la-creativ}$

Gérard Assayag : Merci Franck. Nous allons commencer par une courte présentation de Pierre Boulez et ensuite s'engagera un dialogue en partie, mais en partie seulement improvisé.

Pierre Boulez : Bien, alors un petit texte au début, pour lancer un peu le débat, parce que ce n'est pas du tout un texte définitif et dogmatique. C'est un texte, au contraire plutôt sceptique, je dirais. Si, pour rendre compte d'une œuvre, on parle de musique mathématique, il ne s'agit pas d'un alliage très cordial. Ces deux mots, si près l'un de l'autre, indiquent une œuvre rébarbative, sèche, inexpressive, ennuyeuse.

Elle ne vient pas du cœur, ne retourne pas au cœur, pour citer, une fois de plus, ce grand modèle, mais sort du cerveau et ne va même pas à un autre cerveau. C'est donc déjà une sorte de réhabilitation de la réflexion, de la réflexion musicale que de rapprocher directement les deux mots mathématiques, musique, et d'y ajouter le troisième mot contact, mot discret, sans prétention, mais signe d'une volonté on ne peut plus déterminée. Bien évidemment, ce n'est pas la première fois que ce rapprochement est tenté.

Depuis le quadrivium au Moyen Âge, jusqu'aux travaux de Rameau et d'Alembert et jusqu'aux constructions mystiques de Scriabine. On a même beaucoup écrit. Et cependant, il existe toujours une sorte de frontière non dite entre la créativité musicale et la structure du langage expliquée ou du moins approchée scientifiquement. Quand un musicien, un compositeur s'approche de l'outil informatique, qu'il désire utiliser le matériel électronique, plusieurs malentendus peuvent surgir, difficiles à surmonter. Désirant avant tout l'outil qui lui permette de travailler de proche en proche, il s'attache à un rendement immédiat. Il s'attend à ce qu'on lui fasse des propositions, qu'on lui fournisse des exemples. À partir de là, il peut imiter ces exemples ou essayer de les transgresser en modifiant les paramètres qu'on lui propose. Mais il peut très bien ne pas aller plus loin et délaisser cet outil qu'il a tout juste effleuré. Le second écueil, c'est de transcrire trop littéralement des procédés, des schémas plutôt, qui lui sont fournis par l'outil mathématique ou arithmétique.

Ce qui, dans un cas, a un sens, est pertinent, n'a plus de sens dans la transcription littérale. Autant la première approche que je signale est basée sur la perception immédiate et ne se soucie pas de codifier en vue d'un langage, autant la seconde approche s'inquiète fort peu, voire pas du tout, de la perception, et se fie bien davantage à la notion de schéma pouvant s'appliquer indifféremment à tout paramètre. Ne tenant compte que de la perception, on n'arrive pas à organiser un langage, les objets que l'on a trouvés n'étant pas assez forts pour cela. Si l'on ne tient pas compte de la perception, le langage ne peut se constituer que d'une façon proprement hasardeuse, les paramètres n'ayant pas la même valeur dans le modèle et dans la transcription.

C'est là où le critère esthétique fait son apparition. Choix ou rejet des solutions proposées ? Faire face au tableau fut-il total des possibles. L'intuition devient comme un court-circuit indispensable. C'est ainsi que parmi tous les univers possibles d'intervalles, de durées, de dynamiques, etc., l'intuition va choisir celle qui servira le compositeur au moment où la solution va acquérir toute sa nécessité. Plus on sera capable de maîtriser cet univers des possibles, plus l'intuition aura servi de critère absolu dans cet instant du choix plus ou moins approché d'une certaine vérité dont on a besoin à un moment donné.

D'ailleurs, que l'on pense musique avec ou sans interprète, une musique combinée entre électronique et instrument ou une musique purement électronique, il reste à trouver le geste et la forme. Là, on n'a plus affaire à des objets, mais à des textures qui, en changeant continument ou par cassure, vont occuper un espace-temps. Quel modèle mathématique va nous donner la possibilité de trouver ce geste qui va justifier toutes les autres catégories ?

De ce point de vue, j'ai trouvé tout à fait approprié la citation de Mallarmé placée en tête de ce symposium. *"Un coup de dés jamais n'abolira le hasard."*. Pour résumer mon attitude de compositeur, je dirais que je n'attends pas tout d'une organisation systématique de quelques paramètres que ce soient. Je suppose que l'invention, si elle se réalise, ne peut se faire que si elle admet l'accident, l'imprévu qui remet en question ce que l'on avait cru établir.

Autant que j'en puisse juger, l'intuition scientifique passe par les mêmes phases. Et sur ce terrain incertain, elle est en mesure de se confronter avec l'intuition musicale. C'est une profession de foi bien fragile, certes, que je propose, mais je dois, je crois, davantage à cette fragilité qu'à la sécurité des dogmes. Je la crois plus riche de promesses.

Gérard Assayag : Votre conclusion illustre une tension qui, me semble-t-il, traverse votre oeuvre qui est la tension entre système et liberté. Et dans un entretien récent à la revue Musik Blätter, revenant sur *Le marteau sans maître*, vous indiquez bien comment cette œuvre avait marqué son temps par une combinaison de constructivisme très achevé, même un peu rigide, issu de l'école de Vienne, mais d'une liberté ornementale et d'une certaine fraîcheur qu'on a pu appeler l'esprit français disons. Donc, l'idée était de travailler avec le constructivisme, mais de manière à y être libre. Or, c'est une chose qui ne va pas de soi et je me dis que c'est peut être une problématique que rencontre aussi le mathématicien. Qu'en pensez vous Alain Connes ?

Alain Connes : Disons que j'ai un peu réfléchi, donc, à ces deux aspects qui sont des aspects dont on parle assez peu en mathématique, qui sont justement la créativité et le rôle de l'esthétique. Et je crois que je vais vous livrer quelques réflexions que j'ai eues là dessus, mais simplement comme un point de départ. Je pense que ça correspondra bien à ce dont vous avez parlé. Donc, en fait, a priori, lorsqu'on parle de créativité en mathématiques, le mathématicien est un peu sceptique parce que l'essentiel de la tâche du mathématicien, c'est résoudre des problèmes. Et c'est en gros une tâche de découverte. C'est-à-dire que le mathématicien est à la recherche de vérités, qui préexistent à sa présence, avant qu'il commence à chercher. Et ce qui est assez extraordinaire, justement, vous parliez de cette relation avec les mathématiques, ce qui est assez extraordinaire, c'est de voir que l'évolution des mathématiques qui a eu lieu au XX$^{\text{ème}}$ siècle, en fait, permet déjà le rapprochement entre la musique et les mathématiques. Pourquoi ? Parce que, en fait, le rôle des mathématiques qui, au départ, était un rôle qu'on pourrait en gros résumer comme une partie de la physique, est devenu, au fil des mathématiques qu'on appelle modernes, des mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, en fait, c'est devenu un espèce de substitut de la philosophie au niveau de la création des concepts. Et ce qui est assez remarquable, en fait, c'est que justement... Cette transition, on peut presque la faire remonter à Galois. Et ce qui est assez remarquable, c'est qu'un peu comme en musique, elle a engendré au départ des résistances considérables et qui continuent à se manifester de manière sporadique. Mais je vais vous citer... Est-ce que ça dérange si je fais une citation en anglais parce que c'est un texte qui est en anglais au départ.

Mais c'est un texte très récent d'un mathématicien bien connu qui s'appelle Vladimir Arnold, et qui parle des mathématiques, et qui parle de l'enseignement des mathématiques, et qui parle des mathématiques modernes. Ne vous en faites pas, je suis français, donc je défendrai le point de vue français après. Mais il faut quand même que j'expose au départ ce point de vue. Donc il dit : "*Mathematics is a part of physics, physics is an experimental science, a part of natural science, mathematics is the part of physics where experiments are cheap.* (rires). *In the middle of the twentieth century, it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science, and of course in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students.*"

Il continue, il continue, et son texte est très amusant, il est plein de piques, etc. Et il dit ensuite : "*The ugly building built by under-educated mathematicians who were exhausted by their inferiority complex and who were unable to make themselves familiar with physics, reminds one's..."* Bon, alors après, il parle d'une axiomatique des nombres impairs, etc. et ensuite, il dit donc, finalement, qu'il a interrogé par exemple des étudiants français en mathématiques, il leur a demandé "*2+3 ?*". Et "*a french primary school pupil replies 3+2 because addition is commutative*". Et ensuite, il explique "*Judging by my teaching experience in France, the university students'idea of mathematics, I feel sorry for them because they are very intelligent but deformed kids, is as poor as that of this pupil.*", l'élève qui répondait "*2+3=3+2.*". Et ensuite, il donne des exemples.

Mais en fait quand on approfondit un peu ce texte d'Arnold, on s'aperçoit que si vous voulez, ce qu'il critique, c'est les mathématiques. Ce qu'ils critiquent, c'est si vous voulez tous les exemples qu'il prend où il dit les mathématiciens modernes ne savent pas faire ça, etc., c'est des mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et ces mathématiques, il donne des exemples de courbes à tracer dans le plan ou des choses comme ça, c'est des mathématiques qui maintenant sont complètement digérées et que l'ordinateur fait beaucoup mieux qu'un mathématicien, il le fait en un quart de seconde. Et ce qu'il n'a pas digéré, ce qu'il n'explique pas justement, c'est le merveilleux phénomène qui s'est produit dans les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle et qui justement, permettent... Je vais vous lire un petit texte de Grothendieck. Et ce que dit Grothendieck, c'est : "*La clarification progressive, justement, des notions de définitions, d'énoncés, de démonstrations, de théories mathématiques dont* *on pourrait, si on ne faisait que des mathématiques que comme étant une partie de la physique, on pourrait les ignorer complètement. Et dire que c'est des fantaisies d'axiomaticiens, a été à cet égard très salutaire et nous a fait prendre conscience de toute la puissance des outils d'une simplicité enfantine pourtant.* C'est-à-dire que les concepts mathématiques, en fait, il ne faut pas avoir peur. En général, ils ont une version enfantine et cette version enfantine est beaucoup plus proche de leur réalité que les versions extrêmement élaborées, "*donc d'une simplicité enfantine, pourtant, dont nous disposons pour formuler avec une précision parfaite ceux-là mêmes qui pouvait sembler informulable par la seule vertu d'un usage suffisamment rigoureux du langage courant à peu de choses près. S'il y a une chose qui m'a fasciné dans les mathématiques depuis mon enfance, c'est justement cette puissance à cerner par des mots et à exprimer de façon parfaite l'essence de telles choses mathématiques qui, au premier abord, se présentent sous une forme si élusive ou si mystérieuse qu'elles paraissent au delà des mots.*"

Et ça, si vous voulez, c'est une chose extrêmement importante parce que la plupart des gens, quand on leur parle de mathématiques, ils pensent à l'arithmétique, ils pensent aux nombres.

Bon, ils pensent peut être à la géométrie, mais ils ne se rendent pas compte que les mathématiques modernes, c'est-à-dire les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, elles ont justement réussi à perfectionner le langage courant par des concepts qui sont extrêmement précis, mais qui, justement, ont un potentiel d'application qui va bien au-delà de la physique.

Bon, alors, quand on pense justement à la musique et si vous voulez, pour bien situer les choses par rapport aux mathématiques, je vais vous lire un petit texte que j'avais écrit il y a longtemps et où je parlais justement du lien entre les deux et je disais : "*Il est crucial à mes yeux pour un enfant d'être exposé très tôt à la musique. Je pense qu'exposer un enfant à la musique vers l'âge de 5 ou 6 ans permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue et cette richesse incroyable, purement visuelle, qu'un enfant acquiert très tôt et qui, donc en fait est reliée à la géométrie.*".

Elle est reliée à la géométrie du moment qu'elle s'inscrit dans l'espace par l'intermédiaire d'une image mentale. Si vous voulez, il y a le même phénomène en mathématique que par rapport à un musicien. Quand un non-mathématicien voit un mathématicien en train de travailler dans le métro. Qu'est ce qu'il voit ? Il voit une page pleine de formules. Elles n'ont aucun sens. Quand un non-musicien voit un musicien travailler dans le métro et lire une partition, c'est exactement pareil, il a l'impression de... C'est pareil !

Or, il y a une partie essentielle du travail des mathématiciens qui est justement de créer des images mentales. Mais quand je parle d'images mentales, ça a à voir avec la géométrie. On voit une figure géométrique, on voit, elle s'inscrit dans l'espace. Mais ce qui est vraiment étonnant, c'est que justement, dans le fonctionnement du mathématicien, il n'y a pas seulement l'image géométrique, il y a l'algèbre. Et l'algèbre n'a rien de visuel, mais par contre, l'algèbre a une temporalité, c'est-à-dire l'algèbre s'inscrit dans le temps.

Quand vous faites un calcul, quand vous exposez une démonstration, ça s'inscrit dans le temps. C'est exactement comme le musicien qui, après avoir compris une œuvre musicale, l'avoir zippée complètement dans son esprit, a quelque chose qui tient en rien, l'étale. Le mathématicien, c'est pareil. Quand il fait un calcul algébrique, ça s'inscrit dans le temps, mais c'est quelque chose qui est très proche du langage, qui a cette précision diabolique du langage et d'une certaine manière, si vous voulez, il y a une connivence assez incroyable entre le calcul algébrique, cette partie des mathématiques qui a à voir avec le langage, qui a un déroulement dans le temps et certaines œuvres musicales. Et ça, je ne peux pas m'empêcher d'y penser. C'est-à-dire que pour moi, il y a certaines œuvres musicales relativement courtes qui disent quelque chose.

Et j'avais même cette impression, vous allez rigoler mais j'avais même cette impression quand on voyait ces salles qui vont de manière répétitive écouter les sonates de Beethoven des années et des années. Ça m'a rappelé, si vous voulez, des gens qui sont là et qui essayent de comprendre. Et on leur répète la même chose. Ils savent qu'il y a quelque chose, et ce quelque chose est intransmissible autrement que par la musique. On ne peut pas le transformer en autre chose que ce qui est transmis, mais ça transmet quelque chose.

Donc, on ne peut pas dire que ça n'est pas un langage. De même, on ne peut pas dire que les mathématiques n'ont pas un aspect langage. Elles ont un aspect langage qui est extrêmement important.

Mais l'essentiel de ce que j'ai dit, si vous voulez, c'est que cet aspect langage des mathématiques est devenu beaucoup plus florissant. Il est devenu beaucoup plus expressif. Il est devenu beaucoup plus large que, justement, les mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Et quand on en reste aux mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, bien sûr, on peut dire "Ah, ces mathématiques-là, elles ont un rapport avec la musique parce qu'il y a l'arithmétique, il y a le log 3 sur log 2, qui est le clavier bien tempéré, etc.

Mais ça ne va pas aller au delà. En fait, le langage mathématique, justement, a franchi bien d'autres frontières et d'une certaine manière, maintenant, on peut espérer que, justement, il y ait une possibilité de rapprochement qui est beaucoup plus grande à cause de ça. Encore faut-il accepter les mathématiques modernes. Et encore faut-il avoir absorbé toute cette élaboration, qui n'est pas du tout évidente.

Gérard Assayag : Alors cette dualité algèbre / géométrie, c'est un de vos chevaux de bataille. C'est extrêmement intéressant parce qu'elle nous amène au coeur du problème de la relation maths-musique, parce que c'est une dualité qu'on rencontre sans arrêt dans la recherche musicale, soit de manière métaphorique, nous en avons discuté, soit de manière technique, et je pourrais éventuellement donner des exemples. Alors notamment dans l'analyse musicale, c'est-à-dire que quand on regarde une partition, il y a une expression que j'ai entendue et qui me plaît bien, c'est la partition vue d'avion, quand on essaie de comprendre ce mécanisme, c'est-à-dire on la regarde comme un tout mais on a le droit de faire ce qu'on veut. On peut sauter d'un point à un autre et mettre en relation un point avec un autre librement et c'est une vision évidemment géométrique.

Alain Connes : Bien sûr.

Gérard Assayag : Ou alors il y a une autre façon de l'aborder, qui est du point de vue de ces mécanismes d'engendrement. Et là, on a un point de vue beaucoup plus local, parce qu'on regarde la mécanique. Est ce que ça, c'est quelque chose que vous ressentez, cette tension quand vous, quand vous regardez une musique, pas quand vous la créez, mais quand vous regardez une musique existante ?

Pierre Boulez : Quand je regarde la musique, je commence d'abord par essayer de comprendre la forme, parce que c'est elle qui vous dirige, simplement dans l'évaluation. On a fait ici une expérience une fois, sur trois niveaux de compréhension de la musique. On a donné d'abord, disons, une sonate de Mozart ou un mouvement, ou un demi-mouvement (la première moitié du mouvement), et on a demandé à quelqu'un qui n'est absolument pas musicien, à quelqu'un qui n'a aucune culture musicale, on lui a demandé qu'est ce qu'il pensait ? Il en a donné une description très vague et pas du tout relevante si je peux dire. Ensuite le moyen. Il avait écouté plusieurs fois des sonates de Mozart, donc il pouvait trouver une forme, en tout cas un contraste entre les thèmes. C'est déjà une approche beaucoup plus précise et le cultivé, alors, décrivait exactement ce qui est passé. Ensuite, on a passé une œuvre de Schophausen pour piano, un fragment bien sûr. Eh bien, les trois réponses étaient très similaires parce que chacun créait son propre théâtre de la forme et ils s'aiguillaient vers les passages qui les avaient particulièrement frappés, c'est-à-dire qu'il n'y avait aucune conception de la forme.

Mais il y avait une conception des événements et des événements qui étaient encore pas liés par une forme mais des événements séparés, qui les avaient frappés, soit parce qu'ils étaient très forts, soit parce qu'ils étaient joués par un instrument spécialisé, etc., etc. Donc, vous voyez que c'est très difficile d'approcher une forme même, parce qu'une forme est vraiment, disons, ce que... comment la personne la regarde. Et là, quand on est musicien, évidemment, on essaye d'avoir une vue, disons plus objective, et non pas seulement subjective.

Voilà comment moi, je vois la musique. Alors quand on voit le détail, on voit en effet comment le discours se construit et s'il se construit plus horizontalement que verticalement ou plus verticalement qu'horizontalement, ou s'il se construit par cassure, ou bien s'il est construit pas continuité, etc., etc. Il y a beaucoup de façon d'envisager la perception même de la musique et je suis persuadé qu'il y a beaucoup de gens qui se font aussi une espèce de... qui... puisqu'ils ne peuvent pas comprendre la forme musicale, qui se font une certaine narration, spécialement quand ils ont écouté une œuvre plusieurs fois, ils se font une narration personnelle et c'est cette narration qu'ils suivent. C'est pour cela que les gens, le public en général, s'il ne fait pas d'effort, s'installe tellement bien dans une œuvre parce qu'il l'écoute toujours de la même façon et donc qu'il a devant lui les mêmes images, les mêmes clichés, les mêmes clichés, je dirais, plutôt que les mêmes images. Et c'est comme ça qu'il absorbe la musique, il ne l'absorbe pas par une espèce de description de la continuité, il l'accepte comme un tout, suivi d'un tout, suivi d'un tout.

Gérard Assayag : Mais l'analyste-expert, le compositeur qui regarde un autre compositeur, n'a-t-il pas cette liberté quand il regarde une partition, de la voir finalement comme un espace où il peut se promener à son gré, ce qui n'est pas réaliste dans la mesure où la partition n'a pas été engendrée de cette façon-là, en agissant simultanément sur toutes les parties ?

Pierre Boulez : Oui, certainement, quand vous analysez... Moi, ce qui m'intéresse dans l'analyse, c'est même l'analyse fausse, mais qui engendre quelque chose.

Je me souviens d'une fois quand Stockhausen m'a montré une analyse du Quatuor de Webern, mais il regardait la densité des rencontres. Ce qui n'a rien à voir avec Webern, qui était simplement un contrepoint à quatre voix, et donc un contrepoint à quatre voies, surtout si c'est en canon, les choses sont décalées les unes par rapport aux autres. Donc s'il y a un phrasé individuel, les choses sont évidemment pas toujours d'une intensité constante. Mais pour lui, ce qui l'intéressait à ce moment là, c'était le phénomène de l'intensité.

Comment un canon à quatre voix peut donner des intensités de cet ordre, statistiquement parlant. Je trouve ça plus intéressant que d'analyser simplement, même comme le compositeur l'a conçu. Ce qui est intéressant dans une analyse, c'est pas lorsque vous voulez refaire ce que le compositeur a fait, c'est de voir par quel procédé il est arrivé à un résultat pareil. Et donc, même si l'analyse est fausse, est fausse complètement, l'analyse est beaucoup plus intéressante parce qu'elle est productive.

Alain Connes : D'accord, il y a quand même une différence assez frappante, justement, là, on parle d'Œuvres. Donc on voit... Alors si on regarde un aspect des mathématiques, qui est une démonstration, on peut dire la chose suivante qui est un peu semblable, c'est que, si vous voulez, une démonstration, il y a deux manières de la regarder. Il y a une vérification ligne à ligne. Et ça, je pense, c'est un peu comme quelqu'un qui joue un morceau de musique qui ne l'a pas encore digéré et qui est obligé d'avoir la partition devant les yeux.

Donc, on peut faire ça. On peut vérifier une démonstration ligne à ligne. Mais il y a une deuxième étape qui est extrêmement importante. C'est qu'en fait, un mathématicien sait qu'il ne comprend une démonstration que quand il est capable dans son cerveau de la zipper en une demi-seconde. C'est-à-dire qu'il n'aura pas les ingrédients successifs de la démonstration, mais il aura immédiatement l'intégralité de la démonstration.

Pierre Boulez : Est ce que je peux ouvrir une parenthèse ?

Alain Connes : Bien sûr.

Pierre Boulez : En musique, ça, ça dépend beaucoup d'un point de vue très différent, c'est si vous êtes interprète, ou si vous êtes compositeur. Si vous êtes compositeur, vous avez tout le temps de naviguer et vous naviguez d'un point à l'autre et vous essayez de conforter votre analyse par comparaison d'un point à un autre, quelles sont les différences, quelles sont les similarités, etc. Si vous êtes interprète, cette façon, disons, d'amasser la connaissance est une conséquence... est une espèce de choses inconsciente. Quand vous êtes au point D, par exemple, vous savez que vous avez déjà joué le point A, et ses successions, et vous savez que vous allez rencontrer le point N et ses successions. Mais vous ne le savez pas exactement. Mais vous le savez, plus ça se rapproche, plus vous êtes conscient de ce qui va suivre. Et plus ça s'éloigne, et plus vous êtes conscient que ça s'éloigne et donc que la forme a atteint un point du présent, c'est-à-dire qu'on a constamment ces trois dimensions dans la tête, présent, bien sûr, celui où vous êtes et le passé qui vous y a amené, le futur qui va vous mener à...

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr. Mais ce que je veux dire, c'est que justement, cette espèce de linéarité de l'œuvre, il y a quelque chose qui est extrêmement frappant pour le mathématicien, c'est-à-dire que si un mathématicien essaye de comprendre une démonstration, il y a ce procédé qui consiste à essayer de la lire linéairement. Il y a un autre procédé qui est bien plus efficace, qui consiste à regarder l'énoncé du théorème et à commencer par chercher soi-même une démonstration.

Et quand on a fait ça, ce qui se produit, c'est que la lecture de la démonstration, à ce moment-là, on va dire : “Mais ça, c’est rien. Ça, c’est rien”. Et on va dire : “LÀ, c’est LÀ qu’il se passe quelque chose”. Et c’est seulement comme ça, c’est seulement à partir de ce mécanisme-là qu’on a vraiment compris, c’est-à-dire... Donc ça, je ne sais pas s’il y a quelque chose d’analogue à ça dans une oeuvre musicale. C’est-à-dire, est-ce qu’une oeuvre musicale répond à une question, à un questionnement, etc. Et on peut dire lorsque l’oeuvre se déroule “Ah !”. Bon, j’ai eu parfois cette impression-là à la fin de certains morceaux où il y avait une espèce de moment où il y avait un moment explicatif a posteriori ou l’inverse. Je veux dire au moment où on voit qu’il y a un thème qui ensuite va se dérouler, etc. Mais en mathématique, c’est quelque chose d’extrêmement fort.

C’est-à-dire qu’il y a une différence énorme, justement, entre le mathématicien qui comprend vaguement l’énoncé et puis va se mettre à vérifier la démonstration pas à pas, etc. Et le mathématicien qui va avoir un acte qui n’est pas du tout passif, mais va se mettre à réfléchir par lui-même et après, seulement après, va regarder la démonstration.

Gérard Assayag : Est ce que ça a quelque chose à voir avec la compression, ce zippage que vous évoquez ?

Alain Connes : Absolument, bien sûr, bien sûr. C’est-à-dire que le mathématicien fonctionne par niveaux d’abstraction, par niveaux hiérarchiques d’abstraction, c’est-à-dire qu’en fait, ça veut dire qu’il ne peut progresser, comme les notions sont très compliquées, que si ces notions là, il est capable de les rendre en occupant un espace qui est presque nul et après, il va pouvoir les manipuler mais les manipuler abstraitement sans savoir ce que le zippage contient, simplement en ayant une idée intuitive de ce que cette motion signifie. Bien sûr pour ça, le langage est extrêmement important, c’est pour ça que, bon, il y a des mathématiciens très créatifs comme Grothendieck, etc. qui ont donné 36 noms nouveaux comme le schéma. Schéma, ça a un sens mathématique bien précis, etc. Et ça n’est qu’avec ce mécanisme de zippage complet qu’on peut progresser par des niveaux hiérarchiques de compréhension.

Pierre Boulez : Pour la musique, c’est surtout la mémoire qui joue. Je vois, par exemple, c’est très frappant. Quand j’étais surtout en charge d’orchestre, je faisais des séances d’initiation, mais d’explications sur des œuvres et j'ai toujours remarqué qu'il fallait toujours des exemples. Parce que quand on joue l'œuvre, l'exemple revient à la mémoire immédiatement. Et là, la mémoire fonctionne de façon à aimanter la perception dans un sens ou dans l'autre.

Alain Connes : D'accord, oui, alors donc je pense qu'il y a quelque chose qui est très analogue dans ce cas-là, parce que, bon, il y a certains mathématiciens comme Grothendieck qui fonctionnent un peu à l'envers, c'est-à-dire qu'ils partent du cas général et puis ils... mais la plupart des mathématiciens fonctionnent de manière différente, c'est-à-dire que si on leur donne un bon exemple et qu'on leur explique concrètement sur un exemple, un phénomène général, en général justement, ils sont parfaitement capables d'immédiatement généraliser et d'avoir le cas général et je suppose qu'en musique, enfin, on voit bien dans la musique de Beethoven ou des choses comme ça, on voit bien qu'il y a un système génératif qui permet à partir de choses relativement simples d'engendrer quantités de choses qui s'en déduisent et ça, en mathématiques, c'est un phénomène assez général. Donc il y a ce côté de presque génération automatique qui se produit et qui joue un rôle très, très, très, très important.

Gérard Assayag : Alors pour revenir à cette dualité algèbre / géométrie, vous mentionnez, alors c'est très important, que du côté algébrique, vous mettez le temps, il y a un engendrement. Donc un engendrement. Il y a une combinatoire de symboles. Il y a des règles de production. C'est des choses qu'on utilise beaucoup en musique. Les musiciens se sont beaucoup intéressés, par exemple, aux grammaires formelles ou aux règles de production pour produire des séquences intéressantes, ou non d'ailleurs, de notes.

Mais dès lors que ça produit des séquences, on est bien d'accord, mais est ce que des séquences, ça suffit pour définir du temps ? C'est une question que je vais poser à la fois au mathématicien et au musicien.

Alain Connes : Bien sûr, je vais répondre parce que je veux dire : mon premier travail mathématique a consisté exactement à ça, c'est-à-dire si vous voulez, ce qui est assez incroyable, c'est que, justement, on s'aperçoit que ce qu'on appelle la non commutativité, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que quand vous écrivez un mot, ce n'est pas l'ensemble des lettres du mot qui compte, mais c'est l'ordre aussi dans lequel il est écrit.

D'accord, bon, on peut donner 36 exemples. Et ce qui est absolument incroyable, ce qui est absolument incroyable, c'est que justement, on s'aperçoit lorsqu'on fait des mathématiques, on s'aperçoit que lorsqu'on regarde l'algèbre non-commutative, c'est-à-dire l'algèbre justement, dans laquelle on ne se permet pas de dire que $abab$, ça fait a^2b^2. Eh bien, le temps est engendré de manière naturelle. Ça, c'est beaucoup plus fort que de dire que l'algèbre s'inscrit dans le temps.

C'est qu'en fait, et ça, ça vient du quantique, c'est-à-dire le quantique nous a appris que justement, il fallait lorsqu'on faisait des calculs de mécanique quantique, on ne pouvait pas, c'est ce qu'a trouvé Heisenberg, on ne pouvait pas permuter des quantités comme la position et le moment, etc. On ne pouvait plus calculer de manière trop simple lorsqu'on s'intéresse à des systèmes microscopiques, ce qui est absolument incroyable. Et le potentiel philosophique n'a pas du tout été suffisamment exploité, de ce fait-là. Le fait est que quand on prend une algèbre d'une certaine qualité, qu'on appelle une algèbre d'opérateurs, qui est non-commutative, eh bien, elle engendre son propre temps. Elle a un groupe d'automorphismes qui est paramétré par un paramètre t, mais qui est vraiment le temps dans les exemples physiques qui la fait tourner avec le temps. Alors ça, c'est hallucinant et ça vient exactement du fait qu'on ne peut pas permuter a et b. Donc, quand vous écrivez un mot, l'ordre des lettres est important, alors que quand Descartes, etc., quand des gens de cette époque-là faisaient des calculs, ils faisaient des calculs de manière commutative, c'est-à-dire en permutant les lettres.

Gérard Assayag : Si je comprends bien, c'est l'algèbre qui évolue elle-même et qui se transforme elle-même, qui engendre donc une série

Alain Connes : Elle engendre un passage du temps. Alors ça, ça avait déjà été pressenti puisqu'Hamilton avait écrit des phrases tout à fait prophétique, justement, et où il parlait de la relation entre l'algèbre et le temps.

Donc, ce qui me frappait tout à l'heure, c'est que vous vous expliquiez que, justement, dans le travail d'un interprète, il y a toujours ce présent. Et puis il y a le passé et le futur, etc. Donc on voit bien, je vais dire la musique en gros, c'est une analyse profonde, microscopique du temps. C'est une compréhension du temps qui va de plus en plus loin dans la finesse. Mais ce qui est tout à fait étonnant, c'est qu'au niveau algébrique, il y a exactement la même chose qui se produise et qu'en fait justement, non seulement, bien sûr, un calcul algébrique se fait de manière linéaire, avec des termes ordonnés dans le temps, ça, c'est rien.

Mais ce qui est hallucinant, c'est l'inverse. C'est le fait que même si on faisait des mathématiques en dehors du temps, etc., eh bien le temps serait là et serait présent. Il serait engendré de manière naturelle.

Gérard Assayag : Vous évoquiez un autre point tout à l'heure qui était sans le dire, je vais dire le terme technique, vous m'excuserez, la correspondance de Curry-Howard, c'est-à-dire le fait qu'une preuve, on peut aussi la regarder comme un programme, comme un calcul.

Alain Connes : Oui, si on veut, oui, bien sûr.

Gérard Assayag : Ça évoque une question qu'on s'est posée ici même lors du tout premier congrès Mathématiques et Musique qui a été organisé en 1999 à la demande de la Société de mathématiques européenne avec M. Bourguignon. On avait décidé de mettre ça sous l'égide de la question "Est-ce qu'il y a une correspondance entre ce que les musiciens appellent la logique musicale, qui est toujours une logique d'organisation, et ce que les matheux appellent la logique tout court, la logique mathématique ou la logique formelle, la logique mathématisée ?

Et on était arrivés, on n'avait évidemment pas tranché cette question, on était simplement arrivés à dire la chose suivante, c'est qu'il y a bien de la logique dans l'organisation de la musique. Il y a bien des termes formels qu'on engendre. Il y a même des choses qui ressemblent à des axiomes, c'est-à-dire des hypothèses de départ qu'on se donne pour engendrer un matériau. Mais il y a deux choses qu'il n'y a pas. Il n'y a pas de notion de vérité : on ne cherche pas à ce que ces termes qu'on agrège, qui vont finir par former une partition, établissent une certaine valeur de vérité, ce n'est pas ça le problème. Ce n'est pas le problème de la logique. Le problème de la logique musicale n'est pas le problème de la logique mathématique. Vous êtes d'accord avec moi ?

Pierre Boulez : Certainement pas d'accord avec ça. Je l'ai dit discrètement, mais je le pense.

Gérard Assayag : On peut le dire et je crois que c'est facile à établir. Il n'y a pas de valeur de vérité, donc déjà, ça enlève tout un aspect calculatoire parce que souvent, c'est ça qu'on cherche. Et puis, il y a un autre problème beaucoup plus profond, qui est le suivant : en logique pure, lorsqu'on déroule une démonstration, je peux utiliser un terme A pour ma démonstration. Et j'ai parfaitement le droit de le réutiliser ensuite, mais il ne se passe rien. Ça ne me coûte rien. Je l'utilise, je peux l'utiliser mille fois si je veux, si je le désire. Quand on considère une séquence musicale, un élément du langage musical comme ressemblant un petit peu à une démonstration et que l'on regarde les termes que l'on agrège les notes, les accords, etc., eh bien, le fait d'avoir exposé un objet musical n'est pas du tout innocent. Et la seconde fois qu'on l'expose, ça n'a pas du tout la même valeur que la première fois qu'on l'avait exposé. Donc déjà, déjà, on n'est plus dans cette hypothèse. *(Rires.)* Je vois, je crois que je vous vois venir.

Alain Connes : Non, non, en fait, si vous voulez, ça veut dire que vous ne connaissez pas un certain pan du développement mathématique, qui est ce qu'on appelle la logique linéaire. Dans la logique, dans la logique linéaire, en particulier Jean-Yves Girard à Marseille, lorsqu'on a utilisé une fois, on ne peut plus utiliser.

Donc, je veux dire, il ne faut pas croire que les mathématiciens manquent d'imagination. Ils ont utilisé cette logique-là. Elle leur est déjà apparue. Mais en fait, si vous voulez, bon, simplement pour rebondir un peu sur ce que vous disiez à propos de ce qui se passe en musique au niveau de la logique, ce que je dirais, c'est qu'il y a pour le mathématicien effectivement un rôle de l'esthétique, quand il regarde une démonstration. C'est-à-dire un mathématicien est capable de dire en regardant une démonstration les chances qu'elle a d'être vraie. Il est capable, en regardant une formule même obtenue par un ordinateur, de dire les chances qu'elle a d'être vraie. Donc là, il y a un rôle de l'esthétique. Mais si vous voulez pour moi, il ne faudrait pas du tout croire que la qualité, bon, c'est une qualité nécessaire pour un énoncé mathématique, d'être vrai, d'être correct, une démonstration d'être correcte. Mais la notion, qui est beaucoup plus intéressante et beaucoup plus difficile à définir et qui est beaucoup plus proche de la musique, c'est la notion de sens, c'est-à-dire que, si vous voulez, un énoncé mathématique, vous pourriez fabriquer un ordinateur qui vous fabriquerait 36 énoncés mathématiques à la pelle et qui seraient tous corrects parce qu'il les aurait fabriqués en faisant des démonstrations correctes. Ce serait facile. Par contre, si vous regardiez tous ces énoncés, la plupart d'entre eux seraient complètement inintéressants parce qu'ils n'auraient pas de sens.

Qu'est ce que ça veut dire un sens ? Un sens, c'est quelque chose qui est... qui ne répond pas à la logique, parce que l'énoncé en question est correct. Mais il y a pour le mathématicien une notion d'un énoncé qui est merveilleux, qui a un sens. Et je pense que là, on a un rapprochement avec la musique. Parce que vous me disiez une pièce musicale n'a pas à être correcte, bien sûr, mais elle doit avoir un sens. Si elle n'a pas de sens, à ce moment-là, bon, ben, je vais dire, on pourrait faire n'importe quoi. On pourrait inventer 36 morceaux de musique. Et là, je pense qu'on touche un point essentiel parce que la notion de correct, c'est une condition nécessaire. C'est une condition nécessaire pour le mathématicien, bien entendu. Mais un mathématicien pourrait passer sa vie à faire ce que disait Arnold des axiomes sur les nombres impairs ou des choses comme ça. Et ça veut dire qu'il aurait perdu son temps. Il aurait perdu son temps parce que justement, il n'aurait pas trouvé de vérité qui a du sens. Il n'aurait pas dévoilé un pan de cette réalité mathématique, mais justement, des choses qui ont du sens. Et ça, c'est une chose extrêmement difficile à définir en mathématiques. Et je pense que c'est aussi difficile à définir qu'en musique, d'une certaine manière.

Pierre Boulez : Oui, c'est très difficile parce que lors de l'Histoire, on voit des gens qui ont à peu près, surtout au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, le même vocabulaire et dans un cas, l'oeuvre est très belle et dans l'autre cas, l'œuvre va être complètement inintéressante. C'est-à-dire que la même grammaire peut servir non pas des buts du reste, mais peut servir à des fins très différentes.

Alain Connes : Oui, donc, je veux dire, ça veut dire simplement que quand on s'en tient au niveau de la structure, de la logique, etc., on ne touche pas le problème essentiel et le problème essentiel pour les mathématiques, justement, bien sûr, il y a le problème de la vérité, il y a le problème qu'on peut discuter en long, en large et en travers. Mais il y a un problème beaucoup plus difficile, beaucoup plus important, qui est de voir justement en quel sens ce qu'on a trouvé dévoile un petit coin de la réalité mathématique. Et ça, ça signifie avoir du sens. Exactement.

Gérard Assayag : Le problème que vous évoquez, c'est le problème que rencontrent les démonstrateurs automatiques de théorèmes, les programmes informatiques qui démontrent des théorèmes, ils peuvent démontrer des théorèmes corrects, mais ils ne savent pas comment dire qu'un théorème est intéressant. Et donc, ils peuvent démontrer des milliards de choses inintéressantes. Alors c'est intéressant parce que ça peut rejoindre une problématique qu'on connaît ici, qui est la composition assistée par ordinateur, où on a des programmes informatiques que des compositeurs utilisent pour calculer des matériaux ou des structures intéressants.

Mais ils pourraient en calculer des milliards qui ne seraient pas intéressants. C'est in fine le compositeur qui décide. Alors est-ce que vous pourriez nous aider ? Comment pourriez-vous, compositeur, nous aider à converger de manière plus fine, plus intéressante, vers des résultats qui ne sont pas seulement corrects du point de vue du calcul, mais susceptible d'intéresser le musicien ?

Pierre Boulez : La première chose que je peux vous répondre, c'est une réponse très bête, c'est parce que ça me plaît, tout simplement parce que ce que vous me donnez, ce que vous me proposez, ça me plaît.

Gérard Assayag : C'est comme ça qu'on fonctionne.

Pierre Boulez : Oui, mais tout le raisonnement de la musique est fondé là dessus, bien sûr, on ne va pas dire aussi bêtement que ça, ça me plaît, donc je le choisis. Vous pouvez avoir un goût terrible, le kitsch, et le dire, ça me plaît aussi, bien sûr. Mais ce qui est intéressant, c'est que quand vous avez comme ça des quantités de possibilités, vous ne pouvez pas les écouter, si vous avez mille possibilités, au bout de cent, vous serez fatigué ou vous n'aurez absolument plus de jugement. C'est ça qui est dangereux en musique. C'est que plus vous écoutez les différentes solutions, moins vous avez de réactions disons pour choisir les choses. Et donc, à un moment donné, il faut deux choses.

Premièrement, restreindre le périmètre du choix et deuxièmement, décider : "oui, ça, pourquoi je le choisis ? Parce que ça me paraît meilleur, pour cette raison, pour cette raison. Mais au fond de ça, vous essayez de vous justifiez vous même. Mais le principal, c'est uniquement... c'est pas uniquement, mais c'est principalement l'intuition et l'intuition. Bon, ça existe et c'est un don que vous avez, même si vous êtes très doué, vous l'avez un jour, vous ne l'avez pas le lendemain.

C'est-à-dire c'est très variable et quelquefois, vous êtes très pointus, d'autres fois moins pointus, parce que vous êtes davantage séduit par le... Et il y a une question aussi en musique qui est difficile, c'est de joindre la structure abstraite si on peut dire, et l'objet concret, parce que l'objet concret qui est très intéressant, peut être dans une structure tout à fait inepte. Et au contraire, un structure très intelligente peut avoir des objets qui sont tout à fait inintéressants. Et donc, c'est cette combinaison qui n'est pas facile non plus à organiser, qui fait que l'œuvre acquiert une grande validité. Mais ça, ça a toujours été le cas. Je veux dire, si vous regardez l'Histoire de la musique, vous avez par exemple deux personnalités très distinctes comme Berlioz et Schumann, je prends exprès ces deux exemples. Chez Berlioz, il y a un sens de l'instrumentation qui est absolument remarquable, même quand il était très jeune. Mais le sens de l'harmonie, c'est-à-dire du langage harmonique, était très primitif chez lui. Alors on explique cela parce qu'il a joué de la guitare quand il était jeune et donc que la guitare a simplifié son vocabulaire.

Ça n'enchanterait pas les guitaristes, si on dit ça. Mais tandis que Schumann avait au contraire un langage harmonique très... beaucoup plus raffiné. Mais son langage instrumental était vraiment très disons, sans beaucoup de signification, sans beaucoup de couleurs, même, tout simplement.

Et donc, c'est très rare d'avoir chez les mêmes musiciens des gens qui sont doués également, pour les différentes composantes. Si bien que quand vous avez quelqu'un comme Wagner, évidemment, vous avez là, vous avez tout.

Mais Wagner qui, disons, n'a jamais parlé de système, il a toujours parlé de musique nouvelle, de musique du futur, etc. Mais il n'a jamais codifié son langage. Pas du tout même. Mais il a pris le langage tel qu'il l'a trouvé, et sous l'influence, en particulier de Liszt, il a détourné le langage de la fonction sur laquelle ce langage vivait, et donc finalement, il a inventé ce langage très ambigu où toutes les relations sont possibles. Dans un langage plus classique, disons même Beethoven, sans parler de Mozart, vous avez des accords qui faisaient des accords tournants, si l'on peut dire qui aidaient la modulation, qui aidaient donc à aller un peu dans un pays voisin, mais dans Wagner, vous êtes... quelquefois, vous ne savez pas du tout où vous êtes, parce qu'il utilise uniquement des choses ambiguës.

Cette ambiguïté s'est généralisée au fur à mesure et a conduit à Schönberg, qui a de nouveau, lui, créé un dogme.

Et ce dogme était intéressant d'une certaine façon, parce qu'il a en effet, il organisait le langage musical d'une autre façon. Mais ce dogme, ce dogme, ne tenait pas compte des phénomènes verticaux, et, ou à peine compte des phénomènes verticaux, et c'est la faiblesse du langage dodécaphonique de Schönberg., c'est qu'une dimension prévaut sur les autres ou sur l'autre, spécifiquement, c'est-à-dire que le domaine horizontal prévaut sur le domaine vertical et dans Bach, ça, c'était typique, les domaines verticaux et horizontaux seront tout à fait contrôlés.

Et là, le domaine vertical, vous le percevez immédiatement ; le domaine horizontal, le contrepoint, vous lez percevez quand vous avez étudié la partition, c'est là, la différence. C'est que vous ne percevez pas la musique de la même façon si elle est écrite d'une façon ou d'une autre. Et ça, il n'y a rien à faire, on ne changera jamais ça, parce que c'est un phénomène de perception.

Alain Connes : Oui, ce que je voulais dire, c'est au niveau général de la structure. C'est, bon, finalement, si vous voulez, on peut résumer en gros un peu le travail du mathématicien en disant que de temps en temps, il y a un mathématicien qui... trouve un phénomène brut. Un exemple de ça, c'est par exemple quand Riemann trouve la relation entre les nombres premiers et les zéros d'une certaine fonction. D'accord ? Et c'est une trouvaille, c'est-à-dire que c'est quelque chose qu'après, on va pouvoir vérifier jusqu'à un certain niveau avec l'ordinateur, etc.

Mais ça va donner aux mathématiciens d'un siècle après, de deux siècles après une espèce d'objectif. Et la raison, c'est qu'on sait que ce phénomène est suffisamment profond et suffisamment mystérieux pour que l'on soit sûr que toutes les notions qui seront inventées, découvertes à l'occasion de cette recherche, c'est-à-dire pour essayer de trouver une démonstration de ce fait-là, seront, auront du sens, auront du sens. Et alors ? Justement, là où je pense qu'il y a un rapprochement qui est possible, si vous voulez avec la musique, c'est qu'on peut dire en fait qu'il y a deux aspects dans le travail du mathématicien. C'est-à-dire, bien sûr, il y a un aspect incroyablement rationnel qui consiste, une fois qu'on a une idée de démonstration, à essayer de vérifier qu'elle est correcte, bien sûr. Ça, c'est le rationalisme à l'état pur. Mais il y a un aspect qui est bien plus intéressant et qui a à voir avec l'intuition. Et cet aspect qui a à voir avec l'intuition, c'est qu'il y a une période dans laquelle le mathématicien ne doit absolument pas se dire "est-ce-que ce que je dis est correct ? etc. Est ce que je vais vérifier tous les petits détails, etc." Et dans laquelle, justement, il doit se permettre de rêver ? Il doit se permettre de voir beaucoup plus loin et dans cette période-là, qui est en gros, mise en route un petit peu comme par un élan poétique. C'est quelque chose qui est intransmissible en mots. C'est-à-dire que si un mathématicien est dans cette période-là, il est incapable de l'expliquer à des gens qu'il va rencontrer qui vont lui dire "oui, bon, mais alors ?".

Et il est incapable de l'écrire. Parce que s'il l'écrit, c'est comme s'il essayait d'attraper quelque chose qui va disparaître à partir du moment où il va l'écrire. Mais la question que je me pose, c'est de savoir dans quelle mesure, justement, cette intuition qui est terriblement présente, qui est quelque chose d'extrêmement fort, peut se traduire d'une autre manière. Est-ce qu'elle peut s'exprimer sous une forme musicale, est-ce qu'elle peut s'exprimer autrement. Parce qu'elle vient de quelque chose qui est très profond, qui est à l'intérieur.

Et si vous voulez, il y a un texte de Grothendieck que je vous lirai si j'ai le temps et qui parle justement du rêve en mathématiques et qui dit à quel point, justement, le rêve n'est pas admis en mathématiques. Il n'est pas admis. Pourquoi ? Parce que quand un mathématicien écrit un article, il ne va pas écrire sur des rêves qu'il a fantasmés, etc. Il va écrire des démonstrations. Et donc il y a toute une partie invisible du travail du mathématicien qui n'est jamais visible.

La partie qui est visible, ça va être une démonstration rigoureuse, écrite, etc. Et il va y avoir tout un... quelque chose qui est entièrement caché et qui est toute cette partie invisible et qui a consisté en ces... toutes ces journées, etc. dans lesquelles il y avait un rêve, qui était présent à l'intuition, qui était présent à l'esprit et qui n'était pas encore réalisé. Bon moi, ça me fait penser si vous voulez que le fonctionnement de la musique, on a un peu l'impression qu'on en est à ce niveau de l'intuition, de quelque chose qui n'est pas encore réalisé, etc. mais qu'on a réussi à transmettre, par contre. On a réussi à le transmettre sous forme musicale et à partir du moment où, justement, il y avait quelque chose de vrai derrière, il y avait une vraie inspiration, etc., là, ça a du sens et finalement, on arrive à travers la musique à transmettre quelque chose. Et alors ? Ce qui est très amusant, c'est que finalement, il m'est arrivé d'avoir un apport de l'extérieur par une œuvre musicale pour un problème que je me posais et que cet apport musical soit plus important que si j'avais lu un texte mathématique.

Il m'était arrivé d'écouter des œuvres musicales relativement courtes, mais qui avaient un sens, et c'était un sens qui cadrait avec une espèce d'intuition que j'avais à un moment donné, mais que je ne pouvais pas traduire autrement, je ne pouvais pas la traduire par des mots. Je ne pouvais pas dire "Bon, eh bien, etc.". Mais par contre, il y avait par exemple, je ne sais pas, un prélude, qui correspondait exactement à cette intuition. Je ne savais pas pourquoi. Donc, là, il y a quelque chose, à mon avis, si vous voulez justement, dans la notion de sens et tout ça.

Pierre Boulez : Non, moi, je dis que la transcription d'une intuition musicale, de la mathématique à la musique, c'est très, très inconfortable.

C'est très, très inconfortable parce que les choix ne sont pas les mêmes. La culture n'est pas la même et les choix ne sont pas les mêmes. Je disais tout à l'heure, je prends le cas d'un compositeur qui l'a fait, Xenakis pour ne pas le nommer, qui a utilisé beaucoup les glissandos, les courbes, alors on voyait des courbes superbes, magnifiques, etc. Mais qu'est ce qu'on entend, on entend un matériau extrêmement pauvre.

Alain Connes : Ce n'était pas du tout de ça dont je parlais. Si vous voulez, il y a deux choses très, très différentes. Il y a le fait d'utiliser des mathématiques, bon, je me souviens d'avoir écouté, effectivement, une conférence de Xenakis, il y a très, très longtemps, à un moment donné où je me posais la question de savoir si j'allais faire des mathématiques ou si j'allais m'intéresser à la musique ? Des choses comme ça.

Et ça m'avait dégoûté, vraiment, parce que il était venu à la Sorbonne, il avait fait un exposé et dans son exposé, il avait entouré le tableau dans lequel il avait quelques formules générales par des formules mathématiques, et ces formules mathématiques n'avaient rien à voir avec ce dont il parlait. Donc, elles étaient là uniquement comme outil psychologique pour, comment dire, pour effrayer les gens qui ne connaissaient pas les mathématiques et pour, donc, leur imposer comme ça quelque chose. Donc, ce n'était pas du tout ça dont je parlais.

Ce dont je parlais, c'était un problème qui est complètement ouvert à mon avis, qui est qu'il y a certaines notions mathématiques, certaines intuitions mathématiques qui ne sont pas transmissibles par des mots pour le moment.

Pierre Boulez : Oui, mais moi, ce que je voulais dire, c'est pas simplement comme une critique. Mais disons un glissando, qui suive une courbe ou une autre, c'est un matériau extrêmement primitif, c'est un matériau limite. Ce qui nous intéresse dans une continuité comme ça, c'est la notion de coupure, c'est-à-dire de l'intervalle, parce que l'intervalle définit vraiment la façon dont vous percevez les choses. Et donc quand on cible, par exemple, on avait vu, même une courbe qui vous inspire une sorte de geste... Mais ce geste, il faudra le transmettre non pas par un geste direct comme ça, mais il faut le transmuter, pratiquement, avec des intervalles qui lui donneront vraiment un sens, justement. Et c'est pour ça que je dis c'est la transposition ou la trans-figuration de ça, et vraiment moins primitive qu'on ne pense.

Alain Connes : D'accord, mais ce que j'avais en tête, par exemple, vous avez parlé, à propos de Wagner, de l'ambiguïté entre les tonalités, etc. Et alors, justement, il y a une idée mathématique qui est relativement simple à expliquer, qui est due à Galois et qui n'est pas encore, comment dire, capturée mathématiquement. Et c'est précisément l'idée d'ambiguïté. Et donc, ce que j'ai en tête, c'est la chose suivante, c'est que justement, comme les mathématiques arrivent à capturer des concepts à des niveaux de conceptualisation qui sont très élevés... Par exemple, ce qu'a fait Galois, ce qu'il a compris, c'est qu'en fait, les gens avant lui, cherchaient des symétries, et lui, il a réussi à comprendre qu'en fait, la première chose qu'il fallait faire, c'était briser complètement la symétrie entre les racines. Et après, une fois qu'on avait brisé complètement la symétrie, on arrivait à retrouver la structure intérieure par d'autres procédés. Mais ce que j'ai en tête, c'est que cette idée, bon, vous allez lire 36 textes mathématiques autour de cette idée. Il n'y a aucun de ces textes qui l'épuise complètement. Il n'y en en a aucun. C'est-à-dire lorsqu'on l'écrit en termes rationnels, etc., on n'arrive pas à l'épuiser. Et je suis persuadé qu'il y a sûrement certaines structures musicales qui arriveraient à transmettre une partie du contenu de cette idée, de manière complémentaire, à la manière rationnelle de la dire. C'est ça que j'ai en tête, pas du tout le fait que l'on puisse utiliser les mathématiques pour guider certaines choses... C'est quelque-chose qui est beaucoup plus, qui se situe beaucoup plus au niveau conceptuel, et au fait, justement, qu'il y a des concepts mathématiques beaucoup plus élaborés, beaucoup plus compliqués et beaucoup plus, comment dire ? Et en même temps beaucoup plus enfantins qu'on pourrait croire et que, justement, on n'arrive pas à les percevoir complètement lorsqu'on utilise uniquement le langage linéaire, rationnel, etc. Et que la musique polyphonique, etc., peuvent aider considérablement, ne serait-ce que par la polyphonie, c'est-à-dire le langage écrit est un langage linéaire unique.

Il y a un seul, un seul narrateur. Et la polyphonie, justement, bon, ben, on le sait bien. Et à mon avis, justement, ça, ça devrait permettre d'aller au-delà de certaines choses qu'on est seulement capable de faire pour le moment.

Gérard Assayag : La question que vous posez est vraiment celle de la source de la créativité. C'est-à-dire que si je la transforme un petit peu, c'est "Est-ce qu'il existe des niveaux de représentation très profonds, pré-verbaux, quasi conceptuel, mais on ne va pas vraiment dire ça puisqu'ils sont encore non verbalisés, mais qui pourraient ensuite, au moment où ils éclosent et où ils apparaissent, se transformer de diverses façons en mathématiques, en langage.

Alain Connes : C'est exactement ça. C'est exactement ça. Mais ce que je veux dire, c'est que je reviens toujours à Grothendieck, mais il montre bien à quel point, justement, le processus de créativité est un processus de retour à l'enfance. C'est en ce sens là, c'est-à-dire que c'est un processus qui consiste à essayer de se dépouiller entièrement de tous les dogmes, de tout ce qui nous a été imposé, etc. Et de revenir à une perception complètement enfantine. Mais justement, bon, après justement, être capable de la rendre universelle et de la transmettre. Alors ça, c'est évidemment au cœur de la musique, mais c'est aussi, c'est semblable au sein des mathématiques.

Pierre Boulez : Mais est ce possible d'être aussi enfantin ? J'allais dire infantile, excusez-moi, d'être aussi enfantin, après avoir fait tout de même des expériences qui vous ont marqué ?

Alain Connes : Justement...

Pierre Boulez : Est-ce que ça n'est pas artificiel ?

Alain Connes : Je ne pense pas que ce soit artificiel. Je ne pense pas que soit artificiel, l'exemple de Grothendieck, qui est un exemple extrêmement frappant parce qu'à un moment donné, justement, il a, pour revenir au CNRS parce qu'il était parti et il avait fait justement une demande au CNRS et son texte s'appelait *Dessins d'enfants*. Donc vous, vous lisez ça, c'est un enfant, vous pouvez dire, c'est infantile, etc. Mais en fait, c'était relié à un des problèmes les plus profonds des mathématiques qui est ce qu'on appelle la compréhension du groupe de Galois de la clôture algébrique de Q, etc.

Et c'est très souvent le cas, en fait, que quand les gens deviennent des professionnels, ils s'entourent de plus en plus d'une couche protectrice qui les empêche justement de retourner à cet état-là. Et au contraire, je pense que ce qui est absolument essentiel, justement, c'est de permettre le rêve, de permettre, d'essayer d'aller au-delà de l'interdit du rêve, etc., et de revenir à cette source-là. Et je pense que lorsqu'on revient à la source, par exemple, de la notion d'ambiguïté, qui est une notion qui existe et qui pourrait être manifestée dans pas mal de domaines, eh bien à ce moment-là, elle aura effectivement diverses formes, elle prendra diverses formes. Et on n'arrivera jamais à la résumer à une expression.

Il n'y aura jamais une seule expression qui la résumera et ça restera une source d'inspiration constante. Et c'est le cas pour la théorie de Galois, c'est-à-dire que c'est une théorie qui n'est pas épuisée et elle n'est pas épuisée au sens où elle reste... c'est quand les gens la comprennent vraiment, c'est-à-dire que quelqu'un pourrait lire un livre sur la théorie de Galois et n'y rien comprendre parce qu'il n'aurait pas compris l'idée de départ. Et c'est une idée, justement, qui est une idée enfantine, qui est l'idée d'ambiguité.

Mais cette idée, lorsqu'on l'a comprise, elle met les choses en mouvement. C'est une vraie idée met les choses en mouvement, ça là, ça, je pense, c'est très semblable à la musique. Parce qu'on a l'impression, si vous voulez mon impression, moi, sur la créativité en musique, ce n'est pas une impression, c'est plus une impression par rapport à la musique classique, la musique romantique, c'est-à-dire la musique qui est émotionnelle. Mais mon impression, c'était plus, par rapport au mathématicien, qu'il y avait une espèce de batterie émotionnelle qui se charge, indépendamment de l'expression instrumentale et ensuite, une fois qu'elle est suffisamment chargée, il y a un travail qui est extrêmement difficile, qui est de rendre l'émotion individuelle universelle, la transformer, la rendre universelle. Et c'est un processus qui peut paraître extrêmement différent du processus mathématique. Mais schématiquement, c'est le même parce que, que fait le mathématicien ? Quel est le rôle de l'intuition de mathématicien ? Le rôle de son intuition, c'est exactement comme un chasseur. Il dit "Il y a quelque chose là !". Il le sent très, très profondément. Mais après, cette chose-là, il doit aller la chercher et il y a une réalité qui est extrêmement cruelle, etc., et qui l'empêche d'aller la chercher. Donc, après, il a un vrai travail, et ce travail, je pense que c'est le même. C'est très semblable au travail qui consiste à avoir une émotion personnelle, à essayer de la rendre universelle. Donc, il y a un parallèle, bien sûr, ce sont des choses différentes, mais le rôle de l'intuition est le rôle absolument moteur de l'intuition au démarrage et c'est le même dans les deux, je pense

Pierre Boulez : Oui, ça, je le pense aussi, très certainement, mais, en plus de ça, je dirais qu'il y a deux contraintes : d'abord, l'objet n'existe pas, celui que vous imaginez, donc, il reste à construire, et deuxièmement, nous avons, dans une musique qui est instrumentale, par exemple, nous avons à tenir compte de ce qui est la transmission. Et cette transmission se fera mal si par exemple, l'idée est géniale mais la réalisation est insuffisante. Et justement, cette différence entre les objets dont vous vous servez, par exemple, les notes. Quand vous avez, par exemple, un objet tout à fait remarquable, je pense, tout simplement, parce que tout le monde connaît ça, à un son de tam-tam. Un son de tam-tam est beaucoup plus intéressant qu'un son de violon, juste comme ça, mais qu'est-ce qu'il fait ? Ce son est si intéressant, qu'il sort du contexte automatiquement, et donc il faut le restreindre au contraire, pour l'employer d'une façon très très mesurée pour qu'il ait disons sa place. Tandis que vous avez un Fa#, un Sol, ou je ne sais quoi, lui, il est neutre, et donc vous pouvez l'utiliser à votre découverte, c'est-à-dire qu'il y a des objets qui sont prêts à la découverte, et des objets qui ne sont pas prêts à la découverte, qui monopolisent...

Alain Connes : C'est un peu comme un caractère chinois qui a du sens en lui-même, par opposition à une lettre de l'alphabet qui n'a pas de sens en soi.

Pierre Boulez : Et ça n'est pas commode de devoir utiliser les deux.

Gérard Assayag : Nous pourrions continuer très longtemps cette passionnante discussion mais nous devons rendre l'antenne, pour que le Festival et le Colloque se poursuivent. Je pense que nous avons eu deux très belles paroles de fin et je voudrais juste mentionner une conclusion sur l'émotion, je me rappelle avoir lu dans l'un de vos ouvrages, celui avec Changeux, et qui est que pour qu'un jour les machines puissent s'imaginer des buts, et donc deviennent plus intéressantes, il faudrait qu'elles souffrent. Nous avons un grand programme en tant qu'informaticiens, pour faire en sorte que les machines puissent souffrir, elles aussi. Merci Alain Connes, merci Pierre Boulez.

Rencontre entre deux figures majeures de la création musicale et de la recherche mathématique contemporaine, Pierre Boulez et Alain Connes.

Quelle est la place de l'intuition dans le raisonnement mathématique et dans l'activité artistique ? Y a-t-il une dimension esthétique dans l'activité mathématique ? La notion d'élégance d'une démonstration mathématique ou d'une construction théorique en musique joue-t-elle un rôle dans la créativité ?

Ce dialogue autour de l'invention dans les deux disciplines est animé par Gérard Assayag, directeur du laboratoire CNRS/Ircam Sciences et technologies de la musique et du son. Introduction : Frank Madlener, directeur de l'Ircam.

Dans le cadre de la troisième conférence internationale “Mathematics and Computation in Music” (MCM 2011), Agora 2011.

Captation et postproduction Année Zéro. Production Ircam.

Extraits d'une table ronde écoutable ici https://www.youtube.com/watch?v=d08lHGeIlJY

Oui alors d'abord, si vous voulez, il y a une spécificité des mathématiques par rapport aux autres disciplines et je pense que je dois d'abord en parler : c'est que, pour un mathématicien, la chose de loin la plus précieuse et je vais expliquer pourquoi, c'est le temps. Et la manière dont le CNRS m'a aidé, si vous voulez, quand j'étais à l'École Normale, en fait, j'avais refusé de passer l'agrégation parce que je savais, j'avais envie de faire de la recherche, et je n'avais pas du tout envie de retourner dans un esprit de bachotage, qui avait été l'esprit de préparation à l'entrée de l'École Normale, etc., c'était une époque bénie, c'était le début des années 70 ; donc en fait, j'ai été pris tout de suite comme stagiaire au CNRS et j'ai eu, si vous voulez, cinq ans extraordinaires dans lesquels j'ai eu tout le temps qu'il fallait pour réfléchir, pour travailler, etc., sur, justement, les travaux qui après m'ont valu la médaille Fields. Et en 75, je suis allé faire ma coopération dans un pays sous-développé, qui était à Kingston, au Canada anglais. J'avais obtenu si vous voulez une aide de certains amis, qui m'avaient envoyé là-bas dans une université, qui a été un temps très, très profitable aussi au niveau du travail et heureusement parce que c'était soi-disant mon service militaire mais bon, c'était un moyen extraordinaire pour passer à travers. Et à ce moment-là, j'ai commis une erreur, j'ai commis une erreur qui a été que j'ai appris qu'on m'offrait un poste de prof à Paris et je me suis laissé tenter, étant loin je me suis dit : "oh, j'ai assez fait de recherche, etc.", j'ai accepté ce poste. Quand je suis revenu en France, donc, j'ai quitté le CNRS, j'ai démissionné du CNRS tout de suite, je suis rentré en france, et quand je suis rentré en france, j'ai commencé mon travail de prof, et je me suis aperçu à ce moment-là de ce que mon temps était devenu. Avant, quand je travaillais au CNRS, mon temps était un temps qui était continu, qui était continu, je pouvais réfléchir toute la journée. Bien sûr, quand on réfléchit à un problème de mathématiques, on n'a pas besoin de... on n'a même pas besoin de papier, de crayon, on a... on peut partir faire un tour à pied, on réfléchit au problème. Ce dont on a besoin, c'est de savoir que pendant trois heures, pendant cinq heures, on ne sera pas interrompu. Quand j'étais à l'université, quand je travaillais à l'université, je savais que j'avais par exemple une heure et demie pour réfléchir. Je commençais, je commençais à réfléchir, etc., mon cerveau se chauffait, et se mettait à disposition du problème que je regardais, etc.. Et puis quand arrivait un quart d'heure avant le cours, je me disais "non il faut que j'interrompe, que j'arrête.". Mon temps, si vous connaissez les mathématiques, mon temps s'était transformé en ce qu'on appelle un ensemble de Cantor, c'est-à-dire que je n'avais plus, si vous voulez, d'intervalle suffisamment long continu pour réfléchir. Et ça, c'est le miracle du CNRS, le miracle qui permet à des jeunes chercheurs de s'immerger complètement dans un problème, dans un problème de mathématiques, par exemple, et par cette immersion, si vous voulez, par cette espèce de... je ne sais pas, moi, de travail, si vous voulez, de pénétration qui se produit, un jour, effectivement, moi, ça s'était produit dans les années 70, je revenais d'avoir accompagné mon épouse à son lycée, j'étais en voiture, je conduisais une petite voiture, j'étais arrêté à un feu rouge et à un moment donné, j'ai eu effectivement une illumination. Et cette illumination, elle était telle que mon cerveau était complètement certain du résultat, je n'avais pas besoin de le vérifier, je n'avais pas besoin de papier, de crayon, etc., c'était éclairé complètement en sachant que bon, il y avait quelque chose d'extraordinaire qui était là. Donc, quand je suis revenu à Paris, après mon service militaire, donc ma coopération, en fait, j'ai réalisé très vite que j'avais fait une terrible erreur et qu'en fait, il aurait mieux valu que je devienne postier ou que je fasse n'importe quel autre métier que le métier que j'avais à ce moment-là, qui faisait qu'il m'était impossible d'avoir un temps suffisamment long pour réfléchir ; à ce moment-là, j'ai re-posé ma candidature au CNRS, ça se vérifie, je veux dire, un an après avoir accepté le poste à Paris, j'ai re-posé ma candidature au CNRS parce que je me suis dit "mais j'ai fait une énorme erreur". J'ai re-posé ma candidature pendant quatre ans consécutifs, au CNRS, sans être accepté, mais le CNRS m'a donné la médaille d'argent, et m'a donné plus tard, en 2004, la médaille d'or. A ce moment-là, on voyait bien qu'ils n'étaient pas trop contents de ne pas pouvoir me reprendre mais ils ne pouvaient pas, bon, je veux dire. Et puis finalement, au début des années 80, j'ai été repris par le CNRS et ça a à nouveau été une période de créativité absolument incroyable, incomparable avec le temps que j'avais quand j'étais à l'université, pour exactement cette raison-là, exactement cette raison-là.

Entre temps, donc, j'avais quand même perçu qu'il y avait pour un chercheur au CNRS, quelque chose qui ne collait pas complètement : ce qui ne collait pas complètement, c'était que le travail de chercheur en maths est un travail où il n'y a pas un labo, où il n'y a pas en général, bon il faut dire que si on veut vraiment faire une percée, il faut être seul, et donc c'est un travail qui, au niveau 2 des contacts humains, est très frustrant. C'est à dire qu'en fait, la plupart du temps, on n'a pas d'illumination, je veux dire, je me souviens de l'histoire de de Valéry qui avait demandé à Einstein si Einstein avait un petit carnet dans lequel il pouvait noter ses grandes idées. Et Einstein lui avait répondu "j'ai eu deux grandes idées dans ma vie". Donc, je veux dire, c'est bien évident que la plupart du temps, un chercheur en mathématiques passe son temps à être frustré, c'est à dire, on ne comprend pas quelque chose, on cherche à comprendre, en fait, le vrai travail, on ne fait pas des maths parce qu'on veut avoir plaisir en faire, non, on ne fait pas des maths parce qu'on veut gagner de l'argent, non, on fait des maths parce qu'on cherche à comprendre. Donc la plupart du temps, on cherche à comprendre, c'est difficile, en attendant, on passe un temps extraordinaire, si vous voulez, à prendre des exemples, à chercher, etc. Le but de la manip, bien sûr, c'est de comprendre, mais c'est aussi de créer des concepts, parce qu'en faisant cela, on crée des concepts. Donc je m'étais aperçu quand même de quelque chose, qui était un peu une lacune, à l'époque, du CNRS, c'était qu'un chercheur en math était très isolé, et qu'en fait, il n'avait pas, si vous voulez, la possibilité, l'occasion donnée de transmettre son savoir. Et ce qui fait que lorsque le Collège de France m'a proposé, en 1984, de devenir professeur au Collège, j'ai trouvé, là, au Collège de France, si vous voulez, une combinaison qui était vraiment idéale, au sens où on laissait aux professeurs tout le temps qu'il faut pour chercher, mais il y avait une dose homéopathique, je dirais, d'enseignement c'est à dire que chaque année, on a un enseignement à faire, et je pense que depuis, si vous voulez, le CNRS s'est amendé dans cette direction, c'est-à-dire qu'on a facilité, beaucoup, les transitions entre le CNRS et l'université, qui permettent justement de combler ce vide, c'est-à-dire de transmettre le savoir. C'est quand même quelque chose d'essentiel, Nicole Le Douarin en a parlé, c'est quand même essentiel si vous voulez, pour un chercheur, de ne pas rester complètement isolé dans sa bulle, et de pouvoir transmettre son savoir. D'ailleurs, ce qui est évident, c'est qu'au moment où l'on transmet son savoir, au moment où l'on fait l'effort de le transmettre, on fait des progrès aussi. C'est à dire, on s'aperçoit qu'on n'avait pas bien compris quelque chose, simplement parce qu'on fait des cours là-dessus. Donc mon expérience bien sûr pour le CNRS, je lui dois tout tout ce que j'ai trouvé dans ma carrière scientifique, mais je suis arrivé à un moment béni, qui était le début des années 70, il y avait eu ce doublement de crédit du CNRS au début des années 60, et bon, je veux dire, malheureusement ce n'est plus le cas, parce que j'ai vu, si vous voulez, avec l'exemple de pas mal d'élèves que j'ai eus, la difficulté actuelle qu'il y a à rentrer au CNRS est maintenant beaucoup plus difficile.

[...]

Non, si vous voulez, je pense qu'il y a une erreur au moins dans mon domaine, dans le domaine des mathématiques, on ne peut pas généraliser, mais le fait d'avoir copié le système anglo-saxon qui est le système d'avoir un Grant de la NSF et qui est de faire des demandes de projets, etc., c'est désastreux pour les mathématiques pour la raison suivante : je crois qu'il y a une comparaison qui est assez frappante qui dit "les mathématiciens sont des fermions, les physiciens sont des bosons.". Alors pour les gens qui ne connaissent pas, ça veut dire, vous savez, que les fermions, c'est comme ça qu'on dévoile le tableau périodique des éléments, ils ont la propriété qu'ils ne peuvent pas occuper le même état . Donc, qu'est-ce que ça veut dire, ça veut dire qu'en général, les mathématiciens choisissent une petite case, et ils se mettent là-dedans, et ils travaillent seuls, contrairement aux physiciens qui en général, bon ça peut, bien sûr, il y a souvent en physique des modes, qui font qu'il ya un très grand nombre de physiciens théoriciens dont je connais les capacités, qui s'agglutinent sur un sujet. Alors, quelle est la difficulté quand on imite le système anglo-saxon ? C'est qu'en fait, lorsqu'on fait ces demandes de projets, etc., qu'est-ce qui va se passer ? Il va y avoir un effet grégaire, c'est à dire qu'en fait, on va créer des féodalités. Il va y avoir un certain nombre de sujets qui vont se développer au détriment des autres, et pour la raison que, finalement, ce sont les gens de ces sujets-là qui vont être nommés dans les commissions adéquates, et qui vont ne faire que recruter les gens de leurs propres sujets. Ça s'est produit de manière complètement évidente aux États-Unis, en mathématiques. Et en France, on échappait à ce défaut, on échappait vraiment à ce défaut, en Europe aussi, en général. Et malheureusement, quand on a imité, quand on a cherché à imiter ce système anglo-saxon avec les ANR en particulier, on est tombé dans le panneau, c'est à dire que cette liberté qu'il y avait, cette possibilité si vous voulez aux chercheurs de travailler sur un sujet qui est vraiment original, et qui ne correspond pas du tout à l'une de ces féodalités, a disparu. Et ça, au niveau du CNRS, c'est très très, très désastreux pour les mathématiques, au sens où si vous voulez que moi je vois bien ce dont on a besoin, pour les mathématiques, je ne parle que de ce sujet-là. Ce dont on a besoin, c'est... je connais un très grand nombre de jeunes chercheurs talentueux, talentueux, et qui maintenant passent leur temps à écrire des propositions de recherche, et donc on sait très bien qu'en fait, ce qu'ils écrivent, c'est bidon parce que quand on fait de la recherche, ce qu'on va trouver, on ne peut pas le dire avant, ce qu'on va trouver, on va chercher sur un sujet, puis on va trouver quelque chose qui ne correspondait pas du tout à ce qu'on a dit au départ. Donc ils écrivent, ils passent leur temps à écrire ça, ils passent leur temps à chercher un poste, d'une année sur l'autre, etc. au lieu que... de mon temps, on m'avait donné, je ne sais pas, cinq ans, cinq ans tranquilles au CNRS, j'étais pas je n'étais pas permanent, pas du tout, j'étais Stagiaire, après j'avais été Chargé, donc à cette époque, c'était avant les années 81, où on a titularisé les chercheurs, mais on pouvait prendre des chercheurs, pour une période limitée, ils étaient contractuels, ils n'étaient pas titulaires pour le reste de leur vie. Donc on n'avait pas cette difficulté infinie à les choisir, en sachant que pour tout le reste de leur vie, ils allaient continuer à trouver, c'était impossible. Mais par contre, on donnait à tous ces gens-là la possibilité de se réaliser. Parmi eux, il y en avait qui n'y arrivaient pas, mais bon ben, il y en avait qui y arrivaient. Mais si vous voulez, c'est un système qui fonctionnait merveilleusement mieux, que le système actuel dans lequel on crée ces féodalités et ces féodalités, qu'est ce qu'elles font, elles ne font que s'auto-reproduire et souvent de manière stérile, au bout d'un moment.

Alexandre Grothendieck, créateur réfugié en lui-même
Alain Connes

Voilà, donc Alexandre était un géant des mathématiques, un mathématicien français qui est mort il y a deux ans, en novembre 2014. Et en fait, si vous voulez, lorsqu'on m'a demandé de faire un exposé, j'ai volontiers accepté, avec pour principale motivation celle de rétablir un fragment de vérité devant un livre qui a été écrit sur Grothendieck, que je ne citerai pas, par un non-mathématicien, fasciné par le personnage, mais dont le jugement sur les écrits de Groteendieck, en particulier sur *Récoltes et semailles*, qu'il croit pouvoir résumer en une phrase, m'est apparu comme une insulte faite à la mémoire du grand savant.

J'ai donné pour titre *Alexandre Grothendieck, le créateur réfugié en lui-même*. Ce que j'avais en tête en donnant ce titre, c'était son parcours, de son enfance de réfugié, de sa créativité prodigieuse, à la fois mathématique et littéraire, et puis de cette deuxième moitié de sa vie, qui l'a amené dans les 25 dernières années, à se réfugier en lui-même dans un petit village des Pyrénées, celui de Lasserre, où il a écrit trente-cinq mille pages.

La correspondance entre Jean-Pierre Serre et Alexandre Grothendieck, qui a été publiée sous forme d'un magnifique volume, montre bien comment leurs idées ont bouleversé la géométrie algébrique. Elles témoignent d'une profonde amitié et de l'esprit qui était celui de Bourbaki dans ces années-là. Un dévouement sans borne à la beauté des maths, complètement débarrassé de tout individualisme. Après un épisode de découragement dû à la mort de sa mère en 1957, Grothendieck a eu une période de créativité rayonnante, qui a abouti en particulier à la notion de topos.

Cette notion était implicitement présente dans un article qui, au départ, était, entre guillemets, une "emmerdante rédaction" destinée à Bourbaki et qui, en fait, lorsqu'elle a été publiée, a rendu fameux le journal dans lequel elle a été publiée, au point que l'on désigne l'article simplement sous le nom de Tohoku (le journal s'appelle *Tohoku Maths Journal*). S'y cotoyaient déjà... donc là je vais vous parler un petit peu de math, mais ça ne durera pas très longtemps. Donc, s'y cotoyaient déjà les catégories de diagrammes et celle de faisceaux d'ensembles, mais Grothendieck n'avait pas encore dégagé le principe nouveau qui permette d'englober ces deux exemples comme cas particuliers d'un même concept, celui de topos. Donc, écoutons-le. En fait, je passerai la plus grande partie de mon exposé à citer Grothendieck.

Conférence donnée au Collège de France dans le cadre du colloque Migrations, réfugiés, exils, le 13 octobre 2016 .
https://www.youtube.com/watch?v=FkBtSRyv6l4

“Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amenés à regarder les espaces et variétés en tous genres dans une lumière nouvelle.

Il ne touchait pas pourtant à la notion même d’espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement avec des yeux nouveaux, ces traditionnels espaces déjà familiers à tous. Or, il s’est avéré que cette notion d’espace est inadéquate pour rendre compte des invariants topologiques les plus essentiels qui expriment la forme des variétés algébriques abstraites. Pour les épousailles attendues du nombre et de la grandeur, c’était comme un lit décidément étriqué où l’un seulement des futurs conjoints, à savoir l’épousée, pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, aais jamais les deux à la fois.

Le principe nouveau, qui restait à trouver, pour consommer les épousailles promises par des fées propices, ce n’était autre que ce lit spacieux qui manquait aux futurs époux sans que personne jusque-là ne s’en soit seulement aperçu. Ce lit à deux places est apparu comme par un coup de baguette magique avec l’idée du topos. C’est le thème du topos et non celui des schémas qui est ce lit, ou cette rivière profonde où viennent épouser la géométrie et l’algèbre, la topologie et l’arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu est celui des structures discontinues ou discrètes.

Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle (c’était une invention de Grothendieck aussi), le thème du topos en est l’enveloppe ou la demeure. Il est… (donc, c’est toujours Grothendieck qui parle, ien entendu) *…ce que j’ai conçu de plus vaste pour saisir avec finesse, par un même langage, riche en résonances géométriques, une essence commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre, du vaste univers des choses mathématiques.”*

Donc, si vous voulez, à ce moment-là, Grothendieck a fait une découverte extraordinaire. Il a dévoilé un concept d’une portée incomparable, à la fois par la richesse infinie des espaces qu’il permet de recouvrir, mais aussi et surtout parce qu’en fait, si vous voulez, il montre comment... comment... quelle est la vraie nature d’un espace géométrique, qui doit servir simplement à un espace de paramètres pour un ensemble variable. Et alors, une des grandes, une des merveilleuses découvertes, justement, de la notion de topos, c’est que quand on travaille dans un topos, c’est exactement comme si on travaillait dans la théorie des ensembles, sauf que l’on ne peut plus appliquer la règle du tiers exclu.

On ne peut pas dire, on ne peut pas raisonner par l’absurde, mais tout raisonnement intuitionniste continue à marcher. *“Donc on a ainsi un exemple merveilleux d’un concept issu des mathématiques pures, mais dont la portée, ne serait-ce que par* *ses relations avec la logique, n'est plus limité à ce domaine des sciences."* Par exemple, si vous voulez, la notion de vérité devient une notion beaucoup plus subtile dans un topos.

Et bon, je veux dire, c'est une notion qui devrait être beaucoup plus connue qu'elle ne l'est. Alors j'en viens, je passe, maintenant, donc c'est fini pour la partie mathématique, je passe à la relation de Grothendieck avec le monde des mathématiciens, qui est en fait l'un des thèmes principaux de *Récoltes et semailles*. Ecoutons-le, à nouveau. Voilà ce que dit Grothendieck :

"Le moment me semble venu de m'exprimer au sujet de ma relation au monde des mathématiciens. C'est là une chose toute différente de ma relation aux mathématiques. Celle-ci a existé et a été forte dès mon jeune âge, bien avant même que je me doute qu'il existait un monde et un milieu des mathématiciens, tout un monde complexe, avec ses sociétés savantes, ses périodiques, ses rencontres, colloques, congrès, ses prima donna et ses tâcherons, sa structure de pouvoir, ses éminences grises et la masse non moins grise des taillables et corvéables, en mal de thèses ou d'articles. Et de ceux aussi plus rares, qui sont riches en moyens et en idées et se heurtent aux portes closes, désespérant de trouver l'appui d'un de ces hommes puissants, pressés et craints, et qui disposent de ce pouvoir magique : faire publier un article. J'ai découvert l'existence d'un monde mathématique en débarquant à Paris en 1948 (Grothendieck est né en 1928) *à l'âge de 20 ans, avec dans ma maigre valise, une licence ès sciences de l'Université de Montpellier et un manuscrit aux lignes serrées, écrit recto-verso sans marge, le papier était cher, représentant trois ans de réflexion solitaire sur ce qui, je l'ai appris plus tard, était alors bien connu sous le nom de théorie de la mesure ou de l'intégrale de Lebesgue.*

J'avais jonglé avec les ensembles que j'appelais mesurables, sans avoir rencontré d'ailleurs d'ensembles qui ne le soient, et avec la convergence presque partout, mais j'ignorais ce qu'était un espace topologique. Je n'avais pas entendu prononcer encore, dans un contexte mathématique du moins, des mots étranges ou barbares, comme groupe, corps, anneau, module, complexe, homologie et j'en passe, qui soudain, sans crier gare, déferlaient sur moi tous en même temps. Le choc fut rude. Si j'ai survécu à ce choc et ai continué à faire des maths et à en faire même mon métier, c'est qu'en ces temps reculés, le monde mathématique ne ressemblait guère encore à ce qu'il est devenu depuis.

Il est possible aussi que j'avais eu la chance d'atterrir dans un coin plus accueillant qu'un autre de ce monde insoupçonné. J'avais une vague recommandation d'un de mes professeurs à la faculté de Montpellier, qui avait été un élève de Cartan. Comme Élie Cartan était alors déjà hors-jeu, son fils, Henri Cartan, fut le premier congénère que j'ai eu l'heur de rencontrer. Je ne me doutais pas, alors, à quel point c'était d'heureux *augure. Je fus accueilli par lui avec cette courtoisie empreinte de bienveillance qui le distingue, bien connu des générations de normaliens qui ont eu cette chance de faire leurs toutes premières armes avec lui.*

Il ne devait pas se rendre compte d'ailleurs, de toute l'étendue de mon ignorance, à en juger par les conseils qu'il m'a donnés alors pour orienter mes études. Quoi qu'il en soit, sa bienveillance, visiblement, s'adressait à la personne, non aux bagages ou aux dons éventuels, ni à une réputation ou à une notoriété. Dans l'année qui a suivi, j'ai été l'hôte d'un cours de Cartan à l'école auquel je m'accrochais ferme. Celui aussi du séminaire Cartan, en témoin ébahi des discussions entre lui et Serre, à grands coups de suites spectrales... Grothendieck écrit entre parenthèses (Brrrrr !) *... et de dessins appelés diagrammes, pleins de flèches recouvrant tout le tableau. C'était l'époque héroïque de la théorie des faisceaux et de tout un arsenal dont le sens m'échappait totalement, alors que je me contraignaient pourtant tant bien que mal à ingurgiter définitions énoncés, et à vérifier les démonstrations. Les jours de séminaire Bourbaki, réunissant une petite vingtaine de participants et auditeurs, on y voyait débarquer, tel un groupe de copains un peu bruyants, les membres de ce fameux gang Bourbaki.*

Ils se tutoyaient tous, parlaient un même langage qui m'échappait à peu près totalement, fumaient beaucoup et riaient volontiers. Il ne manquait que les caisses de bière pour compléter l'ambiance. C'était remplacé par la craie et l'éponge. A l'époque, j'étais allé voir monsieur Leray au Collège de France pour lui demander si je me rappelle bien de quoi traiterait son cours. Je ne me rappelle ni des explications qu'il a pu me donner, ni si j'y ai compris quoi que ce soit, seulement que là aussi, je sentais un accueil bienveillant, s'adressant au premier étranger venus. C'est cela, et rien d'autre, sûrement, qui a fait que je suis allé à ce cours et m'y suis accroché bravement, comme au séminaire Cartan, alors que le sens de ce que Leray y exposait m'échappait presque totalement. La chose étrange, c'est que dans ce monde où j'étais nouveau venu et dont je ne comprenais guère le langage et le parler encore moins, je ne me sentais pas un étranger alors que je n'avais guère l'occasion de parleret pour cause, avec un de ces joyeux lurons, je me sentais pourtant accepté, je dirais même presque un des leurs. Je ne me rappelle pas une seule occasion où j'ai été traité avec condescendance par un de ces hommes, ni d'occasion où ma soif de connaître, et plus tard, à nouveau, ma joie de découvrir, se soit trouvée rejetée par une suffisance ou par un dédain. S'il n'en avait été ainsi, je ne serais pas devenu mathématicien, comme on dit, j'aurais choisi un autre métier où je pourrais donner ma mesure sans avoir à affronter le mépris.

Alors qu'objectivement, j'étais étranger à ce monde, tout comme j'étais un étranger en France, un lien, pourtant, m'unissait à ces hommes d'un autre milieu, d'une autre culture, d'un autre destin, une passion commune. Je doute qu'en cette année cruciale où je découvrais le monde des mathématiciens, un d'eux percevait en moi cette même passion qui les habitait. Pour eux, je devais être un parmi une masse *d'auditeurs de cours et de séminaires, prenant des notes et visiblement pas bien dans le coup.*

Si peut-être, je me distinguais en quelque façon des autres auditeurs, c'est que je n'avais pas peur de poser des questions, qui le plus souvent devaient dénoter surtout mon ignorance phénoménale, aussi bien du langage que des choses mathématiques. Les réponses pouvaient être brèves, voire étonnées. Jamais l'hurluberlu ébahi que j'étais alors ne s'est heurté à une rebuffade, à une remise à ma place, ni dans le milieu sans façons du groupe Bourbaki, ni dans le cadre plus austère des cours de Leray au Collège de France.

Durant ces années, depuis que j'avais débarqué à Paris avec une lettre pour Élie Cartan dans ma poche, jamais je n'ai eu l'impression de me trouver en face d'un clan, d'un monde fermé, voire hostile. Si j'ai connu, bien connu cette contraction intérieure en face du mépris, ce n'est pas dans ce monde-là, pas en ce temps-là, tout au moins. Le respect de la personne faisait partie de l'air que j'ai respiré. Il n'y avait pas à mériter le respect, faire ses preuves avant d'être accepté et traité avec quelque aménité. Chose étrange, peut être, il suffisait d'être une personne, d'avoir un visage humain."

Donc Grothendieck continue. Il faut savoir que Grothendieck a quitté délibérément le monde mathématique vers 1970. C'est ce qu'il appelle le grand tournant. *"Ce n'est qu'après le grand tournant de 1970, le premier réveil devrais-je dire, que je me suis rendu compte que ce microcosme douillet et sympathique ne représentait qu'une toute petite portion du monde mathématique et que les traits qu'il me plaisait de prêter à ce monde, que je continuais à ignorer, auxquels je n'avais jamais songé à m'intéresser, étaient des traits fictifs.*

Au cours de ces 22 ans, donc entre 48 quand il est arrivé à Paris et 70, ce microcosme lui-même avait d'ailleurs changé de visage dans un monde environnant qui lui aussi changeait. Moi aussi, assurément, au fil des ans et sans m'en douter, j'avais changé comme le monde autour de moi. Je ne sais si mes amis et collègues s'apercevaient plus que moi de ce changement dans le monde environnant, dans leur microcosme à eux, et dans eux-mêmes. Je ne saurais dire non plus comment s'est fait ce changement étrange, c'est venu sans doute insidieusement, à pas de loup.

L'homme de notoriété était craint, moi-même étais craint, sinon par mes élèves ou mes amis, ou par ceux qui me connaissaient personnellement, du moins par ceux qui ne me connaissaient que par une notoriété et qui ne se sentaient pas eux-mêmes protégés par une notoriété comparable. J'ai pris connaissance de la crainte qui sévit dans le monde mathématique qu'au lendemain de mon réveil, il y a bientôt quinze ans." (Quand il a écrit *Récoltes et semailles* et le sens de *Récoltes et semailles*, c'est exactement ça : il a récolté ce qu'il a semé. C'était en 85, quinze ans après.) *"Pendant les quinze ans qui avaient précédé, progressivement et sans m'en douter,* (Ça, c'était avant 70.) *j'étais entré dans le rôle du grand patron dans le monde du Who is who mathématique. Sans m'en douter aussi, j'étais prisonnier de ce rôle qui m'isolait de tous, sauf de quelques pairs et de quelques élèves. C'est une fois seulement que je suis sorti de ce rôle qu'une partie au moins de la crainte qui l'entourait est tombée, les langues se sont déliées, qui avaient été muettes devant moi pendant des années. Le témoignage qu'elles m'apportaient n'était pas seulement celui de la crainte, c'était aussi celui du mépris, le mépris surtout des gens en place vis à vis des autres, un mépris qui suscite et alimente la crainte. Je n'avais guère l'expérience de la crainte, mais bien celle du mépris, en des temps où la personne et la vie d'une personne ne pesait pas lourd. Il m'avait plus d'oublier le temps du mépris et voilà qu'il se rappelait à mon bon souvenir. Peut-être n'avait-il jamais cessé, alors que je m'étais contenté simplement de changer de monde, comme il m'avait semblé, de regarder ailleurs, ou simplement de faire semblant de ne rien voir, rien entendre, en dehors des passionnantes interminables discussions mathématiques. En ces jours, j'acceptais enfin d'apprendre que le mépris sévissait partout autour de moi, dans le monde que j'avais choisi comme mien, auquel je m'étais identifié, qui avait eu ma caution et qui m'avait choyé."*

Donc, si vous voulez, ça, c'est un résumé de ce qui est dit dans le sujet principal de *Récoltes et semailles*, bien sûr, qui est le rapport de Grothendieck au monde mathématique. Je passe à un texte absolument essentiel, un autre texte de Grothendieck qui s'appelle *La clef des songes*. Et quand j'ai préparé cet exposé, je relisais *La clé des songes* et je me suis aperçu d'une chose. J'ai compris en fait que sans le savoir et sans le vouloir, j'avais, en donnant mon titre, laissé entrouverte la possibilité d'une interprétation complètement différente qui touche en fait au cœur de l'ouvrage qui est *La clé des songes* et où le mot créateur apparaît dans un sens que je vous laisse deviner, au fil de ma lecture de son témoignage. Et je vais vous lire le témoignage de Grothendieck, on a beaucoup entendu parler de l'enfance de Grothendieck, etc. Mais bien sûr, il vaut beaucoup mieux entendre ce que lui-même a à en dire.

Je vais vous lire le témoignage de Grothendieck sur son enfance, qui est dans *La clé des songes*. *"J'ai vécu les cinq premières années de ma vie auprès de mes parents et en compagnie de ma sœur à Berlin.* C'est Grothendieck qui parle, bien entendu. *"Mes parents étaient athées. Pour eux, les religions étaient des survivances archaïques et les églises et autres institutions religieuses, des instruments d'exploitation et de domination des hommes. Religion et Église étaient destinés à être balayés sans retour par la révolution mondiale qui mettrait fin aux inégalités sociales et à toutes les formes de cruauté et d'injustice, et assurerait un libre épanouissement de tous les hommes.*

Cependant, comme mes parents étaient tous deux issus de familles croyantes, cela leur donnait une certaine tolérance vis à vis des croyances et pratiques religieuses chez autrui ou vis-à-vis des personnes de religion. C'étaient pour eux des personnes *comme les autres, mais qui se trouvaient avoir ce travers-là, un peu anachronique il fallait bien dire, comme d'autres avaient aussi les leurs. Mon père était issu d'une famille juive pieuse dans une petite ville d'Ukraine, Novo Zubkov. Il avait même un grand père rabbin.*

La religion ne devait pourtant pas avoir beaucoup prise sur lui, même dans son enfance. Très tôt déjà, il se sentait solidaire des paysans et petites gens, plus que de sa famille de classe moyenne. À l'âge de 14 ans, il prend le large pour rejoindre un des groupes anarchistes, qui sillonnaient le pays en prêchant la révolution, le partage des terres et des biens, et la liberté des hommes. De quoi faire battre un cœur généreux et hardi. C'était en Russie tsariste en 1904. Et jusqu'à la fin de sa vie encore, et envers et contre tout, il s'est vu comme... il s'appelait Sacha Piotr, c'était là son nom dans le mouvement ... anarchiste et révolutionnaire dont la mission était de préparer la révolution mondiale pour l'émancipation de tous les peuples. Pendant deux ans, il partage la vie mouvementée du groupe qu'il avait rejoint puis cerné par... (alors, on était en 1906) *...cerné par les forces de l'ordre, et après un combat acharné, il est fait prisonnier avec tous ses camarades. Tous sont condamnés à mort et tous, sauf lui, sont exécutés. Pendant trois semaines, il attend jour après jour qu'on l'emmène au peloton.*

Il est finalement gracié à cause de son jeune âge et sa peine commuée en celle de prison à perpétuité. Il reste en prison pendant onze ans, de l'âge de 16 ans à l'âge de 27 ans, avec des épisodes mouvementés d'évasions, révoltes, grèves de la faim. Il est libéré par la révolution en 1917, puis participe très activement à la révolution, en Ukraine surtout, où il combat à la tête d'un groupe autonome de combattants anarchistes, bien armés en contact avec Makhno, le chef de l'armée ukrainienne de paysans. Condamné à mort par les bolchéviques et après leur mainmise sur le pays, il quitte le pays clandestinement en 1921 pour atterrir d'abord à Paris, tout comme Makhno. Au cours des quatre années écoulées d'activité militante et combattante intense, il a d'ailleurs une vie amoureuse assez tumultueuse dont est issue un enfant, mon demi frère Dodek. C'est bien sûr Grothendieck qui parle. *Dans l'émigration, d'abord à Paris, puis à Berlin, puis à nouveau en France, il gagne sa vie tant bien que mal comme photographe ambulant qui lui assure son indépendance matérielle. En 1924, à l'occasion d'un voyage à Berlin, il y fait la connaissance de celle qui devait devenir ma mère. Coup de foudre de part et d'autre. Ils restèrent indissolublement attachés l'un à l'autre, pour le meilleur et surtout pour le pire, ivant en union libre jusqu'à la mort de mon père en 1942, en déportation à Auschwitz.*

Je suis le seul enfant issu de cette union en 1928. Ma soeur de 4 ans mon aînée, était issue d'un précédent mariage. Ma mère est née en 1900 à Hambourg, d'une famille protestante assez aisée qui avait connu un déclin social inexorable tout au cours de son enfance et de son adolescence. Comme mon père, elle avait une personnalité exceptionnellement forte. Elle commence à se dégager de l'autorité morale de ses pa-

rents à l'âge de 14 ans. À 17 ans, elle passe par une crise religieuse et se dégage de la foi naïve et sans problèmes de son enfance, qui ne lui donnait aucune réponse aux questions que lui posait sa propre vie et le spectacle du monde.

Elle m'en a parlé comme d'un arrachement douloureux et nécessaire. Aussi bien ma mère que mon père avaient des dons littéraires remarquables. Chez mon père, il y avait même là une vocation impérieuse qu'il sentait inséparable de sa vocation révolutionnaire. D'après les quelques fragments qu'il a laissés, je n'ai pas de doute qu'il avait l'étoffe du grand écrivain." En fait, si vous réfléchissez, vous allez voir que Grothendieck a réalisé ce que son père n'avait pas eu le temps de faire, c'est à dire cette écriture. *"Et pendant de longues années après la fin abrupte d'une immense épopée, il portait en lui l'œuvre à accomplir, une fresque riche de foi et d'espoir et de peines et de rires et de larmes et de sang versé, drue et vaste comme sa propre vie indomptée ; et vive comme un chant de liberté.*

Il lui appartenait de faire s'incarner cette œuvre qui se faisait dense et lourde, et qui poussait et exigeait de naître. Elle serait sa voix, son message, ce qu'il avait à dire aux hommes, ce que nul autre ne savait et ne saurait dire. S'il avait été fidèle à lui-même, cet enfant-là qui voulait naître ne l'aurait pas sollicité en vain. Alors qu'il s'éparpillait aux quatre vents, il le savait bien au fond et que s'il laissait sa vie et sa force se faire grignoter par les petitesses de la vie des migrants, c'est qu'il était de connivence. Et ma mère aussi avait des dons bénis qui la prédestinaient à de grandes choses. Mais ils ont choisi de se neutraliser mutuellement dans un affrontement passionné sans fin, l'un et l'autre vendant son droit d'aînesse pour les satisfactions d'une vie conjugale pavoisant au grand amour, aux dimensions surhumaines et dont ni l'un ni l'autre, jusqu'à leur mort, n'auront garde de mettre à jour la nature et les vrais ressorts. Après l'avènement de Hitler en 1933, mes parents émigrent en France, terre d'asile et de liberté pendant quelques années encore, en laissant ma sœur d'un côté à Berlin, moi de l'autre, à Blankenese près de Hambourg," Donc, Grothendieck a passé six ans de sa toute petite enfance seul, sans ses parents *"et sans plus trop se préoccuper de leur encombrante progéniture jusqu'en 1939. Je les rejoins à Paris en 1939, la situation pour moi, en Allemagne nazie devenant de plus en plus périlleuse, quelques mois avant que n'éclate la guerre mondiale, il était temps. Nous sommes internés en tant qu'étrangers indésirables, mon père dès l'hiver 1939, ma mère avec moi au début 1940.*

Je reste deux ans au camp de concentration, puis suis accueilli en 1942 dans une maison d'enfants du Secours suisse, au Chambon sur Lignon, en pays cévenol protestant, où se cachent beaucoup de juifs, guêtés comme nous par la déportation. La même année, mon père est déporté du camp du Vernet pour une destination inconnue. C'est des années plus tard, que ma mère et moi aurons notification officielle de sa mort à Auschwitz. Ma mère reste au camp jusqu'en janvier 1944.

Elle mourra en décembre 1957 des suites d'une tuberculose pulmonaire contractée au camp." Alors, je pense qu'il vaut mieux que je saute un petit passage. J'y reviendrai après, éventuellement parce que je veux vous lire, sans doute la partie la plus la plus importante des textes que j'ai recueillis dans *La clé des songes*, et qui, je l'espère, vous donneront le sens, le deuxième sens du titre. C'est à nouveau Grothendieck qui parle, et il va raconter un épisode qui est arrivé à son père.

Donc, voilà ce que Grothendieck nous dit : *"Au cours de ces derniers mois, d'une telle densité par l'action de Dieu en moi, j'ai repensé parfois à un événement dans la vie de mon père, qui a eu lieu longtemps avant ma naissance et auquel j'avais rarement eu l'occasion de penser. Ils ne m'en a jamais parlé d'ailleurs, ni à âme qui vive, d'ailleurs, sauf à ma mère, dans les semaines de passion tumultueuse qui ont suivi leur rencontre en 1924. C'est elle qui m'en a parlé et des années après sa mort. Il s'agit d'une expérience qu'il a eue en prison, dans sa huitième année de captivité, donc vers l'année 1914. C'était au terme d'un an de réclusion solitaire, que lui avait valu une tentative d'évasion, au cours d'un transfert d'une prison à l'autre. Ça a été sûrement l'année la plus dure de sa vie et qui aurait détruit ou brisé ou éteint plus d'un, solitude totale, sans rien pour lire, ni écrire, ni s'occuper, dans une cellule isolée au milieu d'un étage désert, coupé même des bruits des vivants, sauf l'immuable et obsédant scénario quotidien, trois fois par jour, la brève apparition du gardien apportant la pitance et le soir, une apparition-éclair du directeur venant en personne inspecter la tête dure de la prison. Chaque jour s'étirait, comme un purgatoire sans fin. Il y en avait 365 à passer, avant qu'il ne soit à nouveau rattaché au monde des vivants, avec des livres, un crayon. Il les a comptés ces jours-là, ces éternités qu'il avait à franchir, mais au bout du 365ème, c'est à peine s'il pouvait saisir que c'était bel et bien la fin de son calvaire sans fin.*

Et pendant les trois jours suivants encore, rien. Au bout du troisième, à sa demande "L'année est passée, maintenant... Quand aurai-je des livres ?", un laconique "Attend" du directeur. Trois jours après encore, pareil ! On jouait avec lui, qui était livré à merci. Mais la révolte couvait, ulcérée, dans l'homme poussé à bout. Le lendemain, à peine prononcée la même réponse impassible "Attend", le lourd crachoir en cuivre à bords tranchants faillit fracasser le crâne de l'imprudent tourmenteur.

Se jetant d'un côté juste à temps, il en sentit le souffle aux tempes, avant que le projectile s'écrase sur le mur opposé du corridor et qu'il rejette précipitamment derrière lui la lourde porte bardée. C'est miracle pour moi que mon père ne fut pas pendu sur le champ. Peut-être un scrupule de conscience du directeur qui "craignait Dieu" et qui sentait confusément par la mort-même qui l'avait frôlé de si près, qu'il avait été trop loin. Toujours est-il que le jeune révolté est battu comme plâtre, c'était la moindre des choses, puis jeté dans les fers, dans un cachot puant, dans l'obscurité totale, pour une durée indéterminée. Un jour sur trois, on ouvre les volets, et le jour relaye la nuit moite. Pourtant, la révolte n'est pas brisée. Grève de la faim totale, *sans manger ni boire, malgré le jeune corps qui obstinément veut vivre, l'âme ulcérée, rongée par l'impossible révolte et l'humiliation de l'impuissance, et les chairs gonflées débordant en bourrelets vitreux autour des anneaux de fer aux poignets et aux chevilles.*

C'était les jours où il a touché au fin fond de la misère humaine, consciente d'elle-même, celle du corps, celle de l'âme. C'est au terme du sixième jour de cachot, jour à volets ouverts qu'eut lieu la chose inouïe, qui fut le secret le plus précieux et le mieux gardé de sa vie, dans les dix années qui ont suivi. C'était une vague soudaine de lumière d'une intensité indicible, en deux mouvements successifs, qui emplit sa cellule et le pénètre et l'emplit, comme une eau profonde, qui apaise et efface toute douleur et comme un feu ardent qui brûle d'amour, un amour sans bornes pour tous les vivants, toute distinction d'amis et d'ennemis balayée, effacée.

Je ne me rappelle pas que ma mère ait eu un nom tout prêt pour nommer cette expérience d'un autre qu'elle me rapportait. Je l'appellerai maintenant une illumination, état exceptionnel et éphémère, proche de ce que rapportent les témoignages de certains textes sacrés et de nombre de mystiques. Mais cette expérience se place ici en dehors de tout contexte qu'on appelle communément religieux. Cela faisait plus de dix ans sûrement que mon père s'était détaché de l'emprise d'une religion pour ne jamais y revenir.

Il est sûr pour moi, même sans avoir de précisions à ce sujet, que cet événement a profondément transformé sa perception des choses et toute son attitude intérieure dans les jours et les semaines au moins qui ont suivi. Des jours de très dures épreuves, sûrement. Mais j'ai de bonnes raisons de croire que ni alors, ni plus tard, il n'a fait de tentatives pour situer ce qui lui était advenu, dans sa vision du monde et de lui. Ça n'a pas été pour lui l'amorce d'un travail intérieur en profondeur et de longue haleine, qui aurait fait fructifier et se multiplier l'extraordinaire don qui lui avait été fait et confié. Il a dû lui réserver une case bien séparée, comme un joyau qu'on serre dans un écrin fermé, en se gardant de le mettre en contact avec le reste de sa vie. Pourtant, je n'ai aucun doute que cette grâce inouïe, qui avait en un instant changé l'excès d'une misère en une indicible splendeur, était destinée non à être gardée ainsi sous clef, mais à irriguer et à féconder toute sa vie ultérieure.

C'était une chance extraordinaire qui lui était offerte, et qu'il n'a pas saisie. Un pain dont il n'a mangé qu'une fois à pleine bouche et auquel il n'a plus touché. Dix ans plus tard, à la façon dont il s'en est ouvert à ma mère, dans l'ivresse de ses premières amours avec une femme qui allait le lier pieds et poings, c'était bien comme un bijou insolite et très précieux, dont il lui aurait donné la primeur. Et quand elle m'en a parlé, plus de vingt ans plus tard encore, j'ai su qu'elle avait apprécié bel et bien, et apprécié encore, cet hommage jeté alors à ses pieds, et qu'elle avait accueilli avec empressement et comme un éclatant témoignage d'une communion totale avec l'homme *adoré, et d'une intimité qui n'a plus rien à sceller. Et moi-même, en l'entendant, jeune homme de 17 ans ou 18 ans, en ai pris connaissance avec un empressement ému tout semblable. J'ai vu moi aussi le bijou qui rend aussi et encore pour moi l'éclat de ce père prestigieux et inégalable héros, en même temps que celui de ma mère qui, seule entre tous les mortels, avait été jugée digne d'y avoir part. Ainsi, le pain donné par Dieu comme inépuisable nourriture d'une âme, laquelle, peut-être, croîtrait et en nourrirait d'autres âmes encore, a fini par devenir une parure de famille, venant rehausser la splendeur d'un mythe cher et alimenter une commune vanité."*

Voilà. J'ai terminé, merci.

L'imagination et l'infini

Alain Connes

Alain Prochiantz [1]

Imaginations, une série d'entretiens proposée par Alain Prochiantz, neurobiologiste, professeur au Collège de France.

Alain Prochiantz : Nous sommes dans la grille d'été, sur le programme *Imaginations*, avec des philosophes, des sociologues, et des savants, et des artistes, sur le thème probablement rassembleur, entre les scientifiques et les artistes. Il faut dire que c'est comme ça qu'on a en tout cas pensé la chose. Et j'ai aujourd'hui le plaisir de recevoir Alain Connes. Alors, Alain Connes est un très grand mathématicien. Il est professeur du Collège de France, où il a occupé la chaire Analyse et géométrie. Il est récipiendaire de la plus grande récompense qu'on puisse avoir en mathématiques, qui est la médaille Fields. Et il a cet intérêt non seulement pour les mathématiques, bien entendu, mais aussi pour la musique et pour l'art, ce qui fait qu'il est vraiment une des personnes qui peut faire le lien aujourd'hui très fort entre art et science sur un mode qui n'est pas un mode plat mais qui est un mode qui engage intellectuellement celui qui fait de l'art ou celui qui fait de la science, c'est-à-dire une véritable réflexion sur le sujet de l'art et le sujet de la science. C'est un spécialiste de ce qu'on appelle la géométrie non-commutative et si je dis ça, c'est probablement parce que ce n'est pas étranger à son intérêt pour le temps, et à travers l'intérêt pour le temps, son intérêt pour la création musicale.

Alain, j'ai le devoir d'essayer d'extraire de toi, pas tout parce que c'est inépuisable, mais en tout cas des éléments de réflexion sur cette question de la science, des mathématiques, de la beauté en mathématiques, et de son lien avec la beauté artistique.

1. Cet interview d'Alain Connes, Professeur honoraire de mathématiques au Collège de France, par Alain Prochiantz, Administrateur du Collège de France ainsi que Professeur de Neurobiologie au Collège de France, a été réalisé lors d'une émission Savoirs du Cycle Imaginations sur France-Culture (22.7.2018).
Transcription par Denise Vella-Chemla (2.2.2019).

Alain Connes : Oui. En fait, donc, j'ai un peu réfléchi en ce qui concerne simplement l'imagination. Et la première chose qui m'a frappé, c'est que finalement, la radio, comme moyen de communication, est un moyen qui est beaucoup plus intéressant, au niveau de la concentration de l'auditeur, au niveau de l'écoute justement, qu'un autre moyen de communication comme la télévision. Pourquoi ? Parce que l'imagination, dans le terme imagination, il y a les images, et il est extrêmement important que l'auditeur n'ait pas un rôle purement passif, ne reçoive pas l'image telle qu'on veut la lui imposer, mais soit capable lui-même de la créer, et de la créer à partir du discours, à partir du langage. Donc, c'est la première chose qui m'a frappé, c'est à quel point une émission de radio est beaucoup plus appropriée, pour parler de l'imagination, que si on essayait de l'illustrer directement. La deuxième chose qui m'a aussi beaucoup frappé, c'est en quel sens les mathématiciens ont une utilisation de l'imagination qui a priori est très différente, très très spéciale, très différente de ce qui se passe dans les autres domaines, c'est ça que je veux essayer d'expliquer. Donc, ce que je veux dire, c'est qu'un mathématicien utilise beaucoup l'imagination, mais il l'utilise d'une manière très spéciale. C'est-à-dire qu'en fait, le rôle, le premier rôle de l'imagination pour un mathématicien, qui est un rôle essentiel, c'est celui de créer des images mentales.

Et dans ce rôle-là, en fait, bien sûr, bien entendu, ce n'est absolument pas quelque chose de passif. C'est un... comment dire... on ne peut y arriver véritablement que lorsqu'on sèche sur un problème. Donc il y a une vertu essentielle... pour un mathématicien, c'est, par exemple s'il est en train de lire un bouquin, c'est de prendre par exemple un théorème qui est dans un livre etc. et surtout, de ne pas regarder la démonstration, mais d'essayer de démontrer lui-même. Pourquoi ? Parce que lorsqu'il fait cela, en fait, il va créer dans son cerveau, je dis une image mentale mais en fait, c'est très rarement, c'est pas toujours quelque chose de géométrique, c'est pas toujours quelque chose qui peut se décrire comme une image, mais, c'est un certain assemblage dans son cerveau qui ensuite va faire que, lorsqu'il sera confronté à une page de formules, eh bien, cette page de formules va lui parler. Et dans cette page de formules, il va voir des acteurs. Il va voir des choses qui vont "résonner" entre elles, etc. La comparaison que j'ai toujours envie de prendre, c'est que supposez par exemple que vous soyez dans le métro, et que vous voyiez un passager du métro ou une passagère du métro qui est en train de lire une partition de musique. Quand on n'est pas musicien, cette partition de musique ne nous dit rien, rien du tout. Quand on n'est pas mathématicien et qu'on voit un passager en train de lire des formules de maths, on a l'impression que... je veux dire, qu'on est complètement exclu et qu'on n'a aucune chance de comprendre. Et en fait, la raison, c'est justement cette fabrication d'images mentales et cette fabrication d'images mentales, elle implique de manière absolument essentielle cette capacité d'imaginer. Cette capacité d'imaginer, là, elle joue un rôle absolument fondamental. Et je donne toujours le conseil suivant, je veux dire, par exemple, à un jeune mathématicien : le conseil, c'est si on est confronté par exemple à un calcul même très difficile, bien sûr, ce sont des calculs abstraits etc., la bonne méthode, ça n'est pas de se ruer sur l'ordinateur pour essayer de faire le calcul, ou de prendre une feuille de calculer, non ! La bonne méthode, c'est de partir pour faire un tour à pied et d'essayer de se débrouiller avec ce qu'on a, pour justement, en y réfléchissant, créer dans le cerveau ces images mentales. Et peu importe la complexité du problème.

Peu importe le caractère impossible au départ de cette création, c'est en séchant, et justement, en s'appropriant progressivement des objets mentaux qui vont correspondre au problème qu'on va progresser. Donc, il y a une part active qui est absolument essentielle et de mon point de vue, c'est ça vraiment le premier, le rôle fondamental de l'imagination en mathématiques. En ce sens-là, c'est très différent d'autres domaines, parce que, bien sûr lorsqu'on fait de la physique, et qu'on parle de l'univers, bon, eh bien, chacun a une image mentale au départ, de ce que c'est que l'univers, donc, on ne va pas avoir besoin de créer quelque chose à partir de rien, alors qu'en maths, vraiment, on est confronté à cette chose-là. Donc, de mon point de vue, il y a ce point essentiel, qui est que l'on doit être actif, et on est d'autant plus actif que l'on ne nous donne pas un modèle déjà pré-établi. Et si par exemple on était à la télévision, on essaierait d'illustrer des concepts de mathématiques par des images mais, chaque mathématicien, chaque personne, est un cas particulier et va créer dans son cerveau, une image très particulière, un assemblage très très particulier, et il est impossible de donner une forme générique comme cela.

Alain Prochiantz : Mais quand tu parles d'images mentales, je pense qu'à un certain niveau, même en dehors des mathématiques, il y a un moment où il est besoin d'avoir recours à cet espèce de fabrication d'images mentales...

Alain Connes : Tout à fait.

Alain Prochiantz : de briques que l'on manipule...

Alain Connes : ...qui s'emboîtent entre elles...

Alain Prochiantz : qui s'emboîtent ou qui ne s'emboîtent pas et ça, c'est peut-être parce que justement, la pensée mathématique est la seule façon de penser, en dehors des formules. C'est pas uniquement des formules, c'est une façon de réfléchir qui est une langue naturelle pour le savant d'une certaine façon. Donc la question que je voulais te poser, pour éclairer un petit peu, pour moi d'ailleurs, mais aussi peut-être pour ceux qui nous écoutent, c'est, je dirais "Quelle est l'image de ces images mentales ? Ca ressemble à quoi une image mentale ?"

Alain Connes : Bon, alors d'abord, il y a les images mentales les plus simples, bien entendu. C'est-à-dire que si on parle de la géométrie ordinaire, par exemple, la géométrie plane, il y a un théorème que j'aime beaucoup, c'est le théorème de Morley. Donc là, l'auditeur doit essayer d'abord d'imaginer un triangle. Alors chaque auditeur va imaginer un triangle différent, mais peu importe, d'accord. Donc on part d'un triangle. Et que dit le théorème de Morley, que dit le théorème de Morley ? C'est qu'on découpe chaque angle du triangle en trois parties égales, donc en trois angles égaux. Et on intersecte les droites correspondantes. On obtient un triangle à l'intérieur, en général, du triangle dont on est parti, et la merveille, c'est que le triangle qu'on obtient à l'intérieur est toujours, toujours, un triangle équilatère. Alors ça, c'est merveilleux ! C'est ce qu'on appelle le théorème de Morley. Et quand on a énoncé ce théorème, on a une image mentale, bien sûr. Et en fait, l'image mentale que l'on a est bien meilleure que si on dessinait sur un papier un triangle, et qu'on ait dessiné le triangle équilatère au milieu. Pourquoi ? Parce qu'on serait automatiquement perturbé par le grain du papier, par le crayon avec lequel on a écrit, etc. Donc là, il y a déjà une abstraction qui s'est produite. Mais... il y a un point essentiel justement en mathématiques. Il y a un point essentiel, c'est que j'ai pu vous expliquer ce que c'était qu'une image mentale très simple, dans le cas de la géométrie plane. Mais en mathématiques, on manipule des géométries qui sont bien plus compliquées que ça, et qui en général, sont des géométries qui sont de dimensions bien plus grandes que 3, et même en général, de dimension infinie.

C'est-à-dire on a compris, grâce à la physique par exemple, que la mécanique quantique, c'est une mécanique qui se produit dans un espace qu'on appelle l'espace de Hilbert, qui est un espace de dimension infinie. Alors, comment se fait-il que le mathématicien puisse avoir accès à cet espace, de dimension infinie ? C'est ça la question, c'est la question essentielle. Et cette question essentielle, en fait, elle a une réponse très, très, très fondamentale. Cette réponse, c'est la dualité entre la géométrie et l'algèbre.

Alors pour l'expliquer, je vais prendre un exemple. Je vais prendre un exemple plus simple que le théorème de Morley. Supposons par exemple qu'on soit frappé par le fait que les médianes d'un triangle se rencontrent en un point. Alors ça va bien quand on fait dans la géométrie plane. On voit bien ce que c'est. On a un énoncé analogue lorsqu'on va dans la géométrie dans l'espace. Mais qu'en est-il lorsqu'on regarde une géométrie en dimension arbitraire ? Ca paraît impossible parce que comment est-ce qu'on va se représenter un espace de dimension 4, un objet correspondant à un triangle en espace de dimension 4 etc. ou en dimension plus grande : la réponse est merveilleusement simple : c'est que la manière de comprendre, dans le langage, algébrique, par une formule, pourquoi les médianes d'un triangle se rencontrent, c'est simplement d'écrire les coordonnées de ce qu'on appelle le barycentre de 3 points. C'est-à-dire qu'on prend les coordonnées des points. Et puis on fait leur somme et on la divise par 3, parce qu'on est en dimension deux ; si on était en dimension 3, on diviserait par 4 et ainsi de suite. Et alors, ce qui est merveilleux, c'est que lorsqu'on a, c'est un peu comme les deux hémisphères du cerveau, c'est-à-dire il y a l'hémisphère droit et l'hémisphère gauche, ils communiquent entre eux. C'est l'hémisphère droit qui a l'image mentale du triangle, comme je vous l'ai expliqué au début. C'est-à-dire qu'il le voit, qu'il voit le triangle de Morley, etc. Et puis après, on communique.

On communique avec l'hémisphère gauche. Dans l'hémisphère gauche, il y a une formule. C'est une formule qui permet... Et cette formule, elle est complètement insensible à la dimension. C'est-à-dire qu'une fois qu'on l'a écrite en dimension 2, elle va exister en dimension 3, en dimension 4, et même en dimension infinie. Donc il y a une merveille qui se produit, qui est qu'en mathématiques, on est capable d'escalader, précisément, parce qu'il y a quelque chose qui permet de renforcer l'image mentale, qui permet de lui donner une sécurité, et c'est la formule. Et une fois qu'on a cette formule, après, on va fonctionner dans un autre mode. Et ce mode n'est plus le mode visuel, et c'est pour ça que la notion d'image mentale est réductrice, parce qu'elle réduit tout à une vision géométrique. Or, en mathématiques, il y a une dualité, entre justement la géométrie et l'algèbre. C'est-à-dire que d'un côté, on a cette vision géométrique et là, en général, la vision géométrique, c'est quelque-chose qui va s'imposer immédiatement... C'est-à-dire on a une figure, cette figure va vous parler, mais elle va vous parler tout de suite.

Alors que l'algèbre, c'est précisément autre chose. Et c'est quelque chose qui va évoluer dans le temps, et c'est une chose dans laquelle les calculs vont se faire algébriquement, et j'avoue que moi, je suis par exemple persécuté. La nuit dernière, je me suis réveillé, je me suis dit "est-ce que dans telle formule, je ne me suis pas trompé ?". Pourquoi ? Parce que mon cerveau continue à fonctionner...

Et il continue à faire les calculs etc. Et ça, c'est quelque chose qui se déroule dans le temps, et qui n'est pas du tout de la même nature, qu'une image mentale statique, une image géométrique, qui elle existe et est figée une fois pour toutes et qu'on comprend de manière immédiate.

Alain Prochiantz : Les images mentales ne sont pas forcément statiques. J'imagine qu'on les bouge, on les retourne, on les combine.

Alain Connes : On peut les bouger, on peut les retourner. Il y a le retournement de la sphère par exemple.

Alain Prochiantz : Mais probablement pas n'importe comment. C'est-à-dire est-ce qu'il y a une grammaire de la combinaison des images mentales ? Qu'est-ce qui est permis dans la manipulation des objets mentaux, de ces images, et qui fait que ce n'est pas n'importe quoi, il y a une sorte de grammaire derrière.

Alain Connes : Il y a bien sûr une grammaire derrière. Je pense que, sans doute, une des facettes les plus importantes de la grammaire, c'est le pouvoir de l'analogie. Et puis ensuite de la métaphore. Mais je pense que l'analogie, c'est quelque chose d'extraordinairement puissant, et qui pour le moment, est tout à fait inaccessible à des procédés comme le Machine Learning, l'intelligence artificielle, etc. Donc c'est un outil extraordinaire...

Alain Prochiantz : Pour toi, c'est l'intuition, l'analogie ?

Alain Connes : Non, c'est plus que ça. C'est-à-dire qu'en fait, ce qui se produit, justement, à travers les images mentales, c'est qu'à un moment donné, le cerveau s'aperçoit que deux images mentales qui paraîtraient extrêmement loin les unes des autres (c'était ce qui était arrivé à Poincaré lorsqu'il montait dans le bus), des images mentales extrêmement éloignées les unes des autres, je veux dire, il parlait de deux choses complètement différentes, en fait, il s'est aperçu à un moment donné qu'il y avait des ressemblances extraordinaires entre les deux. Et le fait qu'il y a eu ces ressemblances extraordinaires entre les deux a fait que, après, il a pu développer une analogie entre deux domaines qui a priori n'ont rien à voir les uns avec les autres.

Et alors, une analogie, c'est quelque-chose qui est extrêmement délicat à manipuler, parce que c'est pas un simple dictionnaire. Si c'était un simple dictionnaire, ce serait rasoir, c'est-à-dire si on pouvait dire "telle chose correspond à telle autre chose etc., etc". C'est une espèce de... Il y a un mathématicien japonais, qui s'appelle Oka, qui avait merveilleusement décrit, c'est une espèce de transplantation, une espèce de... On a une petite fleur et très délicatement, on essaie de la transplanter à un autre endroit, et pourquoi c'est quelque chose d'incroyablement fécond et efficace, c'est parce que en général, justement, les choses que l'on comprend d'un côté, on ne les comprend pas de l'autre et inversement. Donc ça veut dire qu'on va pouvoir transplanter la compréhension qu'on a d'un côté, et voir comment, en essayant, on fait des essais, on voit etc. mais il ne faut surtout pas, à ce moment-là du développement, il ne faut surtout pas essayer d'être trop rigoureux, parce que si on est trop rigoureux, tout va s'effondrer. Et c'est un moment, justement, qui a un aspect poétique et artistique. Pourquoi ? Parce que quand on transplante des petites fleurs, quand on fait ce procédé-là, si on essaie d'être trop intelligent, trop rapide, etc., on va dire "bah, ça va pas marcher, mais ça va pas marcher pour telle raison etc." Et à ce moment-là, on abandonne, et on a tout gâché.

Alain Prochiantz : C'est une sorte de correspondance, en fait.

Alain Connes : C'est une sorte de correspondance, d'analogie. Et on ne peut pas essayer de la codifier de manière trop précise au moment où on la découvre. C'est quelque-chose d'extrêmement fragile et cette fragilité-là fait que, si par exemple, au moment où on la découvre, on essaie de la dire, on essaie, il faut, il faut savoir que les mathématiciens sont des gens très durs, c'est-à-dire qu'en mathématiques, le rêve est exclu. Je vais revenir là-dessus. Mais si on a perçu une analogie entre deux sujets, et si on essaye de manière trop rapide, trop prématurée, de la dire, elle va être détruite. Donc il y a une partie du développement d'une nouvelle théorie comme ça, dans laquelle on doit se protéger, on doit se protéger, c'est comme un petit enfant qui doit être protégé, etc. et seulement au bout d'un moment, quand il aura fait ses preuves, quand il aura grandi suffisamment, là on pourra le dévoiler.

Alain Prochiantz : Il faut laisser mûrir l'analogie, mûrir la correspondance, pour que ça soit suffisamment solide, pour affronter l'épreuve de vérité.

Alain Connes : Alors l'épreuve de vérité est quelque-chose d'absolument terrible. Donc ce qu'il faut savoir, quand je parlais de l'imagination en mathématiques, naïvement, on pourrait croire que, l'imagination en mathématiques, c'est imaginer des choses et puis essayer de les démontrer, etc. Mais en fait, il y a un carcan en mathématiques, qui est absolument terrible, et qui, je pense, est largement semblable à celui de la physique, mais d'une manière très différente. C'est-à-dire en fait, en mathématiques, ce qui se produit, c'est qu'on peut avoir de l'imagination, on peut imaginer une nouvelle théorie etc. Mais, le problème, c'est que, très vite, on va se heurter à une réalité, qui est la réalité mathématique, et cette réalité mathématique, elle est terrible, au sens où, je veux dire, que si on n'a pas tous les éléments d'une démonstration, si on n'a pas par exemple, je veux dire, la possibilité de vérifier les choses sur un ordinateur etc., on se rend compte en fait que la liberté dont on jouit est absolument minimale. Donc c'est pour ça que j'ai insisté sur le fait que le rôle de l'imagination en mathématiques, ce n'est pas d'imaginer de nouvelles choses, etc. Pas du tout. C'est de créer une image mentale à l'intérieur du cerveau. Là, ça sert vraiment. C'est quelque chose d'essentiel. Par contre après, il y a un tel carcan au niveau de l'imagination, par rapport à d'autres sujets, je pense aux artistes, je pense aux romanciers etc., ce carcan est tellement dur, tellement contraint, qu'en fait, ça empêche, ça annihile justement toute possibilité de liberté.

Alain Prochiantz : Très bien. Nous allons peut-être passer sur une première variation sur un air national allemand de Chopin, interprétée par Nikita Magaloff, sur lequel tu nous feras un petit commentaire.

Alain Connes : Exactement, bien sûr, oui oui.

(Intermède musical) : Sur un air national allemand

Alain Prochiantz : Est-ce que tu peux nous dire pourquoi tu as choisi ce morceau ?

Alain Connes : Voilà, alors, pourquoi est-ce que j'ai choisi cet air, ces variations. Bien sûr, pour l'interprétation de Nikita Magaloff, que j'aime beaucoup. Mais, en fait, ma raison est une raison très personnelle, et qui a à voir, comment dire, avec la structuration de l'imaginaire de l'enfant. Ce que je vais dire, c'est quelque-chose de très personnel, donc, mais peu importe, je pense que c'est quelque chose de générique. C'est-à-dire en fait, mes deux grands-parents du côté de ma mère viennent de Constantine en Algérie. Ils étaient originaires de cette ville. Et mon enfance a été bercée par le fait que justement, ma grand-mère maternelle était pianiste. Et elle était orpheline, elle était devenue orpheline à l'âge de 6 ans. Ses deux parents étaient morts. Elle était en Algérie, elle avait été recueillie dans un couvent, et elle me racontait, souvent, quand j'étais gamin, quand j'étais tout petit, des histoires de son père. Et son père, quand elle était toute petite, lui avait offert un piano, et lui avait joué, sur le piano, la partie des variations de Chopin qui est si belle, pas le tout début, mais le thème majeur et qui est introduit par Nikita Magaloff de manière incroyable, parce que c'est un morceau qu'on pourrait interpréter comme un morceau de technique mais pas du tout en fait, il a compris exactement à quel point l'exposition du thème devait être précédée par un ralentissement, etc., et à quel point le thème est beau.

Et en fait, mon enfance a été bercée par cette air, que j'ai eu beaucoup de mal à retrouver ensuite, lorsque j'ai écrit la généalogie de la famille, et donc en fait, ce que je voulais dire, c'est que je pense que l'imaginaire d'un enfant est structuré très tôt en particulier par la musique, et par, cette fois, l'imaginaire, au sens naïf, de ce que l'enfant peut imaginer quand il entend des histoires comme celle-là. Donc je ne suis jamais allé à Constantine. En fait, je ne suis jamais allé en Algérie, mais j'ai toujours eu dans ma tête, une image extrêmement intéressante, justement, de ce moment auquel le père de ma grand-mère qui était médecin, en fait, lui avait offert ce petit piano. Et le rôle que ça a joué...

Alain Prochiantz : Et est-ce que ça a un rapport avec la façon de penser en mathématicien ?

Alain Connes : Eh bien, disons qu'il est très connu, chaque mathématicien est différent, donc je ne veux pas faire de généralités. Mais en fait, il est très, très admis, qu'en général, les mathématiciens sont très intéressés par la musique, à défaut, forcément, d'être musiciens, puisqu'on n'a pas beaucoup de temps lorsqu'on est mathématicien, donc, si on veut pratiquer un instrument, c'est quelque chose qui occuperait trop de temps. Mais en général, ils sont très sensibles à la musique et c'est vrai, c'est vrai, et je continue ce que je disais tout à l'heure, c'est vrai qu'il y a une analogie très forte entre l'algèbre et la musique, par le déroulement dans le temps...

J'explique toujours bien sûr le fait que le langage lui-même, le langage que nous utilisons tout le temps, est non-commutatif puisqu'on peut pas permuter les lettres entre elles, à moins de faire des anagrammes mais... donc, il y a toute une relation très forte effectivement entre la musique et l'algèbre, je pense.

Alain Prochiantz : Et donc la temporalité...

Alain Connes : Et la temporalité, bien sûr, bien entendu.

Alain Prochiantz : Tu peux nous expliquer un peu cette question de la temporalité et un petit peu la géométrie non-commutative, comment ça se met là-dedans ?

Alain Connes : Oui, bien sûr. Alors disons qu'on a écrit deux livres, avec Dany Chéreau, qui est mon épouse, et puis Jacques Dixmier qui était mon professeur de thèse. Et justement, dans ces deux livres, on a continué ce thème qui est un thème essentiel dans ce que j'ai fait, dans ma vie de scientifique, et qui a démarré par la découverte du fait que lorsqu'on fait de l'algèbre, mais de manière non-commutative, c'est-à-dire qu'on ne s'autorise pas à permuter les lettres entre elles. Alors bien sûr, c'est quelque chose qui est essentiel parce que c'est ce qu'a trouvé Heisenberg, lorsqu'il a découvert la mécanique quantique.

Lorsqu'il a découvert la mécanique quantique, il a compris que lorsqu'on traite de systèmes tout petits, de systèmes microscopiques, en fait, contrairement à ce qu'on fait lorsqu'on fait de la physique classique, où on écrit $e = mc^2$ ou $e = c^2m$, c'est la même chose. Lorsqu'on travaille avec un système microscopique, on n'a plus le droit de permuter les lettres, c'est extraordinaire, il a fait une découverte fantastique. Et d'ailleurs, il a fait cette découverte à 4 heures du matin, alors qu'il était isolé sur l'île d'Heligoland et, ce qui est merveilleux en fait, c'est à quel point les découvreurs arrivent à transmettre, dans leurs écrits, Heisenberg l'a fait dans ses mémoires, l'extraordinaire vision qu'il a eue au moment où il a fait cette découverte. Et il a dit que c'était une vision qui était effrayante, parce que du fait qu'il était le premier à voir cela, en fait, il a eu devant lui un paysage qui était presque tout le paysage, et qui était effrayant. Et il le décrit merveilleusement. Et il n'est pas le seul à avoir été capable justement, en étant le premier découvreur, à transmettre cela.

Alors de mon côté donc, ce que j'avais perçu si vous voulez, c'est que, en fait, lorsqu'on fait de la géométrie non-commutative eh bien, automatiquement, c'est un certain type d'algèbre qui a été découverte par Von Neumann, automatiquement, l'algèbre elle-même sécrète son propre temps donc le fait que l'algèbre soit non-commutative sécrète le temps, le passage du temps et ça c'est quelque chose d'absolument bouleversant d'une certaine manière, et pendant des années et des années, j'avais été fasciné par ce fait-là. Bien sûr, mathématiquement, ça a un tas de conséquences parce que par exemple, l'algèbre a des périodes, etc., mais j'avais toujours été incapable d'avoir une idée de comment cette trouvaille, si vous voulez, pouvait trouver sa place en physique et donc ça c'est le sujet de notre premier livre, qui s'appelle Le théâtre quantique, qui est publié chez Odile Jacob et dans lequel, justement, on a essayé, moi et mes deux co-auteurs, de transmettre cette trouvaille, mais de telle sorte qu'elle puisse être perçue par le public.

C'est difficile, c'est difficile. Et dans le deuxième livre alors, Le Spectre d'Atacama, on est allé beaucoup plus loin au sens où là, on a essayé de transmettre justement, ce lien entre les formes et la musique, qui est un lien aussi extrêmement important, et qui dit que, lorsqu'on essaie par exemple d'expliquer où nous nous trouvons dans l'espace eh bien en fait, on se trouve confronté à un problème mathématique qui n'est pas du tout trivial, qui n'est pas du tout évident, qui est le problème de pouvoir donner un espace ou une forme, de manière plus générale, de manière invariante. Et ce que les mathématiques nous enseignent, c'est que si on veut donner une forme de manière invariante, la première chose qu'une forme nous procure, nous donne, c'est une gamme musicale, ça paraît quelque-chose de tout à fait étonnant donc : une forme nous procure une gamme musicale qui s'appelle un spectre. Et après, bien sûr, il y a à partir de là tout un développement. Le deuxième livre s'appelle Le Spectre d'Atacama parce que précisément, ce qui se produit, et qui est tout à fait étonnant, c'est que, alors qu'on peut calculer le spectre de formes ordinaires. Donc bon, si on regarde un espace comme un tambour, c'est Marc Kac qui avait depuis longtemps posé le problème si vous voulez : est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?

C'est-à-dire qu'un tambour a des vibrations, lorsqu'on tape dessus, et il ne faut pas croire qu'on obtiendra toujours le même son ; c'est ce que savent faire les gens qui jouent de la batterie par exemple ; donc on a des sons très différents mais ces sons forment une gamme, et une question évidente, c'est "est-ce que on peut reconnaître la forme du tambour à partir de la gamme ?".

Alors c'est une question qui a une réponse mathématique mais la chose vraiment étonnante, alors qu'on peut calculer la gamme d'un objet géométrique, d'une forme géométrique que l'on connaît, il existe des spectres, donc j'identifie la gamme si vous voulez avec la gamme des fréquences. Et ces fréquences, on va les représenter par des raies spectrales. Il y a un problème qui se pose de manière absolument insolente. C'est qu'en fait, il existe des spectres, qui apparaissent complètement naturellement, et où on a vraiment une difficulté considérable, mais bon, dans certains cas, on y arrive, à retrouver la forme, la forme physique, dont le spectre est le spectre. Et alors, il y a un exemple qu'on explique et qui justifiera le deuxième morceau de musique dont je parlerai tout à l'heure... C'est un exemple qu'on explique en grand détail dans le livre, c'est ce qu'on appelle le spectre de la guitare.

Alors je vais essayer de l'expliquer, mais à nouveau, il faut que l'auditeur se prépare à construire lui-même des images mentales dans ce que je vais expliquer. Donc la première image mentale, c'est imaginez une guitare. Bon. Vous avez une guitare. Vous avez sans doute vu des guitares, donc vous pouvez imaginer dans votre tête ce que c'est qu'une guitare, j'ai pas besoin de vous la montrer. Alors si vous regardez une guitare, vous allez voir sur le manche de la guitare, des raies qui sont perpendiculaires au manche, et qu'on appelle des frettes. Alors si vous regardez attentivement ces frettes, vous allez voir... Regardez-les dans votre tête. Vous allez voir qu'au départ, il n'y a pas de frettes, il y a un espèce de trou, bon, qui va permettre des résonances. Et puis là, les frettes commencent. Et elles ne sont pas du tout espacées de manière régulière. On aurait pu penser que simplement, lorsqu'on regarde le manche de la guitare, si vous voulez, les frettes vont être espacées également. En fait, elles ne sont pas du tout espacées également Et le mathématicien, quand il voit l'espacement des frettes, il se pose tout de suite la question “mais pourquoi est-ce qu'on n'a pas espacé les frettes de manière égale ?”. Alors la réponse, c'est une réponse mathématique, mais c'est une réponse qui est merveilleuse, parce qu'elle va nous donner un spectre. Et ce spectre, après, on va devoir chercher la forme dont c'est le spectre. Alors d'abord, quel est ce spectre ? Eh bien, quand on fait de la musique, on s'aperçoit d'une chose très importante, qui est que l'oreille n'est pas du tout sensible à 1 2 3 4 5, etc. elle n'est pas sensible à additionner, elle est sensible en fait à multiplier une fréquence par quelque chose, c'est-à-dire si on prend une fréquence et qu'on la multiplie par 2, ça correspond au passage à l'octave. L'oreille est sensible au passage à l'octave, elle ressent une correspondance entre les deux fréquences, elle ressent une harmonie entre les deux fréquences. C'est la multiplication par 2. L'oreille 'est également sensible à la multiplication par 3 : quand on prend une fréquence et quand la multiplie par 3, l'oreille entend une résonance, elle entend quelque chose qui correspond. Alors maintenant, comment cela explique-t-il le spectre de la guitare ? Ca explique le spectre de la guitare parce que, lorsqu'on élève le nombre 2 à la puissance 19, on obtient pratiquement le nombre 3 élevé à la puissance 12. Ca peut pas être une égalité parce que quand on élève 2 à la puissance 19, on obtient un nombre pair. Alors que quand on élève 3 à la puissance 12, on obtient un nombre impair. Donc ça ne peut pas être une égalité. En fait, ce qui se produit, c'est que si on regarde la racine douzième de 2, c'est un nombre qui vaut 1.05 etc., et c'est pratiquement la même chose que la racine $19^{\text{ème}}$ de 3, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire qu'en musique, ce qu'on a fait, avec les frettes de la guitare, c'est qu'on s'est arrangé pour faire croire que ces deux nombres étaient égaux et le 12 en question, ce sont les 12 tonalités de la gamme bien tempérée. Et toute la musique est basée là-dessus. Et qu'est-ce que c'est que le spectre de la guitare ? Ce sont les puissances du nombre, qui est la racine douzième de 2, et qui est pratiquement la racine $19^{\text{ème}}$ de 3. Donc c'est quelque chose d'extraordinaire. Et alors, on se trouve là confronté à un problème parce qu'on a de manière évidente ce spectre. Ce spectre est devant nous et on se demande quel est l'objet donc il est le spectre. Alors quand on est mathématicien, on a un tas d'outils pour regarder ça ? Pourquoi ? Parce que quand on regarde le spectre qui correspond au tambour, ou le spectre qui correspond à une forme qui est bi-dimensionnelle, qui est de dimension 2, on s'aperçoit que sa gamme, elle croît comme une parabole. Si on regardait un objet de dimension 3, ça croîtrait avec une puissance 3, etc. Et alors, on regarde maintenant le spectre de la guitare ? *(Claquement de langue interrogatif).* Ah ! Il est extrêmement bizarre ! Parce que si on calcule sa dimension en utilisant ce que je vous ai dit avant, on obtient que c'est un objet de dimension 0, un objet de dimension 0 au sens où sa dimension est plus petite que tout nombre, non nul mais positif. Ah ? ! Alors la merveille, c'est qu'en fait, il y a un objet dont le spectre est le spectre de la guitare, mais c'est un objet de géométrie non-commutative. Donc on retombe sur ses pieds. Et donc en fait, le livre, le livre qu'on a écrit sur le Spectre d'Atacama, c'est un livre qui est entièrement basé sur le fait d'essayer de comprendre un spectre. Ce spectre a été observé par l'Observatoire d'Alma au Chili et pendant tout le livre, il y a un héros, enfin, il y en a plusieurs, il y a trois personnages essentiels, il y a un mathématicien, il y a une physicienne qui était là dans le premier livre, qui a échappé à un séjour quantique et tout le livre est basé sur le fait d'essayer de comprendre ce spectre mystérieux dans le désert d'Atacama.

Alain Prochiantz : Dans le désert d'Atacama. Donc nous allons écouter maintenant Salut d'amour, d'Elgar, joué par Itzhak Perlman et après, nous reprendrons notre discussion.

Alain Connes : Bien sûr.

(Intermède musical : Salut d'amour)

Alain Prochiantz : Après ce Salut d'amour, je rappelle que nous recevons aujourd'hui, dans le cadre de la série d'interviews sur le thème Imaginations, Alain Connes, mathématicien et professeur du Collège de France, titulaire de la chaire Analyse et géométrie. Alain, je crois que tu voulais t'exprimer sur ce morceau.

Alain Connes : Absolument. Pourquoi j'ai choisi cet air ? C'est pour illustrer exactement ce que je disais tout à l'heure, mais la différence entre le violon et la guitare. Donc la guitare, j'ai parlé du spectre de la guitare, et des frettes sur le manche de la guitare. Bon. C'est bien évident que quand on a un violon, on n'a pas de frettes, et la difficulté extraordinaire du violon vient du fait que justement, on n'a pas un spectre discret au sens mathématique, c'est-à-dire on n'a pas... Si vous voulez, un déplacement infinitésimal du doigt sur le manche du violon va faire toute la différence. Et cette interprétation de Itzhak Perlman Perlman, est merveilleuse, et c'est pour ça que je voulais qu'on l'écoute, elle est merveilleuse par l'infinie précision qu'il arrive à avoir, dans les sons qu'il produit ; mathématiquement, ce qu'on dit, si vous voulez, c'est que la différence entre la guitare et le violon, c'est que la guitare a un spectre discret, que j'ai expliqué tout à l'heure, le violon a un spectre continu. Mais il y a dans le spectre du violon la même difficulté que dans la guitare. C'est-à-dire qu'il y a une échelle exponentielle, c'est-à-dire que lorsqu'on passe d'une note à l' autre, naïvement on croirait qu'il faut le faire en espaçant les doigts d'une longueur égale, non, il faut le faire en les espaçant d'une longueur exponentielle, puisque ça correspond aux puissances du nombre d'avant.

Donc en fait, il y a toujours, toujours, entre deux violonistes, des différences infinitésimales et cette interprétation d'Itzhak Perlman est, de mon point de vue, une merveille parce qu'il y a de toutes petites nuances, infimes, que l'oreille perçoit bien sûr, et qui font que cette adaptation est merveilleuse.

Alain Prochiantz : Merci beaucoup, Alain Connes, j'aurais voulu revenir un tout petit peu sur la question du mathématicien, sur la question de la démonstration en fait, parce qu'il y a les conjectures. Comment ça vient une conjecture ? Et comment peut-on passer, après, du travail de la conjecture à la démonstration de la chose et ce sont deux façons différentes de faire des mathématiques. Ce sont deux types d'esprits mathématiques différents ?

Alain Connes : En fait, c'est toujours étonnant ce qui se produit avec les conjectures. C'est-à-dire en fait, un mathématicien découvre quelque chose de totalement nouveau. L'exemple que j'ai en tête, bien sûr, on en parle beaucoup dans le livre, c'est Riemann, au siècle dernier, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, plus précisément, c'est pas le siècle dernier, qui a fait une découverte absolument phénoménale. En fait, il a trouvé qu'on pouvait comprendre les nombres premiers, donc comprendre l'aléatoire des nombres premiers, l'aléatoire qui n'était pas du tout contrôlé, à partir d'une fonction qui s'appelle la fonction zêta (ζ) et après avoir démontré une formule, donc il donne une formule exacte si vous voulez, pour le nombre de nombres premiers plus petits que n. C'est pas tellement le fait qu'il y ait une formule exacte, parce qu'il en existe d'autres, mais c'est le fait que cette formule en fait décrit exactement le comportement des nombres premiers. Et il s'est aperçu en fait, dans cette formule qu'il a démontrée, qu'il y avait une musique des nombres premiers, c'est-à-dire il a montré qu'il y avait un terme dominant, qui est facile à comprendre parce qu'en gros, les nombres premiers deviennent de plus en plus rares, en gros, comme l'inverse du nombre de chiffres du nombre qu'on regarde.

Donc quand on regarde les nombres premiers par exemple, entre 10000 et 100000, ou bien entre 100000 et 1000000, la proportion va être divisée par 2. En fait, cette chose-là, si vous voulez, ce phénomène-là, conduit à une fonction qu'on appelle le logarithme intégral, qui est effectivement le premier terme dans la formule de Riemann. Mais après, l'aléa des nombres premiers se manifeste justement par un spectre. Et se manifeste justement par ce qu'on pourrait appeler la musique des nombres premiers.

Alors en fait, quand Riemann a trouvé ça, il s'est aperçu en faisant des calculs, il a fait des calculs, il s'est aperçu que les zéros de sa fonction, qui gouverne justement le spectre, avaient l'air d'être tous sur une certaine droite. Et le fait qu'ils soient sur cette droite joue un rôle essentiel, parce que le fait qu'ils soient sur sa droite dit que la formule qu'il a donnée est une formule extrêmement précise. S'il y en avait qui étaient en dehors de cette droite, il y aurait une espèce de chaos qui s'introduit, ça ne serait pas du tout quelque chose d'agréable. Et il a conjecturé que tous ses zéros étaient là. Cette conjecture, elle a été faite donc, en gros dans les années 1850-1860, donc ça fait un temps considérable qu'elle a été faite, mais, je pense que lui était pratiquement sûr que c'était vrai, et en gros, il voulait continuer et faire une conjecture, c'est être pratiquement sûr qu'un résultat est vrai, et aller audelà.

Alors maintenant, cette conjecture de Riemann, elle a été vérifiée avec l'ordinateur, parce qu'avec l'ordinateur, on peut aller très très loin ; en fait, on a une manière de calculer, qui est très très efficace pour cette fonction, et on l'a vérifiée pour des milliards de zéros ; donc au niveau vérification, on a une indication très forte. On ne sait pas si elle est vraie parce qu'il y a d'autres conjectures qui avaient l'air d'être vraies comme ça, mais qui ne sont pas vraies pour des nombres très très grands, donc on ne sait pas si elle est vraie mais la manière dont il l'a trouvée, c'est qu'il n'avait pas envie de s'arrêter là, si vous voulez, et il avait envie d'aller plus loin.

Et bon après lui, il y a eu un très grand nombre de mathématiciens qui s'y sont intéressés, il y a eu par exemple des mathématiciens qui, lorsqu'ils prenaient l'avion ou etc., envoyaient une lettre en disant "j'ai démontré etc." en pensant que si l'avion se cassait la gueule..., à ce moment-là... *(rires)*. Voilà. Donc j'ai toutes sortes d'histoires, autour de cette conjecture. Mais disons que, ce qu'elle a d'extraordinaire, ce qu'une conjecture comme celle-là a d'extraordinaire, c'est qu'en fait secrètement, elle a motivé la plupart des développements les plus intéressants en mathématiques au XX$^{\text{ème}}$ siècle. C'est-à-dire que si on connaît suffisamment de choses en mathématiques, on s'aperçoit que, quantité de développements qui n'ont a priori rien à voir avec la conjecture, en fait étaient motivés par celle-là ; un exemple typique, c'est toute la théorie des fonctions presque périodiques de Bohr, le footballeur, le frère du physicien, donc je veux dire, c'est étonnant, c'est étonnant. Et à ce propos-là, et ça, on l'explique en détail dans le livre, ce qu'il est important de savoir, c'est qu'un mathématicien devant un problème, a toujours une technique qui fait qu'il n'est pas désarmé et quelle est cette technique ? C'est une technique très intéressante qui je pense ne s'applique pas seulement aux mathématiques, elle s'applique, je pense, en fait à toutes sortes de domaines ; et c'est pour ça que je veux l'expliquer.

C'est une technique qui consiste à dire, face à un problème fixé, par exemple la conjecture de Riemann, au lieu d'être là à regarder le problème et puis d'être incapable de faire quoi que ce soit, non. Ce qu'on va faire, c'est la première chose qu'on va faire, c'est quelque chose de criminel d'une certaine manière. C'est-à-dire, on va prendre le problème et on va le généraliser. Alors ça paraît complètement idiot. Ca paraît complètement idiot de remplacer un problème particulier par un problème beaucoup plus général. Et l'exemple qu'on prend dans le livre, c'est l'exemple des tablettes de chocolat. C'est-à-dire qu'on est là, on vous regarde, et puis on vous demande "quelle est la manière optimale de casser une tablette de chocolat de 6 x 8 par exemple en petits carreaux ?". Et alors, l'intérêt de généraliser, c'est qu'on va maintenant pouvoir spécialiser le problème généralisé à des cas beaucoup plus simples. Ca, c'est formidable parce que si vous êtes confronté au problème d'une tablette de 6 x 8, vous êtes complètement coincé parce que vous vous dites “mais c'est trop compliqué, j'y arriverai jamais.” Par contre, si vous remplacez 6 et 8 par l et m, ça paraît bizarre. Mais maintenant, vous prenez $l = 1,\ m = 3$, vous avez une tablette de trois carreaux, trois carreaux. Bon ben pour la casser, c'est pas très difficile. Donc en fait, en mathématiques, on fait ça et on a fait ça pour l'hypothèse de Riemann, et ça a été quelque chose d'extrêmement fructueux parce que c'est ça qui a permis à André Weil justement, de démontrer une généralisation qui avait été faite et de démontrer que c'était vrai dans ce cas-là. Donc ça donne confiance et en général, justement, ça permet de donner un point d'ancrage, pour ce dont je parlais tout à l'heure, c'est-à-dire l'analogie. C'est-à-dire qu'une fois qu'on a démontré un cas particulier du problème généralisé, on a un outil extraordinaire qui est l'analogie. C'est-à-dire qu'on imagine que la démonstration qu'on a fait dans le cas particulier va pouvoir se transplanter, je ne dis pas se transposer, je dis se transplanter, comme je le disais tout à l'heure, avec les petites fleurs qui sont très fragiles. Donc elle va pouvoir se transplanter au cas qui nous intéresse vraiment. Donc le pouvoir créateur des conjectures n'est pas du tout négligeable, c'est une espèce de manière d'avoir vu plus loin que les autres, et après bon ben, après, il faut rentrer dans le dur, il faut essayer de démontrer la conjecture.

Alain Prochiantz : Mais les conjectures sont toujours démontrées ? Ou bien il y en a qui sont fausses ?

Alain Connes : Oui, bien sûr, il y en a qui sont fausses.

Alain Prochiantz : Et si on travaille sur une conjecture qui est fausse, et si on tire des résultats intéressants, et qu'on démontre qu'elle est fausse...

Alain Connes : En fait, ce qui se produit en mathématiques, c'est qu'il y a deux aspects. Il y a l'aspect il y a un problème, est-ce que ce problème est résolu ou non, bon... Ca, c'est un aspect des mathématiques. Mais il y a un aspect qui est largement aussi important, c'est l'aspect d'édifier des théories. Et par exemple Grothendieck était très connu justement pour lorsqu'on lui posait une question, etc. il essayait toujours de formuler la question dans le bon cadre, et ensuite d'édifier une théorie qui fasse en sorte que la question se résolve par elle-même. C'est Serre qui a employé la meilleure métaphore par rapport à ça : il disait que quand on lui posait un problème comme ça, il essayait de le laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales. Donc ça dit bien ce que ça veut dire. Et donc en fait, il y a l'impulsion qui est donnée par une question comme une conjecture etc. Très souvent justement, l'aspect le plus créateur, le plus positif d'une conjecture, c'est l'édification des théories qui vont permettre soit de la résoudre, soit de dire qu'elle est fausse. Ca peut très bien arriver. Et d'ailleurs, ce qu'on veut, c'est savoir la vérité. On ne veut pas, nécessairement, démontrer. En fait d'ailleurs, dans le livre, on raconte une histoire que je ne veux pas louper parce que le livre, Le Spectre d'Atacama, se termine par cette histoire ; cette histoire, c'est l'histoire d'un mathématicien vieillissant, bon, pensez à qui vous voudrez, qui s'est attaqué pendant des années à une conjecture bon, et qui finalement décide, parce qu'il voit qu'il n'a plus beaucoup de temps devant lui, de vendre son âme au diable, pour connaître la réponse. On dit au départ, pour connaître la réponse.

Alain Prochiantz : C'est une histoire connue, ça.

Alain Connes : Euh, pas tellement celle que l'on raconte...

Alain Prochiantz : L'histoire de vendre son âme au Diable, en tout cas.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr. Vendre son âme au Diable, c'est un phénomène connu, mais dans ce cas-là, ce qui se produit, c'est assez étonnant, parce qu'il finit par avoir rendez-vous avec le Diable et d'ailleurs le Diable est incarné par le Machine Learning. Hein ! *(rires)* Donc il finit par avoir un rendez-vous avec le diable et puis, lorsqu'il rencontre le Diable, il le rencontre dans une banlieue mal famée de Naples et le diable commence par lui faire signer les papiers comme quoi il a vendu son âme au diable et le mathématicien ne se rend pas compte que, du fait qu'il a signé les papiers et qu'il a donné son âme au Diable, il va changer de comportement. Donc le Diable lui dit “mais bon quel est votre souhait maintenant ? Il faut que vous donniez votre souhait...” Et le mathématicien dit “je souhaite que l'hypothèse de Riemann soit fausse” *(rires)* Et c'est seulement quand il rentre chez lui qu'il réalise qu'en fait, ce qu'il vient de dire, c'est parce qu'il avait vendu son âme et que donc, au lieu de souhaiter qu'elle soit vraie, etc., il a souhaité qu'elle soit fausse.

Alain Prochiantz : Cher Alain, je pense que nous allons bientôt clôre cet entretien qui était vraiment passionnant ; j'aimerais te poser une question : "est-ce que les mathématiques sont pour toi une langue naturelle ?"

Alain Connes : Alors je pense que non seulement, c'est une langue naturelle, mais je pense que c'est la seule langue qui nous permettra de communiquer avec une intelligence extraterrestre. Et ça rejoint le livre mais je suis désolé de le mentionner trop, mais eh bien, ce qui se produit dans le livre justement, c'est que ce message qui est reçu et qui est le spectre d'Atacama, il est reçu en alternance avec les nombres premiers, et une intelligence terrestre, un mathématicien, ne peut pas manquer de reconnaître une intelligence extérieure à nous, et qui se manifeste par cette compréhension qui est extraordinaire, qui a été faite par Riemann au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, donc ce que je prétends, ...et il y a un langage qui a été inventé qui s'appelle le Lincos..., mais ce que je prétends, c'est qu'on pourra communiquer justement avec les extraterrestres grâce au langage mathématique, pourquoi ? Parce que c'est le seul langage qui n'est pas auto-référentiel. C'est le seul langage qui n'est pas auto-référentiel, c'est-à-dire que, contrairement à un dictionnaire qui, quand on cherche la définition d'un mot fait référence à un autre mot, qui lui-même fait référence à un autre mot etc. etc., n'est pas auto-référentiel.

Alain Prochiantz : Mais ce langage est composé, donc, pour revenir au point de départ, d'images mentales.

Alain Connes : Euh non, ce langage est composé, au départ, par exemple de signaux, qu'on envoie de manière spectrale, qu'on envoie de manière répétitive...

Alain Prochiantz : Mais par exemple toi, quand tu penses ?...

Alain Connes : Ah quand je pense, bien sûr, je pense à travers des images mentales, bien entendu.

Alain Prochiantz : Tu ne penses jamais en langue naturelle ?...

Alain Connes : Non, non, non. La langue naturelle, je veux dire, c'est une langue qui après, péniblement, essaie de transcrire nos images mentales, nos manières de penser, etc., mais je dis "péniblement" parce qu'en général, je n'arrive pas à transmettre ça de manière vraiment satisfaisante, j'essaie de manière orale etc., il y a des gens qui sont vraiment forts pour le faire, et je pense en particulier à Grothendieck. Grothendieck était capable lorsque, ce dont on parlait tout à l'heure, c'est-à-dire à propos d'une idée qui n'était pas encore mûre, il était capable de se mettre à écrire sur elle et ça,...

Alain Prochiantz : Ca la faisait mûrir ?...

Alain Connes : Ca la faisait mûrir, mais je pense que ça n'est pas donné à tout le monde d'être capable d'écrire sur une idée qui n'est pas encore mûre et de la faire mûrir, je veux dire.

Alain Prochiantz : De la sortir de son cocon...

Alain Connes : De la sortir de son écrin, de son cocon. Et il y a une autre chose que je voulais dire quand même, avant qu'on termine, c'est, je ne sais pas si ça a été mentionné dans un autre dialogue sur l'imagination, mais il y a un exemple extraordinaire, c'est l'exemple de Eureka d'Edgar Poe. Donc cet exemple, c'est quand même merveilleux, de savoir qu'un poète a pu, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, avoir l'intuition pas seulement du Big Bang, mais du fait que l'univers pouvait ensuite avoir un Big Crunch, etc., et qu'il a pu être moqué, il a été moqué pendant plus d'un siècle, jusqu'à ce que finalement, on s'aperçoive qu'en fait, il avait raison, mais il avait raison par une intuition purement géniale, et purement poétique.

Alain Prochiantz : Voilà, eh bien, écoutez, je pense que c'est la meilleure façon de terminer cet entretien avec, je le rappelle, Alain Connes, titulaire de la chaire Analyse et géométrie du Collège de France. Merci Alain, d'être venu aujourd'hui et à bientôt.

Transcription d'une conférence donnée par Alain Connes "Dualité entre formes et spectres", donnée au Collège de France, le 13.10.2011
La conférence est visionnable ici :
http://www.college-de-france.fr/site/colloque-2011/symposium-2011-10-13-10h15.htm

Alors donc, mon exposé va se concentrer sur la dualité qui existe entre les formes et leur spectre, c'est à dire, si vous voulez, la gamme qui est associée à une forme. Ça, bien sûr, ça répond partiellement à la question de la relation entre les formes et le temps, puisque les vibrations d'une forme se déroulent dans le temps.

Et je commencerai mon exposé en expliquant pourquoi il est absolument fondamental de se poser la question suivante "comment est-ce qu'on peut définir des invariants d'une forme ?". Si vous avez une forme au sens très naïf du terme ? Vous pouvez parler de son diamètre, vous pouvez parler de sa taille et de son volume, des choses comme ça, mais bien sûr, pour arriver à donner entièrement une forme. Il faudrait, il faut des invariants beaucoup plus subtils que ça.

Et parmi ces invariants, il y a justement les fréquences, la gamme possible produite par une forme, c'est de ç dont on va parler. Et ensuite, on veut non seulement savoir comment caractériser une forme, mais on veut aussi savoir comment caractériser la position d'un point par rapport à cette forme. Et ce qu'on verra, c'est qu'en gros, si vous voulez, un point, il est caractérisé par un accord, des notes, dans cette gamme. Donc, pour vous présenter les choses de manière un peu naïve. Donc, on parlera des vibrations, des formes, je vous ferai entendre des formes simples et ensuite, par référence à un fameux article de Mark Kac dans les années 60, qui demandait "Est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?", on parlera d'un invariant additionnel qui permet de compléter le tableau, c'est-à-dire qui permet, si on le connaît, de connaître la forme. Et enfin, je terminerai, je tiens beaucoup à cette petite addition, parce qu'en préparant mon exposé, je me suis aperçu que j'avais essayé de jouer *Au clair de la Lune* sur la gamme qui est produite par les formes les plus simples, comme une sphère ou des choses comme ça. Et je me suis aperçu que ça donnait un résultat qui n'était pas bon du tout. Et je me suis aperçu qu'en fait, la gamme, la vraie gamme musicale, celle qui est sensible à l'oreille, eh bien, il n'y a pas une forme simple à laquelle elle correspond, c'est à dire une forme dont les fréquences correspondent à la gamme musicale telle qu'on la connaît. Et je me suis amusé à chercher un objet et il y a un objet vraiment très intéressant qui semble répondre à la question et dont je parlerai à la fin, qui est la sphère quantique.

Donc, c'est ça le programme.

Et alors ? Donc, pour commencer, on va essayer de réfléchir de manière intrinsèque à la notion de forme ou à la notion de position par rapport à une forme, en se posant une question qui est une question très simple et qui est "où sommes nous ?".

Voyez, à cette question, vous pouvez répondre "on est au Collège de France, dans l'amphi Marguerite de Navarre". Mais si vous voulez transmettre cette information à une autre civilisation, ce sera inaudible.

Comment est ce que nous pouvons transmettre là où nous sommes de manière intrinsèque ? Alors, bien sûr, les hommes ont essayé et ils ont envoyé la sonde Pioneer dans l'espace. Et sur cette sonde, ils ont donné un certain nombre d'informations. Quelles sont ces informations ?

Bon, ils ont bien sûr montré à quoi ils ressemblaient. Ça, c'est le dessin qui est là.

Ils ont également donné un petit aperçu du système solaire. On voit, en bas, le soleil, on voit une première planète Mercure. On voit une deuxième planète, Vénus. On voit la troisième dont la sonde est partie. C'est pour ça qu'ils ont mis le petit dessin, et ainsi de suite.

Mais il est bien évident que pour le moment, vous avez une information qui est quasi nulle parce qu'il va exister une infinité de systèmes planétaires qui auront à peu près la même allure. Et donc, en fait, vous ne saurez absolument pas où vous êtes.

Alors, en fait, il y a dans le dessin qu'ils ont envoyé quelque chose qui est beaucoup plus intéressant, beaucoup plus cryptique et beaucoup plus informatif, et qui est ce qui est au milieu, à gauche, vous voyez.

Et qu'est ce que c'est ?

Ce sont les directions à partir du Soleil par rapport à 14 pulsars et au centre de la galaxie. Et en plus, ils ont indiqué pour chacune de ces directions la fréquence correspondante. Alors on verra que ça, c'est très, très, très proche de la réponse qu'on va obtenir à partir d'une réflexion mathématique abstraite sur le problème abstrait. Et le problème abstrait, il peut se formuler de la manière suivante, il peut se formuler sous la forme de deux questions, excusez-moi, de temps en temps, je mettrai des transparents en anglais parce que je sais qu'il y a une traduction simultanée et j'en profite, donc, pour mettre quelques transparents en anglais, la traduction en français, je vous la donne : donc, la première question, c'est peut-on trouver des invariants complets d'espaces géométriques ou, si vous voulez, de formes, de manière plus générale ?

Et deuxièmement, peut-on spécifier de manière invariante où est un point par rapport à une forme ? Alors la chose qui est essentielle, là, on le voit bien dans l'exemple que je vous ai donné quand on veut donner notre position par rapport à l'univers, voyez quelqu'un de très savant, vous dirait. "Mais pour donner votre position dans l'univers, il suffit de donner vos coordonnées par rapport à un système de référence.". Oui, mais où est l'origine du système de référence ?

Il faut bien que vous disiez où elle est. Et pour faire ça, vous avez exactement le même problème que dans le problème de départ. Et ainsi de suite. Donc vous voyez, ce n'est pas du tout quelque chose de simple. Ce n'est pas du tout évident. On pourrait vous dire oui, je connais la relativité générale. Je sais qu'un point est spécifié par ses coordonnées, tout ça. Mais ces réponses sont nulles et non avenues par rapport au côté invariant et intrinsèque du problème.

Alors, la chose importante, donc, la chose importante, c'est qu'en fait, à une forme, donc, correspond toute une série de invariants, déjà. Et ces invariants, c'est, si vous voulez, la gamme de la forme, alors c'est là qu'on va voir si le son marche, j'espère qu'il va marcher. Donc, on va faire un petit essai. Ce matin, quand je me suis réveillé, mon ordinateur avait rebooté et donc il n'y avait plus rien qui marchait. Et comme le programme prend très longtemps à se mettre en route, j'étais vraiment effrayé. On va voir si ça marche. Ça marche, donc on entend le son, alors je vais commencer par la forme la plus élémentaire, la forme la plus élémentaire qui soit, c'est l'intervalle.

Si vous voulez, c'est une corde qui va vibrer, comme une corde d'un violon, et elle va vibrer. Elle va avoir un son fondamental. Et puis, elle va avoir les multiples de ce son, comme vibrations. La gamme correspondante va être extrêmement simple.

Et on va s'amuser à jouer un peu avec cette gamme. D'accord, donc, si je fais ça. *(Il clique sur des boutons numérotés de 1 à 20 et on entend les sons associés.)* Ça paraît bizarre, le 7. Eh bien, je prétends que si vous essayez sur cette gamme-là de jouer *Au clair de la lune*, la première note, ça doit être 131.

Donc vous voyez que ça a l'air... Naïvement, on se dit "Mais ça, c'est la gamme ! Bien sûr ! Puisque ce sont les multiples d'un nombre entier...". Non, ce n'est pas vrai. Ce n'est pas vrai du tout. Grosse erreur. Première erreur naïve qu'on ferait. Alors, ça, c'est pour l'objet le plus simple. Un objet un petit peu plus compliqué mais quand même, cet objet, si vous voulez. Il a un spectre extrêmement simple. Quand on veut visualiser les fréquences, on peut les représenter sous leur forme visuelle, c'est-à-dire sous leur forme à partir du spectre. Et puis, on peut aussi les représenter sous forme d'un graphe. Le graphe est intéressant parce qu'on verra la multiplicité d'une valeur propre dans un graphe. Alors maintenant, passons à une forme qui est déjà plus évoluée, qui est le disque.

Alors, le disque, qu'est-ce que cela veut dire ? Les sons produits par le disque, ça veut dire vous prenez un tambour rond, vous tapez sur ce tambour. Il va y avoir un son fondamental. Il va y avoir exactement comme dans le cas de la corde vibrante. Il va y avoir des harmoniques, il va y avoir d'autres sons. Donc le tambour va produire toute une série de sons qui ne seront plus du tout aussi simples que les entiers dont j'ai parlé tout à l'heure, et qui vont vous donner une gamme.

Et cette gamme va être quand même extrêmement informative sur le tambour, c'est à dire que la note la plus basse va vous donner le diamètre, va vous donner immédiatement une mesure de diamètre. Et puis le comportement, par exemple, des notes beaucoup plus grandes, va vous donner la taille du tambour, etc., etc.

Alors je vous donnerai à la fin une bibliographie. Je veux dire, pour tous les mathématiciens qui ont été impliqués dans ce genre de truc, mais je ne vais pas du tout vous dire "ceci est dû à x ou bien ceci est dû à y. Je vous donnerai la bibliographie à la fin, mais écoutons un petit peu le tambour.

(Les clics ne produisent aucun son.) Alors là, j'ai pas mis de sons justement, donc j'ai pas mis de temps parce que il y a des sons qui sont très aigus, regardons simplement comment il vibre pour le moment.

D'accord, vous voyez, j'espère. Vous voyez comment il vibre : à chaque fois que vous avez une image comme ça. Le dessin n'est pas du tout aussi simple qu'il pourrait paraître, parce que les fonctions qui sont impliquées sont ce qu'on appelle les fonctions de Bessel. Et si vous voulez, justement, lorsqu'on tape plus ou moins, à un endroit suffisant sur le tambour, etc. On va le faire vibrer. Selon l'une de ses fréquences harmoniques. On va les écouter, écoutons-les. Alors, on peut les calculer. Ce sont des nombres qui ne sont pas du tout triviaux. Ce ne sont pas du tout des nombres comme les entiers. Ce sont des zéros d'une fonction qui est assez compliquée qu'on appelle la fonction de Bessel, qui sont paramétrés par deux entiers et qu'on peut calculer. On peut les calculer avec autant de décimales qu'on veut. Mais ce ne sont pas des nombres simples et c'est ça la gamme du disque. Donc, le disque a une gamme comme ça.

Je vous montre les premières notes. Il a un spectre qui est comme ça et maintenant, on va l'entendre. *(AC fait varier les valeurs des deux curseurs, et on entend des notes plus ou moins aigues, et on voit en même temps, le cercle coloré en dégradés de bleus, avoir des divisions colorées radiales et angulaires plus ou moins nombreuses.).*

Alors, j'espère que ce n'est pas une note trop aiguë. Parce que je ne voulais pas vous faire entendre de notes trop aigues..., j'ai été gentil, je n'ai pas mis de notes trop aigues. Ça continue bien sûr, autant qu'on veut, etc.

Et alors on obtient ainsi vous voulez, donc, un spectre qui est le spectre du disque qui ressemble à ça, donc il continue indéfiniment, il continue indéfiniment.

Et vous voyez bien sûr qu'il ne ressemble en rien du tout au spectre qu'on avait tout à l'heure pour l'intervalle. Alors maintenant, allons un petit peu plus loin.

Prenons un objet toujours de dimension 2, prenons un objet qui est un carré maintenant. C'est comme si vous preniez un morceau de peau, que vous tendiez ce morceau entre si vous voulez un cadre, comme ça, carré, et vous tapez dessus.

Et maintenant, les vibrations que vous obtenez ont l'allure suivante. Ça va faire le bruit deux fois avant de donner ce qu'il faut. On va monter un petit peu plus haut. *(Sons du carré)*. Bon, alors on voit à nouveau un spectre, le spectre ressemble à ça.

Il est très, très différent de ce qui se passait dans le cas du disque, parce que si vous voulez pour le cas du carré, ce n'est pas très difficile de faire le calcul. On s'aperçoit que les fréquences correspondantes sont les racines carrées des sommes de deux carrés, donc les nombres de la forme racine de n^2 plus m^2. Donc ça, c'est quelque chose qui est très simple à comprendre, qui est beaucoup plus simple à comprendre que les nombres qui intervenaient pour le disque. Ils sont très différents, ils sont très différents, mais ils ont, si vous voulez la même sorte de répartition à l'infini. On peut changer la couleur si on veut. Mais maintenant, venons-en à la sphère, donc, tout ça, ce sont des formes de dimension 2 et a priori, ce sont des formes très banales.

Quand je parle du disque, quand je parle du carré ou quand je parle de la sphère, je veux dire le titre du colloque, c'est *La vie des formes*. Donc, il faut les faire vivre. Et pour les faire vivre, il faut les faire vibrer.

Et à partir du moment où on les fait vibrer, on s'aperçoit que, bien que ce soit des formes qui ont un air extrêmement simple, extrêmement banal, extrêmement élémentaire, lorsqu'on les fait vibrer, les vibrations elles-mêmes décorent ces formes de manière extrêmement harmonieuse et extrêmement non triviale. Alors, si on prend la 2-sphère, si on prend la sphère ronde, son spectre, cette fois, est très, très simple. C'est aussi formé des entiers, exactement comme dans le cas d'une corde.

Mais ces entiers apparaissent cette fois avec une certaine multiplicité, c'est à dire que ce n'est pas exactement des entiers. C'est plus exactement racine de $J(J+1)$. C'est pratiquement un entier, donc ça ressemble énormément à ce qui se passait dans le cas du cercle ou de l'intervalle. Mais ils apparaissent avec une multiplicité.

Alors maintenant, si on prend la sphère, alors là, j'ai peur que ce soit trop aigu.

Voyez ce qui se passe, c'est que si je prends par exemple le Spin=6, il y a un certain nombre de fréquences, comment dire, de ce qu'on appelle des fonctions propres qui existent, mais qui ont exactement la même, la même fréquence.

Comment dire ? Les formes sur la sphère sont différentes, le son qu'on entend est le même. Et ça, c'est ce qu'on appelle la multiplicité spectrale, c'est à dire que dans le spectre, ce qui va se produire, c'est qu'on va avoir la même valeur, mais elle va se produire plusieurs fois. Donc, c'est ce qui se produit pour la sphère... Ala fin, j'y reviendrai pour la forme musicale, ça, on verra ça plus tard.

Donc maintenant, je vais passer au déroulement normal à partir du pdf. Donc je vais faire ça.

Donc on a ces deux questions, on a ces deux questions, de définir un invariant complet d'une forme.

Alors en fait, on sait depuis un article fameux de John Milnor dans les années 60, que le spectre d'une forme ne suffit pas à caractériser cette forme.

C'est un merveilleux article de mathématiques. C'est un des rares articles de mathématiques qui n'a qu'une page. Et ce qu'a fait Milnor, c'est quelque chose de remarquable. Il a utilisé un résultat de Witt pour voir qu'il existe des tores, ces tores sont de dimensions assez grandes, ce ne sont pas des tores de dimensions basses. Mais il existe des tores, qui sont différents géométriquement, mais qui ont exactement la même gamme de manière identique. Et ça, ça vient d'un résultat de théorie des nombres. Parce que, bien sûr, la gamme associée à une forme avec toute sa subtilité, comme on vient de le voir dans les exemples que je vous ai montrés, cette gamme a bien sûr une relation très profonde avec l'arithmétique, l'arithmétique au sens le plus naïf, l'arithmétique de la première gamme de tous ces entiers.

Mais en gros, à chaque forme est associée une arithmétique, et c'est l'arithmétique de la gamme qu'elle nous donne de manière naturelle par les sons qu'elle produit.

Alors donc, ce qui est très, très intéressant, c'est que comme j'expliquerai donc, l'invariant qui manquait par rapport à l'invariant spectral, c'est un invariant dont on verra qu'il est relié, en fait, à ce que les physiciens appellent la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Et c'est un invariant qui mesure en fait un angle entre deux algèbres et qui généralise un peu ce que faisaient les physiciens lorsqu'ils regardent ce qui se passe avec les quarks. Et ça, j'en parlerai.

Mais ne vous inquiétez pas du tout du côté technique de cette page. Donc, on a vu les vibrations du disque.

On a vu des exemples de vibrations des disques, on a vu les fréquences propres du disque qui, comme je vous le disais, ne sont pas si simples qu'elles n'en ont l'air. On a vu son spectre avec le début du spectre. On a vu, maintenant, je mets plus de fréquences propres pour le disque et vous voyez que ça commence à avoir une allure. Cette courbe là, elle commence à avoir l'allure de quoi... elle commence à avoir l'allure d'une parabole. Et plus on va rajouter de fréquences, plus on va aller à hautes fréquences, plus elle va ressembler à une parabole. Voyez si vous prenez le disque où les valeurs propres sont difficiles à calculer, la gamme est difficile à calculer, mais si vous regardez la gamme, mais maintenant de très loin, c'est-à-dire vous regardez les hautes fréquences et vous mettez toutes ces fréquences ensemble, vous voyez que ça, ça ressemble de plus en plus à une parabole et il y a un fameux théorème d'Hermann Weyl qui date des années 30 et qui dit que cette parabole a un invariant, si vous voulez, qui est comment elle est angulée ou pas, cet invariant donne exactement dans le cas des surfaces, dans le cas des formes de dimension 2, donne exactement la surface de la forme, d'accord. Donc vous voyez, on peut mesurer l'aire de la forme de dimension 2 simplement en regardant cette parabole. Ça, c'est ce qu'a démontré Hermann Weyl.

Alors on a vu également ce qui se passe pour le carré. Je vous avais montré les quelques vibrations du carré tout à l'heure. Le spectre du carré, comme je le disais, est extrêmement simple. Ce sont les nombres qui sont les racines carrées de n^2 plus m^2. C'est ça, les vibrations du carré.

Bien sûr, je ne veux pas vous embêter avec des formules mathématiques, mais ça, ça vient de l'équation de Helmholtz, on regarde le laplacien, et on regarde l'équation des ondes.

Donc le spectre du carré, on regarde les fréquences propres du carré, voyez, elles ressemblent un petit peu, de loin, à ce qui se passait tout à l'heure pour le disque. On regarde hautes fréquences, on regarde hautes fréquences, ça oscille un peu. Et puis, on va regarder maintenant très hautes fréquences, très hautes fréquences, vous voyez, c'est incroyable, on voit vraiment une parabole, ça se distingue à l'œil nu, absolument une parabole. Cette parabole, justement, son invariant, c'est l'aire du carré.

Alors, on regarde la sphère aussi. Le spectre de la sphère, comme je le disais, c'est pratiquement les entiers, ce sont les nombres de la forme racine carrée de $J(J+1)$.

Voilà si vous regardez les fréquences propres de la sphère, ça vous donne ça, les fréquences propres de la sphère ? *(On voit une parabole, mais elle a comme des marches d'escalier.)* Pourquoi ça a l'air comme ça, par étages ? Eh bien, c'est parce que justement, vous avez la même fréquence qui va se répéter un tas de fois. D'accord, donc, c'est quelque chose qui est par étages comme ça.

Alors vous vous dites "Mais ça, ça n'a pas l'air du tout d'une parabole.".

Ça n'a pas trop l'air d'une parabole, mais c'est parce que vous ne regardez pas assez les hautes fréquences. Et si maintenant vous regardez à beaucoup plus hautes fréquences, vous voyez qu'il y a encore des petits étages, bien sûr.

D'accord, mais ça ressemble de plus en plus à une parabole et ça va vous donner l'aire de la sphère. D'accord.

Bon. Alors, qu'est-ce que ceci a à voir avec le problème qu'on avait au départ, donc qui était le problème de dire où nous sommes de manière précise ?

Si on veut dire où nous sommes. Il faut dire deux choses :

Il faut dire dans quel univers nous sommes et à quel point de cet univers nous sommes d'accord. Pour dire dans quel univers nous sommes en fait, ce que je prétends, c'est que ce qu'il faut donner, ce sont justement les fréquences de vibration de cet univers, la première chose à donner. Et comment donc on le fait ? On le fait si vous voulez, il y a une chose très intéressante qui se produit, c'est que lorsqu'on part au niveau de Mark Kac, et au niveau de "Est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?, etc.", on se préoccupe de l'équation des ondes et on se préoccupe de ce qu'on appelle un opérateur que les mathématiciens appellent le laplacien, qui s'appelle le laplacien, qui s'appelle Δ, mais lorsqu'on écrit l'équation des ondes, si vous voulez, en fait, on écrit cette équation sous la forme delta d'une fonction plus k deux fois f égale 0. *(AC écrit au tableau $\Delta f + k^2 f = 0$.)*

Ça, c'est l'équation de Helmholtz. Et lorsqu'on écrit cette équation de Helmholtz, on voit que le nombre k qui apparaît, ça va être, si vous voulez, ce qu'on appelle des valeurs propres de $-\Delta$, mais ça n'est pas k, car c'est k^2 qui est une valeur propre de $-\Delta$, et donc en fait, le nombre k qui apparaissait, dans tous les exemples que je vous ai donnés, c'est un nombre qui est valeur propre de la racine carrée de $-\Delta$.

Alors Δ, c'est ce qu'on appelle un opérateur différentiel elliptique et sa racine carrée, c'est pas quelque chose de très joli.

Et alors heureusement, il y a un physicien, qui est Paul Dirac, qui a trouvé un moyen d'extraire une racine carrée de l'opposé du laplacien de manière esthétique et de manière telle que ce soit un opérateur différentiel. C'est ce qu'on appelle l'opérateur de Dirac.

Alors, ce qui fait que dans tous les exemples que je vous ai donnés, en fait, c'est beaucoup plus naturel et important de donner pour une forme géométrique, de donner non pas le spectre du laplacien, ça ferait pas de différence pratiquement pour tous les exemples que je vous ai donnés mais de donner le spectre de l'opérateur de Dirac. Donc ça, c'est une chose très importante. Bon, c'est la première chose, c'est à dire que ce qu'on va regarder, en gros, c'est une racine carrée de Δ, donc ça ne va pas changer beaucoup. Donc on va, on va donner l'ensemble de ses valeurs propres. On va donner sa gamme. Si vous voulez. Et maintenant, ce qui est assez extraordinaire, c'est qu'il y a moyen de trouver un invariant complémentaire de cette gamme.

Et en gros, cet un invariant complémentaire, ça va être une prescription, on va donner les accords possibles sur cette gamme.

On va donner un ensemble d'accords possibles, mais l'origine, l'origine de cet invariant : il vient de la physique, de la physique et de ce qu'on appelle en physique... Si vous voulez, en physique, il y a des phénomènes assez compliqués qu'on appelle les interactions faibles et dans l'interaction faible, les gens se sont aperçus qu'il y avait ce qu'on appelle des courants qui permettaient de changer de "*flavor*", c'est à dire de famille. C'est à dire que, par exemple, pour les quarks, vous avez les quarks qu'on connaît qui sont les up and down, qui sont les quarks principaux, qui forment les neutrons, les protons, etc.

Mais vous avez d'autres quarks, il y a deux autres familles de quarks. Eh bien, il y a des interactions en physique qui permettent de changer..., qui permettent de passer d'une famille de quarks à une autre famille de quarks, c'est ce qu'on appelle "flavor changing neutral current", et les physiciens ont compris que ce qui mesurait si vous voulez, ces courants qui permettent de changer de famille, c'était en fait un angle entre deux algèbres commutatives, mais très simple dans leur cas. Ça a d'abord été trouvé par Cabibbo, puis ensuite par Kobayashi et Maskawa. Et c'est ce qu'on appelle la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Et ce que ça fait, c'est que ça mesure, si vous voulez, en fait, l'angle entre deux algèbres. Et ce qui est assez extraordinaire, c'est que bon, en fait, ce sont des algèbres dans un espace de dimension 3. Donc c'est quelque chose de très simple. Et pourtant, un nombre complexe apparaît et c'est ça qui a fait la violation de ce qu'on appelle CP en physique.

Alors maintenant, ce qui est tout à fait amusant, c'est que si on généralise cette idée, on obtient une solution au problème de tout à l'heure, c'est-à-dire qu'on obtient un autre invariant qui n'est pas seulement le spectre de l'opérateur de Dirac. Donc, le premier invariant, si vous voulez, c'est le spectre de l'opérateur de Dirac.

C'est très important *(AC écrit Spec D à la craie au tableau.)*. C'est la gamme, si vous voulez. D'accord. Bon, mais il y a un deuxième invariant. Et quel est ce deuxième invariant ? Eh bien ce deuxième invariant, c'est aussi un angle.

Ce n'est pas un nombre, c'est un angle, c'est un angle. C'est une notion beaucoup plus compliquée. C'est un angle entre deux algèbres. Alors il y a l'algèbre des fonctions de l'opérateur de Dirac.

Ça veut dire que vous regardez tous les opérateurs qui sont diagonaux dans la même base que l'opérateur de Dirac, qui est la base des fonctions propres et une autre algèbre, qui est l'algèbre des fonctions sur l'espace dans lequel vous êtes, sur la forme dans laquelle vous travaillez.

Et alors, il y a un merveilleux théorème de von Neumann qui date d'années, d'il y a très, très longtemps et qui dit que la représentation de cette algèbre dans l'espace de Hilbert est indépendante de la forme que vous choisissez. C'est à dire que si vous prenez n'importe quelle forme, soit une sphère, un disque, une forme de dimension plus élevée, etc., eh bien, l'algèbre des fonctions va agir toujours de la même manière dans l'espace de Hilbert.

Donc, la seule chose qui va manquer pour compléter le tableau, ça va être la position relative de ces deux algèbres et la position relative de ces deux algèbres, en fait, elle est spécifiée par une série d'accords.

Bon, c'est une série continue d'accords, qui sont formulés sur la gamme et maintenant donc, ce qui se produit, c'est que... donc, on a ces deux invariants et comment doit-on interpréter un point, donc un point en fait, si on regarde de ce point-de-vue-là, un point, il est donné par des corrélations entre des fréquences différentes. Alors, vous pouvez penser à ces corrélations, ce sont des nombres complexes. Mais vous pouvez exactement penser à ces corrélations entre des fréquences différentes comme un accord. Un accord, on prend un accord entre ces notes et c'est ça, un point, c'est ça, d'accord. Donc réfléchissez dans votre tête, et gardezqu' un objet géométrique, une forme géométrique est donnée par sa musique, par sa gamme, et elle est donnée par sa gamme et l'ensemble des points est donné par l'ensemble des accords possibles et un point est donné par un accord.

Bon, alors donc si on continue, de ce point-de-vue-là, on s'aperçoit (on peut baisser la lumière, là, c'est bon).

Donc on s'aperçoit que c'est assez étonnant de voir à quel point ce point-de-vue dont je viens de parler est proche en fai t de la réalité physique. Pourquoi ?

Parce que maintenant, l'homme a évolué, peut être par sélection naturelle, suffisamment pour pouvoir regarder l'univers. Il a un œil. Cet œil, c'est Hubble. Son œil actuel, c'est le télescope Hubble. Avec ce télescope, l'homme regarde l'univers. Je vous conseille à tous de tous les matins vous brancher sur le site de la NASA qui donne chaque matin une image nouvelle. C'est fait à un rythme quotidien et chaque jour, vous pouvez regarder l'univers et vous aurez une image différente de l'univers.

Et ce qui est étonnant, ce qui est vraiment étonnant, c'est que l'information qui nous vient de l'univers, elle est spectrale. Et non seulement cette information nous renseigne, par le spectre, sur la composition des étoiles très, très lointaines ou des nuages intergalactiques, etc., simplement par leur spectre, mais en plus, elle nous renseigne sur leur origine. Et comment nous renseigne-t-elle sur leur origine ? Parce que par effet Doppler, plus les choses sont distantes, plus il y a ce qu'on appelle le redshift, alors le redshift, naïvement, si vous êtes très naïf, vous pensez que le redshift, vous allez prendre le spectre et vous allez le décaler comme ça par une translation. Mais ce n'est pas vrai. Le redshift, c'est une multiplication. Ce n'est pas un décalage, c'est une multiplication. C'est à dire qu'on prend toutes les fréquences et on les multiplie par un même nombre. Et ce qui est vraiment étonnant dans le redshift, c'est que maintenant, on observe, on observe... Alors pourquoi est-ce qu'on sait que c'est la même chose qu'on voit ? Eh bien, par le fait que la gamme est la même.

Elles se ressemblent, bien sûr. Donc, vous voyez bien qu'à gauche, vous allez avoir une certaine disposition dans la gamme. Elle va se retrouver à droite, mais elle ne va pas se retrouver au même endroit et elle va se retrouver décalée, mais pas décalée par une translation, décalée par une homothétie, c'est-à-dire qu' on multiplie tous les nombres par quelque chose. Et ce qui est extraordinaire, c'est que c'est grâce à ce shift qu'on peut remonter dans le temps. On mesure maintenant des redshifts qui sont de l'ordre de 10, mais en fait, on s'attend à des redshifts de l'ordre de 1000, etc., etc., et qu'ils correspondent, bien sûr, à des temps de plus en plus reculés.

Donc, c'est vraiment étonnant, c'est vraiment étonnant que ce point de vue sur les formes soit aussi proche du point de vue que les mathématiques abstraites suggèrent sur les formes.

Et d'autre part, il y a une autre chose qui est extrêmement importante, c'est que, bien sûr, nous ne pouvons pas nous déplacer pour le moment, mais sans doute pour toujours vers d'autres galaxies. Et donc, c'est un acte de foi que nous faisons, de savoir que ces choses-là existent quelque part. Et cet acte de foi, il vient précisément du fait des corrélations qu'il y a entre les différentes fréquences et l'image que je vais vous montrer maintenant, c'est une image de la Voie lactée.

Mais c'est une image qui n'est pas du tout prise dans le visible. C'est une image qui est prise dans des longueurs d'ondes qui sont totalement invisibles. D'accord, alors, c'est absolument hallucinant et incroyable que justement, il y a tellement de corrélations entre ces différentes fréquences qu'en fait, ces images sont compatibles. Et voilà une image, donc, de la Voie lactée, prise dans des fréquences qui ne sont absolument pas visibles, mais qui, justement, sont corrélées avec les images dans le visible et nous assurent donc qu'il y a bien là une cohérence, d'accord.

Alors maintenant, quand je préparais cet exposé, j'ai mis un temps fou à préparer cet exposé. Pourquoi ? Parce que bon, bien sûr, on m'avait donné une règle qui était qu'il ne fallait pas montrer d'images comme celle-là qui n'ait pas été approuvée par l'auteur de l'image, etc. Alors, je m'étais dit "ça, peut être j'y arriverai.".

Mais par contre, je ne l'avais pas pour toutes les autres images que je voulais montrer sur les sphères. Donc, je me suis collé à le faire à l'ordinateur et ça m'a pris beaucoup de temps. Et puis, à un moment donné, je voulais me relaxer un peu et je me suis dit "Oh ben, je vais jouer *Au clair de la lune*, je vais jouer *Au clair de la lune* sur la gamme de l'objet le plus simple, c'est à dire la corde vibrante.

J'ai essayé et c'est là que je me suis aperçu que la première note qu'il fallait que je fasse, c'était 131. Je me suis dit "Il y a quelque-chose de bizarre.".

Donc, je me suis posé le problème. Je me suis posé le problème de trouver une forme musicale.

Alors, qu'est ce que j'entends par là ? Eh bien, j'entends par là que quand vous faites de la musique, on va le voir tout de suite, quand vous faites de la musique, en fait, c'est pas du tout les entiers 1, 2, 3, 4, 5, etc., comme fréquences qui sont utilisées ? Absolument pas, ce sont les puissances d'un même nombre, les puissances d'un même nombre, c'est à dire on a un nombre q. Et on regarde les nombres q^n, c'est ça qui compte, parce que ce sont les rapports entre fréquences qui comptent. Et la merveille qui fait que la musique du piano existe, qu'on appelle *Le clavecin bien tempéré*, etc., c'est le fait arithmétique qui existe, qui fait que si on prend le nombre 2 à la puissance un douzième, si vous prenez la racine douzième de deux, c'est très, très proche de la racine dix-neuvième de trois.

Voyez, j'ai donné ces nombres-là. Vous voyez que la racine douzième de 2, c'est 1,059..., etc. La racine dix-neuvième de trois, c'est 1,059... D'où vient le 12 ?

Le 12 vient du fait qu'il y a 12 notes lorsque vous faites la gamme chromatique. Et le 19 vient du fait que 19, c'est 12+7 et que la septième note dans la gamme chromatique, c'est la gamme qui vous permet de transposer. Alors, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que passer à la gamme d'au-dessus, c'est la multiplication par deux et l'oreille est très sensible à ça. Et transposer, c'est la multiplication par trois, sauf qu'on revient à la gamme d'avant, c'est à dire qu'on multiplie par 3/2, d'accord.

Bon, c'est ça la musique, bien connue maintenant, à laquelle l'oreille est sensible, etc. D'accord. Mais... il y a une question évidente ! C'est "existe-t-il un objet géométrique dont la gamme nous donne la gamme qu'on utilise dans la musique ?". C'est une question absolument évidente.

Si vous regardez ce qui se passe, comme ce sont les puissances de q, vous vous apercevez que la dimension de l'espace en question est forcément égale à 0. Pourquoi ? Parce que tout à l'heure, je vous avais montré ses limites. *(s'interrompt pour dire à quelqu'un "J'arrive.")*. Donc, je vous avais montré *(s'interrompt pour dire à la personne "J'en ai encore pour 5 mn.")*. Je vous avais montré tout à l'heure que les objets avaient une gamme qui ressemblait à une parabole quand ils étaient de dimension. 2. Quand un objet est de dimension plus grande, ça va être un truc un petit peu plus compliqué qu'une parabole.

Par exemple, si c'est en dimension 3, ça va être $y = x^{\frac{1}{3}}$, d'accord, mais ici, c'est pas du tout un truc qui est rond comme une parabole comme ça *(AC dessine une parabole en l'air)*. C'est quelque-chose qui pffuiittt ! *(AC fait le geste d'une exponentielle en l'air.)* qui fout le camp en l'air comme ça. Et ce que ça vous dit, c'est que l'objet en question doit être de dimension 0. Donc, vous vous dites, "un objet de dimension 0, qu'est ce que ça veut dire ? etc. Bon.".

Eh bien, quand vous développez la géométrie, ce que j'ai fait pendant des années et des années, du point de vue spectral et ce qu'on appelle la géométrie non-commutative, etc., eh bien, vous apercevez en fait que ces objets existent avec une petite nuance, c'est que l'algèbre qui va être, qui va intervenir ne va pas nécessairement être commutative.

Et la merveille des merveilles, c'est que je me suis aperçu, en préparant mon exposé, qu'il existait un objet bien connu des mathématiciens, qui font de la géométrie non-commutative ou des choses quantiques, qui marche pour cette chose-là et qui vous donne la bonne gamme.

Et qu'est ce que c'est que cet objet ? Ce n'est autre que ce que l'on appelle la sphère quantique S^2 indice q. Alors, cet objet donc est un objet plus délicat. Il a été considéré en particulier par ces trois noms *(sur le transparent sont notés les noms Poddles, Brain et Landi)*. Il a un spectre, il a un spectre. Et ce spectre ? Si vous choisissez bien le nombre q, il va correspondre exactement au spectre musical.

Alors, je reviens donc maintenant à mes expérimentations et je termine là-dessus. Donc je vais essayer. J'espère que ça va marcher. Alors on va revenir à l'expérimentation. Donc, on avait fait la sphère et maintenant, on recherche cette forme musicale qui va être de dimension 0. Bon, alors on va essayer de jouer *Au clair de la lune*. Comme je suis fatigué, je vais sûrement me tromper. Mais c'est pas grave. Alors voyez. *(AC revient à un spectre arc-en-ciel et joue* Au clair de la lune *sur un clavier de bouton indicé par les entiers, 25-25-25-27-29-27-25-29-27-27-25. 27-27-27-27-24 se trompe, joue un si au lieu d'un la, rires, se reprend, etc... applaudissements et extase !)*.

Alors maintenant, ce qui est absolument extraordinaire avec cette gamme, c'est... Est-ce-que quelqu'un peut me donner un chiffre, au dessus de 10 quand même ? *(On voit Jean-Pierre Changeux qui attend positionné au bureau pour donner son propre cours.)*

13, très bien. Eh bien, je vais voir, je vais ré-essayer, mais je ne promets rien, de vous jouer *Au clair de la lune* en partant de 13 *(AC joue 13-13-13-15-17-15-13-17-15-15-13...)*

(Au moment de chercher la note la plus basse écartée des autres, AC dit "Alors il ne faut pas que je me trompe, là, sinon vous allez m'engueuler...". Ré-applaudissemets.)

Je terminerai en disant la chose suivante, si vous voulez, c'est que "rien n'est trop beau pour être réalisé dans la Nature". Récemment, le prix Nobel de chimie a été décerné à un chimiste qui a découvert les quasi-cristaux, qui ont une merveilleuse histoire mathématique, dans la Nature. Ce que j'espère, c'est qu'un jour, on trouvera la sphère non-commutative S_q^2 dans la nature et qu'on pourra l'utiliser comme instrument de musique, et ce sera un instrument merveilleux parce qu'il ne se désaccordera jamais. Voilà. Merci.

(Applaudissements).

Un entretien avec Alain Connes

1 La géométrie non commutative

Le sujet qui m'a occupé pendant toutes ces années est très, très loin d'être épuisé. C'est un sujet qui commence par la découverte de Heisenberg. C'est une découverte de physique dans les années 25, 1925 bien sûr, et ce qu'a découvert Heisenberg, c'est quelque chose de tout à fait extraordinaire. Il a découvert que lorsqu'on fait de la physique avec des systèmes microscopiques, eh bien, on ne peut plus faire des calculs comme on y est habitué, c'est à dire faire ce qu'on appelle de l'algèbre commutative.

On ne peut plus utiliser la commutativité. Alors, la commutativité, ça veut dire que si vous écrivez mc^2, ou c^2 fois m, c'est la même chose, mais lorsqu'on fait de la physique quantique, on ne peut pas. Et donc, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire qu'il est essentiel aussi, autant pour la physique que pour les mathématiques, de comprendre des espaces plus subtils qui sont les espaces non commutatifs. Alors si c'était seulement... si la géométrie non commutative était seulement une généralisation de la géométrie à des espaces dans lesquels les cordonnées ne commutent pas, ça ne serait pas très intéressant.

Ce que j'avais découvert dans ma thèse, c'était que, justement, une algèbre non commutative par la simple non commutativité engendre son propre temps, c'est à dire évolue avec le temps. C'est quelque chose qui est difficile à expliquer, mais qui a une profondeur, c'est-à-dire qu'en gros, on peut la résumer sous la forme suivante. On peut dire si vous voulez que l'algèbre commutative est statique, elle ne bouge pas et l'algèbre non commutative évolue. Alors il faut bien comprendre que quand on parle d'algèbre non commutative, de coordonnées qui ne commutent pas, etc., on pourrait penser, de manière un peu simpliste si vous voulez, que c'est une abstraction mathématique qui n'a rien à voir avec nos habitudes, etc. En fait, ce n'est pas du tout le cas parce que, justement, la non commutativité, on est extrêmement familier avec ça parce que lorsqu'on écrit, avec des lettres, lorsqu'on écrit des mots, des phrases, etc., on doit bien sûr faire attention à l'ordre des lettres. Dans le langage écrit, on ne peut pas permuter les lettres.

Si on s'amuse à permuter les lettres, on obtient ce qu'on appelle une anagramme. Et évidemment, à ce moment-là, on peut avoir deux ensembles de lettres qui sont les mêmes dans le cadre commutatif, mais qui ont des significations totalement différentes dans le cas non commutatif. L'exemple qui a été l'occasion d'un livre qu'on a écrit récemment avec Jacques Dixmier et mon épouse, c'est si vous voulez, cette anagramme magnifique qui est dû à Jacques Perry-Salkow et qui est, justement, *"l'Horloge des anges ici-bas"*, qui a à voir avec le temps et l'anagramme de ça, c'est *"Le boson scalaire de Higgs"*.

Donc, on voit bien que si on regarde seulement la partie commutative, si vous voulez, de ces deux phrases, elles sont les mêmes, mais par contre, elles ne sont pas du tout les mêmes, elles n'ont pas du tout le même sens. Le quantique, la grande découverte de Heisenberg, c'est que, justement, il faut faire attention. La manière dont cette géométrie non commutative a évolué, et c'est pour ça qu'elle est très, très loin d'être épuisée, c'est que, d'une part, il y a un lien très, très fort avec la physique. Alors ça, je l'ai développé pendant de nombreux cours, avec mes collaborateurs, etc. Donc, il y a un lien avec le fait que c'est justement le formalisme de la mécanique quantique qui permet de comprendre comment des variables continues peuvent coexister avec des variables discrètes, et comment on peut reformuler la géométrie, la géométrie riemannienne, sous une forme qui est bien plus compatible avec le quantique que ne l'est la relativité générale.

Donc, ça, c'est tout un domaine, c'est tout un domaine qui est encore ouvert, qui est loin d'être épuisé. Il y a eu de gros progrès. Et puis il y a eu un autre épisode extrêmement exaltant qui s'est produit, c'est que si vous voulez, cette géométrie non commutative, justement, permet d'encoder des espaces qui, normalement, pour les mathématiciens, apparaissent comme des espaces très, très singuliers. Ce sont des espaces quotients, mais ce sont des espaces qu'on rencontre en mathématiques en fait, très, très souvent, les gens ne s'en rendent pas compte parce que dès qu'on prend ce qu'on appelle en mathématique une limite inductive, on va tomber sur un espace qui est de cette nature, parce qu'elle est définie comme un espace quotient. Et l'idée, si vous voulez l'idée fondamentale, c'est que lorsqu'on prend un quotient qui est difficile à prendre, il ne faut pas le regarder comme un ensemble. Mais il faut le regarder comme un

Interview d'Alain Connes, Professeur titulaire de la Chaire d'Analyse et Géométrie au Collège de France ; Alain Connes est interrogé en mars 2014 par Sophie Bécherel. Ont également participé au projet de réalisation de cet entretien Cécile Barnier et Sophie Chéron ; le projet a été financé par la Fondation Bettencourt-Schueller ; entretien visionnable ici : https://www.college-de-france.fr/site/alain-connes/Entretien-avec-Alain-Connes.htm.

espace non commutatif où la non commutativité vient du fait qu'on va identifier entre eux des points qui sont distincts et donc on va avoir des flèches, etc. Et c'est ça qui rend la chose non commutative.

Alors il y a eu un épisode tout à fait... qui est loin d'être terminé bien sûr, c'est en fait qu'un espace fondamental pour la théorie des nombres, qui est relié aux nombres premiers en fait, est relié à un espace non commutatif. Alors il y a un très, très long développement qui s'est fait, qui a correspondu à beaucoup de cours que j'ai faits, etc. mais qui continue à évoluer.

Et maintenant, on a trouvé avec Katia Consani, on a trouvé très, très récemment qu'en fait, il y avait un objet de géométrie algébrique très, très pur qui fait intervenir seulement les entiers avec les trois opérations de *inf* de deux nombres, de la somme de deux nombres et leur produit, mais qui fait intervenir deux concepts fondamentaux, le concept de topos, qui est dû à Grothendieck et le concept d'algèbre de caractéristique 1. Ça, c'est encore une autre histoire.

Cet objet fait qu'on a exactement le parallèle avec ce qu'avait fait André Weil en géométrie algébrique, justement pour s'occuper d'un problème fondamental en caractéristique finie.

Ce que vous nous dites là semble démontrer que les mathématiques engendrent d'autres mathématiques.

Oui, mais ce n'est pas qu'elles engendrent, non. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est que j'ai toujours eu cette longue discussion avec Jean-Pierre Changeux. Et ce n'est pas qu'on engendre, non, c'est comme si..., mais laissez moi vous expliquer pourquoi ce n'est pas qu'on engendre. C'est exactement comme si on disait que Christophe Colomb avait engendré l'Amérique. Tout le monde rigolerait. Bon, ben, le mathématicien, c'est pareil. Le mathématicien ne va pas engendrer. Il va découvrir et il va découvrir un nouveau pan des mathématiques. Soit parce que si vous voulez, ces mathématiques viennent de la physique. Et bien sûr, je crois que c'est Hadamard qui en a le mieux parlé, si vous voulez : les mathématiques viennent de la physique du fait qu'elles ont à voir avec la réalité extérieure, elles ont un goût particulier. Elles ont une force particulière, mais ce n'est pas du tout quelque chose qu'on engendre, non.

2 La recherche mathématique

On essaye de comprendre. On essaye de comprendre la réalité physique, bien entendu, et on essaye de comprendre la réalité mathématique. C'est quelque chose qui est très, très obscur, très difficile à comprendre. Et la manière que l'on a d'essayer de comprendre, c'est d'élaborer, alors là, on invente effectivement des concepts. Ces concepts sont très précis. Par exemple, j'ai parlé du concept de topos dû à Grothendieck. Ce sont des concepts très précis.

Ce ne sont pas des choses vagues, ce sont des choses très, très précisément définies. Et ce qui est extraordinaire, si vous voulez, c'est qu'un des rôles souvent méconnu des mathématiques, c'est celui d'engendrer des concepts. Et ces concepts, au départ, vont être des concepts purement mathématiques. Mais graduellement, ils vont s'insérer dans le quotidien que nous partageons tous. Un exemple très frappant, c'est le concept de fonction, vous savez, le concept de fonction n'est pas quelque chose qui est évident pour le grand public, etc.

Mais quand on parle par exemple du ralentissement de la croissance du chômage ou de choses comme ça, ça correspond à des propriétés mathématiques très précises, définies sur des fonctions. Et donc, on a là un exemple frappant d'un concept qui vient des mathématiques et qui, graduellement, graduellement, va s'inscrire dans le bagage commun de la civilisation. Et une des raisons pour laquelle il pourra s'inscrire, c'est que maintenant, on n'a pas seulement l'imprimerie, l'écriture, on a aussi les ordinateurs.

Et l'ordinateur ne va pas être seulement capable de transmettre des mots, de transmettre des chiffres. Il va être capable, justement, de transmettre des fonctions, c'est à dire qu'on va pouvoir voir sur son écran d'ordinateur le graphe d'une certaine fonction, etc. Et on va pouvoir comprendre qualitativement les propriétés de ces fonctions et la pertinence des concepts mathématiques.

3 Entre réalité physique et mathématiques pures

Il y a toujours un équilibre et justement, mon équilibre... si vous voulez, on ne peut avancer que si on marche sur deux pieds. Mon équilibre, c'est entre d'un côté la physique, bien entendu, que je n'abandonne jamais, parce qu'il y a cette essence de la physique quantique, justement, qui, comme je le disais si vous voulez, permet cette coexistence du continu et du discret qui est magnifique et d'un autre côté, il y a la géométrie algébrique, la théorie des nombres, etc.

Je parlais par exemple des topos. Grothendieck a écrit sur les topos que justement, c'était *"le lit à deux places qui permet les épousailles entre le discret et le continu"*. Donc, bien que ce soit une approche très différente, ce n'est pas totalement disjoint.

Donc il y a cet équilibre entre les deux et bon, la physique, bien sûr, se heurte à l'expérimentation. Les mathématiques se heurtent aussi, d'une certaine manière, à une expérimentation. J'utilise énormément l'ordinateur, j'utilise énormément de vérifications sur ordinateur, même pour des choses qui paraîtraient impossibles à regarder sur l'ordinateur. Et là, on se heurte à une vraie réalité. On se heurte à quelque chose qu'on ne peut pas modifier. On veut savoir si quelque chose est vrai ou pas, on fait des tests, on regarde tout ça.

Bon, ben, c'est un peu comme un physicien qui va faire des expériences et regarder si son idée est correcte ou s'il faut la corriger. Bon donc, il y a ces deux pans de mon travail, si vous voulez, et il n'y a pas un pan qui a pris le pas sur l'autre, ils sont toujours restés très équilibrés.

Certains disent quand même que votre géométrie non commutative, elle est un pont entre la mécanique quantique et la physique classique. Pourquoi ?

Oui. Si vous voulez, ce qu'il y a... ce n'est pas vraiment un pont entre la mécanique quantique et la physique classique. Non, le pont entre la mécanique quantique et la physique classique, c'est ce qu'on appelle la déquantification. C'est toute une histoire, ça relie à la caractéristique 1 dont je parlais tout à l'heure. Mais c'est autre chose. En fait, la géométrie non commutative, non, c'est plus un pont entre le quantique et la géométrie et le fait que, justement, notre géométrie à laquelle nous sommes habitués, celle de Descartes, s'applique parfaitement à la physique classique, mais ne s'applique pas à la physique quantique.

La physique quantique oblige à repenser la géométrie. C'est exactement mon travail. C'est exactement ce que je fais, ce qu'on a fait avec mes collaborateurs, c'est de montrer que le lagrangien[1], qui est extrêmement compliqué, et qui contient à la fois, la gravitation, et la mécanique quantique, le lagrangien de la mécanique quantique, ce lagrangien, se comprend de manière incroyablement simple et conceptuelle lorsqu'on a les outils de la géométrie non commutative. Mais c'est encore un lagrangien, il faut comprendre ça, qui est au niveau classique, c'est-à-dire qu'il n'est pas encore quantifié. Alors, on sait qu'on est sur la bonne voie parce que ce lagrangien qui a l'air incroyablement compliqué, il prend quatre heures pour le mettre en formules.

Un lagrangien, on peut résumer ça comme une formule ?

Un lagrangien, c'est une formule, mais en gros, si vous voulez pour vous expliquer ce que c'est qu'un lagrangien, il faut comprendre le principe d'action le plus simple, qui est ce qu'on appelle le principe de Fermat, et je peux vous l'expliquer en trois mots. Le principe de Fermat, c'est le principe qui dit que la lumière va suivre le chemin qui sera le plus court en temps pour elle. Alors, vous pouvez faire une analogie avec... Supposez que vous soyez en banlieue, que vous vouliez aller à l'intérieur de Paris, par exemple.

Ok, eh bien, à ce moment-là, si vous savez qu'il y a de grands grands embouteillages dans Paris, ce que vous allez faire, c'est que vous allez atteindre le point de la circonférence de Paris qui sera le plus proche du point que vous voulez atteindre. Peu importe que vous n'alliez pas en ligne droite. Et ça, c'est exactement ce qu'on appelle le principe de réfraction de la lumière. D'accord ? Donc, le principe de Fermat vous dit qu'il y a un principe qui consiste à minimiser le temps de parcours, ok ? Alors les physiciens ont agrandi ce principe à des choses beaucoup plus générales. Ils l'ont agrandi à toute la physique et lorsqu'on l'agrandit à toute la physique, le principe d'action, c'est justement ce qu'on appelle le lagrangien. D'accord ? Et il

1. Le lagrangien d'un système dynamique est une fonction des variables dynamiques qui permet d'écrire de manière concise les équations du mouvement du système.

contient toute la physique parce qu'il contient à la fois la gravitation et il contient aussi le lagrangien de la mécanique quantique. Mais on est encore au niveau classique, comme on dit. Il faut encore quantifier ça.

Et alors, ce qu'on s'est dit avec mes collaborateurs, c'est que quantifier quelque chose que l'on ne comprend pas, c'est un peu illusoire. Et donc, ce qu'on a fait, c'est qu'on a compris ce lagrangien classique, comme étant le lagrangien d'Einstein, c'est à dire la gravitation pure, mais sur un espace un petit peu plus subtil que l'espace, qui est simplement le continu auquel on est habitué et l'espace qu'on a trouvé, c'est un espace qui est précisément un mélange entre le continu et le discret, et ce mélange ne peut se produire qu'à travers le non commutatif.

Et ça vous donne quoi, d'avoir trouvé ça ?

Ça nous donne d'abord un plaisir esthétique formidable, le fait qu'un lagrangien, qui normalement prend quatre heures à être transcrit en LaTex sur un fichier, peut s'écrire sous la forme d'une toute petite formule. Et cette toute petite formule est encore plus simple que la formule d'Einstein, puisque c'est une formule qui ne fait que compter le nombre de valeurs propres de l'élément de longueur en géométrie non commutative, qui sont plus grandes qu'une longueur donnée. Donc, c'est quelque chose d'incroyablement simple et c'est quelque chose si vous voulez, qui dit justement que l'élément de longueur en géométrie non commutative est quelque chose de totalement différent de l'élément de longueur classique. L'élément de longueur classique, vous savez, c'était le mètre-étalon dont on nous parlait lorsqu'on était étudiants et on nous disait "L'élément de longueur... Le mètre-étalon est déposé au Pavillon de Breteuil", etc. Et il y avait toute une histoire qui expliquait la création de ce mètre-étalon avec Delambre et Méchain qui avaient été envoyés, les arpenteurs qui avaient été envoyés entre Dunkerque et Barcelone pour mesurer, etc.

Et alors ? Il s'est produit justement dans les années 1920 un épisode extraordinaire qui est exactement le même au niveau de la physique que le changement de paradigme que nous proposons pour la géométrie non commutative. Cet épisode, c'est le suivant. Il y avait un congrès, pas d'arpenteurs, mais du système métrique. Donc, les gens étaient réunis et parmi eux, il y en a un qui a levé le doigt pendant la réunion et il a dit "Je suis désolé de vous apprendre une mauvaise nouvelle, mais l'unité de longueur change de longueur.". Imaginez, le mètre change de longueur. Alors c'est très, très embêtant, si vous voulez, on a une unité de longueur qui change de longueur.", alors les autres lui ont demandé. "Bon, d'accord, c'est très bien, mais comment est-ce que vous savez ça ?" Il a dit "Écoutez, j'ai pris le mètre-étalon qui est au Pavillon de Breteuil, etc. Et je l'ai mesuré par rapport à la longueur d'onde du krypton et je me suis aperçu qu'il changeait de longueur".

Bon, alors, catastrophe, etc. On ne peut pas prendre un élément de longueur qui change de longueur, alors graduellement, les physiciens ont réfléchi, etc.

Et ils ont compris qu'en fait, il fallait prendre comme unité de longueur, ce qui avait permis de voir que l'ancienne unité de longueur avait changé. Donc, ils ont pris une unité de longueur qui est spectrale. Ensuite, ils ont remplacé le krypton par le césium.

Et il est bien évident que si l'on veut unifier le système métrique, admettons dans la galaxie, il faudra donner quelque chose de convaincant.

Si on dit aux gens "si vous voulez mesurer votre lit, il faut que vous veniez au Pavillon de Breteuil, etc." Bon, ça ne sera pas très convaincant. Si, par contre, on leur dit "écoutez, vous prenez l'hydrogène. Vous prenez le spectre de l'hydrogène. Il y a une certaine raie spectrale qui a une certaine forme et vous prenez sa longueur d'onde comme unité de longueur". C'est formidable. Et bien le changement qui permet de passer de la géométrie classique à la géométrie non commutative est exactement le même, c'est à dire qu'en géométrie non commutative, l'élément de longueur est spectral, il est donné par l'inverse de ce qu'on appelle l'opérateur de Dirac et il est donné par ce que les physiciens appellent le propagateur des fermions, c'est à dire quelque chose qu'ils écrivent toujours comme un infinitésimal. Donc, il y a là si vous voulez une coïncidence qui est extrêmement, extrêmement forte, et qui dit qu'il y a une évolution de la géométrie qui passe justement d'un formalisme entièrement classique, entièrement commutatif à un formalisme qui cadre avec le non commutatif, mais qui aussi est spectral, qui devient spectral.

Pourquoi dites-vous que vous n'en avez pas fini... ?

On n'en a pas fini, mais non. On en est au tout début, si vous voulez, on en est au tout début. D'abord parce que bon, effectivement, il faudrait passer au niveau quantique pour la géométrie de l'espace-temps, c'est à dire quantifier ce lagrangien dont je parlais, mais aussi dans la compréhension, par exemple, de la géométrie qui sous-tend les nombres premiers, on est encore bien loin du compte. On a trouvé récemment donc, l'objet qu'on cherchait depuis une quinzaine d'années.

C'est ce que je disais. C'est un objet de géométrie algébrique, mais qui utilise des notions très sophistiquées puisqu'il utilise à la fois les topos et la caractéristique 1.

Mais d'un autre côté, lorsqu'on donne la définition, la définition est d'une simplicité bouleversante, si vous voulez, donc, c'est sûrement la bonne définition. Mais ensuite, il faut développer l'analogue de la géométrie algébrique qui avait été développée en caractéristique finie, il faut la développer en caractéristique 1, il faut développer une cohomologie qui remplace la cohomologie de Weil, etc. Donc, vous voyez, il y a tout un programme qui est là, qui est devant nous.

4 Les outils du mathématicien

On a une chance inouïe en mathématiques, c'est qu'un mathématicien confronté à un problème très difficile, qu'est ce qu'il fait ? En général, le problème est trop difficile pour l'attaquer frontalement. Donc il y a une méthode. Il faut savoir, par exemple, que si je vous dis "on prend une tablette de chocolat qui a 4 d'un côté, 8 de l'autre. Combien faut il de fois la couper en deux pour que finalement, elle soit réduite en petits carreaux ?". Vous allez me dire c'est très, très compliqué, etc., d'accord.

Eh bien, l'idée du mathématicien, c'est immédiatement de généraliser le problème. C'est à dire qu'au lieu de dire une tablette de chocolat de 4 fois 8, il va dire une tablette de chocolat de n fois m, où n et m sont deux entiers. Et puis après, il va prendre les plus petites valeurs de n et m. Par exemple, il va prendre $n = 1, m = 2$. Il va prendre 2 carreaux. OK, on coupe en une fois, ça marche. D'accord.

Et puis après, il va s'amuser à regarder des cas plus simples, mais de plus en plus compliqués. Et au bout d'un moment, parce qu'il aura résolu les cas les plus simples qui sont faciles, la difficulté va croître comme un escalier. Et à travers cet escalier, à un moment donné, il dira "Ah voilà, ça y est, j'ai compris !", et il aura compris l'idée générale. D'accord. Donc, c'est ça l'essence des mathématiques. Et si vous voulez, il y a une chose formidable, c'est qu'en général, lorsqu'on regarde les petits cas, les cas plus simples, eh bien, ensuite, on va pouvoir procéder par analogie.

Et l'analogie est un outil des mathématiciens qui, pour le moment, échappe totalement à l'ordinateur parce que l'analogie n'est jamais exacte. L'analogie, c'est quelque chose...

C'est de l'intuition ?

Non, ce n'est pas de l'intuition. L'intuition, c'est autre chose. L'analogie, c'est quelque chose qui consiste à dire que l'on va transplanter des méthodes qui ont marché dans un cas, à un autre cas. Et bien sûr, ça ne sera pas exactement la même chose. Il faudra prendre... c'est comme si vous preniez une petite fleur, vous la transplantez ailleurs, si vous voulez, il faut qu'elle reste vivante, mais la terre sera différente, elle sera dans un contexte différent, etc.

Cette idée de la transplanter, est-ce que ça, c'est de l'intuition, de se dire "tiens, je vais prendre cet outil-là, et je vais l'amener là ?

Oui, bon, c'est vrai, si vous voulez que dans les mathématiques, il y a une part non négligeable d'intuition qui est très, très difficile à définir.

5 L'intuition

C'est vrai, c'est parfaitement vrai que dans certaines situations, certaines situations où on a un problème très difficile, etc., on arrive à avoir une intuition. Mais cette intuition, si quelqu'un vous demandait

“Est-ce que tu peux me dire,...Là, qu’est ce que tu veux ? Qu’est ce que tu fais ?” Etc. On serait incapable de le dire, on serait incapable de le dire, parce que c’est une intuition qui n’est pas encore rationalisée et qui, si on essayait artificiellement de la rationaliser, s’évaporerait.

Et ça, c’est quelque chose de très, très difficile à comprendre. C’est quelque chose qui est très difficile à formaliser et qui rend le travail du mathématicien très difficile, c’est que c’est un travail entièrement, purement rationnel, si vous voulez...

Ni linéaire.

Ni linéaire, absolument pas linéaire, c’est-à-dire qu’il y a des périodes, souvent assez longues, dans lesquelles il y a une espèce d’incubation. Hadamard en a parfaitement parlé, je ne vais pas répéter ce qu’il disait, mais il y a une période d’incubation qui est souvent longue, et qui demande justement de pas être trop rapide intellectuellement, parce que si on est trop rapide intellectuellement, on va facilement trouver des raisons qui font que ça ne va pas marcher.

Mais c’est une erreur souvent de croire ça parce qu’il faut laisser les choses lentement évoluer. Il faut être extrêmement patient, mais en même temps, il faut être exactement comme une bête sauvage aux aguets, c’est-à-dire tout en étant patient, rester complètement en éveil et être capable, justement, si on voit quelque chose qui a l’air de marcher, là, il faut sauter. Bien sûr, il ne faut pas être endormi. Il ne faut pas attendre que ça tombe du ciel comme ça.

En ce moment, quelle est la bête que vous traquez ?

Eh bien la bête qu’on traque, là, c’était ce que je vous disais, c’est sur la théorie des nombres, etc. Ce qui s’est passé avec Katia Consani, justement, c’est qu’on a eu l’impression qu’il y avait un certain nombre de pièces du puzzle, de cet immense puzzle qui sous-tend les nombres premiers qui sont tombés en place. Alors bon, c’est une avancée, c’est une avancée, mais c’est une avancée qui peut paraître trop naïve, etc., d’un certain côté, mais pour nous qui comprenons l’essentiel des éléments qui composent ce puzzle, ça a été vraiment une révélation.

Bien sûr, on est très, très loin du but. On est encore très, très loin du but, mais ça permet, si vous voulez, de se raccrocher à toute la panoplie d’outils, de notions qui ont été développés par les géomètres algébristes, donc d’abord André Weil, puis Serre, puis Grothendieck. Et donc, ça nous donne une espèce de programme de travail. Et ça, c’est formidable. Ça, c’est formidable. Je vous dirais qu’il y a plus de plaisir à avoir un programme de travail, à savoir qu’on va s’embarquer dans ce programme de travail, c’est un peu comme le marin qui s’embarque pour de longs périples, etc., il y a plus de plaisir à ça que de terminer quelque chose, parce que c’est ouvert, et ça, ça ouvre quelque chose.

6 La réalité mathématique

À plusieurs reprises, vous parlez de la réalité mathématique, mais expliquez-la nous, parce qu’elle nous est étrangère

Le problème, si vous voulez, c’est que les mathématiques ne sont pas quelque chose que l’on peut comprendre, où l’on peut lire sans en faire. En cela, les mathématiques sont très différentes d’autres sujets. Mais la réalité mathématique, c’est quelque chose d’incroyablement concret, c’est aussi concret qu’une chaise, si vous voulez, qu’on peut toucher. Mais je n’essaierai pas de vous donner des exemples d’arithmétique, parce que c’est trop simple. Mais par exemple, prenons la géométrie, si vous voulez, si vous prenez la géométrie euclidienne ordinaire, je peux vous donner un énoncé. Et puis vous pouvez, après, chercher à comprendre, chercher à voir si c’est vrai ou pas. Et je vous donne un exemple. C’est ce qu’on appelle le théorème de Morley. C’est un magnifique théorème. C’est un théorème qui vous dit que de tout triangle émerge un triangle équilatère. Alors, comment il émerge ? Il émerge de la manière suivante : vous prenez le triangle et vous prenez chaque angle du triangle et vous le coupez en trois, trois parties égales, d’accord ? Alors vous obtenez comme ça des droites. Vous intersectez ces droites, ça va vous donner trois points. Eh bien, ces points sont les trois sommets d’un triangle équilatère, quel que soit le triangle dont vous parlez. Donc, c’est incroyable, c’est incroyable. Alors vous pouvez me dire “mais non, ce n’est pas vrai !". Et moi, je vais vous donner la démonstration que c'est vrai et on touche la réalité mathématique.

Alors en fait, on la touche aussi de manière extrêmement concrète avec les ordinateurs, c'est à dire que bon, on peut... on peut se poser la question de savoir à partir de quel moment on se convainc qu'une chose est vraie, mais on se convainc d'une chose est vraie de deux manières différentes. Il y a une manière expérimentale. C'est exactement comme en physique, c'est à dire que bon, il peut y avoir un énoncé, je ne sais pas, sur des formes modulaires.

Mais l'ordinateur est tellement puissant, tellement fort, si vous voulez, qu'il est capable, justement, de calculer des exemples. Et si on vérifie sur suffisamment d'exemples que ça marche, on est convaincu que c'est vrai. Ce n'est pas du tout la même chose que de trouver une démonstration. Mais il faut bien comprendre que c'est un peu comme la réalité physique et c'est une réalité qui est là, qui est tangible et qu'on peut explorer. On peut l'explorer directement. On peut l'explorer par la pensée, c'est bien mieux et on peut aussi l'explorer par l'ordinateur. Et elle est présente tout le temps. Elle n'est pas comment dire, on ne peut pas la toucher comme on touche la réalité physique. Mais peu importe, elle est tout aussi réelle. Elle est tout aussi fondamentale que celle-là. Je reprends l'exemple du théorème de Morley, si vous voulez, ce qui va enlever le doute complètement, c'est de donner une démonstration algébrique. Elle existe. Il existe une démonstration purement algébrique du théorème de Morley.

Et alors, une fois qu'on a trouvé cette démonstration, c'est formidable, ça veut dire que d'abord, ça marche dans tous les cas, bien sûr, parce que c'est purement algébrique et en plus, non seulement ça marche dans tous les cas, mais la figure géométrique qu'on a, elle va utiliser ce qu'on appelle le corps des nombres complexes. Mais la démonstration algébrique va marcher pour tout corps, donc c'est quelque chose de formidable parce que ça veut dire qu'à partir justement d'une image géométrique et d'une intuition géométrique, eh bien, on a trouvé une formulation algébrique qui est beaucoup plus générale. Et donc, on a franchi un pas, on a franchi un pas justement par cette espèce de communication, si vous voulez, entre d'un côté une intuition géométrique et de l'autre côté, une intuition algébrique, qui est une formulation algébrique des choses et qui est beaucoup plus puissante d'une certaine manière. Mais il y a toujours un aller-retour, c'est-à-dire que certains mathématiciens ont une vision géométrique des choses, ont des images, des images mentales, d'autres ont une compréhension algébrique des choses, c'est-à-dire une manipulation dans le temps, à l'inverse d'une manipulation géométrique, d'une comprehension géométrique.

7 La géométrie non commutative engendre son propre temps... (?)

J'aimerais creuser une phrase que je n'ai pas comprise : "la géométrie engendre son temps".

En gros, la manière dont le temps apparaît, c'est qu'en géométrie, lorsque les choses ne commutent pas, ab est différent de ba, d'accord. Mais il y a une équation qui se produit que je vais ultra-simplifier, bien sûr, qui est que ab n'est pas égal à ba, mais est égal à b, multiplié par a transformé par le temps, mais pas par le temps réel qu'on connaît, mais par le temps imaginaire. Donc, ce qu'il faut retenir, c'est que ab n'est pas égal ba, mais est égal à b fois a transformé par le temps imaginaire et ensuite par ce qu'on appelle le prolongement analytique, eh bien, on arrive à un temps réel. Donc, c'est ça l'idée fondamentale, si vous voulez. Alors au départ, c'était une idée qui a été développée par les physiciens qu'on appelle Kubo-Martin-Schwinger (KMS), puis par d'autres physiciens Hugenholtz-Winnink-Haag. Et puis par Tomita, un mathématicien japonais, et Takesaki.

Et puis moi, j'ai travaillé dans ma thèse avec Jacques Dixmier là-dessus et j'ai fait justement, à un moment donné, une trouvaille vraiment qui était fondamentale, qui était que, alors qu'on avait l'impression que cette évolution dans le temps dépendait d'un choix particulier, d'un état, j'avais trouvé qu'elle n'en dépendait pas, par ce qu'on appelle "modulo les automatismes intérieurs près". Alors ça a donné toute une foultitude d'invariants des algèbres en question, et ça a permis de les classifier, ça a permis d'avancer considérablement, mais il y avait comment dire... Il y avait un message philosophique que j'avais ressenti à travers mon intuition, bien sûr, dans cette découverte et que j'avais pendant des années été incapable de relier à la physique, jusqu'au jour où j'ai rencontré un physicien un peu par hasard. Et c'est Carlo Rovelli.

Et en discutant avec lui, si vous voulez, je me suis aperçu que... on s'est aperçu tous les deux que lui avait eu une idée semblable, mais il n'avait pas les outils mathématiques qui permettaient de mettre ce cadre sur pied. Et en plus, lui, il l'avait fait dans ce qu'on appelle le cadre semi-classique, c'est à dire pas encore quantique. Et donc, en mettant les choses ensemble, eh bien, on a compris, si vous voulez, que cette équation, cette génération du temps par le non commutatif avait probablement un rôle fondamental en physique qui n'est pas encore totalement établi.

8 Faire admettre la portée d'une découverte

Un des prétextes, comment dire, d'un livre qu'on vient d'écrire, qui s'appelle *Le théâtre quantique*, justement avec mon professeur de thèse Jacques Dixmier et avec mon épouse Danye Chéreau, c'est précisément, si vous voulez, de faire passer cette idée dans le grand public, parce que bon, finalement, moi, j'y tiens énormément à cette idée et la faire passer à travers un message qui est ludique, si vous voulez, dire ce message à traverse une histoire qui raconte les épisodes de la vie d'une chercheuse, de l'héroïne, etc.

Et vous diriez que là, en ce moment, on est à une période charnière, justement, sur cette notion de temps.

Vous savez, je ne sais pas, parce qu'il faut bien comprendre que dans le domaine dans lequel je travaille, si vous voulez, il y a deux niveaux. Il y a un niveau qui est le niveau vraiment de la recherche, de comment les choses se passent, comment elles évoluent. Et puis, il y a un niveau sociologique. Et le niveau sociologique, c'est dans quelle mesure ces choses là vont passer dans la communauté scientifique. Et évidemment, ce sont deux choses qui sont disjointes, bien sûr, d'accord.

Mais bon, je ne peux pas dire que je me sois beaucoup préoccupé pendant ma carrière du niveau sociologique. Donc bon, alors c'est un peu à la traîne toujours...

Vous ne pouvez pas vous prononcer

Non, pas vraiment, non, disons que c'est un peu à la traîne, c'est vrai. Des fois, c'est exaspérant parce qu'on voit les gens qui ne comprennent pas, etc. On voit d'autres théories qui occupent le devant de la scène de manière un peu indécente, mais c'est comme ça. Donc, je veux dire, on a souvent fait... Quand on travaille, on a le choix. Soit on travaille vraiment, soit on se répand pour dire... soit on communique. Bon, c'est difficile, c'est très, très difficile de faire les deux choses en même temps. C'est presque contradictoire. Pourquoi ? Parce que quand on travaille vraiment, c'est une occupation de tous les instants et on a très, très peu de temps libre, en fait. Pour le reste.

On travaille seul ?

Non, non, non. On a absolument besoin des autres. Moi, je vais dire, j'ai toujours eu des collaborateurs, soit en physique, surtout, par exemple, mon collaborateur Chamseddine et bon, en ce moment pour la théorie des nombres avec Katia Consani. Donc, c'est essentiel d'avoir des collaborateurs, justement, ne serait-ce que bon, d'abord, ils apportent des idées nouvelles, bien entendu, mais surtout aussi, je dirais, pour ne pas être complètement seul, parce qu'il y a évidemment des moments très difficiles. Il y a évidemment des moments, des longues, longues périodes dans lesquelles rien ne se produit. Et si on était seul, on n'aurait peut-être plus tendance à se décourager que si on travaille plus dur. Ça, ça joue un rôle très, très important.

9 L'intensité des cours au Collège de France

J'ai un public, assez varié, très varié, qui vient régulièrement à mes cours et il y a un contact très fort qui s'établit avec le public.

Donc c'est vraiment, vous, la recherche en train de se faire...

Ah oui ! Et je dois dire que, comment dire, le leitmotiv du collège qui fait son originalité, ça, ça crée justement pendant les mois qui sont les mois de cours du Collège, une période extraordinaire, une période extraordinaire. Pourquoi ? Parce que les bonnes années, ça n'arrive pas tout le temps. Les bonnes années, en gros, deux semaines avant le cours, je sais de quoi je vais parler. En gros, j'ai le sujet, d'accord, mais je n'ai absolument pas les détails. Et en gros, ce que je fais, c'est que je m'arrange pour avoir deux semaines d'avance, c'est à dire que je sais en gros ce que je vais faire dans le cours suivant. Et puis, je travaille sur le cours d'après. Donc, je cherche sur le cours d'après et c'est une période de recherche d'une intensité absolument incroyable. Pourquoi ? Parce qu'on sous-estime souvent le fait qu'en mathématiques, si vous voulez comprendre les choses, on peut avoir l'impression d'avoir compris. Mais il y a toujours un bénéfice extraordinaire à aller dans le moindre détail et à, comment dire, à exhiber toutes les facettes d'une notion, etc. Parce que...

Vous êtes perfectionniste

Être perfectionniste, parce que ça va engendrer des choses. Et je m'en suis encore aperçu en préparant le cours de cette année parce que c'est justement à travers toute l'élaboration du cours, etc., que l'objet de géométrie algébrique est apparu. Donc, ce que je veux dire, c'est que c'est une période très intense, très dure, très dure, parce que c'est dur physiquement, par exemple. Il m'arrive souvent d'avoir des manifestations physiques, si vous voulez de la tension, pendant la période du cours, au moment du début, etc. Mais c'est extrêmement productif parce que c'est la période où je travaille le plus, etc.

Mais c'est concentré, vous ne pouvez pas faire ça tout le temps, évidemment. Si on faisait ça tout le temps, on serait complètement lessivé, raplapla, etc.

C'est peut-être là, le secret de votre foisonnement...

Oui, absolument. Absolument. Parce que si vous voulez souvent, je me suis dit "Bon, peut-être si j'étais resté au CNRS...", etc. Mais ça dépend. Bien sûr, chaque mathématicien est un cas particulier et si vous voulez, il faut trouver l'équation qui va lui permettre de marcher.

Mais finalement, dans mon cas en particulier, la motivation qu'il y a au Collège qui consiste à dire que chaque cours doit être un cours sur quelque chose d'original qui est en train de se faire, à la limite qui n'est pas publié, mais qui est vraiment en train de se faire. Mais cette motivation, je la trouve formidable. Je la trouve formidable. Il y a des années, effectivement, où c'est beaucoup plus difficile ou beaucoup plus embêtant, mais c'est comment dire, c'est très, très bien dosé. C'est à dire que si vous voulez, c'est pas comme si j'avais 6 mois de cours, ce serait trop. Mais cette période de cours qui dure entre 2 et 3 mois. Si vous voulez, c'est parfait parce que c'est très bien dosé et ça oblige à une certaine discipline. Ça oblige justement à rester tout le temps, tout le temps, tout le temps un peu inquiet, un peu sur le fil.

Et jamais, jamais se dire "bon, bah ok, maintenant je suis vieux, etc.". On ne peut pas agir, on ne peut pas. Parce que bon, bien sûr, il faudra que je m'arrête à un moment donné. Mais on ne doit absolument pas faire ça parce que si on fait ça, justement, on ne sera pas capable de faire le cours.

10 Le doute

Le doute, vous savez, dans le livre, le livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, commence par cette exposition à Venise qui s'appelle *L'éloge du doute*. Le doute est présent tout le temps. Le doute est présent à quatre heures du matin, lorsqu'on se réveille la nuit et qu'on se dit "Est-ce que je n'aurais pas fait une erreur là, etc.". Et qu'on commence à vérifier. Donc le doute est présent tout le temps, mais je rajouterai quand même que de temps en temps, de temps en temps, ça arrive rarement, mais ça arrive, heureusement, il y a des moments où le doute s'évapore. Et justement, j'ai douté pendant des années et des années que l'espace que j'avais trouvé en 1996 pour les nombres premiers était le bon. Et ce qu'on a trouvé récemment avec Katia Consani lève ce doute. C'est sûrement le bon espace, donc, c'est merveilleux que de temps en temps, il y ait, vous voyez, comme ça, un moyen de lever le doute. Alors bien sûr, on peut dire : "Bon, eh bien, tu as levé le doute pour toi, lève-le pour les autres.". Comme le but de tous ces développements, si vous voulez, c'est très, très difficile, bien sûr, ce n'est pas immédiat. Mais pour nous, c'est très, très important de lever le doute, même ponctuellement, si vous voulez, comme ça, sur une notion aussi importante.

Interview d'Alain Connes
par Lucia Dora Simonelli, physicienne
à l' ICTP, à Trieste, Italie
2017.03.02

Je suis ici avec le professeur Alain Connes à l'ICTP ; il visite l'Institut à l'occasion d'un colloque ici sur la géométrie non commutative. La première question sera donc une sorte de question spécifique à l'ICTP : si vous aviez des conseils à donner aux jeunes étudiants qui souhaitent étudier les mathématiques, en particulier aux étudiants des pays en développement, quel conseil leur donneriez-vous ?

C'est difficile : vous savez, pour étudier les mathématiques, bien sûr, ce sont des défis et donc, je veux dire, j'ai toujours pensé que l'étape clé dans l'étude des mathématiques est de comprendre que, vous savez, on n'apprend pas les mathématiques. On en fait, on en fait, et jusqu'à ce que vous soyez vraiment capable de prendre un problème et de le résoudre par vous-même ou d'essayer de le résoudre par vous-même, vous ne faites pas de mathématiques. Parce que les mathématiques ne sont pas un sujet que vous pouvez apprendre ; il y a des sujets scientifiques que vous pouvez apprendre, mais ce ce n'est pas le cas pour les mathématiques. Pour les mathématiques, vous devez en faire vous-même. Ce serait le meilleur conseil que je pourrais donner, en très peu de temps. C'est vraiment comme... par exemple, vous savez, pour faire une comparaison, si vous essayez de devenir pianiste en lisant des livres, c'est la même histoire, il faut s'entraîner. La pratique est beaucoup plus importante que n'importe quoi d'autre, comme lire des livres, et tout ça. De cette façon, les mathématiques sont un sujet très démocratique et il y a aussi une étape clé, la magnificience de cette étape clé est qu'un étudiant peut trouver une erreur d'un enseignant, car il est capable de penser par lui-même, et de découvrir qu'il a raison, et que l'enseignant a tort ; c'est quelque chose qui est très important dans les mathématiques, et qui n'est pas présent dans d'autres sujets. Parce que les autres sujets nécessitent tellement de connaissances que, d'une manière ou d'une autre, cela ne sera pas possible pour un débutant, mais en mathématiques, c'est possible.

La prochaine question est donc de penser à cette quête pour trouver une théorie unifiée pour l'univers. Je pense que cette quête est intéressante par l'impact qu'elle a peut-être eu sur l'interaction entre mathématiques et physique. Et donc peut-être que certains ont la possibilité qu'à un moment donné un ensemble de champs en établlise un autre, mais il semble que maintenant il y ait une sorte de relation symbiotique et je voulais votre point de vue sur l'évolution des relations entre les mathématiques et la physique.

Oui, je pense que c'est une question très délicate dans le sens où il y a un Graal, un problème que les gens essaient de résoudre, qui est la gravité quantique, donc nous

Transcription d'une vidéo est visionnable ici : https://www.youtube.com/watch?v=XxtnTtvlhMw savons que la gravité quantique existe, nous savons que c'est assez difficile. Mais en quelque sorte, pour les mathématiciens, du moins en ce qui les concerne, la question est encore plus importante pour les mathématiques dans le sens suivant : par exemple lorsque Riemann a donné sa leçon inaugurale, il était très clair sur le fait que l'hypothèse qu'il avait pour la géométrie riemannienne, son hypothèse pour la géométrie, ne tiendrait pas à très très petite échelle.

Et il était si lucide et précis, qu'il avait déjà prévu des développements qui viendraient beaucoup plus tard, et en particulier en géométrie non-commutative, en raison du fait qu'il pensait que la notion de (...) ou la notion de rayon de lumière n'a plus de sens dans le très très petit alors que ces notions étaient cruciales dans sa définition de la géométrie. Il y a donc une symbiose, mais il y a aussi, je dirais, des écarts, et ce que j'entends par exemple dans certaines discussions, j'entends des écarts parce que certaines personnes veulent carrément changer les règles de la physique (faire ce qu'elles veulent ? ...).

Je pense donc que nous devons être très prudents. Et en même temps, ce que je dirais, c'est qu'il y a un objectif intermédiaire pour compléter la géométrie, et cet objectif est très précis, c'est de comprendre l'effet, l'impact sur la notion de géométrie des résultats que la physique expérimentale nous a fourni en un siècle, où le voyage vers des échelles de grandeurs plus petites, qui a commencé à la fin du XIX$^{\text{e}}$, avec la découverte de l'électron et de la radio-activité. Et il a augmenté notre perception de la structure fine de l'espace-temps par un facteur de dix à la puissance huit au cours du siècle et qui a des implications sur le modèle géométrique que nous avons de l'espace-temps et cette application sera pleinement comprise en géométrie non-commutative et ce qui se passe est que l'espace-temps n'est plus un pur continuum mais c'est un mélange du continuum et du discret. Et donc ça, c'est une leçon qui a été comprise, c'est une leçon qui est très étrange, et qui a forcé à changer le paradigme riemannien. Mais ce changement de paradigme riemannien, bien sûr, Riemann ne pouvait pas le prévoir car cela implique la mécanique quantique. Donc le nouveau paradigme sur la géométrie est très proche du riemannien mais il y a des nuances, et ces nuances viennent du quantum, elles viennent du formalisme de la mécanique quantique découverte par von Neumann dans les années 1960. Et il s'est avéré alors que l'idée ou la notion que nous voulons pour l'espace géométrique devient plus naturelle, et est plus facile à comprendre dans le formalisme quantique.

Vous décrivez donc qu'il n'y a pas seulement l'immensité de l'univers mais aussi ces très petites échelles. Comment définiriez-vous un point ?

D'accord, c'est une question intéressante parce que nous pouvons poser, au sein d'une telle approche de cela, la question de savoir comment définir un point, et cette question qui est simple est de savoir comment nous communiquerions avec des extraterrestres ou d'autres civilisations possibles l'endroit où nous sommes. Eh bien, si je vous dis que nous sommes à Trieste, et ainsi de suite, eh bien, cela ne dit rien à aucun extra-terrestre parce que tout d'abord, ces gens ne comprennent pas ce que Trieste veut dire, et puis, si on admettait que ce sont des gens qui connaissent la relativité générale, il suffirait de leur donner nos coordonnées dans un système de coordonnées, mais c'est aussi stupide parce que quel système de coordonnées devrions-nous prendre, quelle manière invariante avons-nous de définir un tel système de coordonnées, et il se trouve que par rapport à ce dont je parlais avant, ce rétablissement de la dualité a sa réponse qui est exactement fournie par le formalisme. Donc la première question devient comment communiquer cet espace dans lequel nous sommes, juste la Terre, non pas en donnant une image, comment communiquons-nous l'espace dans lequel nous nous trouvons, et deuxième question, comment définir où nous sommes dans cet espace. Pour communiquer l'espace dans lequel nous nous trouvons, il s'avère que la meilleure façon est de donner la musique de l'espace. Donc, si vous prenez une forme, c'est une métaphore bien connue si vous voulez, qui remonte à Mark Kac, donc si vous prenez une forme, comme un tambour par exemple, des tambours de formes diverses et ainsi de suite, il s'avère que chaque tambour a selon sa forme une gamme spéciale, une gamme musicale, et dont les fréquences dépendent de la forme en question.

Et il s'avère que si vous voulez donner invariablement l'espace, vous devez donner une liste des quantités qui sont affectées à cet espace de manière invariante. Maintenant l'échelle de l'espace est invariablement définie ; vous pouvez faire pivoter l'espace, vous pouvez faire ce que vous voulez, et vous ne changerez pas son échelle. Donc, c'est un invariant de l'espace. Et il se trouve que Helmholtz a trouvé ce qu'on appelle l'équation de Helmholtz dans laquelle il utilise l'échelle de l'espace, et il s'avère qu'il y a un petit raffinement dans cette équation, Helmholtz prenait pour élément linéaire la racine carrée du laplacien, et vous devez diviser cette base par l'opérateur de Dirac, mais c'est une petite nuance. Et quand vous connaissez cette petite nuance, alors vous pouvez réellement reconstruire l'espace, mais vous devez en savoir un peu plus. Vous avez besoin d'un peu plus que l'échelle de l'espace, vous avez besoin de savoir précisément quels sont les points. Et quels sont les points ? Chaque point est défini par un accord sur l'échelle. Un point dans un espace, techniquement parlant, comment voulez-vous préciser le point ? Donc, techniquement, ce que vous faites, vous prenez ce qu'on appelle les vecteurs propres de l'opérateur de Dirac, leurs valeurs sont bornées dans l'espace (...) et vous les évaluez au point. Lorsque vous les évaluez, vous ne pouvez pas simplement donner un nombre, donc vous obtenez un nombre en termes de métriques, qui sont des produits scalaires de ces différentes bases, au point, vous utilisez les métriques et il se trouve que modulo l'invariance, cette métrique est exactement ce dont vous avez besoin pour connaître le point.

Donc, l'image, l'image mentale est que l'espace est compris par une échelle musicale et des accords possibles. Et les accords possibles sont les points. Donc, d'une certaine façon, ce qui se passe, c'est que vous reconstituez l'espace par une sorte de transformation de Fourier. Et je crois que c'est exactement ce que fait le cerveau quand vous voyez, parce que quand vous voyez, il y a des photons qui arrivent pendant un laps de temps, parce que quand vous voyez, vous avez les photons à l'échelle propre de l'espace et le cerveau reconstitue l'espace comme nous sommes habitués à le voir, mais ce qui est encore plus important, c'est que c'est exactement la façon dont nous percevons l'univers lointain. Parce que nous percevons l'univers lointain en regardant les spectres des galaxies, les spectres des étoiles, les spectres des nébuleuses, et c'est dans ce sens que les spectres peuvent calibrer les informations que nous recevons des étoiles lointaines.

Dans ce formalisme, nous découvrons que non seulement, il est utile pour les distances microscopiques mais il y a aussi des remaniements et cela change le point de vue sur les grandes distances, mais d'une manière qui est parfaitement cohérente avec nos perceptions de l'univers. Par exemple, généralement, ce qui se passe, c'est que nous savons que les choses sont très très éloignées, vous devez vous rappeler qu'il y a un certain temps, les gens ne savaient même pas qu'il y avait des choses en dehors de notre galaxie, ok, il a fallu des astronomes très courageux pour trouver cela. Mais maintenant, nous savons que les choses sont très très très éloignées, simplement à cause du décalage vers le rouge. Et ce sont encore des données spectrales qui nous le font savoir.

Et ici, il y a un concept de distance ou d'unité de longueur en termes de longueur d'onde.

Sûr. C'est aussi une étape très importante, qui est tellement amusante à expliquer parce que cela concerne des choses très concrètes. L'histoire commence donc plus ou moins en France, à la Révolution française. Vous voyez, il y avait plus ou moins une unité de longueur par ville. Il y avait des milliers d'unité de longueur. Cela signifie que là où les gens étaient, lorsqu'ils vendaient par exemple du tissu, en voyageant d'un endroit à un autre, ils devaient mesurer leur tissu par rapport à l'unité qui se trouvait à l'entrée du village, bien sûr *(rires de Lucia-Dora Simonelli)*. La révolution était bien sûr une idée pour unifier les choses, et ils avaient de grands objectifs et tout ça, alors ils ont décidé de ... ils avaient de très bons scientifiques, ils ont décidé d'essayer d'unifier le système, en définissant une unité de longueur. Alors qu'est-ce ils ont fait. Ils ont pris le plus grand objet disponible, qui est la Terre, et ils ont défini l'unité de longueur de sorte que, lorsque vous multipliez cette unité de longueur par 40 000 000, vous obtenez la circonférence de la Terre. Voilà donc ce qu'ils ont essayé.

Et pour... Bien sûr, ils ne pouvaient pas aller au pôle, pour mesurer l'ensemble du méridien, ils mesuraient des angles entre des étoiles qu'ils pointaient avec leurs instruments, ils n'avaient donc besoin que de mesurer une partie angulaire du méridien. Et ils ont choisi de mesurer la portion angulaire qui était entre Dunkerque, qui se trouve au nord de la France, et Barcelone, qui est en Espagne. Et en 1792, ce fut donc pendant la folle période de la Révolution, ils ont envoyé deux personnes. Delambre et Méchain, ont été envoyées, pour faire la chose suivante ; l'idée était qu'ils auraient d'abord une base, ce que nous appelons une base. Ils avaient donc aligné sur une distance suffisamment longue quelques barres, si vous voulez, et ils avaient pris cela comme base. Ils mesuraient seulement des angles, ce qui est une idée très intelligente. Ils mettaient des télescopes au sommet des collines et mesuraient les angles, et en faisant des triangulations, ils comparaient la base avec la distance entre Barcelone et Dunkerque. Et c'est à partir de cela qu'a été définie l'unité de longueur, qui était en fait une barre métallique. C'est une histoire très intéressante car il y a toutes sortes de développements derrière cette histoire parce que l'un des gars, je pense que c'était Méchain, devait faire des mesures en Espagne et bien sûr, donc, il mesurait les angles, en mettant le télescope au sommet de la colline, et bien sûr, il a eu beaucoup de problèmes parce que c'était en temps de guerre, une guerre entre la France et l'Espagne, à cette époque, et il a dû expliquer à l'Armée espagnole qu'en mettant son télescope au sommet de la colline et en regardant dans son télescope, il n'était pas en train d'espionner, il essayait de définir l'unité de longueur *(rires des deux)*.

Il y a donc beaucoup d'anecdotes intéressantes à développer, j'adore les détails de cette histoire, je ne sais pas pourquoi. Et puis ce qui s'est passé, c'est la chose suivante. Cette unité de longueur a été déposée près de Paris, et quand j'étais enfant, j'ai appris que "L'unité de longueur est le mètre qui est déposé au Pavillon de Breteuil près de Paris.", et ainsi de suite. Donc je pensais et je suis sûr que beaucoup de gens pensaient "Ce n'est pas très pratique" parce que si vous voulez mesurer votre lit, bien sûr, ils en ont fait plusieurs exemplaires. Donc c'était la situation à l'époque. Mais ensuite, un événement très intéressant s'est produit. Il y avait donc des réunions périodiques des gens du système métrique. Et cette réunion a lieu depuis des années. Je ne suis pas sûr que la période était d'un an.

Mais vers les années 1930, ils ont remarqué qu'en fait, la barre de platine, définissant l'unité de longueur, changeait de longueur. Et comment l'ont-ils remarqué ? Ils ont remarqué ça en essayant de mesurer sa longueur très précisément, et en la comparant à la longueur d'onde du krypton pour une transition spécifique. C'était donc très mauvais, et progressivement, ils ont trouvé la bonne démarche. Et la bonne démarche, c'était bien sûr de prendre cette longueur d'onde, comme unité de longueur. Cela a pris du temps. Mais ce qui est très intéressant à savoir, c'est que maintenant, il y a des instruments qui sont si communs, vous pouvez les acheter dans un magasin, et ces instruments sont eux aussi basés sur la longueur d'onde. L'élément utilisé n'est plus le krypton. C'est le césium parce que le césium est très facilement disponible et vendu, et de plus, la longueur d'onde du césium utilisé est une micro-onde. C'est comme quand vous mettez quelque chose dans le four à micro-ondes, c'est une onde qui est de l'ordre de 3 centimètres. Et c'est un instrument qui vous permet de mesurer une longueur avec une précision allant jusqu'à 12 décimales, donc je veux dire, c'est absolument incroyable. Et c'est maintenant ce qui est considéré comme l'unité de longueur. Bien sûr, les gens vous diront que ce n'est pas une unité de longueur, c'est une unité de temps mais en raison de la constance de la vitesse de la lumière, la vitesse de la lumière a été fixée à un nombre très précis. Donc, les choses ont évolué et maintenant, ce que vous pouvez retenir de cela, c'est qu'il y a eu un changement complet dans le paradigme parce que l'unité de longueur n'est plus un objet localisé, qui est quelque part, mais c'est une donnée spectrale. Et ça montre que le nouveau paradigme, qui vient de la mécanique quantique, qui est le paradigme de la géométrie non-commutative, qui est appelée la géométrie spectrale si vous voulez, est exactement parallèle à ce changement de paradigme en physique. C'est donc très concret. C'est quelque chose qui est très très concret et l'énorme avantage est que si nous avions, par exemple, unifier le système métrique, non pas sur Terre, mais dans la galaxie, par exemple, de façon localisée. Si vous dites aux gens : "ok, venez à Paris et comparez votre unité de longueur à l'unité de longueur que nous avons définie là-bas..." *(rires)*, ils se moqueraient de vous, ils rugiraient "nous aussi, nous avons notre unité de longueur", alors que si vous dites aux gens "prenez un élément chimique". Bien sûr, le césium est un peu compliqué parce que...

Pour votre entreprise, il... Peut-être... vous avez besoin de quelque chose de très commun ...

Oui, exactement, comme l'hélium ou l'hydrogène. Je voterais pour l'hydrogène, car l'hydrogène est essentiellement présent partout, tandis que le césium ou les éléments lourds de ce genre, en fait, il faut savoir qu'ils ne viennent, non pas seulement des supernovae, mais de supernovae très, très exceptionnelles. Donc leur abondance dans l'univers n'est pas si claire, mais si vous prenez l'hydrogène par exemple, il y a des rayons spectraux d'hydrogène qui sont très précisément définis, il y aurait des modèles très spécifiques, mais alors un devrait trouver le fractionnement hyperfin, car l'avantage du fractionnement hyperfin qui est utilisé pour le césium est qu'un fractionnement hyperfin est une différence d'énergie qui est très, très petite, et ce serait dans la loi inverse, lorsque vous passez à la longueur d'onde, il va générer des micro-ondes, ce qui est beaucoup plus pratique, alors que si vous prenez une énorme différence de fréquences, comme pour une transition, vous obtiendrez une très, très petite unité de longueur et ce ne serait pas (?) bon. Ce que je dis, c'est que lorsque vous communiquez avec les gens, en envoyant une sonde, et si vous êtes en mesure de leur dire quelle est votre unité de longueur, c'est merveilleux. Et vous envoyez simplement une copie du spectre des rayons d'hydrogène et vous expliquez lequel vous voulez découvrir. Je veux dire que c'est très simple, et s'ils sont intelligents, ils comprendront, alors que si vous faites autrement, cela ne marcherait jamais.

La structure fine de l'espace-temps, vous la décrivez en termes de spectre d'un opérateur, ce qui permet ...

C'est un peu plus compliqué, comme je l'ai dit, vous savez, bien sûr, le spectre de l'opérateur vous donne l'unité de longueur, ...

Est-ce que cela vous permet, en quelque sorte, de combiner un concept discret avec un concept... ?

Eh bien, ce qui permet de combiner le discret et le continuum, c'est le fait que, essentiellement, c'est un mélange du discret et du continuum et cela résulte de ces découvertes de la physique expérimentale. Ce que ces résultats nous ont donnés, au cours du siècle, c'est exactement la structure de l'espace discret. Donc au début, l'espace discret, avec mes collaborateurs, Chamseddine, et Walter Van Suijlekom et Mukhanov, ce que nous avons trouvé, au début, nous procédions avec une approche ascendante, à savoir, nous prenions des expériences, et nous essayions de les adapter à ce qui se passait, etc., et progressivement, nous avons trouvé ce que l'espace fini devrait être, mais dans un travail récent, il y a environ 2 ou 3 ans, avec Chamseddine et Mukhanov, nous avons été très étonnés parce que nous nous posions un problème purement géométrique, qui était bien sûr motivé par la géométrie non commutative, mais qui était totalement disjoint de la physique et du modèle standard, et ainsi de suite, et en développant ce problème dans la dimension 4, nous avons trouvé exactement le même espace fini dans la même algèbre, que nous avions mis à la main précédemment. Donc, nous croyons que nous avons un morceau de la vérité.

Mais naïvement, pourquoi est-il important d'inclure ce concept discret ?

Pourquoi naïvement, est-ce important, c'est facile à expliquer en quelque sorte, mais j'ai besoin d'un morceau de papier, *(Il en prend un)*. C'est très simple à comprendre. Vous voyez, pourquoi est-ce important d'avoir cette pièce discrète. C'est parce que le problème le plus évident que vous avez si vous n'avez pas cette pièce discrète, c'est que le boson de Higgs, le boson de Brout-Englert-Higgs, je connaissais bien Brout, je veux dire, il est mort juste un an avant que la particule ne soit découverte. La particule a été découverte, nous savons qu'elle est là, mais elle ne correspond pas à la norme de la géométrie, pourquoi ? Parce qu'en géométrie standard, si vous prenez une fonction sur un espace, vous la différenciez, et vous obtiendrez ce qu'on appelle un potentiel de jauge de la forme, d'accord. Pourquoi ? Parce que la différenciation dépend de la direction dans laquelle vous différenciez, c'est pourquoi vous obtenez quelque chose qui est appelé spin 1 si vous voulez, qui dépend de la direction. Mais la particule de Brout-Englert-Higgs est une particule de spin 0. Cela ne dépend donc pas de la direction. Vous vous demandez donc comment obtenir géométriquement une particule de spin 0. Imaginez maintenant qu'au lieu d'avoir juste cette variété, d'accord, il y ait un élément discret, l'élément discret est juste un élément qui dit "suis-je en haut ou suis-je en bas ?", alors maintenant, j'ai davantage d'informations, je sais si je suis en haut ou en bas. Et je prends une fonction. Cette fonction aura un développement ici, et elle aura un développement en dessous *(montrant avec sa main les deux faces de la feuille de papier)*. Ces développements ne doivent pas nécessairement être les mêmes, donc je peux différencier ma fonction en haut *(AC fait tourner sa main contre la face haute de la feuille)*, et je peux la différencier en bas *(AC fait tourner sa main contre la face basse de la feuille)*, mais je peux aussi prendre la différence finie entre les deux *(montrant la différence sur la tranche de la feuille)*. Et la différence finie entre les deux, elle ne dépend pas de la direction que je prends. C'est le boson de spin 0, et cela correspond au boson de Brout-Englert-Higgs. Alors le boson de Brout-Englert-Higgs était un signe indubitable parfaitement clair, sur une réalité qui était présente.

Et je connaissais beaucoup Robert Brout et il était très intéressé, bien sûr, par cette interprétation, qui est de comprendre pourquoi, si vous voulez, lescombats exprérimentaux que les physiciens ont dû mener, parce que le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, il a été obtenu après des années et des années et des années de réflexion, sur la façon de donner des masses aux particules. Donc toutes les masses des particules proviennent en fait de ce mécanisme et de ce que vous trouvez dans ce modèle que nous avons développé qui explique qu'en fait, l'ingrédient principal qui fournit les mesures des masses et l'écart des angles, et ainsi de suite, des particules, sont en fait exactement dus à l'élément de longueur pour la structure finie. Ainsi, l'élément de longueur pour la structure finie contient exactement ces informations, ce qui signifie si vous le souhaitez que dans ce modèle, vous avez un mélange de continuum et de discret. Mais le discret contient l'information sur la masse et l'écart des angles du mélange.

Merci beaucoup pour votre temps et votre exposé.

Transcription d'une video d'Alain Connes au Collège de France, Colloque Langage et Pensée (octobre 2018) (Denise Vella-Chemla, 19.1.2019)

Voilà donc... merci. Alors, je vais essayer de détendre l'atmosphère, parce que... donc je vais rebondir sur l'introduction de Jean-Noël Robert, pour vous signaler une variante de «je pense donc je suis»qui je pense, si vous voulez, est en fait le meilleur graffiti que j'aie jamais vu, c'était dans les toilettes de Jussieu (rires) et y avait une pancarte qui mettait... si vous voulez, qui indiquait «Veuillez laisser ces toilettes aussi propres lorsque vous sortez que quand vous rentrez»et y avait un p'tit malin qui avait écrit en-dessous : «j'y pense donc j'essuie»(éclats de rires)... D'accord !... Donc je vais vous parler du langage mathématique et donc si vous voulez, mon exposé sera en fait à la fois une initiation au langage mathématique et en même temps, une réflexion sur le langage mathématique. Donc ce langage, le langage mathématique est un langage codé, c'est un langage codé au départ qui fait qu'il y a certaines habitudes. Par exemple, en mathématiques, si vous voulez, il est traditionnel d'appeler l'inconnue x. C'est ainsi que dans une école, un professeur avait posé l'exercice suivant : on donne un triangle, le triangle est un triangle équilatère et euh, bon ben, qu'est-c'qu'on sait ? On a le théorème de Pythagore : le théorème de Pythagore dit que le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des 2 côtés, donc il faut comprendre carré comme vraiment un carré, donc, ici, qu'est-ce qu'on écrit ? On écrit qu'on a 3 au carré, ça vaut 9, 4 au carré ça vaut 16, 9 plus 16, ça fait 25, donc on devine... la réponse. D'où si vous voulez l'embarras du professeur quand il a vu la réponse qui lui était donnée par un élève (éclats de rires). D'accord ? Donc évidemment, c'était... c'était une réponse imparable, hein, c'est imparable, le professeur peut pas dire «c'est faux»donc... alors, pour revenir aux choses sérieuses hein, parce qu'on va revenir aux choses sérieuses maintenant donc mon exposé sera divisé en 4 parties.

Dans la première partie, je vous donnerai des éléments de langage. Donc je vous parlerai de géométrie, de théorèmes, je vous expliquerai ce que c'est qu'un lemme, une démonstration, un contre-exemple, une conjecture, je vous parlerai d'algèbre et la grande difficulté de cette partie de l'exposé, ce sera de ne pas me laisser submerger par la démonstration, donc, parce que ce qui nous intéresse, c'est le langage, c'est pas, si vous voulez, le contenu sémantique, c'est le langage qui va nous intéresser donc... Et pourtant, je ne peux pas vous expliquer tout ça en abstrait, je suis obligé de vous l'expliquer sur un exemple parce que, je vais dire, on verra que c'est extrêmement important en fait d'avoir un support qui est un exemple précis.

Dans la deuxième partie, je vous parlerai d'un livre, qui est un livre de Hans Freudenthal qui est un mathématicien, voilà le livre, et c'est un mathématicien qui a compris qu'en fait, il y avait une particularité, une spécificité du langage mathématique, sur laquelle je ne reviendrai pas, qui est que c'est sans doute l'un des seuls langages qui ne soit pas entièrement auto-référentiel. Vous voyez, quand vous prenez un dictionnaire, le dictionnaire définit des mots par rapport à d'autres mots. Mais en mathématiques, justement, il est possible, et c'est ce qu'a fait Hans Freudenthal dans le Lincos, il est possible de construire la mathématique, de manière progressive, en partant si vous voulez de... une impulsion, deux impulsions, tout ça, ça va signifier les entiers, etc., etc. Et il a compris que, en fait, s'il y avait une possibilité de communiquer avec une intelligence extraterrestre, euh, eh bien, il faudrait construire entièrement la langue, c'est parce que là, il s'agit vraiment d'une langue, à partir des mathématiques. Et c'est ce qu'il a fait. Alors il y a des réflexions extrêmement intéressantes, mais ce que nous verrons, ce que nous verrons, qui est aussi tout à fait extraordinaire, c'est qu'en fait, l'univers communique avec nous, il communique en langage mathématique et je vous expliquerai sous quelle forme il communique avec nous.

Alors la troisième partie, ce sera, elle viendra du fait que le langage mathématique bien sûr évolue et, très graduellement le paradigme qui était au centre des mathématiques pendant... euh, jusqu'aux cinquante dernières années, qui était le paradigme des ensembles, a été remplacé, très progressivement pendant les cinquante dernières années, par un nouveau paradigme qui est le paradigme des catégories. Et ce remplacement en fait, au niveau du langage est extrêmement important et en fait, c'est grâce à ce remplacement qu'un concept extraordinaire est né dans les mains de Alexandre Grothendieck. Ce concept, c'est le concept de topos, et c'est un concept qui illustre à merveille le fait que justement les mathématiques ne sont pas du tout, euh, si vous voulez, euh, confinées à un langage, confinées à des calculs ou des choses comme ça. En fait, les mathématiques sont une usine qui fabrique des concepts nouveaux et pour vous montrer la richesse, la variété si vous voulez de ces concepts, le concept de topos est tellement... puissant qu'en fait, il donne des nuances sur la notion de vérité et on verra à la fin de mon exposé que le concept de topos permet par exemple de définir de manière parfaitement rigoureuse ce que c'est que d'être à trois pas de la vérité, à quatre pas de la vérité, etc. Donc c'est quelque chose d'extraordinaire parce que ça montre que le langage mathématique si vous voulez, et pas seulement les mathématiques mais le langage mathématique touche... en fait... a une portée philosophique qui est bien au-delà de ce qui est normalement admis dans le grand public. Le grand public confine les mathématiques à des calculs ou à des figures géométriques mais c'est très très loin d'être là. En fait, si vous voulez, la plupart des concepts vraiment importants ont une origine mathématique et ont une formulation mathématique précise.

Voilà, donc, voilà le plan, voilà le plan, donc ce que j'ai choisi de faire, comme je l'ai dit, c'est de partir d'un exemple concret. Alors, cet exemple concret, c'est un théorème, c'est un théorème qui a un peu été trouvé par hasard, par Franck Morley. Pourquoi il a été trouvé par hasard ? Il a été trouvé par hasard, il a été trouvé en 1899, Franck Morley ne se préoccupait pas de la question qu'on va voir, de l'énoncé qui est là. Euh, en fait, il cherchait un problème géométrique qui était beaucoup plus compliqué sur des cardioïdes, etc., mais en gros, il est tombé dans son cheminement, il est tombé sur un fait, qu'on va considérer comme un fait, et qui est un fait tout à fait frappant, tout à fait extraordinaire, qui dit la chose suivante : il dit que quand vous prenez un triangle, un triangle quelconque, le triangle est absolument quelconque ici, et ce que vous faites, c'est, vous divisez chacun des angles du triangle en trois parties égales, donc, c'est ce qu'on appelle les trissectrices des angles, et vous intersectez ces trissectrices 2 à 2. Ce que dit le fait, ce que dit le théorème de Morley si vous voulez, c'est que vous avez toujours un triangle équilatéral. Alors ça, c'est quelque chose d'extrêmement simple, d'extrêmement frappant, et la réaction d'un géomètre, c'est le doute. C'est-à-dire si vous êtes un géomètre et on vous énonce un énoncé pareil, eh bien, la première chose que vous avez à faire, c'est à douter. Donc vous doutez, vous dites : «Boah, je dis «ça peut pas être vrai !que je vais vous fabriquer un triangle qui ne va pas marcher. D'accord ?». Bon alors là, qu'est-c'qui va se mettre en route dans le cerveau, peut-être que Stanislas nous le dira de manière beaucoup plus précise, mais ce sont les aires visuelles, c'est-à-dire c'est le géomètre qui va se mettre en route, et qui va essayer, il va essayer de construire d'autres triangles et il va regarder ce qui se passe. Donc en fait, on va regarder simplement on va regarder, on va construire d'autres triangles, vous voyez. On construit un autre triangle, eh bien, ça a quand même l'air d'être vrai, quoi (petits rires).

D'accord ? Donc on continue, on continue comme ça, alors vous voyez ce que je suis en train de faire là, je suis en train de faire sur le triangle une opération extrêmement bizarre, je suis en train de descendre le sommet qui est là sans bouger le sommet qui est là, et normalement quand on fait ça, c'est une transformation affine donc ça ne préserve pas du tout les longueurs donc c'est très étonnant que malgré ça, le triangle reste équilatéral au milieu. Donc on continue comme ça, on continue, on cherche toutes sortes d'exemples, on cherche à aplatir le triangle, à le..., on fait la même opération, eh bien, ça a l'air de toujours marcher. Donc au bout d'un moment, au bout d'un moment, quand on a fait ça suffisamment de fois, ben, le doute commence à se dissiper, et là, il faut qu'on se mette en route parce qu'il ne suffit pas d'avoir pris des exemples, bien sûr, des exemples n'ont jamais démontré un théorème, donc le doute a commencé à se dissiper et on va partir, on va se mettre en route, on va se mettre en route pour la démonstration. Et alors, dans une démonstration en général, la démonstration est précédée par des étapes, ces étapes s'appellent des lemmes, d'accord ? Alors c'est pas un hasard si le nom de lemme a été utilisé lorsqu'en fait les astronautes sont allés sur la lune, ils ont employé le terme de lemme, hein, et c'est exactement dans le même sens, c'est-à-dire que le lemme, c'est pas euh, si vous voulez le résultat, mais c'est ce qui vous permet d'avancer et d'aller vers le résultat. Donc dans le langage mathématique, le lemme a un sens extrêmement précis : en général, l'énoncé du lemme en soi n'est pas suffisamment, comment dire, euh, convaincant, pour que ça fasse un théorème, c'est juste un petit résultat qui permet d'avancer, c'est pas vraiment un théorème, d'accord ? Alors là, on va voir un premier lemme et on va voir comment, justement, ce lemme va nous permettre de mieux illustrer, de mieux, si vous voulez, initier au langage mathématique. Donc que dit le lemme ?

Le lemme dit la chose suivante : il ne faut pas que je me perde dans la démonstration donc je vais aller très vite, il dit que si vous regardez les rotations, par rapport aux sommets, donc le centre de la rotation, c'est le sommet, mais les angles sont doubles, et vous faites ce produit, vous faites le produit $R_A.R_B.R_C$. Alors vous allez voir, là, il y a une particularité du langage mathématique, c'est que quand on fait le produit, eh bien, on commence par appliquer R_C. Alors ça vous paraîtra bizarre mais ça vient du fait de la notation dans le langage mathématique, du fait que quand on prend une fonction de x, par exemple $\sin x$, le x apparaît après, donc c'est à cause de ça que, quand on va appliquer $R_A.R_B.R_C$, on va appliquer d'abord R_C puis R_B puis R_A. Bon. Alors, donc, que dit le lemme, le petit lemme ? Il dit que si je fais le produit de ces 3 rotations, j'obtiens ce qu'on appelle la transformation identique. Alors maintenant, ce qui est absolument étonnant, c'est que maintenant on va voir que, on va agir. Au départ, si vous voulez, il y avait un théorème, il y avait un fait, on était exposé à ce fait, mais maintenant on va commencer à agir, pour faire la preuve de ce lemme. Comment est-ce qu'on agit ? Eh bien, c'est ce qu'on appelle un groupe qui agit sur un ensemble. Mais qu'est-ce que ça veut dire ici ? Qu'est-ce que ça veut dire ici ? Ca veut dire quelque chose d'incroyablement simple, ça veut dire que contrairement au langage courant, lorsqu'on va faire la démonstration de ce fait que le produit des 3 rotations R_A, R_B, R_C vaut l'identité, eh bien, on va avoir seulement une toute petite opération à faire, qui est l'opération qui consiste à jouer avec les parenthèses. Alors vous voyez le groupe qui va être en action ici, il va contenir les rotations, mais ça va être en fait le groupe des transformations du plan qui préserve les longueurs. Et alors, la chose essentielle, c'est qu'en fait si vous prenez la rotation autour du point B qui est ici, eh bien en fait, on peut la décomposer en deux choses : la symétrie autour de 1, puis la symétrie autour de 3. Vous voyez, si vous faites la symétrie autour de 1, par exemple, si je prends le point qui est ici, et la symétrie autour de 3, ça va bien tourner de l'angle double, qui est là. Et ça, ça marche en général. Donc qu'est-ce qu'il en résulte ?

Pourquoi la démonstration est aussi simple ? Eh bien, parce que le R_B qui est là, je peux, comme je vous l'ai montré, je peux l'écrire comme $s_3 s_1$. Les autres, c'est $s_1 s_2$ et $s_2 s_3$. Et maintenant je peux jouer avec les parenthèses. C'est pas du tout pareil que dans le langage courant, bien sûr. Donc le rôle des parenthèses n'est pas du tout le même. Dans un groupe, on peut se débrouiller avec les parenthèses comme on veut, on peut faire un jeu de parenthèses, et avec ce jeu de parenthèses, on obtient immédiatement le résultat puisque vous voyez, maintenant, je vais remplacer ce produit-là par un produit où s_3, s_3 seront contigues, s_1, s_1 seront contigues mais comme s_3 était une symétrie par rapport à une droite, $s_3 s_3$, ça vaut 1, $s_1 s_1$ ça vaut 1, il ne reste que $s_2 s_2$ et $s_2 s_2$, ça vaut 1. Donc on a fini, d'accord ? Donc voilà la démonstration.

Donc vous voyez le rôle du langage, le rôle de l'écriture, là, dans la démonstration. Alors un autre petit lemme, d'accord, mais qui va vous montrer comment le même type d'action est absolument crucial dans ce type si vous voulez de démonstration, c'est un lemme qui va aussi nous faire beaucoup avancer, et qui est le suivant, et qui dit comment on va trouver les 3 sommets du triangle de Morley, par exemple, le point P qui est ici qui est à l'intersection de ces 2 trissectrices. Eh bien, que dit le lemme ? On aura ces 2 petits lemmes. Que dit le lemme ? Il dit simplement que le sommet P du triangle de Morley, c'est simplement le point fixe de la même chose que tout à l'heure, mais j'ai mis des puissances 1/3. Le fait d'avoir mis des puissances 1/3, ça veut dire que l'angle par lequel je bouge va être le tiers, le tiers du double de l'angle en C. Eh bien, c'est exactement l'angle qui est ici. Que fait le point P ? Voilà l'action maintenant, voilà, maintenant on va être en action. Eh bien, si on fait ${R_C}^{1/3}$, on transforme P en P'. Et puis si on fait ${R_B}^{1/3}$, après, ben, on ramène P' en P. Donc on a bien le point fixe. Alors maintenant, on commence à contrôler les choses. On commence par contrôler les choses parce qu'on a 3 symboles, R_A, R_B, R_C, et on contrôle les sommets du triangle de Morley grâce à ces 3 choses, d'accord ?. Mais on est bien loin d'avoir fini et quand on est dans cette situation-là, maintenant, qu'est-ce qu'on voit ? Eh bien, avec un peu de réflexion, on s'aperçoit que les deux lemmes que je vous ai expliqués, les deux lemmes que je vous ai expliqués, en fait, ce sont des lemmes vraiment géométriques, c'est-à-dire ce sont des lemmes qui vont être encore vrais en géométrie non-euclidienne.

Qu'est-ce que c'est que la géométrie non-euclidienne ? Ca peut vous paraître très compliqué, mais en fait, en général, si un résultat est vrai en géométrie non-euclidienne, il va être vrai pour la géométrie sphérique. Qu'est-ce que c'est que la géométrie sphérique, eh bien, c'est la géométrie de la Terre, si vous voulez, mais rendue parfaite, une sphère parfaite, et dans laquelle les droites sont les grands cercles. Alors, la conjecture qu'on peut faire à ce moment-là, ben, on peut se dire «ben, peut-être que le théorème de Morley est vrai pour la géométrie sphérique.»Alors, c'est pareil, on va faire appel à nos aires visuelles cette fois, et ça va être plus difficile, parce que maintenant, on ne peut plus prendre une droite, je veux dire on ne peut plus dessiner sur une feuille de papier, il faut vous montrer une figure qui est plus complexe. Donc voilà ce qu'on fait, on essaye, on fait comme tout-à-l'heure, on regarde, Ah, ça a quand-même l'air d'être vrai, hein ? !Vous voyez ? J'ai pris un triangle extrêmement particulier, un type de triangle extrêmement particulier, j'ai pris un triangle qui avait un sommet au pôle Nord et dont la base était sur l'équateur. C'est un triangle très particulier parce qu'il a 2 angles droits, cet angle-là est droit, cet angle-là est droit et la somme des angles évidemment ne vaut pas π. Donc vous voyez, on essaye, on essaye, on regarde, on regarde, ben, ça a l'air quand-même tout à fait vrai, hein, je veux dire, c'est vraiment extrêmement étonnant, vraiment extrêmement étonnant, donc on fait appel à nos aires visuelles, etc., on essaye, et puis là, alors là, on peut poser la question à l'ordinateur.

Donc là, on va... on se pose vraiment la question «est-ce que c'est vrai ?Est-ce que c'est vrai ?», on parle à l'ordinateur, on parle à l'ordinateur, Gérard en parlera de manière beaucoup plus précise que moi, on communique avec l'ordinateur, ce n'est pas très difficile pour la géométrie sphérique, c'est très

très simple, à vrai dire, la géométrie sphérique est même plus simple que la géométrie ordinaire, donc on parle à l'ordinateur, on lui pose la question, et au bout d'un moment, l'ordinateur nous dit «non, c'est pas vrai !». Incroyable ! L'ordinateur calcule la différence entre la longueur du côté qui est là, puisque le triangle est isocèle par définition, donc ces deux longueurs sont égales, mais cette longueur n'est pas a priori la même. Si elle était la même, ce serait un triangle équilatère, équilatère, ça veut dire qu'il y a les 3 côtés qui ont la même longueur, donc en fait, on regarde et incroyable ! Voilà la courbe de toutes, toutes les différences. Au départ, cette différence, c'est presque 0, mais vous voyez, c'est 0 à 4 décimales près. Donc ça veut dire que si on se fiait à notre vue, on aurait cru que le théorème était vrai, d'accord ?, en fait, il n'est pas vrai. Il n'est pas vrai, c'est ce qu'on appelle un contre-exemple, on a fait une conjecture, on a un contre-exemple à cette conjecture, et maintenant qu'est-ce qui se produit ? Du fait qu'on a un contre-exemple à la conjecture, ça nous oblige à changer complètement de stratégie pour la démonstration. Pourquoi ?

Parce que si la conjecture avait été vraie, si le théorème avait été vrai en géométrie non-euclidienne, la preuve aurait été entièrement géométrique. Le fait que le théorème soit faux en géométrie non-euclidienne nous dit qu'il va maintenant y avoir un changement de décor total et ce changement de décor total, ça va être le passage à l'algèbre. L'algèbre est née d'un... comment dire ? est née d'une hérésie. L'algèbre est née d'une hérésie il y a très très longtemps, longtemps avant Jésus-Christ, les hérétiques ont fait la chose suivante : ils ont rajouté des longueurs avec des surfaces... et puis des surfaces avec des volumes. C'est complètement fou ! Vous voyez quand au départ, je vous parlais de ce petit triangle de l'élève, quand on écrit la règle de Pythagore, je vous disais «le carré d'un côté est égal à la somme des carrés...», ça, les dimensions sont préservées, parce qu'on rajoute entre elles des surfaces, on rajoute entre elles des carrées, mais il y a un mathématicien très ancien, très ancien, qui a eu l'idée de poser un problème, je crois que c'était chez les Babyloniens, dans lequel il posait une relation entre la surface et la longueur, c'est incroyable, donc, à ce moment-là, l'algèbre est née. Donc elle est née de cette hérésie, qui était de rajouter entre elles des quantités qui n'ont absolument pas la même dimension, que jamais un physicien ne ferait bien-sûr, hein, qui est d'ajouter des longueurs, des surfaces et desvolumes. Et alors donc, maintenant donc, voilà la démonstration. Que dit la démonstration ? Elle dit que maintenant le théorème de Morley n'a rien à voir avec un énoncé géométrique pour la géométrie non-euclidienne, il a à voir avec un énoncé d'algèbre, un énoncé d'algèbre qui est tellement explicite que l'on peut le donner à faire à un ordinateur. Quand, si vous voulez, une différence fondamentale, entre le théorème de Morley au départ et l'énoncé qui est ici, peut importe l'énoncé, j'ai dit que je ne voulais pas me perdre dans les détails techniques, etc., quelle est la différence fondamentale ? La différence fondamentale, c'est que quand on est devant un problème géométrique, on peut sécher, on peut sécher indéfiniment. Quand on est devant un problème d'algèbre comme celui-là, non seulement on n'a pas le droit de sécher parce qu'on doit faire le calcul, mais on peut déléguer le problème à l'ordinateur, c'est ce qu'on appelle le calcul formel, et ce calcul formel est tellement puissant si vous voulez, qu'en fait, il peut faire des calculs infiniment plus compliqués que celui-là, je me souviens d'avoir une fois, il y a très longtemps, au début des années 2000, délégué un calcul à l'ordinateur qui a pris toute une nuit, je voulais démontrer qu'un certain produit était associatif, et bon ben, le lendemain matin, l'ordinateur avait fait le calcul, donc c'est absolument phénoménal la puissance qu'il y a pour faire des calculs extrêmement compliqués. Donc, lorsqu'on a fait ça, si vous voulez, on peut se dire : «Bon, d'accord, on a donné une démonstration du théorème de Morley, donc si vous voulez, on est arrivé. Le lemme est arrivé sur la lune, d'accord ? Le lemme est arrivé sur la lune, d'accord ?. C'était le troisième lemme».

Mais... maintenant, quelle est la différence ? Il y a une différence qui est absolument cruciale, la différence qui est cruciale, c'est le pouvoir génératif du langage mathématique. Parce que maintenant, une fois qu'on a formulé le résultat sous la forme du lemme, le dernier, le dernier lemme, qui est purement algébrique, eh bien, le théorème de Morley a un sens sur n'importe quel corps... Bien sûr, je ne vous ai pas dit qu'il y avait un secret derrière le lemme que j'ai donné ici, qui était que ce lemme, on l'applique à un corps, ce qu'on appelle un corps qui est le corps des nombres complexes. Le corps des nombres complexes, c'est un miracle, c'est le fait qu'on peut, vous avez l'habitude des nombres rationnels, par exemple, que vous pouvez ajouter, multiplier, etc.. On a l'habitude des nombres réels, eh bien, il y a une extension des nombres réels, qui est merveilleuse, et qui fait qu'il suffit en fait de rajouter une racine d'une équation qui est l'équation $x^2 + 1 = 0$ pour qu'on puisse résoudre toutes les autres équations. C'est ce qu'on appelle le corps des nombres complexes, et ce corps des nombres complexes, bon, on l'apprenait en... je crois qu'on l'apprenait en seconde, moi, je l'avais appris en seconde, en physique, pour faire de l'électromagnétisme, et en fait, ce qui est extraordinaire dans le corps des complexes, c'est qu'un triangle équilatère est caractérisé par la propriété que 3 points forment les sommets d'un triangle équilatère si et seulement si $a+jb+j^2c = 0$

où j est une racine cubique de l'unité. Alors maintenant, ce qui est merveilleux, c'est qu'on a un théorème de Morley pour n'importe quel corps qui contient une racine cubique de l'unité. Alors, ces corps abondent, par exemple, vous pouvez prendre les entiers modulo 7, les entiers modulo 13 ou les entiers modulo 31, ce sont des corps, c'est ce qu'on appelle des corps de Galois, et ils ont tous une racine cubique de l'unité, donc il y a tous, pour eux, un théorème de Morley que jamais, on aurait pu imaginer, si on n'avait pas eu ce cheminement, à travers la géométrie et l'algèbre, qui nous a conduit ici. D'accord ?. Donc, voilà où on en est, voilà où on en est. Euh alors maintenant, oui, bien sûr, il faut que je vous dise, oui, quand-même, qu'il y a, dans le langage mathématique, un usage constant des mots du langage ordinaire. Euh, on utilise, dans le langage mathématique, des mots du langage ordinaire, et il y a une phrase assez provocante, qui est faite à travers les mots du langage ordinaire, et qui s'appelle «désintégration des mesures atomiques sur les espaces nucléaires». Alors, si vous voulez, cette phrase est d'autant plus ironique que l'inventeur de la dénomination d'espace nucléaire, d'abord, elle est ironique parce qu'un mathématicien qui connaît le sens de ces mots vous dira «c'est une trivialité.». Alors trivialité, c'est usité, c'est un espèce de jargon mathématique, qui est pour quelque chose qui, boh, qui est vrai, mais qui est sans intérêt, d'accord ? Donc... Mais ce qui est vraiment ironique dans cette phrase que je vous ai donnée, c'est que l'inventeur, l'inventeur de la notion d'espace nucléaire est un mathématicien formidable, très connu, Alexandre Grothendieck, mais qui a passé une majeure partie de sa vie à être un militant anti-nucléaire. (rires) Donc, alors, il est... il y a toujours, il avait un don absolument extraordinaire pour trouver la bonne terminologie. Alors, donc, j'en viens maintenant au Lycos, donc, euh, je ne vais pas paraphraser ce que dit Hans Freudenthal, son livre est extrêmement précis, etc., il a écrit une introduction que je vous recommande de lire, dans laquelle il fait des réflexions sur le langage mathématique et sur le langage en général et il explique un point, qui est un point délicat, qui est un point qui n'est pas du tout évident, qui est que en mathématique, on utilise des variables, bon je vous ai parlé de x tout à l'heure, et c'est un peu la même chose lorsqu'on parle du langage courant. Mais, en mathématique, les variables ont un sens précis, et en plus, par exemple, il y a une notion d'objet générique, c'est-à-dire en mathématiques, on peut parler par exemple d'un triangle générique, etc., il y a ce qu'on appelle un point générique, lorsqu'on parle d'un ensemble mathématique. Et alors, ce qui est vraiment étonnant, c'est que si.... Donc... Hans Freudenthal discute en grand détail de ce qui se passe dans le langage ordinaire, et le fait que dans le langage ordinaire, bien sûr, il y a des variables : par exemple, on dit une porte, on dit une chèvre. Vous allez voir que je ne prends pas l'exemple de la chèvre au hasard.

Bon, mais alors bien sûr, si on se posait la question, ce serait extrêmement difficile de décrire, euh, une porte générique, ou de décrire une chèvre générique. Seul un artiste génial y est arrivé pour la chèvre, et je suppose que vous connaissez l'œuvre en question, hein, c'est ce qu'on appelle, c'est la chèvre de Picasso, et elle a cette propriété, cette chèvre, cette incarnation de la chèvre a cette propriété extraordinaire, comment dire, qu'elle abstrait les propriétés de la chèvre, de manière concrète, par une œuvre artisitique. Alors, bien sûr, en mathématiques, tout ça, ça a un sens précis, ça a un sens beaucoup plus précis, et euh, bon... pour en revenir à la communication avec une intelligence extraterrestre, on a essayé, on a essayé, on a essayé de communiquer avec une possible intelligence extraterrestre, en envoyant la sonde, par exemple, en envoyant la sonde Pioneer dans l'espace, et sur cette sonde, on a donné un certain nombre de renseignements, ben, par exemple, on a donné le Soleil, enfin, on a donné la position des planètes, etc., etc., mais, bon, est-ce que... est-ce que dans ce qu'on a donné dans cette sonde, on a donné aux aliens la possibilité de nous répondre ? Je prétends qu'il y a une autre manière de faire, ç'aurait été de leur envoyer un petit triangle de Morley (éclats de rires), d'accord ?... Et imaginez qu'ils nous répondent comme ça... Ben voilà, là, on saurait que... non seulement, ils nous ont compris, mais que ce sont des gens intelligents, etc., etc. Alors en fait, bon, en fait, ce moyen de communication dont je vous parle n'est pas très pratique parce que ça veut dire qu'il aurait fallu qu'ils reçoivent la sonde en tant qu'objet physique, et qu'ils nous la renvoient en tant qu'objet physique. C'est pas comme ça qu'on communique dans l'Univers. On sait bien que l'Univers est écrit en langage mathématique, mais de quelle manière l'Univers communique-t-il avec nous, en langage mathématique ? Alors là, vous allez être vraiment surpris, parce que la manière dont il communique avec nous, on va voir, c'est... vous savez, on a beaucoup cherché... on a beaucoup cherché à... comment dire... à étiqueter, étiqueter les objets, etc. Et en cherchant à étiqueter les objets, on est tombé graduellement sur la bonne idée. Et la bonne idée de l'étiquetage des objets, c'est ce qu'on appelle les codes-barres. Ce que je vais vous expliquer maintenant, c'est que l'Univers communique avec nous par des codes-barres. Et qu'en plus, ces codes-barres, ce sont des objets mathématiques. Et je vais vous raconter ça, je ne sais pas combien de temps il me reste, bon, mais je vais... Et il faut que je vous parle des topos aussi. Donc... je vais vous raconter ça. Pourquoi ? Parce que ce qui est incroyable, c'est comment ça a été découvert. D'abord, ça a été découvert en physique. En physique, il y a un opticien allemand, qui s'appelle Fraunhofer et qui a eu l'idée absolument géniale, de regarder la lumière du soleil, l'arc-en-ciel qui nous vient du soleil quand on fait passer la lumière du soleil à travers un prisme, de la regarder avec un microscope. Et il s'est aperçu qu'il y avait des raies noires. Il y avait un certain nombre de raies noires. Alors au début, il a dû penser que son objectif était sale, etc. Puis, bon... Et finalement, au cours de son existence, il a trouvé 500 raies noires. Ensuite, il y a eu des physiciens, je crois que c'étaient Bunsen et... qui ont réussi en chauffant des corps comme le sodium à obtenir des raies qui cette fois étaient des raies brillantes, et pas des raies noires, sur un fond noir, et qui correspondaient aux raies du spectre de Fraunhofer, qui venaient du soleil. Et ils se sont aperçus, si vous voulez, que chaque élément chimique, avait un code-barre. Donc chaque élément chimique, par exemple l'hydrogène, etc., avait un code-barre. Sauf que... il y avait un code-barre qu'ils n'arrivaient pas à trouver sur la Terre. Il y avait un code-barre qui manquait sur la Terre. Et alors, en bons physiciens, ils lui ont donné un nom, ils l'ont appelé l'hélium.

Ils ont dit «il y a un corps chimique, qui n'est pas présent sur la Terre, qui est dans l'héliosphèreet qui s'appelle l'hélium.». Miracle ! Il y a eu une éruption du Vésuve. On a fait la spectrographie des laves du Vésuve et on a trouvé l'hélium dedans. Donc ça, c'est extraordinaire ! Qu'est-ce que ça veut dire ? C'était la première étape. C'était la première étape des codes-barres dans la physique. La deuxième étape qui est absolument sidérante, c'est au niveau de la mécanique quantique, c'est Schrödinger, quand il a eu l'idée de son équation, il a eu l'idée si vous voulez, qu'il avait un opérateur et cet opérateur, en fait, c'est ce qu'on appelle des spectres bien sûr. Donc il est allé voir des mathématiciens et il leur a demandé «Qu'est-ce que c'est un spectre en mathématiques ?». Alors ses amis lui ont dit : «Eh bien, va voir Hermann Weyl, et il te dira tout de suite ce que c'est.». Et Schrödinger a dit : «Surtout pas, il calculerait le spectre avant moi.». Donc, ce qu'a fait Schrödinger qui était extraordinaire, c'est qu'il a donné le coup d'envoi au fait que tous ces spectres, tous ces codes-barres qui nous viennent de l'Univers, en fait, ils ont une raison d'être mathématique, en fait, ce sont des êtres mathématiques. Ce sont les spectres d'opérateurs dans un espace de Hilbert.

Et lorsqu'on les voit, ils semblent très compliqués, mais l'opérateur lui, est beaucoup plus simple. Et c'est l'opérateur qui nous donne la clef, par exemple, la clef qui permet de comprendre le tableau de Mendeleiev. Donc, en fait... l'Univers nous parle, il nous parle, mais il nous parle sous forme spectrale, il nous parle en nous envoyant des codes-barres, ces codes-barres sont décalés vers le rouge, c'est ça qui nous a permis de comprendre l'expansion de l'Univers, etc. Mais vous voyez le rôle phénoménal, là, de l'écriture. Là, je ne parle pas du langage mathématique, je parle de l'écriture. Donc, l'Univers nous envoie des renseignements sous forme d'écriture, et d'écriture spectrale. Alors maintenant, j'en viens à l'évolution du langage mathématique, d'accord ?. Donc le langage mathématique a évolué bien sûr. Il a évolué au cours des 50 dernières années, et il a évolué de manière qui sera assez difficile à faire passer dans l'enseignement. La raison pour laquelle je pense que ce sera assez difficile à passer dans l'enseignement, c'était ce qui s'était passé lorsque Lichnerowicz avait promulgué l'enseignement de la théorie des ensembles, dans les classes secondaires, même au collège. Et je me souviens d'un exercice que j'avais vu, je veux dire j'avais été témoin d'un exercice. L'exercice est le suivant : on prend 3 ensembles A, B, C. On trace des diagrammes de Venn, d'accord, (rires), et le sujet de l'exercice était : on suppose $A \cap B = C$ et le sujet de l'exercice, c'était «Hachurez l'ensemble vide.». Donc, il y avait un seul élève qui avait trouvé, et il a mis «J'ai pas pu, il est vide.». (rires). D'accord, donc, il est clair qu'on va avoir des problèmes pour les catégories, bon, les catégories, c'est déjà le niveau au-dessus de la théorie des ensembles. Mais comme je le disais dans mon introduction, les catégories ont permis, elles ont permis justement, grâce à leur souplesse par rapport à la théorie des ensembles d'inventer un langage, si vous voulez, de développer un langage, qui a été, euh, comment dire, qui a été formulé, euh, initié etc. par Alexandre Grothendieck et qui est la notion de topos.

Alors la notion de topos, c'est bien que je vous en donne simplement une idée. Et cette idée, c'est que, au lieu de vous concentrer sur un espace, comme l'espace de tout à l'heure, la sphère, ou un truc comme ça, au lieu que ce soit l'espace que je vous montre, qui est au-devant de la scène, l'espace va jouer un rôle complètement différent. L'espace va disparaître, va être derrière la scène, mais il va jouer le rôle d'un Deus ex machina, c'est-à-dire qu'en fait, on va faire de la théorie des ensembles comme on fait d'habitude, mais l'espace en question va servir de paramètre. C'est-à-dire que l'espace en question ne va jamais être au-devant de la scène, il va être derrière, et alors, ce dont on s'aperçoit lorsqu'on fait ça, c'est que toutes les propriétés de la théorie des ensembles, qui sont des propriétés ordinaires, par exemple la démonstration que je vous ai donnée du théorème de Morley, vont continuer à avoir lieu, pourvu que vous n'ayez jamais utilisé le raisonnement par l'absurde, pourvu que vous n'ayez jamais utilisé la règle du tiers exclus. Tous ces raisonnements-là vont continuer à marcher, c'est extraordinaire parce que ça vous donne des raisonnements qui vont marcher avec paramètre, qui vont marcher avec cet aléa, si vous voulez.

Le topos introduit un aléa, d'accord ?. Et alors maintenant, ce qui est incroyable, c'est que, de ce seul fait, la notion de vérité va devenir plus subtile. Et au lieu d'avoir seulement le vrai ou le faux, qui nous permettaient de raisonner par l'absurde, on va avoir une notion de vérité qui va être beaucoup plus nuancée, beaucoup plus subtile, que la notion ordinaire, on va continuer à travailler comme si on travaillait dans la théorie des ensembles, et ce qui me semble probable, c'est que graduellement, cette notion va nous permettre de formaliser des situations dans lesquelles de dire celui-là a raison, celui-là a tort est complètement naïf, vous voyez quand par exemple, vous voyez une discussion à la télévision ou un truc comme ça et où la notion de vérité va devenir beaucoup plus intéressante et beaucoup plus subtile, et adaptée à une situation donnée. Alors ça, ça a été fait par Grothendieck, donc, il y a la notion de vérité dans un topos, et il y a comme je vous le disais la possibilité d'avoir des nuances. Alors je terminerai en vous montrant une phrase, euh, pardon, un texte, une page de texte de langage mathématique, mais pour vous montrer la richesse, la variété du langage mathématique, dans toute sa splendeur, cette page de texte, c'est sans doute la dernière lettre que Grothendieck a écrite à un mathématicien et il est question de... il est question de paradis originel, d'algèbre topologique, de sempiternelle catégorie semi-simpliciale, de l'œil du géomètre, de faisceaux d'ensembles, d'avoir senti, etc., des topos catégoriques, etc. Donc vous voyez l'immense richesse du langage mathématique, et à quel point, justement, la portée philosophique de ce langage est quelque chose qui est souvent ignoré, mais qui est d'une puissance incomparable. Voilà, donc, je vais terminer là-dessus, merci.

Les mathématiques
et la pensée en mouvement

Alain Connes [1]

Le but de mon exposé, c'est de vous faire sentir deux choses : la première, c'est que je vais vous raconter un certain nombre d'histoires, sur des mathématiciens, et la deuxième, c'est de vous faire comprendre que les mathématiques sont une fabrique de concepts, mais de concepts absolument fondamentaux et de concepts qui ont trait, si vous voulez, à la vie, et qui ne sont pas du tout confinés a des calculs avec des nombres, ou des choses comme ça ; on a trop souvent l'impression que le mathématicien est quelqu'un qui fait des calculs ; bien sûr, ça lui arrive de faire des calculs, mais ce que je vais essayer de vous faire comprendre, justement, dans cet exposé, c'est à quel point justement, la technique mathématique débouche de temps en temps sur des concepts fondamentaux, sur des idées fondamentales, et ce sont des idées qu'on peut expliquer simplement et qui ont trait à la vie, c'est-à-dire si vous voulez, elles sont aussi importantes, je pense, pour des gens qui font des sciences humaines que pour des gens qui vont faire des sciences dures. Voilà, donc, il y aura une galerie de portraits. On va commencer par Galois.

Et si vous voulez, Galois, c'est le prototype du mathématicien qui a eu une vie absolument incroyable : il est né en 1811, et il avait 17 ans lorsqu'il a fait ses choses les plus importantes. Et ce qui s'est produit donc, il y a eu une succession d'incompréhensions, en fait. Si vous voulez, en 1829, Abel meurt. Et en gros, c'est Galois qui reprend le flambeau des idées d'Abel. Mais en fait, je me suis bien renseigné avec des spécialistes d'Abel. Abel était venu à Paris, mais il est absolument impossible qu'il ait rencontré Galois : Galois était trop jeune quand Abel est venu à Paris ; j'avais toujours imaginé qu'ils s'étaient rencontrés dans un café parisien, qu'ils avaient discuté tous les deux. Apparemment, ce n'est pas possible. Donc quand il avait 17 ans, Cauchy qui était un académicien, avait déjà fait en 1829, deux exposés sur les travaux de Galois, à l'Académie, au mois de mai et au mois de juin. Ca, c'était donc

1. Conférence du CPES (Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures), PSL (Paris Sciences et Lettres), le 12 novembre 2015.
Transcription de la conférence par Denise Vella-Chemla (31.1.2019).

en 1829. Et au mois de juillet 1829, le père de Galois se suicide parce qu'il avait été la victime d'une campagne de calomnie, qui avait été faite contre lui, et en plus, Galois échoue pour la deuxième fois à l'école polytechnique. Donc c'était la deuxième fois qu'il se présentait à l'école polytechnique. A l'époque, l'école polytechnique était au top des grandes écoles, donc c'est la deuxième fois qu'il échoue. C'est là qu'il y a eu la scène apparemment où il a balancé le chiffon à la tête de l'examinateur de mathématiques, parce que l'examinateur ne comprenait pas les explications de Galois sur le logarithme.

Mais heureusement, Galois est reçu à l'école normale. Et en janvier 1830, il y a une lettre de Cauchy à l'Académie qui dit qu'il va parler sur Galois. Ce serait donc pour la troisième fois, et puis finalement Cauchy renonce, et je pense, enfin on pense, et les historiens pensent, si vous voulez, qu'il s'était mis d'accord avec Galois parce qu'il y avait un Grand Prix de l'Académie qui devait être donné en 1830 et Cauchy avait convaincu Galois de réécrire son article, de réécrire ses articles et de se présenter pour ce grand prix. Alors là, ce qui s'est passé, c'était absolument dramatique parce que l'académicien qui devait rapporter sur l'article de Galois, c'était Joseph Fourier. C'est un très très grand mathématicien et Fourier apparemment, il était en haut de ses escaliers chez lui, il s'est pris les pieds dans sa robe de chambre et il a dégringolé l'escalier, il est mort. Donc, gros problème, gros problème, et si vous voulez, il y a eu un tel désordre à ce moment-là, que le manuscrit de Galois a été perdu. Alors, non seulement Galois n'a pas eu le prix, qu'il aurait peut-être mérité, le prix a été donné à Jacobi et Abel, bien sûr deux mathématiciens immenses. Jacobi était un mathématicien allemand, Abel était mort, il était mort en 1829, le prix a été donné à Abel à titre posthume.

Mais si vous voulez, Galois ne pouvait pas se plaindre de ne pas avoir eu son grand prix ; par contre, il pouvait se plaindre, à l'époque, il n'y avait pas de photocopieuse. Donc il avait écrit son manuscrit ; à l'époque, vous écriviez le manuscrit et puis c'était fini. Il l'avait donné à l'Académie mais manuscrit perdu. Donc il s'était plaint à plusieurs reprises à l'Académie, mais manuscrit perdu. Et donc en 1830, le grand prix a été donné en juin 1830 et en juillet 1830, c'est les Trois Glorieuses. C'est Les Trois Glorieuses, et Galois a été à l'école normale et là, il râlait parce que, à l'école normale, les élèves étaient confinés, ils ne pouvaient pas aller sur les barricades. Par contre, les élèves de l'école polytechnique, eux, ils pouvaient, donc alors là, Galois a commencé à vraiment se révolter. C'est très très bizarre, si vous voulez, bon, il avait à peine 18 ans. Donc il a commencé à se révolter et il s'est révolté contre le directeur de l'école normale. Et après l'été, donc, il a commencé à militer plus ou moins, et de fil en aiguille, il a réussi à se faire renvoyer de l'école Normale. Donc, il a été renvoyé de l'école Normale en janvier 1831, et il y a quelque chose d'incroyablement ironique, qui est que Galois était à la rue, si vous voulez, il n'avait plus de salaire parce qu'à l'époque, à l'époque et c'est encore le cas maintenant, les élèves de l'école Normale recevaient un petit salaire. Donc il était à la rue et alors pour gagner un peu d'argent, il avait créé un cours d'algèbre, cours d'algèbre qui réunissait un certain nombre de gens qui venaient l'écouter parce que c'était un magnifique mathématicien malgré son très jeune âge. Et l'ironie totale, c'est que son cours d'algèbre, il le donnait dans la rue qui maintenant, c'est une rue attenante à la Sorbonne, qui s'appelle la rue Victor Cousin. Pourquoi est-ce que c'est ironique ? C'est ironique parce que la personne qui a signé le renvoi de l'école Normale de Galois s'appelle Victor Cousin. Alors il y a quelques années, pour les 200 ans de la naissance de Galois, j'ai eu à donner l'exposé à l'Académie des Sciences sur Galois. Et à ce moment-là, j'ai voulu que tout le monde se mettent d'accord pour rebaptiser la rue Victor Cousin en rue Galois. Bon, ça n'a pas été possible, mais il faudrait quand même, c'est incroyable.

Donc voilà ce qui s'est passé. Alors après, donc, il faut bien dire que Galois, il est mort à 20 ans. Et les deux dernières années de sa vie, il n'a pas beaucoup fait de maths. C'est incroyable, c'est absolument incroyable. Et ce qui s'est produit, c'est qu'une fois qu'il a été renvoyé de l'école normale, il y avait quand même un autre académicien qui lui voulait du bien, il s'appelait Poisson. Et en mathématiques, il y a une formule bien connue qu'on appelle la formule de Poisson. Et si vous voulez, Poisson l'avait convaincu de réécrire son manuscrit et de le présenter à l'Académie. Donc Galois s'était exécuté. Il avait réécrit son manuscrit. Il avait travaillé, etc. Et entre temps, bien sûr, après Les Trois Glorieuses, tout le monde commençait à être extrêmement déçu par le nouveau pouvoir. Et Galois faisait partie de ces gens-là. Donc la première chose qu'il a faite, c'est pas très, pas très malin, enfin bon. Il était dans un banquet qui fêtait la libération d'opposants au pouvoir. Et alors, il était dans ce banquet, et il avait levé son verre à Louis-Philippe. Alors, tous les gens se disaient "il est complètement fou !" : il était dans un banquet contre Louis-Philippe et il levait son verre à Louis-Philippe. Et dans la main, il avait un couteau. D'abord, les gens n'avaient pas compris pourquoi il levait son verre à Louis-Philippe ; secundo, il y avait un espion qui était là et qui avait vu qu'il avait un couteau à la main. Il avait été arrêté, ça c'était au mois de mai 1831, il avait été arrêté, et il avait été jugé assez vite. Il avait été jugé par un jury populaire. Mais comme il avait été jugé par un jury populaire, les gens avaient vu qu'il était un peu bizarre, bon, enfin, je veux dire, il ne se défendait pas, en gros, il disait... Alors ils l'avaient acquitté. Je crois qu'il avait été acquitté en juin 1831. Et un mois après, il a reçu le rapport de Poisson sur son article. Alors là, catastrophe parce que Poisson disait que c'était sûrement une très très belle théorie, mais qu'il n'y avait pas assez de détails dans les démonstrations, etc. Donc il ne pouvait pas accepter l'article. Et Galois, quand il a reçu ce rapport, il a écrit à la main, dans la marge du rapport, il a écrit "Oh, chérubins !". Ca veut dire qu'il voyait que les gens ne comprenaient rien à ce qu'il faisait. A ce moment-là, il a un peu dérapé, c'est-à-dire que là, il s'est fait arrêter. Ca, c'était le 4 juillet qu'il a reçu le rapport de Poisson, il a été arrêté le 14 juillet à la tête d'une manifestation contre Louis-Philippe. Et là, il a été mis en prison pour de bon ; il a été mis dans une prison qui s'appelle Sainte-Pélagie ; et bon, il y a beaucoup d'entre vous sans doute, qui imaginent que s'ils étaient en prison, ils pourraient au moins réfléchir tranquilles avec des bouquins ; en fait, c'était pas du tout comme ça, parce que Galois, il était au milieu des condamnés et c'était absolument terrible parce que les autres condamnés l'obligeaient à boire de la liqueur très forte, etc. ; je veux dire que c'était absolument orthogonal à son... à ce qu'il faisait et en fait là, il a rencontré Nerval. Nerval l'a rencontré alors qu'il était en prison.

Et alors, c'est terrible, c'est terrible, parce que si vous voulez, Galois est resté en prison jusqu'au mois de mars de l'année d'après, 1832. Il n'avait pas 20 ans, toujours, euh, si, il avait 20 ans. Et en mars 1832, la raison pour laquelle il a été libéré, c'est qu'il y avait le choléra à Paris. Et qu'ils vidaient les prisons pour pas qu'il y ait trop de dégâts. Donc il a été mis dans une maison de santé et dans cette maison de santé, il est plus ou moins tombé amoureux d'une fille qui était là, sans se rendre compte qu'elle était déjà avec quelqu'un d'autre.

Et bon, tout ça a fini par un duel, d'accord. Et alors là, c'est pareil, si vous voulez, je suppose que chacun d'entre vous imagine que s'il était en devoir de se battre en duel, il aurait plus d'habileté que l'adversaire, donc ça irait quoi, il s'en sortirait. Malheureusement, le duel dans lequel Galois a été pris, il a essayé de s'en sortir avant. Il a essayé de dire que... Mais malheureusement, c'était un duel absolument terrible, c'était comme la roulette russe, c'était un duel dans lequel il y avait deux revolvers dont l'un seulement des deux était chargé. Et il fallait qu'ils se les mettent sur le ventre. Donc il a eu, bien sûr, une balle dans le ventre. A l'époque, et même maintenant, c'était mortel, et les autres l'ont laissé sur place.

Il a été retrouvé par un paysan sur place, qui l'a emmené à l'hôpital et il est mort le jours après. Bon. Et il a laissé une liasse de papiers, c'est ce qu'il dit, c'est ce qu'il dit dans ses trucs, donc c'était... Alors il y a des gens qui vous feront croire qu'il a trouvé tous ses résultats la veille de son duel. C'est absolument pas vrai, je veux dire, évidemment, il avait continué à réfléchir et c'était au point... il avait dû tellement se forcer à continuer à faire des maths pendant qu'il était dans des circonstances abominables, que des gens qui l'ont vu à sa sortie de prison disaient qu'il avait l'air d'avoir 50 ans alors qu'il avait 20 ans. D'accord, donc c'est vous dire un peu la passion qui l'habitait, et c'est un miracle, finalement, c'est un miracle qu'on ait eu ses travaux.

C'est un miracle absolu qu'on ait eu ses travaux. Donc ça, c'est ce qu'il écrivait et qu'il a laissé dans sa lettre-testament. C'est sa lettre-testament qu'il avait laissée à son frère, et à son ami, il avait un ami aussi.

Et ce qui s'est produit, donc, c'est que 10 ans ont passé. Et par un hasard extraordinaire, Liouville, qui était un contemporain de Galois, qui avait simplement deux ans de plus que Galois, a retrouvé les papiers de Galois. Et il a compris que c'étaient des choses absolument géniales. Et il en a parlé à l'Académie. Donc si vous voulez, 10 ans après la mort de Galois, c'est Liouville que voilà. Bon là, évidemment, il est beaucoup plus vieux mais c'était un contemporain de Galois, c'était quelqu'un qui était né en 1809, donc deux ans avant Galois. Et donc, Liouville a compris l'extraordinaire force des travaux de Galois si vous voulez.

Alors il a écrit ça, mais ça, je vous le montre écrit correctement, donc c'est comme ça.

Il en a parlé à l'Académie. Et puis, graduellement, les travaux de Galois ont été compris. Et alors ce que je vais faire, je ne veux pas vous embêter avec des mathématiques trop compliquées, je vais simplement vous donner l'essence de la théorie de Galois. Je vais vous donner l'essence en vous donnant un exemple. Ce que dit Galois dans sa lettre-testament, c'est quelque-chose d'incroyablement visionnaire, si vous voulez, ce qu'il dit, c'est :

"Tu sais mon cher Auguste, (il avait un ami qui s'appelait Auguste) *que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelques temps ont étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté."*

Donc Galois a découvert cette théorie de l'ambiguïté. Et dans cette lettre, à la fin de sa vie, il dit que non seulement, il l'a appliquée à des équations polynomiales. Mais en fait, il l'a appliquée à la théorie des fonctions transcendantes. Personne ne sait ce qu'il avait exactement en tête. Ca, personne ne peut dire que l'on sait, maintenant, ce que Galois avait en tête.

Par contre, on sait très bien ce qu'il avait en tête pour les équations polynomiales.

Et donc, pour les équations polynomiales, je vais vous expliquer ce qu'est la théorie de l'ambiguïté. Donc ce que Galois a compris, si vous voulez, c'est quelque-chose d'assez extraordinaire, c'est que lorsque vous vous donnez une équation algébrique, par exemple, je vous ai donné une équation donc, on sait la résoudre. Vous savez que maintenant, je veux dire avec l'ordinateur, vous pouvez contrôler tout ça, vous pouvez tracer le graphe d'une fonction, vous pouvez résoudre une équation polynomiale, et tout ça. Mais l'ordinateur ne vous donnera jamais les zéros qu'avec une certaine précision, il ne vous donnera jamais les racines qu'avec une certaine précision.

Alors, ce que dit la théorie de Galois, elle dit quelque chose d'extraordinaire : elle dit que quand vous prenez une équation comme celle-là, qui est irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la factoriser en un produit de 2 facteurs avec des coefficients rationnels par exemple. Donc lorsqu'une équation est irréductible, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui opère sur les racines, ici sur les 5 racines, et qui fait qu'on ne peut pas, si vous voulez, isoler une racine. C'est-à-dire qu'il y a une ambiguïté entre les racines ; ce groupe, il fait tourner les racines. Et toute relation qui est vérifiée entre les racines, toute relation rationnelle qui est vérifiée entre les racines, par exemple, avec l'ordinateur, vous pouvez voir que cette relation, elle est presque vérifiée, le fait que $E = 4C^2 + 2D^2$, vous pouvez vérifier ça. En fait, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui permute ces racines, c'est-à-dire qu'elles peuvent bouger de l'une à l'autre. Et de telle sorte que si une relation comme ça a lieu, elle aura lieu pour les racines permutées. Et ce que dit la théorie de Galois, c'est que par ce groupe, vous pouvez transformer n'importe quelle racine en n'importe quelle autre. Alors ce que dit Galois après, en fait ce que je vous dis en particulier ici, c'est que c'est impossible d'avoir cette relation. Pourquoi est-ce impossible d'avoir cette relation ? Parce que si vous avez cette relation, vous voyez bien que les 5 racines, elles sont réelles. Ca, c'est pas du tout difficile à démontrer. Donc vous avez bien 5 racines qui sont réelles. Mais supposez que vous ayez une relation comme celle que j'ai écrite : $E = 4C^2 + 2D^2$. Eh bien à ce moment-là, comme E peut devenir n'importe laquelle des autres racines, C et D seront d'autres racines aussi. Et vous voyez bien que toutes les racines devraient être positives, puisque ce sont des sommes de carrés. Et donc ce n'est pas possible. Ce n'est pas possible. Donc, c'est extraordinaire !

Ca vous dit que sans calculer et sans se salir les mains, ni quoi que ce soit, on sait que cette relation n'est pas possible. C'est-à-dire qu'avec l'ordinateur, l'ordinateur va vous dire “Mais elle est vraie, elle est vraie !”. Il va le dire avec des décimales et tout ça. Non ! Galois dit “c'est pas possible, cette relation n'est pas vraie !”. Et elle n'est pas vraie par la pensée pure, c'est extraordinaire ! C'est quelque-chose d'extraordinaire ! Parce qu'il a compris que derrière une équation, il n'y a pas seulement la valeur numérique des racines. Non. Il y a les relations entre les racines qui peuvent exister, Et ce que fait la théorie de Galois, c'est de déceler exactement toutes les relations entre les racines. Et elles sont décelées par un groupe. Alors, ne croyez pas les gens qui vous diront que c'est Galois qui a inventé la théorie des groupes. Non, les gens comme Lagrange, etc., savaient ce que c'étaient que les groupes avant lui. Mais Galois est le premier mathématicien *moderne*. C'est-à-dire que c'est le premier mathématicien qui a eu cette fulgurance, si vous voulez, qui fait que certaines choses comme ça sont vraies sans qu'on ait à calculer ou quoi que ce soit, d'accord. On a une théorie abstraite, c'est une théorie de l'ambiguïté et résoudre une équation, c'est graduellement diminuer l'ambiguïté qu'il y a, pour que finalement, sur l'équation, on puisse affirmer telle racine, et telle racine, etc. D'accord. Donc c'est ça, la théorie de l'ambiguïté. Et ici, en l'occurrence, on peut calculer ce qu'est le groupe de Galois. Donc le groupe de Galois, vous voyez les 5 racines, elles sont indiquées ici. Le groupe de Galois, il va les permuter. Et puis, mais il les permute si vous voulez de manière transitive, c'est-à-dire que si on itère ces permutations, si par exemple, je prends la racine qui est en-haut au milieu, elle va aller sur la première ; et après, si je regarde où va la première, elle va sur la dernière ; après, si je regarde la dernière, elle va sur l'avant-dernière ; si je regarde l'avant-dernière, elle va sur la seconde. Donc vous voyez que vous avez fait tout le tour d'accord.

Donc bon, et ça, c'est toujours vrai, c'est-à-dire que quelle que soit l'équation que vous preniez, Galois vous dit que si elle était réductible, il y a un groupe qui permute les racines. Alors il y a beaucoup de mathématiciens qui croient connaître la théorie de Galois, parce qu'ils disent que Galois a réussi à démontrer qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. Mais en fait Galois, à 17 ans, avait bien mieux que ça, il avait... un théorème...

Je vais vous effrayer mais ne vous inquiétez pas, on va passer à un autre sujet tout de suite. Donc ce que Galois démontre, c'est que si on prend une équation qu'il appelle primitive. C'est une certaine définition technique, pour qu'elle soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer les racines par un corps fini. C'est Galois qui a inventé les corps finis. C'est assez amusant parce que les Français sont pudiques, parce que les Anglo-Saxons appellent ces corps finis les *Galois fields*. Si on traduit en français, ça se traduit par corps de Galois. Mais en France, on n'utilise pas cette terminologie : on parle de corps fini. Et alors le théorème de Galois, qu'il avait quand il avait 17 ans, c'est que pour qu'une équation primitive soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer ses racines par un corps fini, de telle sorte que le groupe de Galois, alors là, tenez-vous bien, accrochez-vous, soit contenu dans le produit semi-direct du groupe affine du corps fini par le Frobenius, par les puissances du Frobenius. D'accord, d'accord, ok, bon.

(rires)

Et alors quand j'ai préparé mon exposé pour l'Académie, justement, je me suis aperçu qu'en fait, Galois connaissait un nombre incalculable de choses et qu'il connaissait par exemple, maintenant ce qu'on appelle la théorie de Sylow, qui est une théorie qui a été mise au point peut-être 50 ans après la mort de Galois. Donc c'est vous dire un peu à quel point il avait réussi à voir si loin. Et à la fin de mon exposé, je vous montrerai un texte de Grothendieck et c'est un texte qui est fondamental parce que ça s'applique merveilleusement au cas de Galois d'accord, et c'est un texte sur la créativité, sur la découverte et sur le fait que la vraie créativité, elle demande justement si vous voulez de retourner à cet esprit de l'enfant qui est à la fois libre, mais aussi qui n'accepte pas si vous voulez le poids des connaissances qu'on met sur lui. Donc on y reviendra à ça, d'accord.

Alors maintenant, j'en viens à un autre sujet, parce que je ne veux pas négliger la physique. Et à un autre sujet qui me tient à cœur aussi énormément et qui est celui, si vous voulez, d'un autre grand découvreur, dans le $XX^{\text{ème}}$ siècle, si vous voulez, c'est la découverte de la mécanique quantique. Maintenant, on va passer à Heisenberg et à la mécanique quantique. Donc on fait une pause si vous voulez. Ce que j'ai essayé de faire, c'est de choisir des sujets qui vous montrent, chacun, une nouvelle notion qui a été découverte, soit en faisant de la recherche mathématique, soit en faisant une recherche sur la nature, sur la physique. Mais chacune de ces notions est une notion qui a un sens, qui a un sens absolument fondamental.

Donc, l'histoire d'Heisenberg, elle est en fait reliée à un lieu, et ce lieu, c'est une île qui en allemand s'appelle Helgoland ; en français, on traduit Heligoland. C'est une île des pays nordiques. Et c'est une île qui a une particularité, je ne sais plus si cette particularité est encore vraie de nos jours ; en tout cas, elle avait une particularité dans les années 1925, qui était qu'elle n'avait pas de pollen. Il n'y avait pas d'arbres, il n'y avait pas de sources de pollen. Alors, quel est le lien avec Heisenberg ? Le lien, c'est que Heisenberg était un étudiant en physique, enfin, un étudiant, il avait déjà de la bouteille... Il était à Göttingen, je pense. Et à un moment donné, c'était au mois de mai, il a été pris d'une allergie terrible, le rhume des foins si vous voulez. Donc il avait la tête enflée, enfin tout ça quoi, et donc à l'époque, le seul remède, on ne donnait pas d'anti-histaminiques, le seul remède, c'était de l'envoyer à Heligoland. Donc il a été envoyé sur cette île. On lui a dit "il faut arrêter de faire vos cours, etc." et on vous envoie sur cette île. Et il est arrivé sur cette île. Il était logé par une vieille dame dans une maison, peut-être une des baraques qui sont là-haut, là. Et puis à l'époque, il cherchait... *(petit bruit circonspect interrogatif).* A l'époque, il cherchait...

Il essayait de ... A l'époque, la mécanique quantique était à un stade préhistorique, c'est-à-dire qu'on avait décidé ce qu'on appelle certains principes, qui permettaient de calculer des énergies et tout ça, mais je veux dire que ce n'était absolument pas une vraie théorie. Et Heisenberg réfléchissait sur un problème. En gros, son problème, ça prendrait trop de temps de l'expliquer, si vous voulez, l'idée, en gros, à l'époque, on concevait l'atome comme un petit système solaire. Mais ça ne marchait pas. Parce que ce qui se passe dans un système comme le système solaire, c'est que, par exemple si l'électron tournait autour du noyau, il émet de l'énergie, et donc en fait, son orbite devrait se ratatiner sur le noyau. Et ça, c'est pas ce qui se passe en réalité. Donc il y avait des choses comme ça qui ne collaient pas du tout. Et donc, Heisenberg a réfléchi là-dessus. Il est parti des résultats expérimentaux, ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg. Et puis bon, il avait ce calcul qu'il voulait faire et quand il était sur cette île, il a commencé à faire ce calcul. Il y avait des choses qu'il ne comprenait pas, tout ça. Et puis un matin, à 4h du matin, tout a marché ! Il a eu cette révélation extraordinaire ! Et au lieu d'aller se coucher, il est allé grimper sur un des pics rocheux *(rires)* qui sont au bord de l'île. Il s'est installé en haut, et il a attendu le lever du soleil. Et dans ses mémoires, il décrit de manière extraordinaire si vous voulez, cette illumination qu'il a eue et il dit vraiment, et c'est vrai, qu'il a eu tout d'un coup devant les yeux un immense paysage qui s'est dévoilé à ses yeux, mais c'était un paysage intellectuel, bien sûr ; ce paysage, c'était l'essence de la découverte qu'il a faite, si vous voulez, c'est quelque-chose d'incroyable ! Il a découvert que quand on fait des calculs, voilà Heisenberg, et on y reviendra à ça. Ce qu'il a découvert, c'est que vous voyez, quand vous faites de la physique, bon par exemple, vous écrivez $e = mc^2$ ou des trucs comme ça. Vous pourriez écrire $e = c^2$ fois m, c'est du kif-kif, ce sont des nombres. Bon, eh bien, je veux dire, ça ne change rien. Ce qu'Heisenberg a trouvé, c'est quelque-chose d'incroyable. Heisenberg a trouvé que si vous essayez de manipuler la position et le moment, on parle de la vitesse, mais il faut parler du moment : le moment, c'est le produit de la vitesse par la masse, d'accord ? Donc, si vous essayez de manipuler à la fois la position et le moment, au niveau microscopique d'un tout petit truc, d'un atome ou d'un truc comme ça, eh bien, vous pourrez toujours faire tout ce que vous voulez, vous n'arriverez jamais à mettre en défaut ce qu'on appelle le principe d'incertitude d'Heisenberg, d'accord, qui est que $\Delta x \Delta p$... Δx, c'est l'incertitude sur la position, Δp, c'est l'incertitude sur le moment. Eh bien ça, c'est toujours plus grand ou égal à $\hbar/2$, qu'est-ce que c'est que $\hbar$, c'est la constante que Planck avait introduite au début du siècle, pour expliquer certains phénomènes physiques.

Alors là, il faut que je vous raconte une petite histoire, à propos du principe d'incertitude parce que bon, *(chuchotant)* je crois qu'il y a un bouquin d'ailleurs là-dessus, qui est pas mal, d'ailleurs... Mais en fait, sur le principe d'incertitude, si vous voulez vraiment ressentir en quoi ce principe a troublé les gens, il y a une histoire qu'il faut que je vous raconte. C'est que bien sûr, Einstein n'y croyait pas. Pourtant, Einstein est à l'origine de la théorie quantique, je veux dire, c'est Einstein qui a eu l'idée que le photon avait des niveaux d'énergie qui étaient quantiques. Donc Einstein n'y croyait pas. Donc Einstein avait imaginé un dispositif.

A l'époque donc, Heisenberg a trouvé son principe d'incertitude vers la fin des années 1920. A cette époque-là, il y avait ce qu'on appelait les congrès Solvay ; c'étaient des réunions de physiciens, en petit nombre, et bien sûr, ils discutaient entre eux.

Donc il y a eu un congrès Solvay, je crois que c'était en 1830, ou quelque-chose comme ça. Et donc Einstein avait imaginé la chose suivante ; il avait imaginé pour mettre en défaut le principe d'incertitude, mais pas sur la position et le moment, mais sur $\Delta t \Delta E$; c'est à dire que...*(soupir, soupir)*... le temps, c'est la variable duale de l'énergie, de même que la position est la variable duale du moment. Et le principe d'incertitude vous donne quelque chose de semblable pour $\Delta t \Delta E$. Quelque-chose comme $\hbar$ ou $\hbar/2$, ça dépend des unités. Donc Einstein ne croyait pas à ça. Et Einstein avait imaginé... Bien sûr, il faisait toujours la même chose, c'est-à-dire que quand il ne croyait pas à quelque chose, il imaginait une expérience de pensée. Une expérience de pensée, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que je vais vous faire un dessin très grossier : mais en fait, on peut très bien imaginer que cette expérience soit rendue de plus en plus précise. D'accord ? Donc le dessin très grossier, c'était le suivant : *(dessinant le dispositif au tableau)* là, on va mettre un petit ressort, et puis ici, on va mettre une boîte. Et puis on va mettre comme un coucou quoi. Et puis avec, il y aura l'heure ici, d'accord ?

C'était ça son système, et puis là, il y a une espèce de truc. Et puis, là, il y a des... Voilà le système.

Alors quelle était l'idée d'Einstein ? L'idée d'Einstein, c'est que Δt, eh bien, on va le contrôler puisqu'on à l'heure ici, d'accord. Donc ça, c'est le t donc. Et ΔE maintenant ? Donc, qu'est-ce que ça veut dire, qu'est-ce que j'ai dit ici *(montrant un endroit du dessin)* ? Ca veut dire qu'il y aura un moment donné où le coucou va faire “Touc !”. Il va émettre un photon. Et on saura à quelle heure il l’a émis puisqu’il y a ce truc qui marque l’heure, d’accord. Donc Δt, *(bruit pour exprimer qu’on ne sait pas quoi...)*. Alors maintenant ΔE. Eh bien le photon, ça, Einstein, il le sait, le photon, il pèse $h\nu$, où ν c’est la fréquence du photon. Donc ça, c’est e si vous voulez, c’est l’énergie. Donc quand le photon sort, ce truc-là, il devient un petit peu plus léger... *(voyant qu’il semble peut-être avoir un peu perdu la compréhension de son auditoire)* Est-ce que vous connaissez l’histoire du camion qui transportait des trous, non ? Vous ne la connaissez pas ? Il était en montagne, d’accord, puis à un moment donné, le chauffeur, il s’est senti plus lourd, il a reculé, il est tombé dans le trou, d’accord.

(rires).

Bon, je reprends, d’accord ? Donc, ici, une fois que le photon a été émis, d’accord, ce truc-là devient un petit peu plus léger, donc ça va, si vous voulez, l’aiguille, elle va monter un petit peu, et en regardant de combien elle est montée, on va connaître ΔE donc en fait, Einstein disait “bah on va connaître ΔE, on va connaître Δt, avec une précision aussi grande que l’on veut. Donc on aura pas le principe d’incertitude”. Alors il a dit ça. Et ça a fait terriblement peur à Bohr qui était en train de discuter avec eux, parce que Bohr croyait bien sûr au principe d’incertitude, ça lui a fait terriblement peur parce que... Quelle était la raison pour laquelle il avait peur ? La raison pour laquelle il avait peur, c’est que quand vous faites les calculs avec ce système, proposé par Einstein, ce qui va intervenir, c’est la constante de gravitation parce que vous voyez, l’horloge, quand elle monte un peu, elle est dans le champ gravitationnel, donc quand vous allez chercher de combien l’énergie a diminué, vous allez faire intervenir la constante de gravitation, donc évidemment, la constante de gravitation, elle rentre absolument pas dans le $\hbar$ de Planck etc. La théorie de Planck, elle est complètement disjointe de la gravitation. Donc Bohr se disait, c’est foutu !

Donc, il y a une photo extraordinaire, sur laquelle on voit Einstein sortir très fièrement de la salle de congrès Solvay et on voit Bohr qui le suit un peu comme un petit chien, et qui est, bon... Et alors ce qui s’est passé, c’est que ce n’est pas la fin d’histoire. La fin de l’histoire est absolument merveilleuse, parce que ce qui s’est passé, c’est que Bohr est rentré à son hôtel. Evidemment, il n’a pas dormi, il n’a pas dormi de la nuit parce que bon, je veux dire... Il n'a pas dormi de la nuit, et il a trouvé la réponse... Et la réponse est fantastique. La réponse est absolument fantastique, parce que, si vous voulez, bon, ça paraissait impossible, impossible ! Pourquoi ? Parce que, comme je le disais, il y aura la constante de gravitation quand vous allez faire le calcul et ça, c'est impossible que ça marche ! C'est impossible qu'on retrouve le $\hbar$. D'où il sort ? Ce qu'a trouvé Bohr pendant la nuit, il a trouvé que le même Einstein, en fait, il avait pondu la relativité générale. *(Alain Connes écrit les formules à la craie au tableau).* A l'époque ! Ca, vous savez, maintenant, cette année, au mois de novembre, il va y avoir un tas de célébrations de la découverte de la relativité générale par Einstein. Ca fait exactement 100 ans. C'est pour ça qu'il va y avoir toutes ces célébrations. Donc ça fait exactement 100 ans. Et c'était donc une dizaine d'années, ou même plus, une quinzaine d'années avant l'histoire en question. Qu'est-ce que ça à voir avec le truc ?

Ce que ça a à voir avec le truc, c'est la chose suivante : c'est que ce que dit la relativité générale, elle dit que le passage du temps, si vous écrivez la métrique, vous avez ce qu'on appelle la métrique de Minkowski, en fait, qui est dûe à Poincaré, donc de l'espace-temps si vous voulez. Lorsque ça, c'est l'espace-temps de la relativité restreinte, et si vous regardez la métrique de l'espace-temps de la relativité générale, en première approximation, ce qui se passe, c'est que la métrique ne change pas pour les coordonnées usuelles : on est dans un espace euclidien. Par contre, elle change pour le passage du temps, et la manière dont elle change, c'est que le coefficient dt^2 est multiplié par 1+ deux fois le potentiel Newtonien $V(x, y, z)$.

Vous inquiètez pas, c'est pas... bon. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que le temps passe différemment selon l'altitude, ok ? Mais l'horloge, elle a changé d'altitude un petit peu *(Eclats de rires)*. Donc son temps a passé différemment. Vous faites le calcul et vous retrouvez le principe d'incertitude d'Heisenberg. C'est incroyable ! Ca veut dire que Bohr, si Einstein n'avait pas découvert la relativité générale *(Eclats de rires)* une quinzaine d'années avant, il aurait eu raison, d'accord ?... Personne n'aurait cru que le principe d'incertitude était valable. Mais, à cause de la relativité générale, que lui-même avait inventée, il a été battu, il a été mis en défaut. Donc le lendemain matin, Bohr est rentré, triomphant, je veux dire, c'est extraordinaire ! C'est vraiment extraordinaire, mais si vous voulez, tout ça, c'est pour essayer de vous faire sentir le fait qu'aucune de ces notions n'a été acceptée au début. Pas du tout ! Absolument pas. Il y a toujours une résistance absolument terrible, à des choses qui sont nouvelles comme ça... Et alors, ce qui est incroyable dans le quantique, ce qui est ahurissant dans le quantique, si vous voulez, et ça je pense que ce n'est pas vraiment passé dans les connaissances. Oui, alors, bon. J'en parlerai après de ça, j'en parlerai après. J'y reviendrai. Ce qui est incroyable dans le quantique, si vous voulez, c'est le fait que, et ça, ça vient du principe d'incertitude d'Heisenberg, c'est que, contrairement à la physique classique, quand vous faites une expérience dans le quantique, vous ne pouvez pas reproduire l'expérience. C'est quelque-chose de fondamental. Quand j'essayais de vous dire, si vous voulez, que j'allais vous expliquer des concepts ou des notions... Ce sont des notions qui font une telle cassure avec la vision classique, si vous voulez, que c'est énorme comme différence. Qu'est-ce que je veux dire par là ? Ce que je veux dire par là, c'est que si vous faites une expérience de nature quantique, par exemple vous envoyez un photon, et ce photon, il va passer par une toute petite fente qui est à peu près de la taille de sa longueur d'onde. Et après, vous allez le recevoir sur une cible. Eh bien, le fait que vous receviez le photon à un endroit x donné, cette expérience-là n'est pas reproductible. C'est-à-dire que vous pourrez refaire l'expérience avec autant de précision, donner les mêmes conditions initiales, etc., le résultat final ne sera pas le même. C'est incroyable, ça ! Et il ne sera pas le même à cause du principe d'incertitude de Heisenberg.

Alors, vous pouvez me dire “Bon bah d'accord bah bon moi, je m'en fiche, il y a un peu d'aléa, quoi ! Un aléa microscopique, je m'en fiche !”. Mais non ! Maintenant, ce qui se produit, c'est que le fait qu'il y ait cette incertitude fondamentale, si vous voulez, eh bien, ça a été utilisé pour produire des nombres aléatoires. C'est-à-dire qu'il y a des Suisses qui ont fabriqué un appareil qui marche, maintenant c'est avec une lampe LED, vous savez les petites lampes LED là, comme ça. Alors ces petites lampes envoient des photons sur une cible, voilà. On regarde à quel endroit le photon arrive, il arrive sur l'un des carreaux de la cible. Et à partir de là, on fabrique un nombre et comme c'est un phénomène quantique, c'est-à-dire que c'est un phénomène qui n'est pas reproductible, ça produit des nombres aléatoires, qui sont tellement aléatoires que, même si un attaquant voulait reproduire la même chose, ça veut dire s'il connaissait toutes les données sur le système, il n'arriverait pas à reproduire le même nombre. Alors qu'avec un ordinateur, si vous fabriquez des nombres aléatoires, si l'attaquant connaît votre système de fabrication, il arrivera à les reproduire, les nombres aléatoires, d'accord ? Donc c'est phénoménal, c'est phénoménal ! Alors, de là, si vous voulez de cette vérité extraordinaire, en fait, sort une idée, qu'on a commencé à exploiter et cette idée, c'est la suivante : vous voyez, nous, nous sommes habitués en physique a attribuer tout variabilité au passage du temps, c'est-à-dire que bon... Moi, je me souviens une fois mon prof, j'avais un prof, je ne sais plus si c'était en maths sup. Il m'a dit de passer au tableau, alors j'y passe.

Il m'interroge. Et puis, il me fait ça *(geste d'une courbe dessinée en l'air)* - Ouhouh ?! *(rires).* Moi, je regarde comme ça... Il me dit “Monsieur Connes, quelle est la variable ?”. Alors, moi, je faisais de la cinématique. Je réfléchis... Et puis au bout d'un moment, je lui réponds : “c'est le temps !”. C'était la bonne réponse ! Vous voyez, normalement, il y a un tas de choses qui sont variables. Et toute la physique est écrite en notant d/dt de quelque-chose égale quelque-chose d'autre... Toute la physique est écrite en fonction du temps. Et en fait, si on réfléchit suffisamment, au niveau conceptuel, on s'aperçoit en fait, que la mécanique quantique occasionne immédiatement des paradoxes, des paradoxes très très violents, très très forts, si vous voulez, et qui viennent précisément du fait qu'on attribue la variabilité au passage du temps.

Et il y a une idée fondamentale qui a du mal à passer, mais qu'on a essayé de vulgariser etc., et cette idée c'est en fait que la vraie variabilité, c'est la variabilité quantique et que le temps en fait, émerge de cette variabilité-là. Ca veut dire que le temps n'est qu'un phénomène secondaire, n'est qu'un phénomène émergent, qui résulte de la variabilité quantique, mais qui n'est pas du tout fondamental d'accord.

Alors pour essayer de faire passer cette idée, en fait, je ne vais pas vous donner tous les détails, on a écrit un livre, donc, avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a écrit un livre ensemble, qui s'appelle Le Théâtre quantique. Et dans ce livre, vous verrez une introduction à cette idée-là, qui est, on l'espère, compréhensible quoique un peu cryptique évidemment, c'est-à-dire qu'on ne donne pas tous les détails etc. Mais l'idée vient d'un autre mathématicien tout à fait extraordinaire Von Neumann.

Cest-à-dire après la découverte de Heiseberg, si vous voulez, après la grande découverte de Heisenberg, bien sûr, les mathématiciens ont formalisé ce que Heisenberg avait trouvé. Ca a pris du temps. Ce que Heiseberg avait trouvé, donc je vous le rappelle, c'était que vous ne pouvez pas permuter les lettres, les variables comme $e = mc^2$, vous ne pouvez pas écrire $e = c^2m$. On ne peut pas faire ça, d'accord ? Alors il y a des gens qui vous diront "Ouh la la la la ! Qu'est-ce que ça va être compliqué tout ça !". Mais en fait, non, revenons à Heisenberg.

Vous voyez ces deux phrases, donc ça, c'est une anagramme qui a été trouvée par Jacques Perry-Salkow, qui est tout à fait extraordinaire et qui a été la naissance du bouquin que je vous ai montré. Mais que signifie une anagramme ? Elle signifie que si j'avais le droit de permuter les lettres, j'obtiendrai le même résultat : pas terrible ! *(rires) a2bcd...* Donc vous voyez, dans le commutatif, ça vous donne le même résultat. Mais bien sûr, nous sommes tous habitués à faire attention à l'ordre des lettres... Bien sûr, c'est le langage ! Le langage est fait pour ça. Et la découverte d'Heisenberg peut se dire incroyablement simplement : elle peut se dire en disant que Heisenberg, il a trouvé qu'il fallait faire attention à l'ordre des lettres, quand on fait des calculs avec les variables microscopiques, c'est merveilleux ! C'est quelque chose d'absolument merveilleux, d'accord ! Bon alors Von Neumann a élaboré là-dessus, il a trouvé qu'il fallait un formalisme mathématique qui s'appelle le formalisme des espaces de Hilbert, c'est un truc assez compliqué.

Alors, vous savez, dans mon introduction, j'ai dit que j'allais parler des algèbres de Von Neumann, d'accord. Alors justement là j'en parle, d'accord. Je ne vous donne pas trop de détails, bien sûr, pas trop de détails sur les types et tout ça. Mais maintenant, je vais vous parler d'un autre mathématicien, et qui a été le point de départ, vraiment de mon travail, de ma thèse, etc., et qui est l'outil qui a permis d'avoir, l'outil essentiel qui permet de donner un sens à cette idée que le temps, le passage du temps émerge à partir de l'aléa du quantique. Alors, la raison pour laquelle je vous montre sa photo, c'est que malheureusement il est mort, le 9 octobre, à l'âge de 91 ans ; sa photo a été prise quand il était venu à Bures-sur-Yvette il y a exactement 30 ans. Il a passé un an à Bures-sur-Yvette il y a 30 ans, et pourquoi c'est un personnage absolument extraordinaire ? C'est un personnage extraordinaire parce que par exemple, il était dans l'armée au moment de la guerre entre le Japon et les Etats-Unis, mais il était devenu sourd à l'âge de 2 ans. Donc il y a eu un moment donné où tous ses coréligionnaires couraient aux abris, quand il y avait un bombardement. Tomita ne bougeait pas, et quand ses coorélionnaires revenaient le voir, ils lui disaient "mais tu es fou ?...". Ils le secouaient, et il leur disait "Quel bombardement ?". C'était à ce point-là, il était connu comme ça. Et alors il y a eu un épisode où le gradé qui les commandait a dit que lui ne serait pas de l'expédition qu'ils allaient faire parce que, comme il était sourd, ça posait plutôt un problème. Donc il est resté et tous les autres sont morts. Et apparemment, mais ça j'en suis moins sûr, apparemment, il était le suivant sur la liste des kamikazes au moment où la guerre s'est arrêtée.

Ensuite, il a eu un prof, il faut dire que peu après la guerre donc, quand il était à l'université, au lieu de faire des cours, enfin au lieu d'aller écouter les cours, les étudiants allaient planter des pommes de terre tellement il y avait la famine. Ils allaient planter des pommes-de-terre tout près de l'université. Donc il avait un prof. Il avait un prof pour faire sa thèse, son prof s'appelait Ono, et son prof, la première fois donc Tomita va voir son prof, parce qu'il voulait faire une thèse ; son prof prend un gros gros bouquin, je n'en ai pas amené avec moi. Le prof lui donne un livre, oh ! plus que ça, deux fois ça facile, d'accord, il le donne à Tomita et il lui dit "Lisez ce bouquin et revenez me voir quand vous aurez tout compris". Alors ça va, comme ça. Alors pendant 2 ans, ils ne se voient pas. Et puis au bout de 2 ans, par hasard, Tomita rencontre son prof dans les couloirs de l'université. Son prof se souvenait quand même : "alors ce bouquin, ça avance ?". Et Tomita lui répond "je l'ai perdu au bout d'une semaine..." *(rires)* C'était un type absolument génial. Il racontait des histoires qui étaient absolument géniales. Il a fait une découverte absolument géniale. Seulement, comme il était sourd, si vous voulez, c'était très très très difficile de communiquer avec lui. C'était vraiment très très difficile, la plupart du temps, il coupait son appareil. *(rires)*. Moi, ça a été le point de départ de mes travaux si vous voulez. Le départ de mes travaux, ça a été le fait que donc Tomita et puis après Takesaki, qui avait repris les travaux de Tomita, avait trouvé que bon, sur une algèbre de Von Neumann, comme Von Neumann les avait définies, il y avait une évolution mais qui dépendait d'un état. Et alors, ce que j'ai démontré dans ma thèse, c'est qu'en fait, elle ne dépendait pas d'un état et qu'il suffisait d'avoir la non-commutativité, c'est-à-dire qu'il suffisait d'avoir une algèbre, de faire des calculs dans lesquels vous faites attention à l'ordre des termes, pour qu'il y ait une évolution dans le temps, donc pour qu'il y ait un temps qui passe. Bon alors après, il y a eu un tas de conséquences de ça, bien entendu. Et en fait, l'essentiel de mes travaux a été si vous voulez de développer la géométrie pour des espaces qui contrairement aux espaces de Descartes, parce que Descartes si vous voulez, avait réussi à comprendre qu'il y avait une dualité entre la géométrie et l'algèbre car Descartes avait compris qu'on pouvait encoder un espace géométrique par des coordonnées et puis faire des calculs algébriques au lieu de faire des calculs géométriques. Un exemple le plus simple possible : si vous voulez démontrer que les 3 médianes d'un triangle se coupent. Eh bien, il y a plusieurs manières de faire, mais la manière la plus simple, c'est de faire le calcul du barycentre. Vous prenez les coordonnées puis vous calculez le tiers de la somme des coordonnées. Quel est l'avantage de la démonstration algébrique sur la démonstration géométrique ? Vous pouvez bien sûr faire une démonstration géométrique du fait que les 3 médianes d'un triangle se rencontrent. Mais supposez que je vous demande de le démontrer en dimension n ? *(rires)*. Alors que la démonstration algébrique, elle est évidente, vous faites $1/n$ fois la somme des coordonnées et puis c'est tout, ça vous donne le point d'intersection et puis c'est terminé. Donc vous voyez la puissance de ce va-et-vient, entre d'un côté la géométrie, et de l'autre côté l'algèbre. Alors ce qu'a découvert Heisenberg, c'est qu'il y avait des espaces incroyablement naturels dans lesquels justement, les coordonnées ne commutent pas. Et ces espaces correspondent aux observables sur un système microscopique.

Et donc moi, l'essentiel de mes travaux, ça a été de développer la géométrie, pour de tels espaces.

Alors comme le temps est encore assez court, au lieu de vous parler de mes travaux, je vais vous parler d'un autre mathématicien absolument extraordinaire, qui s'appelle Alexandre Grothendieck, et qui est mort il y a un an, et la raison pour laquelle je vais vous en parler, ce n'est pas parce que je veux vous décrire la théorie des topos, parce que ça, c'est une merveilleuse théorie mais ça ne passerait pas, je n'ai pas envie d'en parler. Après peut-être... Mais c'est surtout pour vous expliquer, pour vous montrer ce que Grothendieck dit sur la créativité et sur ce besoin absolument nécessaire de retrouver, lorsqu'on est devant un problème très très difficile, son âme d'enfant et cette espèce de, justement, d'ouverture, de sensibilité, etc. qui est en fait trop souvent complètement gommée, complètement effacée par le poids des connaissances. Donc voilà ce que dit Grothendieck, je vais le lire avec vous, et puis on s'arrêtera là. Donc voilà Grothendieck quand il était jeune. Il a eu, lui aussi, une vie extrêmement tumultueuse.

Donc voilà ce qu'il écrit. Il écrit :

Dans notre connaissance des choses de l'univers, qu'elles soient mathématiques ou autres, le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'innocence.

C'est l'innocence originelle, que nous avons tous reçue en partage à notre naissance, et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, de nos peurs les plus secrètes. Elle seule, (donc cette innocence) *unit l'humilité* (bien sûr, la recherche est une école d'humilité, l'école quotidienne de l'humilité) *l'humilité et la hardiesse qui nous font pénétrer au cœur des choses et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous, et de nous en imprégner.* (Ca, c'est la première chose qu'il dit. Ensuite il dit :) *Ce pouvoir-là,* (Ca, c'est très très important, maintenant.) *Ce pouvoir-là n'est nullement le privilège de dons extraordinaires.*

Vous voyez, lorsque parfois on assiste à des expositions, sur les mathématiques, vous avez l'impression que ouh ! Ce sont des extraterrestres ces gens-là, non il ne faut pas du tout avoir cette peur, absolument pas. Il arrive au contraire trop souvent que les gens trop intelligents aient une réaction immédiate et que cette réaction immédiate en fait, soit fausse. C'est-à-dire ils vous disent "ça va pas marcher pour telle et telle raison...". En fait, s'ils avaient réfléchi plus, il se seraient aperçus que ça marche, d'accord. Donc ce que dit Grothendieck, c'est que donc :

Ce pouvoir là mais nullement le privilège de dons extraordinaires, d'une puissance cérébrale, disons hors du commun, pour assimiler et pour manier avec dextérité et avec aisance, une masse impressionnante de faits, d'idées et de techniques connues. Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui, comme moi, n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure...

Là, il est vraiment ironique, ironique, j'aime pas dire le plus grand parce que le plus grand, qu'est-ce que ça veut dire..., on ne peut pas comparer des choses différentes, mais il a eu une influence phénoménale sur les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Une influence phénoménale. Donc l'entendre lui, dire ça... c'est rassurant, disons ! *Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui comme moi n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure. Ce ne sont pas ces dons-là, pourtant, ni l'ambition même la plus ardente* (l'ambition ne suffit en rien) *l'ambition, servie par une volonté sans faille, qui font franchir ces cercles invisibles et impérieux qui enferment notre univers. Seule l'innocence les franchit, sans le savoir, ni sans s'en soucier, à l'instant où nous nous retrouvons seuls à l'écoute des choses, intensément absorbés dans un jeu d'enfant.*

Donc ce qu'il explique, c'est qu'il n'y a rien de plus fructueux que de se saisir d'une question et d'y réfléchir, mais de cette manière-là, d'une manière complètement indépendante du poids de la science, etc. d'accord. Bien sûr, bon, pour arriver au problème, il faut connaître un certain nombre de choses mais après, il faut y réfléchir comme ça. Et donc il continue en disant :

La découverte est le privilège de l'enfant. C'est du petit enfant que je veux parler, l'enfant qui n'a pas peur encore de se tromper, d'avoir l'air idiot, de ne pas faire sérieux...

Par exemple, tout à l'heure, il y aura des questions donc d'accord, attention à ça, il ne faudra pas avoir peur. Il y a même un proverbe chinois qui dit : "si je pose une question, j'ai l'air idiot pendant 5 secondes ; si je ne la pose pas, j'ai l'air idiot tout le reste de ma vie.". Donc voilà ce qu'il dit, donc, de ne pas faire sérieux, de ne pas faire comme tout le monde. Et c'est vrai quand-même qu'il y a une attitude typiquement française assez caractéristique dans une assemblée : on a peur de poser la question, sauf quand on connaît la réponse *(rires).*

Il n'a pas peur non plus que les choses qu'il regarde aient le mauvais goût d'être différentes de ce qu'il attend d'elles, de ce qu'elles devraient être, ou plutôt de ce qu'il est bien entendu qu'elles sont, c'est-à-dire, ce que la majorité des gens vont lui avoir dit qu'elles seraient ; il ignore les consensus muets et sans faille, qui font partie de l'air que nous respirons, celui de tous les gens sensés et bien connus comme tels. Dieu sait s'il y en a eu, des gens sensés et bien connus comme tels, depuis la nuit des âges ; nos esprits sont saturés d'un savoir hétéroclite, enchevêtrement de peurs et de paresses, de fringales et d'interdits, d'informations à tout-venant et d'explications pousse-boutons...

Un exemple typique, c'est ce qu'on appelle l'effet papillon, le nombre de gens qui ont ressassé ça sans savoir que c'était une idiotie, c'est quelque-chose de considérable. Mais je veux dire, ça a perduré, ça a perduré longtemps d'accord. Alors je continue donc.

...espace clos où viennent s'entasser informations, fringales et peurs, sans que jamais s'y engouffre le vent du large, exception faite d'un savoir-faire de routine. Il semblerait que le rôle principal de ce savoir est d'évacuer une per-

ception vivante, une prise de connaissance des choses de ce monde.

C'est ça qui compte, c'est cette perception vivante. Par exemple, pour aimer les mathématiques, il faut en faire, bien sûr. Et peu importe le problème que vous regardez, mais ce qui est important, c'est que vous en fassiez, c'est pas que vous preniez comme... Si quelqu'un vous dit un théorème, par exemple, si vous voulez, il faut pas trop avoir la démonstration. Il faut la chercher par vous-même, même si vous ne la trouvez pas. Vous allez gagner. Pourquoi ? Parce que si vous la cherchez, par vous-même, quand on vous la dira, même si vous ne la trouvez pas, et bien vous direz "mais c'est bien sûr, c'était ça, et c'était ça !". Si vous ne la cherchez pas et si on vous la donne, ça rentre par une oreille et ça sort par l'autre, et puis vous aurez oublié au bout d'une demi-heure. Donc, c'est très très important d'**en faire**, d'accord. Donc donc... *Son effet est surtout celui d'une inertie immense.* Il parle du poids de ce savoir en commun, souvent écrasant.

Le petit enfant découvre le monde comme il respire. Le flux et le reflux de sa respiration lui font accueillir le monde en son être délicat et le font se projeter dans le monde qui l'accueille. L'adulte aussi découvre, en ces rares instants où il a oublié ses peurs et son savoir, quand il regarde les choses ou lui-même avec des yeux grand ouverts, avides de connaître, avec des yeux neufs, des yeux d'enfant.

J'espère que vous ressentez le plus important dans ce que j'ai dit. C'est que ça ne s'applique pas du tout qu'aux mathématiques ; c'est-à-dire que vous vouliez faire des sciences humaines, que vous vouliez faire de la linguistique, que vous vouliez faire quelque chose que ce soit, même peut-être de l'art, si vous voulez, c'est crucial que vous ayez compris le message. Et que vous ayez compris que, en particulier les mathématiques, elles ont une portée bien bien plus grande que de calculer avec des nombres, de calculer avec des chiffres, etc. C'est pas du tout ça, c'est une espèce de version de la philosophie qui est beaucoup plus dure parce qu'effectivement, pour arriver à un concept nouveau comme le concept de topos de Grothendieck, il a fallu des années et des années de réflexion... Mais ça donne des outils de pensée absolument fondamentaux. Et j'ai pas le temps d'en parler, mais le concept de topos, c'est un concept qui vous montre que la notion de vérité, quand on dit par exemple de manière courante de quelque chose que c'est vrai ou que c'est faux, eh bien, quand on regarde dans un topos, c'est un univers qui est différent de l'univers, eh bien une chose peut être partiellement vraie partiellement fausse, elle peut être vraie pour un certain point de vue, elle peut être fausse pour un autre point de vue, etc. Donc ça donne un outil de pensée qui est incroyablement adapté en fait à la vie, à la politique, à 36 choses, mais qui n'est pas encore passé dans le domaine commun. C'est une notion qui est encore une notion dans le domaine mathématique, qui n'est pas encore passée dans le domaine commun. Et on y gagnerait énormément si vous voulez à, justement, à ce que toutes ces choses merveilleuses qui ont été découvertes, deviennent maintenant, fassent partie du domaine commun. Donc mon laïus allait dans ce sens-là d'accord, d'essayer de vous faire voir, de manière un peu surréaliste si vous voulez, qu'il existe ces choses magnifiques mais que bon bien sûr, il faut faire un effort pour les apprendre et un effort pour les connaître. Voilà.

Séance de questions à l'orateur

- Merci beaucoup. Questions. Peut-être, donc, on fait ce qu'on a dit. Si vous avez des questions, des précisions sur ce qui a été dit, donc, questions qu'il ne faut pas avoir peur de poser, moi, j'en ai quelques-unes, mais je suis sûr que vous en avez aussi...

- Vous avez parlé de l'effet papillon... Et que ça n'existait pas.

- Je n'ai pas dit que ça n'existait pas. Mais j'ai dit que c'était une vaste fumisterie. Parce que ce que je veux dire, c'est comme si on disait qu'il y a un papillon qui va voler, puis l'avion qui suit un autre avion ne va pas décoller ; il y a un effet d'amortissement qui est colossal. Bien sûr qu'on peut faire un système mathématique qui dépend de peu de variables et qui est tel que, quand on fait bouger un petit peu une variable, ça va changer les résultats. Mais de là à faire croire qu'un petit papillon qui vole à un endroit, il va créer, je ne sais pas moi, un ouragan à un autre endroit, c'est ridicule... Bon on peut rappeler d'où ça vient, ça vient du fait qu'il y a des équations différentielles en mathématiques, qui sont telles que si on change un tout petit peu les conditions initiales, ça change le résultat de manière considérable, de manière exponentiellement plus grande. Ca, c'est vrai. Mais c'est vrai dans un modèle particulier. C'est vrai dans un modèle, dans lequel il n'y a pas d'amortissement, comme il se produit dans la nature. Dans la nature, heureusement, il se produit des amortissements, parce que sinon, dans la nature, on regarderait les papillons un peu partout, et puis on aurait la trouille *(rires)*. Heureusement que c'est comme ça. Mais c'est du bon sens, c'est du bon sens. Mais on a vu peut-être je ne sais pas combien de politiques ou des gens qui répétaient l'effet papillon sans rien comprendre, puisque s'ils avaient compris quoi que ce soit, ils se se seraient aperçus que c'était, hein, bon... C'est un exemple typique de gens qui répètent les choses sans les comprendre, simplement parce qu'ils se disent : "Ah ouais, c'est quelqu'un de puissant qui l'a dit, donc ça doit être vrai, quoi !"

- Merci.

- C'était une question sur le fait que vous aviez dit que souvent, les physiciens exprimaient tout en fonction du temps, et qu'on considérait souvent que c'était la variable...

- fondamentale.

- et vous disiez qu'en fait, il se trouve que la véritable variable, c'est la variable quantique, et je n'ai pas compris comment le temps découle de cette variable.

- Ca, c'est toute une histoire. En gros, c'est l'histoire de ma trajectoire. C'est-à-dire en fait ce qui se produit, mais c'est un peu expliqué dans le bouquin, mais c'est surtout bien expliqué dans un exposé que j'ai fait à l'IHES au mois de mai, et dont je pense qu'il doit être sur le site de l'IHES, il faut aller écouter cet exposé, je pourrais en dire deux mots. Mais bon, en gros, c'est que Von Neumann a créé les algèbres de Von Neumann comme étant des systèmes où on a une connaissance partielle de la réalité. Et avec le travail de Tomita, puis mes travaux pendant la thèse, on a compris que si on avait un système qui a une connaissance partielle de la réalité, à ce moment là, il y a un temps qui émerge. C'est-à-dire il y a une évolution dans le temps. Comme tout est quantique, et que la connaissance qu'on a de la réalité est effectivement partielle, c'est ça qui, avec les travaux que j'ai fait avec Carlo Rovelli, c'est ça qui devrait expliquer le passage du temps, c'est ce qu'on appelle le temps thermodynamique. Cette idée du temps thermodynamique, elle est bien expliquée dans notre bouquin à trois voix.

- Du coup, ma question rejoint un peu la question de Constantin tout à l'heure. Donc du coup, la constante fondamentale, il n'y en a plus maintenant, puisque finalement, tout repose sur une variabilité quantique ?

- Il y a une chose dont je n'ai pas parlé mais j'avais des transparents dessus donc je peux les montrer effectivement. C'est important, c'est important, c'est cette idée de variables. Parce que finalement, on revient à l'idée de variables. Qu'est-ce que c'est qu'une variable, vous voyez ? Nous, ce qu'on nous apprend en classe, ce que c'est qu'une variable réelle... Une variable réelle, c'est une application qui va d'un ensemble X dans les réels. C'est comme ça qu'on nous dit ce qu'est une variable réelle. Or si on regarde cette définition d'une variable réelle, on s'aperçoit en fait, avec un petit raisonnement, on s'aperçoit qu'on ne peut pas avoir coexistence de ce qu'on appelle des variables continues, des variables qui prennent par exemple un intervalle de valeurs, et des variables discrètes, qui prennent des valeurs discrètes. *(Il dessine un intervalle et des points au tableau).* Et la raison pour laquelle on ne peut pas avoir coexistence, c'est que si on prend une variable continue, l'ensemble X doit au moins avoir la cardinalité du continu mais s'il a la cardinalité du continu, on ne peut pas avoir une variable discrète, parce qu'il y aura des points qui seront atteints trop de fois. On ne peut pas avoir ça. L'extraordinaire valeur du formalisme quantique, tel que Von Neumann l'a développé, c'est que dans le formalisme quantique, tout est résolu : c'est-à-dire que dans le formalisme quantique, en fait, une variable, c'est le spectre d'un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert, c'est un peu compliqué mais là, pour les opérateurs dans l'espace de Hilbert, on peut avoir des opérateurs qui ont un spectre discret et des opérateurs qui ont un spectre continu et qui coexistent. Et alors, ce qui est extraordinaire, c'est qu'en fait, ça rejoint exactement la pensée de Newton. C'est-à-dire que Newton, dans ses écrits, quand il essayait de définir ce que c'est qu'un infinitésimal par exemple, il a écrit exactement la bonne phrase, qui correspond au quantique. C'est-à-dire, il disait une variable est infinitésimale. D'abord il disait ce qu'était une variable. Or le formalisme quantique donne exactement la bonne réponse par rapport à Newton. Ca, c'est la première chose.

Et alors donc maintenant, ce qui se produit, c'est qu'une fois qu'on a ce formalisme, de ce que c'est qu'une variable, on s'aperçoit que bien sûr, les variables discrètes ne peuvent coexister avec les variables continues que par la non-commutativité, et on s'aperçoit que c'est cette non-commutativité qui crée le passage du temps, d'accord ? Donc en fait, le $\hbar$ existe toujours en fait, la constante de Planck est toujours présente, mais ce qui est extrêmement frappant, c'est qu'on ne doit pas considérer le temps comme étant une donnée fondamentale, mais comme une donnée émergente, et que si on avait une connaissance absolue de tout, le temps ne passerait pas. C'est incroyable de penser ça, d'accord, c'est-à-dire que la raison pour laquelle on a l'impression que le temps passe, etc., c'est parce qu'on a une connaissance partielle de l'univers, d'accord. C'est ça qui est formidable si vous voulez avec ce jeu de la physique. Dans le livre qu'on a écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, il faut que je vous dise que Danye Chéreau c'est mon épouse *(rires)*, ce qu'on fait, c'est qu'on a trouvé une phrase très frappante qu'on a utilisée pour exprimer l'idée que je viens de vous dire. On a dit "L'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". Vous savez, Einstein avait dit "Dieu ne joue pas aux dés" donc voilà la réponse. La réponse du héros du bouquin à cette boutade d'Einstein, c'est que "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". C'est-à-dire que c'est parce qu'il y a constamment ces petits trucs complètement aléatoires, pop ! pop ! pop ! qui se produisent, que le temps passe. La nature a une imagination phénoménale. Et c'est ce que donne l'instrument pour mesurer des nombres aléatoires, c'est incroyable, ça veut dire "il prend le pouls de la nature", pop ! Allez ça, c'est un nombre aléatoire, pop ! un autre... Vous pouvez toujours essayer de les reproduire. Bon eh bien ça, c'est incroyable, c'est la phrase qui le dit, c'est "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine".

- Pour essayer de mettre un petit peu ça au clair, du coup, si, admettons, bon, on peut toujours hypothétiser, si par exemple, justement, cette nature quantique était stable, si elle ne bougeait pas, le temps ne passerait pas ?...

- Eh bien, non, justement, elle n'arrête pas de bouger !

- Mais admettons qu'on imagine qu'elle ne bouge pas. Ca veut dire que le temps ne passerait pas ?...

- Ah oui ! Non, non, non, c'est pas ça ; si on la connaissait complètement, si on avait toute la connaissance, là le temps ne passerait pas. Le temps passe parce qu'on a une connaissance partielle, c'est la thermodynamique, d'accord. La thermodynamique, ça nous dit, la thermodynamique, par le génie de Boltzmann, il nous dit que l'entropie, par exemple, c'est la connaissance partielle des choses, d'accord. Donc le passage du temps est relié à ça, d'accord. Mais la nature n'arrête pas de bouger, hein, d'accord ?!... *(rires)*

- J'ai une question parce que vous dites que pour votre thèse, vous vous êtes inspiré de Tomita qui a montré donc la non-commutativité...

- Non, non, c'est pas ça. Bon oui oui, c'est un détail... ! *(rires francs)*

- Est-ce que vous pourriez juste expliquer ce qu'on appelle les types ?

- Ah oui, les types ! ! Bien sûr, bien sûr, tout à fait, ben les trois types... Alors, les trois types. Où est-ce qu'ils sont, les 3 types ? Le premier type, c'est lui... *(Il montre une photo, éclats de rires.)*

Les 3 types, donc : le type I, c'est un système quantique tel qu'en fait, l'espace de Hilbert du système quantique se casse en un produit tensoriel de deux espaces, c'est-à-dire que c'est vraiment le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, et c'était ce dont les gens avaient imaginé que ce serait toujours le cas. Ils imaginaient toujours que quand on prenait un sous-système d'un système quantique, on pourrait casser l'espace de Hilbert en un produit tensoriel de deux, de telle sorte que le premier système corresponde au premier espace de Hilbert, aux opérateurs dans le premier espace de Hilbert, et l'autre aux opérateurs dans le deuxième espace de Hilbert. Alors ce que Von Neumann et Murray ont découvert, c'est qu'en fait, il y avait deux autres types. C'est-à-dire qu'il y avait une manière d'avoir des sous-systèmes quantiques qui ne correspondait pas du tout à un scindage de l'espace de Hilbert en un produit tensoriel. Alors le premier type, il y avait les dimensions réelles. Et puis le type III qui restait, c'étaient les autres. Et avant Tomita, on n'avait aucun outil pour attaquer le type III, d'accord. Donc ce que Tomita a trouvé, c'est que dans le type III, il y avait ce groupe $\sigma_{t\phi}$ et puis ce que j'ai trouvé dans ma thèse, moi, après, c'était que le groupe qu'avait trouvé Tomita, en fait, il était unique modulo les intérieurs, c'est-à-dire qu'il définissait une vraie évolution, indépendante de toute autre chose. Donc ça, ça a donné quantité d'invariants, etc., ça a permis de tout débloquer. D'accord ! Donc mais c'est incroyable parce que Von Neumann avait défini ces sous-systèmes quantiques de manière complètement euh, comment dire, c'est dans les écrits de Von Neumann, de manière complètement abstraite. Et jamais on aurait pu penser à l'époque de Von Neumann que ça aurait été relié au temps, au passage du temps, je veux dire, c'est absolument incroyable. Ca veut dire la profondeur du quantique. Heisenberg a découvert que ça venait de la non-commutativité, Von Neumann l'a reformulé sous forme d'opérateurs dans l'espace de Hilbert, il s'est posé le problème des sous-systèmes, et de là sort le passage du temps, c'est fabuleux !

- Est-ce que vous pourriez nous expliquer pourquoi le principe de l'entropie résulte de la connaissance partielle qu'on a du monde ?

- Ca, c'est Boltzmann et le pauvre Boltzmann était tellement incompris à son époque qu'il a fini par se suicider. Il a eu une idée absolument... Il a fait graver sur sa tombe la formule qui est la suivante $S = k\ log\ n$. Ca, c'est gravé sur la tombe de Boltzmann. Il s'est suicidé près de Trieste. Cette formule, qu'est-ce qu'elle dit ? C'est une des formules les plus simples mais l'une des plus difficiles à comprendre. Qu'est-ce que c'est que l'entier n ? C'est le nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique.

Il faut que je vous raconte un peu l'histoire : l'histoire, c'est à la période où les gens avaient découvert la machine à vapeur, et puis il y avait les locomotives et tout ça, et donc ce que les gens avaient découvert, c'était qu'il y avait un moyen de transformer la chaleur en énergie, en mouvement, en tout ce qu'on veut quoi. Et c'est comme ça que le chemin de fer a commencé, etc. Et ils s'étaient posé la question de ce qu'on appelait le rendement des machines et tout ça. Et donc bien sûr, si vous voulez, il y avait des quantités de chaleur dq donc qui étaient entre deux systèmes etc. Mais on s'était aperçu assez vite que si on prenait deux chemins différents pour aller d'un point à un autre, d'un état à un autre, l'intégrale de $\int dq$ si vous voulez, c'était pas préservé, c'est-à-dire qu'on ne peut pas définir la quantité de chaleur d'un objet. Par contre, on s'est aperçu que si on divisait dq par ce qu'on appelle la température absolue, eh bien ça, cette quantité-là si vous voulez, elle était bien définie, c'est-à-dire que quel que soit le chemin qu'on prenait, entre un état et un autre, l'intégrale de ce truc-là donnait le même résultat. Et c'est ça qui avait permis de définir l'entropie.

Mais cette entropie, elle était définie pour des systèmes macroscopiques qui étaient donnés par la température, la pression, le volume, enfin je sais pas quoi, si vous voulez un certain nombre de quantités macroscopiques, il n'y avait aucune interprétation, aucune, et ça s'appelait l'entropie. Ca s'appelait l'entropie, S. Mais cette entropie, elle n'avait aucune signification philosophique puisque justement, c'est de ça dont on parle, d'accord ? Et l'incroyable génie de Boltzmann, ça a été cette formule $S = k\ log\ n.\ dq + ds = log\ n$, c'est-à-dire ce qu'a compris Boltzmann, c'est qu'à chaque fois qu'on prend un état macroscopique donc un volume donné etc., on peut avoir le même état macroscopique, à partir d'états microscopiques totalement différents. C'est-à-dire que l'exemple le plus simple, c'est de prendre des boules rouges et des boules blanches, et de les empiler dans un réservoir. Et vous avez par exemple 50 boules rouges et 50 boules blanches. Vous voyez bien que vous pouvez les empiler de 36 manières différentes, d'accord. Mais l'état macroscopique correspondant vous dira qu'il y a la moitié de boules rouges et la moitié de boules blanches et puis c'est tout. Le reste, vous vous en foutez. Eh bien, ce qu'a compris Boltzmann et qui est incroyable, c'est que l'entropie, qui était définie de manière complètement ad hoc par les gens qui faisait des systèmes de machines à vapeur et tout ça, eh bien en fait, c'était simplement le logarithme du nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique donné. Bien sûr, il fallait une constante devant. C'est ce qu'on appelle la constante de Boltzmann, c'est normal qu'elle porte son nom. Donc cette constante de Boltzmann, c'est pas la même chose que la constante de Planck, et elle est, bon, évidemment il faut que ça ait la dimension d'une entropie etc. etc. d'accord. Mais c'est la formule la plus incompréhensible, et la plus géniale qui soit, cette formule d'accord. Et elle est très difficile à comprendre. Ce qui est très difficile à comprendre, c'est que les lois de la physique, pas de la physique des particules, mais les lois de la physique ordinaire, sont invariantes quand on change t en $-t$. Et si vous voulez, ce qui est très difficile à comprendre, c'est qu'un des principes fondamentaux de la thermodynamique est que l'entropie s'accroît. Alors on dit : "Mais le temps, il va dans quel sens ?. Ca, ça a hanté les gens pendant des années et des années. Et Boltzmann, il avait compris un nombre incalculable de choses simplement à cause de cette idée. C'est un exemple merveilleux, de formule très simple, mais justement si vous voulez, ça, c'est aussi une chose très importante que je n'aurais pas voulu oublier de vous dire, qui est qu'il y a un certain nombre de notions mathématiques ou de notions de physique comme ça, qui ont une qualité extraordinaire, et cette qualité, c'est de mettre la pensée en mouvement. Cette formule c'est un exemple typique, vous regardez cette formule, vous essayez de la comprendre, voilà, votre pensée est en mouvement maintenant. Elle a un potentiel extraordinaire de mise en mouvement de la pensée. Parce que vous pouvez vous dire "Pourquoi ça augmente ?". En gros, l'explication de

Boltzmann de la raison pour laquelle ça augmente, c'est que, en général, on va aller vers des états qui ont de plus en plus de réalisations microscopiques, c'est-à-dire qui sont de plus en plus probables. Et après, pour mettre ça sur des bases solides, c'est une autre histoire...

- Donc vous nous avez beaucoup parlé de la physique, et on sait qu'en ce moment la physique théorique, ça devient un peu un repaire de mathématiciens, par exemple avec la théorie des cordes, et du coup je me demandais si vous, en un sens, est-ce que vous pourriez vous considérer plutôt comme un physicien qui fait des mathématiques ?

- C'est une bonne question, j'avais des amis qui, connaissant mes opinions sur la théorie des cordes, disaient que j'étais un peu comme une machine où on met des sous, alors, mais si on met 1 euro, je vais parler pendant 10 minutes contre la théorie des cordes. Donc je vais vous épargner. Non, mais je vais vous citer une phrase de Hadamard. Il faut que je la trouve déjà *(rires)*. Attendez, il faut que je la trouve... Alors, je crois que je vais y arriver. Voilà, c'est une phrase sur le lien entre les mathématiques et la physique ; ce que dit Hadamard, pour caractériser la profondeur des concepts mathématiques qui viennent directement de la physique, il dit (je le dis en anglais donc, mais c'est très facile à traduire en français) :

...not this short lived novelty, which can too often only influence the mathematician left to his own devices, but this infinitely fecund novelty, which springs from the nature of things[2].

Donc voilà la réponse. La réponse, c'est qu'il n'y a pas d'un côté les mathématiques, et d'un autre côté la physique. C'est la même chose : on essaie tous de comprendre, d'accord. Et justement, il y a cette profondeur extraordinaire dans certains concepts mathématiques qui viennent directement de la physique. Comme Heisenberg. C'est inépuisable parce que c'est venu de quoi, c'est venu de l'expérience, c'est venu de la physique, c'est la nature qui nous parle, qui nous dit quelque chose d'accord. Ca, c'est inestimable ! Mais ce n'est pas le cas de la théorie des cordes, parce que la théorie des cordes,

2. ...non une brève nouveauté qui souvent influence le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais une nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses. in Jacques Hadamard, Préface à l'introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel de G. Juvet, Albert Blanchard, Paris, 1922

c'est une déviance qui elle, est venue à partir de mathématiques abstraites etc., et qui elle n'a pas de contact avec l'expérience.

- Il y a un autre mathématicien, qui s'appelle Carlo Rovelli *(précision d'Alain Connes : "C'est un physicien, lui, c'est un physicien" (rires))* et il dit que pour lui, la beauté de la physique, c'est une idée simple, qui nous ouvre sur un monde totalement nouveau et en même temps, ce monde, il est réel, il est correct. Et je me demandais pour vous, ce que vous pensiez vous de la beauté mathématique...

- Ca, c'est une bonne question *(soupir)*. Bon d'abord, il y a beaucoup de gens qui, et je pense que c'est vrai, qui vous diront que la notion de beauté est une notion très relative, c'est-à-dire que chacun a sa notion différente etc. bien sûr. Mais bon moi, j'avoue que pour moi, la beauté mathématique, c'est quand, après des calculs terribles, terriblement compliqués, on arrive à la même chose, on arrive au résultat, mais par une idée d'une simplicité incroyable, un peu comme l'œuf de Colomb d'accord. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique, pour moi, la beauté, c'est la simplicité d'une idée, mais en fait, d'une idée qui va... Bon par exemple, je ne sais pas... quand on parlait de Galois, je vais vous fournir un exemple de cette beauté. Que dit Galois ? Galois dit quand on prend une équation, on prend une équation polynomiale. Alors, la première chose qu'on va faire, on va trouver une fonction des racines, qui quand on permute les racines, va prendre... Bon, par exemple, on prend une équation de degré 5. Il faut que quand on permute les racines de manière arbitraire, cette fonction prenne 120 valeurs différentes (5! valeurs différentes). Alors comment est-ce qu'il fait, Galois, pour trouver une telle fonction ? C'est très simple : il dit "si j'appelle les racines A, B, C, D, E, d'accord, je prends A plus 1 000 000 de fois B + 1 trillion de fois C etc. Evidemment, quand je vais les permuter, ça va prendre que des valeurs différentes. Ca va prendre 120 valeurs différentes". C'est la première chose. Deuxième chose, que dit Galois ? Il dit "eh bien, maintenant, prenons pour équation l'équation qui a pour racines ces 120 racines. On prend cette équation et on la décompose en facteurs irréductibles. On peut exprimer les racines de l'équation de départ en fonction de ces facteurs irréductibles et on va obtenir, en prenant ces facteurs irréductibles, des permutations des racines de l'équation. Théorème, voilà la beauté mathématique. Théorème : Le groupe de permutations obtenu ne dépend d'aucun des choix qu'on a faits. C'est-à-dire que si, au lieu d'avoir pris A plus 1 000 000 de fois B etc., j'avais pris 1 000 001 ou n'importe quoi, j'aurais obtenu le même groupe. Ca, c'est la beauté mathématique, c'est quelque chose d'incroyablement beau. Pourquoi ? Parce que ça veut dire qu'on a donné une recette, qui avait l'air complètement arbitraire, et on est arrivé à un invariant, on est arrivé à un groupe, qui est une caractéristique de l'équation, qui va donner tous les résultats qu'on veut, et qui est d'une simplicité biblique, à la fin, c'est-à-dire la manière dont il est défini, c'est d'une simplicité biblique. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique. Mais c'est un exemple, hein, je veux dire, la définir abstraitement, si on en donnait une définition abstraite, c'est évident qu'on pourrait trouver un contre-exemple et qu'on pourrait trouver... Mais c'est... En fait, si vous cherchez des choses générales sur la beauté en mathématiques, sur des choses comme ça, lisez *Récoltes et Semailles* de Grothendieck. Parce que c'est... Grothendieck n'était pas seulement un mathématicien, en fait, c'était un littéraire, et c'était quelqu'un qui a été capable dans ses écrits, d'aller très très loin dans l'analyse de ce que sont les mathématiques, de ce que c'est que la beauté en mathématiques, etc. Donc il a écrit 1500 pages, ces 1500 pages, vous pouvez les trouver sur internet, d'accord. Et n'écoutez pas les gens qui vous diront qu'il est fou parce que ce n'est pas vrai, ce n'est pas vrai : c'était quelqu'un qui était merveilleusement intelligent, et qui a écrit merveilleusement en tant que littéraire. Il a un vocabulaire extraordinaire, etc. J'ai fait un exposé, au séminaire d'Antoine Compagnon, sur Grothendieck et Proust, en les comparant justement, et je pense qu'il est disponible cet exposé, peut-être sur le site du Collège de France ou sur mon site. Donc, parce que je veux dire, parce que c'est très frappant, c'est très frappant de voir que ce sont deux individus qui ont réussi une chose que peu de gens réussissent, aussi bien l'un que l'autre, qui est non seulement une œuvre, pour Grothendieck, mais aussi si vous voulez ce que dit Grothendieck, ce qu'il explique, c'est qu'en fait la... En fait, si on veut se réaliser bien sûr, bon, c'est bien de faire une vraie mais en fait la principale difficulté qu'on a, c'est de se comprendre soi-même, et pour se comprendre soi-même, ça paraît idiot *(rires)*, n'est-ce pas ? Et pour se comprendre soi-même, il faut en gros s'auto-analyser, c'est ce qu'a fait Grothendieck et d'une certaine manière, c'est ce qu'a fait Proust aussi dans son livre. Ce sont aussi des gens qui, à partir d'un moment donné, ont arrêté de vivre et ont passé le reste de leur vie à ré-analyser leur vie passée, d'accord, et à la comprendre, etc. Et dans les deux cas, c'est merveilleux, le résultat est merveilleux, d'accord. Donc la meilleure réponse je crois, c'est celle-là, c'est d'aller voir dans *Récoltes et Semailles*, et de le lire, pas de le feuilleter, il faut le lire vraiment, il faut le lire attentivement, vous voyez, comme les passages que je vous ai lus tout à l'heure.

- Merci de préciser : *Récoltes et Semailles*, c'est le livre que Grothendieck a écrit et auquel on a accès depuis peu de temps, finalement...

- Non, pas peu de temps, ça fait très longtemps qu'on y avait accès mais bon, il a écrit d'autres livres. C'est un personnage, tous ces personnages-là ont des vies extraordinaires. Grothendieck a eu une vie extraordinaire parce qu'en gros, en 1970, il a quitté l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (l'IHES) et il est redevenu, parce que c'était son tempérament fondamental je pense, un peu un paria si vous voulez. Et à partir de 1991, il s'est réfugié dans un village des Pyrénées. Et plus personne n'avait de nouvelle de lui, mais il continuait à travailler, il continuait à écrire. Et alors, il n'a pas seulement écrit *Récoltes et Semailles*, il a aussi écrit un autre texte magnifique, qui s'appelle *La clé des songes*. Et c'est un texte mystique, mais bon alors, je vais dire c'est pareil, je veux dire, c'est pareil... Mais c'est extrêmement intéressant, mais je pense que par exemple, pour des gens qui font de la littérature, ces textes-là ont une valeur infinie. Il y a des thèses à faire là-dessus, il y a 36 choses à faire, bien sûr...

- Alors moi j'avais vu quelque part sur internet je crois, je ne suis pas sûre de mes sources, qu'en fait vous pensiez que les mathématiques existaient sans les hommes en fait, que même ce n'étaient pas une invention faite par les hommes, et j'ai un peu de mal à comprendre ça en fait, parce que souvent, on voit les maths comme quelque chose de très abstrait qui n'existerait pas sans que les hommes les aient inventées, donc, pouvez-vous expliquer ça ?

- Bon, je peux vous donner la réponse. La réponse est très simple. Vous prenez, vous prenez la chimie. C'est un sujet que j'exécrais, moi, lorsque j'étais en maths sup et maths spé, donc vous avez tous ces trucs-là. Alors on a les corps composés puis on a les corps simples. Les corps simples, il y a le tableau périodique des éléments. Le tableau périodique des éléments, incroyable mais vrai, il y a le principe d'exclusion de Pauli, et une toute petite équation, qui vous le donne. Ca me suffit, moi. Pourquoi ? Parce qu'imaginons qu'il y ait un autre système planétaire etc. Si ce sont des êtres intelligents, ils vont comprendre la chimie, qu'il y a des corps simples, ce sera les mêmes, ils n'auront pas... je veux dire ils n'auront pas des corps chimiques, ils n'auront pas des corps simples différents des nôtres, donc ils vont comprendre les corps simples. Et puis, s'ils sont vraiment intelligents, ils vont essayer de trouver, bon, ils auront le tableau périodique des éléments. Ils vont essayer de trouver quelle est l'origine abstraite du tableau périodique des éléments. Ben, s'ils sont vraiment intelligents, ils trouveront la même chose, ils trouveront qu'il y a le principe d'exclusion de Pauli. Et puis, il y a cette petite équation... Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que, derrière l'apparente, comment dire, arbitraire du monde qui nous entoure, il y a des choses incroyablement simples qui le régissent, la chimie, l'itération puisque les arbres, tout ça, c'est régi par l'itération, et qu'en fait, il y a une manière de comprendre le monde, qui au lieu d'être un chaos, si vous voulez, est quelque chose de beaucoup plus structuré, et qui est structuré par les mathématiques. Et il n'y a aucune raison pour que, bien-sûr, les gens donnent le même nom aux concepts mathématiques qu'ils auront utilisés, mais c'est bien clair qu'ils utiliseront la... , s'ils sont des êtres différents et ils auront 1, 2, 3, 4, 5. Ils ne le diront pas de la même manière, mais ils utiliseront le langage mathématique, ce langage sera en correspondance avec le nôtre, comme le langage des chinois est en correspondance avec le nôtre.

Donc, c'est en ce sens-là, c'est en ce sens absolument fondamental, que je dis que les mathématiques pré-existent, pourquoi ? Parce que ce serait incroyablement prétentieux de dire que nous avons inventé les nombres entiers. Alors à ce moment-là, pourquoi la chimie aurait déjà utilisé ces choses-là pour exister ? Ca paraît complètement débile. Donc en fait, ce que je dis, c'est que, quand on a trouvé, quand Watson et Crick ont trouvé la structure en double hélice de l'ADN, ils ne l'ont pas *inventée*, personne ne va croire qu'ils l'ont *inventée* bien sûr, ils ont *découvert* ça. C'était une réalité, et cette réalité, elle pré-existait à eux. Eh bien, pour les mathématiques, c'est pareil, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que nous découvrons, un peu comme un explorateur va découvrir quelque chose. Cet explorateur, il a un libre-arbitre, il peut aller à tel endroit ou à tel autre endroit. C'est ce qui fait croire à des gens qu'en fait, c'est comme l'art. Mais non ! Ce n'est pas de l'art, c'est de l'exploration. Et c'est une exploration d'autant plus... comment dire ? réelle, que cette réalité, elle résiste. Si c'était de l'art, on pourrait faire dire n'importe quoi, et n'importe quoi. Ce n'est pas le cas. Ce n'est pas le cas. Il y a une résistance terrible... Et alors un exemple, un autre exemple typique, c'est que si par exemple, j'écris une équation etc., et puis bon, par exemple, Galois avait dit que les calculs qu'on devait faire pour suivre sa méthode étaient impossibles à faire et à son époque, c'était impossible à faire. Et pour montrer que c'était impossible à faire, quand j'ai donné mon exposé à l'Académie, j'ai expliqué aux gens la méthode de Galois et je leur ai demandé "est-ce que vous pouvez me donner une idée... ?", bon, parce que chaque racine s'exprime comme un polynome en fonction des racines de l'équation auxiliaire. Je leur ai demandé, je leur ai donné une équation comme celle que je vous ai donnée tout à l'heure je leur ai dit "est-ce que vous pouvez me donner l'ordre de grandeur du coefficient d'ordre 0 du polynome qui exprime la première racine ?"... 1 million sur 1 million, ou quelque chose comme ça. Non, la réponse, c'est un nombre à 500 chiffres sur un nombre à 500 chiffres ! L'ordinateur le fait maintenant, et l'ordinateur vérifie que Galois avait raison d'accord ! Alors dire que Galois l'a inventé, je veux dire, c'est un peu gros, quoi ! Non, non, non ! Non, non, non ! On *découvre*, on *découvre*, mais exactement comme il avait fallu le microscope électronique, pour découvrir la structure en double hélice de l'ADN, le mathématicien invente des outils conceptuels pour réussir à percevoir cette réalité. Mais il invente des outils conceptuels bien entendu. Mais c'est une réalité qui est là, elle résiste, elle est complètement tangible et elle régit la nature. Elle est plus fondamentale, pour moi, cette réalité-là est plus fondamentale que la nature qui nous entoure. Elle pré-existe à ça d'accord. Si vous voulez, ce serait même... je pense que ce ne serait pas juste de dire que la nature est seulement écrite dans le langage des mathématiques ; les mathématiques, c'est plus que ça, c'est plus que ça. La nature est consubstantielle des mathématiques. Nous, on ne s'en rend pas compte parce qu'on n'est pas suffisamment intelligent pour se rendre compte de l'explication qui est derrière tous ces phénomènes. Si on s'en rendait compte plus, on le saurait beaucoup mieux. Et c'est d'autant plus vrai avec le quantique. Je veux dire, le quantique, là, c'est flagrant. Le quantique, c'est une réalité qu'on ne perçoit que par les mathématiques, on ne la perçoit absolument pas autrement. C'est-à-dire que les gens qui font des expériences avec le quantique, en optique quantique, ils comprennent ce que c'est que l'espace de Hilbert, ils le touchent comme ça, d'accord, c'est incroyable, ça, ça, c'est vraiment incroyable !

- Merci.

- Vous êtes prêt à répondre encore à quelques questions ?

- Oui, ça va, ça va.

- Pour que l'on ait plus de facilités par exemple avec les notions abstraites, en mathématiques ou en physique, ou même avec les raisonnements, qu'est-ce que vous préconiseriez dans l'éducation et dans l'enseignement, à présent, dans l'école primaire ou même dans le secondaire ?

- Je vais répondre, d'abord pas dans l'école primaire, ni dans le secondaire, je réponds pour vous, parce que c'est le plus utile. Donc pour vous, ce que je préconise, c'est la chose suivante. Pour répondre à une question, même une question de calcul compliquée, vous laissez tout en plan, vous allez faire un tour à pied, d'accord. Et la question, vous la gardez dans la tête, d'accord, vous la gardez dans la tête, et vous réfléchissez. Evidemment, ça peut être différent selon les individus, mais pour moi, c'est le grand secret. C'est-à-dire un calcul, aussi compliqué soit-il, vous pouvez vous dire "Oh ! Jamais je vais y arriver si j'essaie comme ça !" Non ! Vous partez faire un tour à pied, et vous réfléchissez à la structure du truc, et après quand vous reviendrez, bon, vous verrez que ça améliore drôlement les choses.

Bon alors maintenant, dans le primaire, j'en sais rien, moi, tout ce que je peux vous dire, c'est ma propre expérience, parce que je n'en connais pas d'autre. Mais ma propre expérience, c'est quand j'étais gamin, quand j'avais 5 ans, mon père nous imposait de faire des calculs. On était dans le jardin avec lui, il était avec nous, et il nous faisait faire des opérations, et à l'époque, on faisait les quatre opérations, c'est-à-dire on faisait la division, à 5 ans, on faisait la multiplication, on n'avait pas attendu la sixième pour apprendre la division, et tout ça donc, on faisait ça. Et après une autre expérience qui m'est arrivée... Et moi, j'adorais ça, c'était sans doute aussi ma relation avec mon père, il me faisait à la fois peur, mais j'étais content de lui faire plaisir, enfin bon, je ne sais pas, donc je ne sais pas, je ne sais pas comment expliquer ça : je vais dire que je pense qu'il y avait une vertu extraordinaire au fait de faire des opérations comme ça, c'est-à-dire d'apprendre par cœur la table de multiplication et puis, on ne l'oubliait pas la table de multiplication, si on faisait des multiplications et des additions à longueur de journée, on ne l'oubliait pas, on la savait après. Et ça devenait un automatisme absolu. Donc il y avait ça, et moi, ça me plaisait énormément. Une autre histoire que j'ai, c'est qu'une fois, ça, je trouve ça absolument extraordinaire, une fois, j'ai rencontré un ami que je n'avais pas vu, on jouait au foot ensemble, dans le temps, et puis peut-être 8 ou 9 ans après, je prends le TGV pour aller à, je crois que c'était à Rennes ou un truc comme ça, et puis je vais à ma place de TGV et puis, je regardais mon numéro, et je vois quelqu'un à côté qui regardait son numéro et c'était mon copain. On a commencé à discuter etc. Et puis alors, la discussion habituelle, tu as des enfants, il commence à m'expliquer qu'il a un fils, et que son fils est bizarre. Il faut dire que mon copain est littéraire. J'ai dit "pourquoi ?". Bon tu sais, bon d'abord, il avait été malade quand il était petit et puis une fois, quand il avait 5 ans, on était ensemble, on était sur la plage et puis il avait l'air souffreteux ; moi j'étais inquiet, je veux dire pendant une heure, il était là, au lieu d'aller se baigner, il était un peu blanc et puis au bout d'une heure, il vient me voir, donc c'est mon copain qui raconte, il vient me voir, et il me dit : "papa il n'y a pas de plus grand nombre !". Je lui dis "Ecoute, ton fils, il est génial !" *(rires)*. Il me dit. "Ah oui, bien sûr !". Je lui ai demandé si son fils avait trouvé une démonstration et il avait trouvé une démonstration, qui n'est pas la démonstration usuelle, c'était pas rajouter 1, c'était multiplier par 2 ou quelque-chose comme ça, peu importe, il avait trouvé une démonstration. C'est incroyable, mais après, il me dit, "tu sais, il a eu des problèmes à l'école" *(francs éclats de rires)*. Alors, il m'a raconté ses problèmes à l'école. Alors ça, ça va répondre à votre question pour l'école primaire. C'est qu'à l'école primaire, donc on lui avait posé le problème suivant : c'était "une fleuriste a 120 fleurs, elle fait 4 bouquets de 17 fleurs, combien lui reste-t-il de fleurs ?", d'accord. Alors lui, il avait eu "zéro, n'a pas le sens des opérations". Il était pas con, il lui en reste 120 puisqu'elle ne les a pas données *(rires de tous)*. Quand il m'a eu raconté ça, j'ai dit "bah écoute ton fils, c'est un mathématicien". Et alors, on a organisé donc avec son père une rencontre au Tea Caddy à Paris, c'est un endroit charmant. Et son fils à l'époque avait 12 ans. Donc bon, les choses ont évolué, ça fait un certain moment, et maintenant, c'est un grand mathématicien qui est prof à Orsay. Alors incroyable, incroyable, incroyable ! Donc je crois que ce qui compte, c'est ce que dit Grothendieck, c'est de retourner dans cet état d'enfance et de se poser les bonnes questions, et puis de ne pas hésiter à être à contre-courant etc. Surtout je veux dire que le moment où on devient mathématicien, c'est le moment où on est capable de dire au prof qu'il a tort et pourquoi, ça veut dire être capable de résister à son autorité, pour dire qu'on a réfléchi, et qu'on n'est pas d'accord, et puis d'être sûr de soi, parce qu'on a réfléchi par soi-même, c'est hyper-important.

- Non en fait, j'ai une question, même si je pense que vous avez un peu répondu à cette question par vos propos, mais j'aimerais vraiment savoir pour vous quel est le but du travail d'un scientifique, enfin, si vous pensez que c'est plutôt d'augmenter, de faire avancer la connaissance fondamentale, ou de le rendre accessible à son public pour une éventuelle application.

- Il y a ces deux aspects, que l'on ne doit pas mélanger du tout, il y a ces deux aspects. Je pense que la vraie motivation, c'est de faire avancer la connaissance fondamentale. C'est-à-dire qu'en fait, la vraie motivation qui doit être justement indépendante de toute autorité, de tout désir de reconnaissance, etc., la vraie motivation, c'est d'essayer de comprendre, comprendre là où on est, là où on a atterri, d'accord, c'est ça, c'est tout simple à comprendre, c'est là où on est.

- Non mais sur cette question de la vulgarisation des savoirs et en particulier des savoirs mathématiques. A vous entendre, il y a un risque : l'effet papillon en est un. Moi j'allais dire ce que j'avais retenu, par exemple, de l'entropie, ce que les philosophes, ce que certains philosophes peuvent faire de l'entropie, il y a parfois effectivement un grand danger d'une espèce de ... et en même temps, vous semblez dire qu'il y a un besoin. Donc si on vous demandait en gros "comment faire pour éviter le danger et répondre au besoin", est-ce que vous seriez... ?

- Oui, oui, c'est une très bonne question. Il y a eu Sokal, il y a eu Deleuze. Il y a eu Lacan, je ne sais pas si vous savez, mais Lacan a dit dans un séminaire que le nombre $\sqrt{-1}$ est le symbole du sexe mâle, d'accord. C'est ce qu'on appelle le nombre imaginaire pur ! ! *(rires)*. Il fallait le faire quand-même, hein ? ! Et en plus, il a fait une fois un séminaire, où il avait un théorème d'accord, et son théorème, c'était que "Don Juan est compact". Quelqu'un lui avait dit la définition d'un espace compact en mathématiques. Donc ça, évidemment, c'est débile, d'accord, c'est absolument débile. Et qu'est-ce que c'est ? Ce sont des concepts mathématiques mal compris qui sont utilisés comme une autorité psychologique sur les autres, c'est-à-dire qu'ils sont utilisés parce que les gens ne comprendront pas et l'effet papillon en est un exemple flagrant, comme une autorité psychologique parce que les gens quand ils ne comprennent pas, ils sont en position d'infériorité, leur compréhension s'arrête, et si vous voulez, ils sont impressionnés etc. Donc, il y a cette manière terrible d'utiliser les mathématiques, qui est justement d'utiliser de grands mots, comme une espèce de pouvoir psychologique sur les foules. Alors ça, c'est à bannir à tout prix. Par contre, moi ce qui me désole si vous voulez, c'est que des concepts aussi beaux que le concept de topos de Grothendieck, ne soit pas plus connu par des gens qui en auraient besoin parce que comme je vous le dis, nous sommes tous maintenant victimes du scientisme qui consiste à croire qu'une chose est vraie ou fausse alors que dans la réalité, il y a des situations qui sont bien plus subtiles que ça, bien plus subtiles que ça et qui demandent un outil de pensée que la notion de topos donne et c'est une notion qui est délicate, qui est difficile, qui demande, pour la connaître, pour la comprendre, une connaissance mathématique. Donc ce que je dirai si vous voulez, c'est qu'il y a un magnifique boulevard qui est ouvert. Ce boulevard consiste à apprendre suffisamment de mathématiques pour après les utiliser de la bonne manière, dans d'autres domaines, mais il faut d'abord commencer par apprendre suffisamment de mathématiques, c'est ça le prix à payer, c'est absolument nécessaire d'accord.

- Moi c'était justement par rapport à la question de la vérité : à vous entendre, on a l'impression que vraiment les mathématiques, ça permettait d'atteindre cette vérité avec la physique quantique, et je voulais savoir, je crois que c'est Einstein qui disait que "le monde est un peu comme une horloge fermée", on peut juste voir ce qui se passe, mais on ne peut jamais être sûr que ce qu'on trouvera, c'est vrai. Et qu'est-ce que vous en pensez de ça, de l'idée que peut-être que tout ce qu'on explique, ce sont des théories qui sont finalement fausses comme par exemple, Einstein, qui a tout remis en cause dans la physique... ?

- Il y a toujours effectivement la possibilité d'une théorie au-dessus, qui simplifiera ce qui est à l'étage avant etc. Mais on voit quand même qu'on progresse, de ce point de vue-là. Ce que j'essayais de faire passer justement, c'est l'extraordinaire subtilité, la richesse de la nature, de là où on est, quoi. Le fait qu'à chaque fois, on aura des surprises et on aura des surprises extraordinaires. Puisqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il y avait des physiciens qui disaient qu'on avait tout compris. Et justement, on était avant l'ère quantique, avant tout ça, avant la relativité générale. C'est vrai, parfaitement vrai, ce que vous dites. Mais, j'insisterai plus sur la merveilleuse imagination de la nature, quoi, je veux dire, on est sûrement très, très loin, il y a peut-être des civilisations, il y a sûrement des civilisations, dans d'autres planètes habitées, dans lesquelles les gens ont été beaucoup plus loin que nous. Ca, c'est bien possible et ils nous prendraient pour des primitifs. C'est bien possible, c'est tout à fait possible.

- Vous avez dit que les mathématiques n'étaient pas dans le domaine du connu, et globalement, les sciences. Mais est-ce que vous ne pensez pas que c'est parce que les mathématiciens, les physiciens et autres, ne participent pas assez au débat, par exemple, lors de la définition de programmes scolaires, on entend des philosophes, des historiens...

- Ca, c'est vrai, il y a du vrai là-dedans, il y a du vrai. Mais d'un autre côté, c'est pas tellement le problème. Je ne dirai pas que le problème vient du fait que ce n'est pas assez vulgarisé. Je pense que le problème vient plus de la lenteur de l'absorption par l'ensemble de la société de notions élaborées. Par exemple, je prends un exemple typique, qui pour moi est important. Vous voyez, au moment où l'imprimerie a été découverte, la notion de nombre a été transmissible. C'est-à-dire, il y a eu des bouquins, etc., etc. Maintenant, on en est au point où ce n'est plus le nombre qui est transmissible, mais c'est la notion de fonction, de graphe, etc. Et il y a un vocabulaire qui est passé dans le grand public, par exemple, quand on dit qu'on va inverser la courbe du chômage *(rires)*. Alors ça, ça fait intervenir l'annulation de la dérivée seconde. Si on nous disait "on va faire annuler la dérivée seconde...", il y aurait de quoi se marrer *(rires)*. Bon, enfin, vous voyez un peu le genre... Donc c'est sûr que, si vous voulez, il y a maintenant certaines notions mathématiques, dont la notion de fonction de croissance, de décroissance, de dérivée première, d'annulation de dérivée première, etc. qui sont passées dans le grand public, d'accord, mais il y a des notions beaucoup plus subtiles, comme la notion de topos, comme les notions qui viennent du quantique etc. qui ont plus de mal à passer dans le grand public. Comment les faire passer dans le grand public ? Sans doute par l'éducation, mais à ce moment-là, il faudrait qu'on soit beaucoup plus courageux, dans le système scolaire, c'est évident, c'est absolument évident. Il faudrait qu'on ne soit pas dans le renoncement actuel qui est lamentable. Je sais qu'à mon époque, bon je veux dire, qu'on n'arrêtait pas, moi, je n'arrêtais pas et mes copains n'arrêtaient pas, de faire des problèmes de géométrie. On rentrait chez nous, et on faisait des problèmes, et c'étaient pas du tout des problèmes faciles. Et maintenant, c'est fini ! Maintenant, on apprend des recettes, on apprend à appliquer des recettes ; bien sûr, c'est beaucoup plus facile pour un prof. Un jour, quand vous aurez des enfants, vous vous apercevrez d'une chose qui est absolument fondamentale, c'est que quand vous avez un petit enfant, vous avez le choix. Le petit enfant, il essaie de faire quelque chose, vous avez deux possibilités : la première possibilité, c'est de faire cette chose pour lui, vous croyez que vous l'aidez, en fait, vous ne l'aidez pas du tout, vous lui nuisez, en faisant ça ; la deuxième chose, c'est d'être patient, et d'attendre qu'il y arrive par lui-même. Et là, vous faites quelque chose de vraiment utile, d'accord. Donc bon, dans ce qu'on fait dans le système scolaire actuel, qui est d'apprendre des recettes toute faites pour résoudre des problèmes tout faits, ça consiste à faire les choses à la place de l'enfant. C'est exactement ça qu'on fait, c'est exactement ce truc-là. Alors que la vraie découverte du travail, la vraie découverte de l'école, elle doit se faire entre 11 et 12 ans. Et elle doit se faire en séchant devant des problèmes dont on ne nous donne pas la solution, mais dont on vous demande de la trouver, d'accord, où l'on vous demande de sécher. Et à partir du moment où à cet âge-là, on a compris ce qu'est le vrai travail, ça va, ça va, c'est OK. Et ça, ce n'est pas le cas dans le système scolaire actuel. Bien sûr, loin de là, terriblement. Bien sûr. Il y a Laurent Lafforgue qui a essayé, et de toutes ses forces, d'aller dans ce sens-là, bon, il y a dépensé énormément d'énergie ; dire qu'il y est arrivé, ce ne serait pas vrai, je vais dire, en tout cas, il y a des gens qui ont fait un effort colossal pour aller dans le bon sens, maintenant après, il y a une résistance terrible du système.

Un topo sur les topos

Alain Connes

Résumé : Alain Connes présente la démarche intellectuelle qui a mené Alexandre Grothendieck, à partir d'une "emmerdante" rédaction qu'il devait faire pour Bourbaki sur l'algèbre homologique, à découvrir et mettre au point la notion de topos et il essaie d'expliquer en quel sens cette notion a une portée considérable grâce en particulier aux nuances qu'elle introduit entre le vrai et le faux (organisateur du séminaire : Frédéric Jaëck (ENS), transcription : Denise Vella-Chemla)

Donc j'espère que je resterai dans l'esprit du séminaire et je pense que l'esprit du séminaire, c'est Grothendieck, avant tout. Donc ce que je vais faire, c'est essayer de m'effacer le plus possible devant Grothendieck et essayer d'expliquer justement, comme je le disais dans mon abstract, le parcours qui l'a amené aux topos, et surtout, je vais essayer de vous donner une métaphore éclairante pour ce que c'est qu'un topos, et vous expliquer ce qu'il y a d'extraordinaire dans cette découverte, au sens, surtout pour les philosophes, au sens où ça introduit des nuances considérables dans la notion de vérité. J'essaierai d'expliquer cela par un exemple, parce que rien de tel qu'un bon exemple pour expliquer. Il y aura l'un de mes slides qui s'appelle "à deux pas de la vérité" et je vais vraiment vous donner un exemple d'un topos qui permet de dire qu'on est par exemple à 10 pas de la vérité, ou qu'on est à 15 pas de la vérité, etc. Donc écoutez bien. Je vous ferai entendre Grothendieck, la voix de Grothendieck, parce que Grothendieck a fait 100 heures de conférences à Buffalo en 1973, et dans ces 100 heures de conférence, il y a des choses qui nous intéressent. Bien sûr, je ne vous le ferai pas écouter longtemps mais je le ferai écouter à un moment-donné, où il explique ce que c'est qu'un faisceau à des gens qui ne connaissent pas du tout. Et il explique comment il va faire son cours sur les topos. On verra, il y aura aussi un intermède encore plus marrant à un moment-donné, on n'entendra pas la voix de Grothendieck mais on entendra la voix d'Yves Montand. Vous verrez, enfin, vous entendrez tout ça.

Donc la première image que je vous montre, c'est une image que je dois à Charles Alunni qui m'a envoyé un email un jour en me disant qu'il aurait bien voulu avoir la deuxième thèse de Grothendieck. Mais à l'époque, quand on faisait une thèse, quand j'ai fait ma thèse par exemple, il y avait toujours une deuxième thèse. Cette deuxième thèse n'était pas écrite. C'était une deuxième thèse qu'on devait défendre devant le jury. Et on avait un sujet qui nous était donné. Ce qui est assez extraordinaire, c'est que dans le cas de Grothendieck, il a fait sa thèse sur les espaces nucléaires, sur les espaces vectoriels topologiques et sur les espaces nucléaires, et il a fait une contribution fondamentale à l'analyse fonctionnelle et ce qui est extraordinaire, c'est qu'on peut penser que ce qui a fait bifurquer Grothendieck, et qui éventuellement l'a amené à l'idée du topos, à cette idée merveilleuse, c'est sa deuxième thèse. Pourquoi ? Parce que la deuxième thèse de Grothendieck, c'est écrit dans ce texte, elle est sur la théorie des faisceaux.

Et alors sur cette page, si vous êtes perspicace, vous allez trouver qu'il y a une erreur, ce qui montre qu'on n'est jamais à l'abri des erreurs. Parce qu'il y a un des examinateurs, si vous regardez bien, qui s'appelle *Georges* Choquet *(rires)* Alors j'ai cherché, pour dire peut-être que je me suis trompé, il y a 3 examinateurs, il y a Henri Cartan, il y a Laurent Schwartz et puis il y a *Georges* Choquet. Alors j'ai cherché sur wikipedia pour voir s'il n'y avait pas un mathématicien qui s'appelait Georges Choquet. En fait, non, il y a un ecclésiastique qui s'appelait Georges Choquet et qui est mort pendant la deuxième guerre mondiale. Donc il n'y a pas de problème, c'est bien une erreur, et c'est bien Gustave Choquet qui était l'examinateur de Grothendieck. Donc sa thèse il l'a passée en 53.

Et déjà en 55, il s'intéressait bien sûr aux faisceaux, qui était une découverte merveilleuse de Leray. Et donc là, j'ai commencé par quelques échanges de lettres entre Serre et Grothendieck parce que finalement, c'est dans ces échanges de lettres que l'on voit apparaître ce qu'on appelle l'article qui est tellement fameux qu'on l'appelle Le Tohoku cet article. Cet article est paru dans un journal qui s'appelle le Tohoku Maths Journal mais l'article est tellement fameux qu'en fait, on l'appelle Tohoku.

Donc voilà ce que dit Grothendieck ; il dit :

"Mon Cher Serre,
Merci pour les divers papiers que généreusement tu m'as envoyés, ainsi que pour ta lettre. Rien de neuf de mon côté."

Conférence d'Alain Connes, le 7 novembre 2017, dans le cadre du séminaire "Lectures grothendieckiennes" de l'ENS, visionnable ici http://savoirs.ens.fr/expose.php?id=3257.

Alors ça, ça justifie ce que j'ai écrit quand j'ai annoncé mon laïus :

"J'ai fini mon emmerdante rédaction d'algèbre homologique."

Alors on va voir très graduellement quelle est la philosophie que Grothendieck utilise tout le temps quand il travaille, c'est-à-dire qu'il n'hésite jamais devant une tâche que n'importe quel mathématicien normal considérerait comme étant sans intérêt, rébarbative, n'allant rien lui rapporter. Donc il continue :

"... que j'ai envoyée à Delsarthe qui manquait de la rédaction pour la dactylo."

Il dit :

"Je l'ai proposée à Tannaka pour le Tohoku."

Le Tohoku, c'est le Tohoku Maths Journal.

"Il paraît que les articles-fleuve ne les rebutent pas."

Alors il est vrai que Grothendieck, en général, quand il écrit, le minimum, c'est au moins 100 pages. Ensuite, il parle de Weil. Je vais vous épargner ce qu'il en dit parce qu'il dit :

"J'ai lu au moins les énoncés des livres de Weil sur les variétés abéliennes dans l'espoir qu'on a arrangé depuis les démonstrations vraiment décourageantes chez Weil, son langage me dégoûte."...

En plus ! *(Rires)* Je passe... Il dit :

"Je passe mon temps soit à apprendre, soit à rédiger les variétés. C'est amusant mais long bien sûr, mais il n'est pas question de recherche avant d'avoir avalé une montagne de choses nouvelles."

Alors ensuite, très important, c'est sans doute la chose la plus importante dans cet échange, il dit à un moment-donné :

"Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules..."

(il faut dire qu'à l'époque, il y avait le livre de Cartan-Eilenberg qui était en gestation, Serre l'appelle le Cartan-Sammy - parce que c'est Sammy Eilenberg - et dans ce livre, il y avait bien-sûr les foncteurs dérivés mais c'était toujours appliqué à des catégories de modules. C'est-à-dire qu'on prenait la catégorie des modules sur un anneau non nécessairement commutatif et toute l'algèbre homologique était développée comme ça. Mais évidemment, elle était très analogue dans sa formulation avec ce qui se passait pour la cohomologie à coefficients dans un faisceau. Donc ce que dit Grothendieck, c'est :

"Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules, on obtient à peu de frais la cohomologie des espaces à coefficients dans un faisceau."

Il faut savoir qu'à l'époque, quand on prenait la cohomologie à coefficients dans un faisceau, c'était toujours la cohomologie de Čech. C'est à dire qu'on prenait des recouvrements de l'espace topologique, et puis on fabriquait un complexe ou un bi-complexe avec ces recouvrements et on définissait la cohomologie comme ça. Voilà.

Donc voilà ce qu'il dit, et ce point-là, dans sa correspondance, c'est un point absolument essentiel. Alors ensuite, il continue, et donc ça, c'est une lettre du 4 juin 1955, donc on est 2 ans après sa thèse, donc :

"Ci-joint le résultat de mes premières cogitations en forme, sur les fondements d'algèbre homologique."

Donc après, je ne vous détaille pas le reste puisque c'est sur des suites spectrales, etc. Mais disons que là, Grothendieck explique qu'il s'était planté sur l'existence de suffisamment de faisceaux projectifs mais à ce moment-là, il a démontré qu'il y avait suffisamment de faisceaux injectifs, et ça lui a permis de définir les foncteurs dérivés et ça lui a permis de définir, si vous voulez, la cohomologie à coefficients dans un faisceau sans hypothèse sur l'espace topologique. Si on a de bonnes hypothèses sur l'espace topologique, à ce moment-là, ça coïncide avec la cohomologie de Čech. Mais ça n'est pas vrai en général. Alors voilà la réponse de Serre. Donc là, il y avait autre chose dans la correspondance, il y avait autre chose qui était ce qu'on appelle l'Im_1, c'est à dire le foncteur pour les limites projectives, comment ça commute avec la cohomologie. Mais ce qu'il faut lire, c'est le deuxième paragraphe.

"Le fait que la cohomologie d'un faisceau soit un cas particulier des foncteurs dérivés, au moins dans le cas para-compact..."

(parce que dans le cas para-compact, ça coïncide avec la cohomologie de Čech, donc celle qui est définie à partir des recouvrements)

"...n'est pas dans Cartan-Sammy."

(Cartan-Sammy, c'est Cartan-Eilenberg)

"Cartan en avait conscience."

Donc, Cartan avait conscience du fait que, quand ils avaient développé avec Eilenberg toute la théorie cohomologique sur les modules, il avait conscience bien-sûr de l'analogie avec le cas de la cohomologie des faisceaux, mais bon, ils n'avaient pas voulu s'embarrasser pour le faire dans leur livre, et Cartan en avait conscience et avait dit à Buchsbaum de s'en occuper. Donc c'est Buchsbaum en fait qui, indépendamment de Grothendieck, a aussi défini les catégories abéliennes. Il avait commencé à le développer mais il ne s'était pas occupé de la cohomologie.

"Mais il ne me semble pas que celui-ci l'ait fait. Donc l'intérêt de ceci serait de voir quelles sont au juste les propriétés des faisceaux fins qu'il faut utiliser. Ainsi on pourrait peut-être se rendre compte si oui ou non..."

(c'est Serre qui parle, bien sûr)

"... il y a suffisamment de faisceaux fins dans le cas non-séparé.".

Alors le cas non-séparé est extrêmement important bien sûr pour la géométrie algébrique et c'était à un moment où justement, Serre développait la géométrie algébrique à partir de la théorie des faisceaux de Leray en prenant au départ la topologie de Zariski et la topologie de Zariski, elle n'est pas séparée. Je veux dire, donc, on a exactement ce problème-là. Donc cet échange est extrêmement important, c'est un échange qui date de l'année 55. Et l'article de Grothendieck donc, il est marqué *Reçu* 1^{er} *mars 1957*, donc c'est cet article *"Sur quelques points d'algèbre homologique"* qui est vraiment l'ancêtre, on peut vraiment placer, si vous voulez, l'origine des topos dans cet article.

La raison pour laquelle on peut placer l'origine des topos dans cet article, c'est que dans cet article, d'abord, bien sûr, il introduit ce que sont les catégories abéliennes. Donc ça, c'est extrêmement important, avec toutes leurs propriétés, etc. Il développe l'algèbre homologique dans le cadre des catégories abéliennes. Donc ça, c'est ce qu'il fait. Mais, ce qui est beaucoup plus important, c'est qu'il prend deux types d'exemples, dans son article, de catégories abéliennes. Le premier exemple de catégorie abélienne qu'il prend, c'est la catégorie abélienne des modules sur un anneau. Ca, ça appartient à Cartan-Eilenberg. Là-dessus, il n'y a pas de problème, mais il prend aussi l'exemple des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique, bien entendu ; là encore, pas de surprise puisque c'était pour unifier les 2 qu'il avait fait son travail de généralisation. Mais ce qui est absolument crucial, c'est qu'il avait un autre exemple en tête, un troisième exemple en tête, et c'est ce qu'il appelait les catégories de diagrammes. C'est-à-dire, ce qu'il faisait, c'était qu'il avait l'idée que si vous prenez des diagrammes de groupes abéliens, mais quels que soient les diagrammes que vous regardiez, eh bien, ça, ça forme encore une catégorie abélienne. Eh bien, en fait, si on pense juste, on s'aperçoit qu'il avait là les deux piliers de la notion de topos. C'est-à-dire qu'il avait la notion d'espace topologique, qui donne la notion de faisceaux de groupes abéliens, etc., et il avait aussi la notion de catégories de diagrammes et on verra que ces catégories-là, elles donnent naissance à un topos. Et ces topos ont un rôle absolument fondamental qu'on va utiliser tout le temps, tout le temps, tout le temps.

Alors, il y a une chose qui est à remarquer : il définit ce que c'est qu'une catégorie abélienne. Donc ce que dit Grothendieck, c'est qu'une catégorie abélienne, c'est une catégorie additive. Alors je vais vous expliquer en deux mots l'erreur qu'on a sur la catégorie additive qui satisfait aux deux axiomes supplémentaires suivants : alors, il y a le fait qu'un morphisme doit avoir un noyau et un co-noyau, ça, c'est une notion abstraite, si vous ne la connaissez pas, bon, ça prendrait un certain temps, c'est un peu une gymnastique, et la deuxième condition, c'est le fait d'être un morphisme exact. C'est-à-dire le fait que si vous divisez par le noyau et si vous regardez par rapport à ce qu'on appelle l'image en la définissant par rapport au co-noyau, eh bien, à ce moment-là, vous avez un isomorphisme entre le quotient par le noyau et l'image. Et ça, c'est extrêmement important, ce n'est pas vrai pour des applications dans des espaces topologiques par exemple, si vous prenez un espace de Hilbert et si vous prenez les applications linéaires continues dans l'espace de Hilbert, ça ne vérifie pas ces deux conditions. Ça n'est pas une catégorie abélienne et la raison, c'est que vous pouvez avoir un morphisme qui a une image, mais il est dense dans son image et son image n'est pas fermée et à ce moment-là, la deuxième condition AB2 n'aura pas lieu.

Alors il y a une erreur que Grothendieck reproduit quand il définit les catégories additives dans son article et qui est la chose suivante : c'est qu'en général, les gens définissent une catégorie additive en disant "une catégorie additive, c'est une catégorie où on rajoute une structure supplémentaire qui est la structure de groupe additif sur les morphismes." Eh bien, c'est une hérésie. Je vais vous expliquer pourquoi : parce qu'en fait, ça n'est pas du tout une structure supplémentaire. Et il y a un exercice dans MacLane que je vous ai noté là qui montre que c'est une hérésie. Quelle est cette hérésie ? L'hérésie est que quand vous prenez une catégorie comme une catégorie abélienne, elle a des produits et des co-produits. Ca, c'est une chose très simple. Et elle a un objet qui est à la fois initial et final, c'est l'objet 0 ; dans les groupes abéliens, c'est le groupe qui est réduit à 0. D'accord ? C'est un objet initial parce que vous avez une seule flèche qui va de 0 vers n'importe quel groupe abélien, et c'est un objet final parce que vous avez une seule flèche qui va d'un groupe abélien vers 0. Tout s'envoie vers 0. Donc il y a un objet qui est à la fois initial et final. Eh bien, si vous avez ça, vous pouvez dire, quand la catégorie est abélienne. Comment ?

Eh bien, parce que ce qui se produit, vous avez une flèche complètement canonique, complètement naturelle, qui va du coproduit de deux objets vers le produit de deux objets. Parce qu'en utilisant le 0, vous pouvez envoyer la moitié sur 0 et l'autre moitié sur 0 et à ce moment-là, vous avez une flèche qui est complètement naturelle. Si vous demandez si cette flèche est un isomorphisme, vous avez fait la moitié du parcours. Parce que comme cela est expliqué dans ce texte de MacLane, à ce moment-là, vous avez une addition pour les morphismes. Simplement en utilisant le fait que cette flèche naturelle qui va du coproduit vers le produit est un isomorphisme. Vous avez une addition naturelle pour les morphismes et une fois que vous avez cette addition naturelle, vous pouvez prendre l'axiome supplémentaire qu'il y a un signe moins, si vous voulez, pour cette addition, bien sûr en général, vous n'aurez pas un signe moins, c'est ce qu'on appelle les catégories semi-additives, elles sont très intéressantes, mais une catégorie additive, vous demandez simplement qu'il y ait un inverse. Et alors, donc, ça n'est pas une structure supplémentaire. C'est une hérésie de croire qu'une catégorie additive est donnée par une catégorie + une structure supplémentaire. Ça n'est pas vrai. Donc c'est une erreur.

Alors, maintenant, je vais vous lire du Grothendieck, puisque le principe du séminaire est de s'effacer devant Grothendieck. Et même à un moment-donné, on va l'écouter. Et puis lorsqu'on aura lu et écouté suffisamment Grothendieck, là, je prendrai une métaphore, puis on verra un exemple. D'accord, donc soyez patients, je ne vais pas faire que lire ou vous faire écouter du Grothendieck, il faut être patient, mais écoutons-le quand-même. Voilà ce qu'il dit :

> *"Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les "espaces" et "variétés" en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace..."*

Donc ce que dit Grothendieck, c'est que Leray avait envisagé un espace sous la forme des faisceaux sur cet espace, mais en fait, d'ailleurs, Leray ne considérait que les faisceaux de groupes abéliens. Et on va voir le changement que Grothendieck a apporté déjà même là.

> *"Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels "espaces", déjà familiers à tous. Or, il*

s'est avéré que cette notion d'espace est inadéquate pour rendre compte des "invariants topologiques" les plus essentiels qui expriment la "forme" des variétés algébriques "abstraites" (comme celles auxquelles s'appliquent les conjectures de Weil), voire celle des "schémas" généraux..."

Alors là, c'est le moment où je vais vous faire entendre Grothendieck. Pourquoi, parce qu'on va entendre Grothendieck qui définit ce que c'est qu'un faisceau. Donc, je pense que c'est important que vous l'écoutiez, d'accord, parce que vous ne savez pas forcément ce que c'est qu'un faisceau, on va écouter Grothendieck en parler, d'accord, et une fois qu'on aura écouté Grothendieck en parler, on reviendra à nos moutons. C'est le début de ses conférences à Buffalo.

"Depuis des années, les topoi sont essentiellement des objets de la topologie générale. Je veux dire qu'un topos peut être considéré comme l'objet d'étude principal de la topologie. Et donc, les topoi sont la généralisation de la topologie générale classique. Je vais considérer... Disons que leur étude nécessite une certaine familiarité avec la manipulation des espaces topologiques, des cartes, des homomorphismes, etc., et d'autre part une familiarité avec le langage des catégories... Plus tard, nous parlerons d'exponentiations et je donnerai des exemples. Mais pour comprendre... ce que signifie le terme topos, il faudrait une certaine familiarité avec le langage des faisceaux sur un espace topologique. Je pense que ces notions ne sont pas très familières à tout le monde, donc je pense que je donnerai plutôt quelques notions d'introduction sur les faisceaux sur un espace topologique. Je veux supposer que l'on sait tout à ce sujet. Je passerai en revue une "faisceau-machinerie" standard... J'espère que si certaines explications ne sont pas claires, ou si certains commentaires viennent, vous m'interromprez librement pour poser des questions, pour signaler des erreurs ou pour faire tout type de commentaires. Ce serait bien si, au fur et à mesure, il y avait une sorte de participation du public, je suis sûr qu'un certain nombre d'entre vous ont quelques notions sur les topoi... Vous pourrez faire des suggestions et commentaires.

Je commence donc par une sorte d'étude formelle des faisceaux sur un espace topologique. Soit X un espace topologique, et considérons l'ensemble $O(X)$, il dépend de X, de tous les sous-ensembles ouverts de X. La topologie de X est définie en fonction des familles de sous-ensembles ouverts de X qui est un sous-ensemble des $Parties(X)$. Je rappelle l'axiome de la topologie qui est que $O(X)$ doit être stable par des unions arbitraires et par des intersections finies. Donc $O(X)$ en particulier est un ensemble ordonné par inclusion et tout cela définit une catégorie par abus de langage. Si U et V sont des éléments de $O(X)$, sont des ensembles ouverts sur X, l'ensemble des homomorphismes de U vers V sera soit l'ensemble vide si U n'est pas contenu dans V et peut être réduit à l'inclusion de U dans V, si U est contenu dans V ; c'est la définition du vide et de la composition des flèches ... Il doit y avoir au plus une flèche d'un objet à un autre. Donc, cette construction d'une catégorie en termes d'ensembles ouverts est logique pour tout ouvert que ce soit. Donc, la catégorie qui se comporte comme ... flèches du graphe de toutes les relations ... Maintenant, définissons d'abord les pré-faisceaux : un pré-faisceau sur X, disons f, est par définition un foncteur qui va de la catégorie $O(X)$ dans la catégorie des ensembles, quand je dis un pré-faisceau, je veux dire un pré-faisceau d'ensembles, plus tard, nous verrons d'autres types de pré-faisceaux. Mais ça devrait être un foncteur contravariant ... C'est un foncteur qui va de la catégorie opposée à $O(x)$ à la catégorie des ensembles, rappelons donc ce que cela signifie pour un foncteur : tout d'abord, cela signifie pour les objets de $O(X)$, pour chaque ensemble ouvert, $U(X)$, nous associons un objet fU de la catégorie des ..., (Remarque d'Alain Connes : ce qui est très important, c'est qu'il parle de faisceaux d'ensembles, et Leray parlait de faisceaux de groupes abéliens.) *C'est une flèche entre des catégories, cela signifie que pour chaque carte d'inclusion de U dans V deux ensembles ouverts, nous associons une carte de fV dans fU ..., cette carte sera appelée la carte de restriction, correspondant aux pré-faisceaux, et les axiomes sont les axiomes évidents de la transitivité, c'est-à-dire que si nous avons V qui est contenu dans un autre ensemble ouvert W, alors nous aurons une carte de restriction de fV à fW mais aussi de fW à fV et nous voulons que la restriction de fW à fU... soit la composition ici et d'ailleurs nous voulons que dans le cas où nous prenons l'identité, la flèche d'identité de U dans U, on veut que la carte correspondante fU qui passe à fU soit l'identité... comme des cartes de foncteurs ... Donc un pré-faisceau sur f n'est qu'un foncteur contravariant de la catégorie $O(X)$ vers les ensembles. Et la catégorie des pré-faisceaux sur X, appelons-la $PreFaisceaux(X)$, est définie comme étant la catégorie de tous les foncteurs de $\dot{O}$ aux ensembles. Ainsi, les pré-faisceaux peuvent être considérés comme des objets d'une catégorie, la catégorie des pré-faisceaux, dans la catégorie des foncteurs. Alors qu'est-ce qu'un homomorphisme d'un pré-faisceau f vers un autre g, par définition des homomorphismes de foncteurs. Prenons f un tel homomorphisme. Par définition, f consiste en une connexion de cartes de fU vers gU, nous appelons cette carte $f(U)$ pour chaque objet U de la catégorie de tous les sous-ensembles ouverts de X, et ces cartes d'ensembles seront compatibles avec les cartes de restriction, ce qui signifie que chaque fois que U est contenu dans un ensemble ouvert V, alors* *nous avons aussi fV qui va dans gV par f de V et nous avons les cartes de restriction ici, de fV à fU et de gV vers gU et il faut que que le carré commute. Voilà donc un homomophisme de pré-faisceaux, c'est juste un homomorphisme de foncteurs, et ils se composent de manière évidente, leur composition est vers l'extérieur et vers l'intérieur (?). Il y a un homomorphisme de pré-faisceaux ... cela signifie pour chaque U, un homomorphisme de gU en hU, la composante de g et f est définie comme associant à chaque U la composition des homomorphismes ici. Très bien, donc c'est juste un non-sens général[1] sur les foncteurs, sur les catégories. Jusqu'à présent, nous n'avons pas utilisé le fait que $O(X)$ était la catégorie des sous-ensembles ouverts de X, nous venons d'utiliser le fait que c'est un ensemble ordonné, mais on va l'utiliser maintenant pour définir la notion de pré-faisceau sur X qui rappelle les faisceaux sur X, nous devons introduire un autre axiome sur les pré-faisceaux qui se transforme en faisceaux. Maintenant, traditionnellement les axiomes sur les préé-faisceaux sont séparés en deux : vous dites d'abord que les pré-faisceaux sont des séparateurs si l'axiome suivant est vrai : pour chaque ensemble ouvert U sur X et pour chaque recouvrement de U par des sous-ensembles ouverts U_i dont l'union est U, peut être défini en termes d'ensembles ordonnés ; c'est juste le supremum des U_i et, en termes de ... Soit la cartographie de fU, dans chacun des fU, une carte de restriction, et donc, nous obtenons une cartographie de f dans le produit des fU est et on n'a que deux ensembles, séparés par chacun de ces choix ici, cette application est injective.*

Maintenant, disons ceci d'une autre manière : si f est un pré-faisceau sur X, f de U, les éléments des ensembles s'accordent aux sections de f sur U. Quand nous donnerons des exemples, nous verrons d'où vient cet accord des sections. Très bien, et, la carte ici, je l'ai déjà dit contenue dans V, la carte donnée de fV en fU sera appelée la carte de restriction ... qui signifie que les sections de ... est appelée la restriction de ... à U et à l'axiome pour qu'un faisceau soit séparé signifie qu'à chaque fois qu'il existe une union de sous-ensembles ouverts $U_i(X)$, dont l'union est U, il y a une section des pré-faisceaux sur U connue sous le nom de ces restrictions sur les U_i. La première condition serait restreinte en ... mais en termes géométriques, cela signifie simplement que ... la flèche est une injection, cela signifie qu'une section de f sur U peut être identifiée pour le système de sections de f sur ces U_i est stable alors la deuxième question qui se pose est de voir si nous pouvons identifier ici les sous-ensembles que nous obtenons comme images de fU qui sont les systèmes de sections de f sur U qui proviennent de sections globales f sur U. Prenons maintenant un système de sections disons Φ_i dans fU_i pour chaque i, pour chaque index, ici l'axiome nécessaire pour ce système de Φ provienne de sections globales est le suivante : quand vous avez deux indices i et j, la restriction de Φ_i à $U_i \cap U_j$ pourrait être égale à Φ_j... "

Voilà, je m'arrête ici, notre patience est sans doute épuisée. Mais, je vais dire qu'une des raisons pour lesquelles je vous ai fait entendre Grothendieck est assez compliquée : il faut qu'on s'habitue à cette incroyable patience qu'il a d'expliquer tous les détails, de rentrer, d'aller jusqu'au bout de tous les détails. Et ça, on le verra, je veux dire, c'est une qualité absolument essentielle dans sa démarche. Donc je continue à lire ce qu'il disait sur le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray. Grothendieck continue, il dit :

"Pour les "épousailles" attendues, "du nombre et de la grandeur", c'était comme un lit décidément étriqué, où l'un seulement des futurs conjoints (à savoir, l'épousée) pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais les deux à la fois ! "

Donc là, il avait en tête effectivement toutes sortes de développements qui étaient de nature combinatoire, qui étaient reliés à la théorie des nombres, par opposition à ce qui se passait en topologie mais bon, bien sûr, il y avait le travail de Serre sur l'utilisation de la topologie de Zariski.

"C'est le point de vue des faisceaux qui a été le guide silencieux et sûr, la clef efficace (et nullement secrète), me menant sans atermoiements ni détours vers la chambre nuptiale au vaste lit conjugal. Un lit si vaste en effet (telle une vaste et paisible rivière très profonde. . .), que
"tous les chevaux du roi
y pourraient boire ensemble..." "

On y reviendra à ça.

"comme nous le dit un vieil air"

1. ?

(que je vous ferai entendre tout à l'heure)

"comme nous le dit un vieil air que sûrement tu as dû chanter toi aussi, ou au moins entendre chanter. Et celui qui a été le premier à le chanter a mieux senti la beauté secrète et la force paisible du topos, qu'aucun de mes savants élèves et amis d'antan..." (rires)

Bon, il y a bien sûr dans cette phrase, le fait que nous connaissons, sans doute, beaucoup d'entre nous, qui est que le premier à dévoiler un certain paysage mathématique en a une appréhension qui est incomparable (c'est ce qui est arrivé à Galois par exemple) par rapport aux autres mathématiciens qui viennent après lui et le comprennent. Ca, c'est une chose très frappante, il dit quelque chose de plus méchant, de beaucoup plus méchant.

"La clef a été la même, tant dans l'approche initiale et provisoire (via la notion très commode, mais non intrinsèque du "site")" (dont je vous parlerai, bien sûr)

"...que dans celle du topos. C'est l'idée du topos que je voudrais essayer à présent de décrire.".

Donc laissons parler Grothendieck bien sûr.

"Considérons l'ensemble formé de tous les faisceaux sur un espace (topologique)"

Alors, à l'intention du mathématicien, à vrai dire, il s'agit ici des faisceaux d'ensembles, ça, c'est absolument fondamental, c'est un pas énorme, qu'il ait remplacé les faisceaux de groupes abéliens, qui étaient intéressants, on pensait que c'étaient les seuls intéressants, puisque ce sont les seuls qui vont donner une cohomologie, etc. Non ! Il a eu l'idée, qui paraît complètement naïve, de remplacer les faisceaux de groupes abéliens par des faisceaux d'ensembles, et on va voir la portée que ça donne.

"Je crois d'ailleurs".

(et c'est ce qu'il dit)

"être le premier à avoir travaillé systématiquement avec les faisceaux d'ensembles à partir de 1955. Quel est l'avantage de travailler avec les faisceaux d'ensembles, on va le voir, c'est que quand vous travaillez avec les faisceaux d'ensembles, vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe dans ce truc-là, vous pouvez définir ce que c'est qu'une algèbre dans ce truc-là, parce que ce que vous faites, c'est que vous travaillez comme si vous travailliez dans les ensembles mais il y a une variabilité. C'est-à-dire qu'il y a quelque-chose qui bouge, mais sinon, vous faites exactement comme si vous travailliez dans les ensembles, habituels. Donc vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe. Alors, si vous cherchez ce que c'est qu'un groupe abélien dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles, eh bien, vous trouvez les faisceaux de groupes abéliens. Donc on retombe sur ses pieds."

Ensuite ce que dit Grothendieck :

"Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, "à vue de nez"; à savoir, une structure dite de "catégorie"."

Alors bien sûr, nous, on a été éduqués, du moins à mon époque, avec la théorie des ensembles. En fait, c'était sans doute une erreur. La vraie manière de penser, c'est la théorie des catégories. Donc, il pense à cette espèce de théorie qu'il a devant les yeux comme une catégorie.

"(Que le lecteur non mathématicien ne se trouble pas, de ne pas connaître le sens technique de ce terme. Il n'en aura nul besoin pour la suite.)"

C'est-à-dire que ce qu'il faut que le lecteur non-mathématicien pense, simplement, c'est qu'il a un analogue, maintenant, de la théorie des ensembles, dans cette nouvelle catégorie, dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles. Il y a quelque chose qui ressemble à la théorie des ensembles, et on va voir que cette métaphore va très loin.

"C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace

envisagé), qui sera dorénavant considérée comme "incarnant" ce qui est le plus essentiel à l'espace."

Alors on verra une métaphore, que je développerai plus loin, mais je peux déjà en dévoiler une partie. Si vous voulez, d'habitude, quand on parle d'un espace, je vais vous la montrer tout de suite parce que je ne veux pas attendre, pour cette métaphore. Voilà, la métaphore est la suivante : avant Grothendieck, on avait l'habitude, quand on étudiait un espace, je ne sais pas moi, une courbe, ou n'importe quoi, on mettait l'espace... sur la scène. Et puis, on le regardait, on l'étudiait, comme un ensemble muni d'une structure, etc. Eh bien, ce que fait Grothendieck, c'est... non ! L'espace n'est pas sur la scène, l'espace, il est dans les coulisses. Sur la scène, il y a les acteurs habituels de la théorie des ensembles : les groupes abéliens, les algèbres, etc. Mais, l'espace en question, il est dans les coulisses, comme un espèce de *Deus ex machina* qui introduit une variabilité dans les personnages qui sont sur la scène. C'est-à-dire que maintenant les personnages qui sont sur la scène, ils vont dépendre d'un aléa. Cet aléa, il est gouverné par le topos. Et quand on a un topos de Grothendieck, il y a aussi les constantes, c'est-à-dire qu'il y a aussi les ensembles qui ne dépendent pas de l'aléa. Et la cohomologie, elle se définit en comparant les deux.

Donc c'est absolument fondamental que vous essayiez progressivement d'acquérir une image mentale, même si vous n'êtes pas mathématicien, pour comprendre que l'espace qui est donné par le topos, il va apparaître derrière, il est dans les coulisses, il n'est pas sur le devant de la scène, ça n'est pas lui qu'on étudie ; on étudie la théorie des ensembles, mais il y a ce bon Dieu de topos, qui est caché et qui fait tout varier, qui introduit une variabilité là-dedans, d'accord. Donc alors, c'est ce que dit Grothendieck d'une autre manière : *"ce qu'il considère comme cet ensemble ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente"*, il y pense comme à une catégorie, cette catégorie de faisceaux d'ensembles. Alors ensuite que dit-il ? *"Que c'est une chose licite d'oublier l'espace et de ne considérer que la catégorie des faisceaux d'ensembles."*

Pourquoi est-ce que c'est une chose licite ? C'est une chose licite parce qu'on n'a pas perdu l'espace en cours de route. On retrouve les points de l'espace. Alors, comment est-ce qu'on retrouve les points de l'espace dans la métaphore que je vous ai donnée ? Parce que lui dit *"c'est un simple exercice de le vérifier : une fois qu'on a posé la question."*. Bon. Effectivement, vous pouvez vous amuser, en pensant en termes classiques, si vous avez les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ordinaire, comment est-ce que vous allez retrouver l'espace lui-même, c'est-à-dire les points de l'espace ? Vous pouvez vous poser cette question. Alors en fait, dans la métaphore que je vous ai donnée, les points de l'espace, c'est quand vous prenez un instant donné, un temps figé. Quand vous prenez un temps qui est figé, eh bien, à ce moment-là, il n'y a plus de variabilité, et vous avez la théorie des ensembles ordinaire. C'est ce qu'on appelle abstraitement dans la théorie des topos un point d'un topos, c'est-à-dire que c'est ainsi qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va de la théorie des ensembles ordinaire vers le topos considéré. Mais ça revient exactement à figer les choses à un instant donné.

Lui dit *"de vérifier est un simple exercice."*. En fait, ce n'est pas toujours vrai ; comme il dit *"(à l'intention du mathématicien) A strictement parler ceci n'est vrai que pour des espaces dits "sobres" "*. Il faut quand-même qu'il y ait un minimum de séparation dans l'espace. Et il y a un exemple extrêmement intéressant, que je vous invite à faire, parce qu'il faut toujours... on ne fait pas des maths en écoutant, on fait des maths en faisant des exercices. Donc il y a l'exercice déjà sur les catégories abéliennes de tout à l'heure. Et voilà un autre exercice maintenant. C'est que vous prenez une courbe avec sa topologie de Zariski. Ou vous prenez plutôt une surface avec sa topologie de Zariski. Et vous calculez les points du topos correspondant, c'est-à-dire de la topologie des faisceaux pour la topologie de Zariski. Eh bien, vous allez vous apercevoir qu'il y a plus de points, parce que l'espace en question, il n'était pas sobre, et vous allez obtenir exactement les points du schéma correspondant. Donc je vais dire, déjà, dans cet exemple-là, on voit le potentiel absolument incroyable de cette manière de penser. Il dit :

"...nous pouvons désormais "oublier" l'espace initial, pour ne plus retenir et ne nous servir que de la "catégorie" associée, laquelle sera considérée comme l'incarnation la plus adéquate de la "structure topologique" (ou "spatiale") qu'il s'agit d'exprimer."

Alors ce qu'il explique après, c'est :

"Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion, (celle d'"espace"), en termes d'une autre (celle de "catégorie")."

Donc on a remplacé, toujours en suivant la métaphore, l'espace par cette catégorie, qui est une catégorie d'ensembles, ce sont des ensembles.

"A chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension."

Bien entendu.

"et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre."

"Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète")."

On dénie, a priori, à une catégorie le droit de représenter quelque-chose de continu. Or c'est le cas ici. C'est le cas parce qu'on retrouve les points et on retrouve la topologie des points, simplement à partir de la catégorie, qui *ressemble* à la catégorie des ensembles.

"Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" " (donc les catégories que l'on obtient comme catégories de faisceaux d'ensembles) *"sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière."*

"Le "miroir" dont il est question ici, comme dans Alice au pays des merveilles, est celui qui donne comme "image" d'un espace, placé devant lui, la "catégorie" associée."

Donc cette catégorie, c'est la catégorie de la scène derrière laquelle est le topos.

"Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, (on ne va pas en parler tout de suite) qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles." Quelle est la plus simple d'entre elles ? C'est la théorie des ensembles. Donc les catégories que vous obtenez comme ça, à partir d'un topos, sont des pastiches de la théorie des ensembles. C'est ce que dit Grothendieck.

"Ceci dit, un "espace nouveau style" (ou topos), généralisant les espaces topologiques traditionnels, sera décrit tout simplement comme une "catégorie" qui, sans provenir forcément d'un espace ordinaire, possède néanmoins toutes ces bonnes propriétés." Donc on les appelle topos, alors il va le dire d'ailleurs, attendez, il faut que je le trouve...

"Le nom "topos" a été choisi (en association avec celui de "topologie", ou "topologique") pour suggérer qu'il s'agit de "l'objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique. Par le riche nuage d'images mentales que ce nom suscite, il faut le considérer comme étant plus ou moins l'équivalent du terme "espace" (topologique), avec simplement une insistance plus grande sur la spécificité "topologique" de la notion. Ainsi..." Bon, il parle des espaces vectoriels, etc. Donc je reviens en arrière.

"Voici donc l'idée nouvelle. Son apparition peut être vue comme une conséquence de cette observation, quasiment enfantine à vrai dire, que ce qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses "points" ou ses sous-ensembles de points, et les relations de proximité etc. entre ceux-ci, mais que ce sont les faisceaux sur cet espace, et la catégorie qu'ils forment. Je n'ai fait, en somme, que mener vers sa conséquence ultime l'idée initiale de Leray - et ceci fait, ***franchir le pas****. Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d' "évidence", par sa simplicité."*

En fait, on sait quand on fait des maths, quand on est sur la bonne voie, quand quelqu'un vous dit *"Oh, ce n'est que ça !". (rires)*

Voilà ce que dit Grothendieck, donc :

"...par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : "Oh, ce n'est que ça !", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. A ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance..."

Donc là, il revient à la notion de schéma :

"Elle constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, une métamorphose de la notion d'espace."

Si vous voulez, ce qui est absolument extraordinaire, au départ, même, dans la notion de topos, c'est la manière dont l'espace est appréhendé. Comme je le disais, il n'est plus appréhendé par les points, il est appréhendé par l'aléa qu'il introduit : il introduit un aléa dans la théorie des ensembles ; il introduit une variabilité dans la théorie des ensembles. Et ça, c'est extraordinaire.

"Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au delà de celle-ci, de la géométrie. Dès à présent d'ailleurs, elle a joué un rôle crucial dans l'essor de la géométrie nouvelle."

Ca, c'est pour la cohomologie l-adique, ou pour la cohomologie cristalline.

"Comme sa sœur aînée (et quasi-jumelle)[2]*, elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici."*

Primo, il ne faut pas que cette notion soit trop vaste, je passe assez vite là-dessus ; il parle des topos, on en a parlé ; il faut que "les constructions géométriques les plus essentielles" s'appliquent bien entendu, qu'elles "puissent se transposer de façon plus ou moins évidente." Il ne faut pas qu'elle soit trop générale, il ne faut pas que la notion que vous preniez soit, par exemple, la notion générale de catégorie. Si c'était la notion générale de catégorie, on n'irait pas loin. Donc il faut qu'elle ait cette propriété.

Il explique : *"Parmi ces "constructions", il y a notamment celle de tous les "invariants topologiques" familiers."*

Il explique très bien : *"Pour ces derniers, j'avais fait tout ce qu'il fallait dans l'article déjà cité de "Tohoku" (1955)."*

Donc l'origine, vous voyez, elle vient de là. Comme je le disais tout à l'heure, dans l'article de Tohoku, il y avait à la fois les faisceaux sur un espace topologique et il y avait aussi, et c'était extrêmement important, les catégories de diagrammes, il parlait des catégories de diagrammes et on va voir qu'elles jouent un rôle absolument essentiel, de la même manière. Donc il parle des associations mentales, et de notions moins techniques, bien sûr.

"Secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique" - aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires."

Comme on le verra dans un exemple que je vous donnerai dans relativement peu de temps, comme on le verra, ce qui se produit dans la métaphore dont je vous parlais, ce qui va se produire, c'est que comme il y a cet aléa, comme il y a cette variabilité dans la théorie des ensembles, on ne peut plus appliquer le principe du tiers-exclus. Par contre, l'intuitionnisme marche. Et donc, ce que ça va engendrer, cette nuance, c'est pour ça que je veux vous y amener pas à pas, on est lent, mais il faut que nous soyons lents, donc je vous montrerai un exemple, comme je l'ai dit au début, dans lequel la notion de vérité associée au topos sera beaucoup plus subtile que la notion de vérité ordinaire, et j'aurai un transparent, sur lequel il y aura marqué "à deux pas de la vérité" et je vous donnerai un topos dans lequel on sera "à 10 pas de la vérité", "à 15 pas de la vérité", "à 20 pas de la vérité", etc. On prendra un exemple parce que tant qu'on n'a pas

2. la théorie des schémas

pris un exemple, tant qu'on parle abstraitement, on ne sait pas trop ce qu'on fait. Donc on se dirige vers là.

"La chose cruciale ici, dans l'optique des conjectures de Weil, c'est que la nouvelle notion est assez vaste en effet, pour nous permettre d'associer à tout "schéma" un tel "espace généralisé" ou "topos" (appelé le "topos étale" au schéma envisagé). Certains "invariants cohomologiques" de ce topos (tout ce qu'il y a de "bébêtes"!) semblaient alors avoir une bonne chance de fournir "ce dont on avait besoin" "

Il continue et on se relaxe un peu avant de venir aux exemples et aux choses vraiment cruciales.

"C'est dans ces pages que je suis en train d'écrire que, pour la première fois dans ma vie de mathématicien, je prends le loisir d'évoquer (ne serait-ce qu'à moi-même) l'ensemble des maître-thèmes et des grandes idées directrices dans mon œuvre mathématique. Cela m'amène à mieux apprécier la place et la portée de chacun de ces thèmes, et des "points de vue" qu'ils incarnent, dans la grande vision géométrique qui les unit et dont ils sont issus. C'est par ce travail que sont apparues en pleine lumière les deux idées novatrices névralgiques dans le premier et puissant essor de la géométrie nouvelle : l'idée des schémas, et celle des topos."

Et là, il insiste :

"C'est la deuxième de ces idées, celle des topos, qui à présent m'apparaît comme la plus profonde des deux. Si d'aventure, vers la fin des années cinquante..."

Donc Grothendieck a introduit les topos dans une période un peu dépressive qu'il avait eue après la mort de sa mère en 1957, il a introduit les topos en 58. Donc on sera, l'année qui vient, au 60ème anniversaire de la naissance des topos.

"Si d'aventure, vers la fin des années cinquante, je n'avais pas retroussé mes manches, pour développer obstinément jour après jour,"

Ca, c'est Grothendieck : "Obstinément, jour après jour..."

"tout au long de douze longues années, un "outil schématique" d'une délicatesse et d'une puissance parfaites - il me semblerait quasiment impensable pourtant que dans les dix ou vingt ans déjà qui ont suivi, d'autres que moi auraient pu à la longue s'empêcher d'introduire à la fin des fins (fut-ce à leur corps défendant) la notion qui visiblement s'imposait, et de dresser tant bien que mal tout au moins quelques vétustes baraquements en "préfab", à défaut des spacieuses et confortables demeures[3] *que j'ai eu à cœur d'assembler pierre par pierre et de monter de mes mains."*

Là, il parle des schémas.

"Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des "sites"). Et, à supposer même cette idée-là déjà gracieusement fournie, et avec elle la timide promesse qu'elle semblait receler..."

Vous savez, quelqu'un vous dirait : "Je vais faire ça...". "Bonne chance !", vous diriez ! D'accord... *(rires*[4]

"...je ne vois personne d'autre, que ce soit parmi mes amis d'antan ou parmi mes élèves, qui aurait eu le souffle, et surtout la foi, pour mener à terme cette humble idée (si dérisoire en apparence...)"

Qu'est-ce que c'est que de s'évertuer sur les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ?...

"...(si dérisoire en apparence alors que le but semblait infiniment lointain...) : depuis ses premiers débuts balbutiants, jusqu'à la pleine maturité de la "maîtrise de la cohomologie étale", en quoi elle a fini par s'incarner entre mes mains, au cours des années qui ont suivi."

3. adresse de l'orateur au public : "là, il parle des schémas"
4. pour souligner l'ironie de l'euphémisme du Bonne chance par rapport à l'ampleur de la tâche que cela représente.)

Bon après, il parle de détails, enfin, de choses qui sont importantes pour le mathématicien, mais il parle de la cohomologie étale et c'est à ce propos, comme il le dit :

"C'est inspiré par ce propos que j'avais découvert la notion de site en 1958." Donc, il a découvert la notion de site en 1958, et c'est cette notion, bien sûr, et le formalisme cohomologique, qui ont été développés plus tard.

Il dit :

"Quand je parle de "souffle" et de "foi"," (ça, c'est toujours pour le mathématicien), *"il s'agit là des qualités de nature "non-techniques" "*

Grothendieck a écrit quelque-part dans Récoltes et Semailles qu'il n'était pas rapide, qu'il était entouré de gens beaucoup plus rapides que lui, mais bon, c'est un exemple qui montre à quel point, il ne faut pas se décourager, quand on n'est pas rapide, bon quand on parle avec des gens dont on s'aperçoit qu'ils comprennent dix fois plus vite que vous, il ne faut pas se décourager. Par contre, ce qui est absolument crucial, c'est d'être persévérant, et d'avoir la foi dans une idée.

C'est-à-dire si vous avez une idée, il faut d'abord que vous vous l'appropriez, que vous la fassiez vôtre. Et une fois qu'elle est vôtre, il faut la protéger ;au départ, il faut la protéger comme un tout petit enfant qui vient de naître. Il ne faut pas trop la montrer, pas trop, etc. *(petits rires)* Et puis après... Pas tellement parce que quelqu'un peut vous la prendre mais parce qu'il faut que vous la testiez, on va en parler plus tard, il faut que vous la testiez, il faut que vous vous habituiez à elle, en privé.

"A un autre niveau, je pourrais y ajouter aussi ce que j'appellerais le "flair cohomologique", c'est-à-dire le genre de flair qui s'était développé en moi pour l'édification des théories cohomologiques."

Après, il râle un peu contre ses élèves, mais ça, on en a l'habitude avec Grothendieck.

On va faire une petite pause : on ne va pas s'arrêter mais je vais vous faire écouter Yves Montand *(rires).*

"Oui, la rivière est profonde, et vastes et paisibles sont les eaux de mon enfance, dans un royaume que j'ai cru quitter il y a longtemps. Tous les chevaux du roi y pourraient boire ensemble à l'aise et tout leur saoul, sans les épuiser ! Elles viennent des glaciers, ardentes comme ces neiges lointaines, et elles ont la douceur de la glaise des plaines. Je viens de parler d'un de ces chevaux, qu'un enfant avait amené boire et qui a bu son content, longuement. Et j'en ai vu un autre venant boire un moment, sur les traces du même gamin si ça se trouve - mais là ça n'a pas traîné. Quelqu'un a dû le chasser. Et c'est tout, autant dire."

On écoute la chanson Aux marches du Palais*, chantée par Yves Montant, qui raconte l'histoire de la jeune-fille qui a tant d'amoureux qu'elle ne sait lequel prendre et qui a choisi son petit cordonnier.*

Voilà, on revient aux choses sérieuses.

Alors, il continue, il dit :

"Je vois pourtant des troupeaux innombrables de chevaux assoiffés qui errent dans la plaine - et pas plus tard que ce matin même leurs hennissements m'ont tiré du lit, à une heure indue, moi qui vais sur mes soixante ans et qui aime la tranquillité. Il n'y a rien eu à faire, il a fallu que je me lève. Ça me fait peine de les voir, à l'état de rosses efflanquées, alors que la bonne eau pourtant ne manque pas, ni les verts pâturages. Mais on dirait qu'un sortilège malveillant a été jeté sur cette contrée que j'avais connue accueillante, et condamné l'accès à ces eaux généreuses. Ou peut-être est-ce un coup monté par les maquignons du pays, pour faire tomber les prix qui sait ? Ou c'est un pays peut-être où il n'y a plus d'enfants pour mener boire les chevaux, et où les chevaux ont soif, faute d'un gamin qui retrouve le chemin qui mène à la rivière..."

Alors, avec Pierre Cartier et Olivia Caramello, on a organisé un colloque, il y a de ça deux ans, à l'IHES, justement pour raviver l'idée des topos, mais vraiment des topos de Grothendieck, et le colloque a été remarquable, ça s'est très très bien passé.

Alors qu'est-ce qu'un topos de Grothendieck ? Donc maintenant on revient aux mathématiques. Donc il y a trois manières de les définir : c'est sans doute la première manière qui est la plus simple. Alors, comme Grothendieck l'expliquait quand il fait son cours, la chose importante, au départ, c'étaient des pré-faisceaux, c'est-à-dire c'étaient des foncteurs contravariants qui allaient de la catégorie des ouverts, mais c'est une catégorie extrêmement simple, hein. Je veux dire c'est une catégorie pour laquelle entre deux objets, il y a au plus un morphisme donc c'est vraiment quelque-chose d'extrêmement simple. Donc on regardait les foncteurs contravariants qui allaient de cette catégorie vers les ensembles. Alors maintenant, on enlève toutes les conditions sur cette catégorie, sauf que ça doit être une petite catégorie. Qu'est-ce que ça veut dire une petite catégorie ? Ça veut dire que les objets forment un ensemble. Et puis les morphismes aussi bien entendu. Donc on regarde une petite catégorie et on regarde tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles. On oublie le fait qu'on avait les ouverts et qu'on avait une catégorie extrêmement particulière en regardant les ouverts. D'accord, on prend n'importe laquelle. Et alors maintenant, ce qu'on demande, bien sûr, on ne va pas prendre tous les foncteurs contravariants, puisqu'on sait bien, et Grothendieck l'expliquait dans ce qu'on a écouté, qu'on ne va pas prendre tous les pré-faisceaux. Parmi ces pré-faisceaux, on va en sélectionner qu'on va appeler des faisceaux. Quelle est la propriété importante de cette sélection ? Il y a deux choses qui sont très importantes dans cette sélection : la première, c'est qu'on ne va pas changer les morphismes ; la première chose qui est fondamentale, c'est que quand vous prenez un morphisme d'un faisceau vers un autre faisceau, en fait, vous pouvez oublier que ce sont des faisceaux. C'est un morphisme de pré-faisceaux, d'accord. Donc en fait, quand on va sélectionner la sous-catégorie de la catégorie des pré-faisceaux, on va prendre une sous-catégorie pleine. Sous-catégorie pleine, ça veut dire qu'on ne va pas changer la notion de morphisme. D'accord, c'est crucial, ça, si vous écoutez Grothendieck plus loin, il en parle et il dit bien que c'est crucial. Donc première chose. Deuxième chose, qui est extrêmement importante, c'est qu'il y a un moyen, lorsque vous avez un pré-faisceau de le faisceautiser, de le transformer en un faisceau. Donc ça veut dire que les faisceaux sont des pré-faisceaux particuliers, mais il y a une espèce de projection qui vous permet de remplacer un pré-faisceau par un faisceau. Alors quelle est la manière de le dire qui est correcte : c'est que le foncteur qui inclut la catégorie des faisceaux dans la catégorie des pré-faisceaux, bon d'abord il est plein, il est fidèle, parce qu'on n'oublie rien, mais surtout, il a un adjoint à gauche, qui est la faisceautisation, et par miracle, cette action à gauche, il est exact à gauche, ce qui n'est normalement jamais le cas pour un adjoint à gauche. Normalement, un adjoint à gauche, on sait que dans tous les cas, il va préserver ce qui s'appelle les colimites, mais c'est très rare qu'il préserve les limites. Eh bien, là, ça préserve les limites. Donc c'est ça la condition. Donc si vous voulez une définition courte de ce que c'est qu'un topos, c'est ça.

Alors maintenant ce qu'on va voir, et puis on va voir ce que c'est qu'un site, il y a une autre manière de le dire qui est plus précise : c'est qu'en fait, on sait que toute faisceautisation, comme celle dont je vous parlais, en fait, elle provient de ce qu'on appelle une topologie de Grothendieck sur la petite catégorie dont on est parti. Alors on va voir ce que c'est. Et puis en fait, il y a une troisième définition de ce que c'est qu'un topos. Mais alors ça, c'est vraiment une définition, comment dire, très abstraite mais c'est une définition qui énonce des propriétés qui sont vraies pour la théorie des ensembles, d'accord. Et on demande que le topos les vérifie aussi. Alors ça, ça a engendré une autre théorie des topos, qu'on appelle la théorie des topos élémentaires, qui ne sont pas des topos de Grothendieck en général. Mais alors, qu'est-ce qu'il manque à un topos élémentaire, donc un topos qui vérifie des propriétés naïves de théorie des ensembles, pour être un topos de Grothendieck ? Ce qui lui manque, ce sont les constantes. C'est-à-dire que tout à l'heure, dans la métaphore, je vous disais qu'on a des ensembles variables, qui dépendent d'un aléa. Eh bien, quand on a un topos de Grothendieck, il y a ce qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va du topos vers le topos des ensembles, et ça permet de parler des constantes. Or parler des constantes, lorsqu'on fait de la cohomologie par exemple, c'est absolument essentiel. Parce que ce sont les constantes qui permettent par exemple de définir les sections globales d'un faisceau, etc., etc. Donc c'est pas du tout innocent, et il y a une différence très grande entre un topos de Grothendieck et ce qu'on appelle un topos élémentaire qui rassemblerait des propriétés élémentaires de la théorie des ensembles.

Alors les exemples. Bon alors parmi les exemples, il y a bien sûr l'exemple des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. C'est le premier exemple. Le deuxième exemple, j'en ai déjà parlé, ce sont les faisceaux pour la topologie de Zariski, donc c'est un cas particulier des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. Mais comme je le disais, l'intérêt, c'est que quand on cherche les points, pour ce topos-là, on trouve les bons points du schéma, d'accord. Et enfin, il y a un troisième exemple, qui est ce que Grothendieck a introduit en 58 pour avoir la cohomologie étale, c'est-à-dire qu'on part d'un schéma, et il y a un topos qui est associé au schéma, mais ça n'est plus un topos qui provient d'une topologie sur le schéma. Donc c'est quelque-chose qui est au-dessus et qui, bon, bien sûr, là, c'est déjà un topos au sens original, qui est en dehors des espaces topologiques.

Donc je reviens à Grothendieck, il dit :

"Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas - mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques. Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas."

Il y a une espèce de malédiction sur les topos. Il y a une malédiction qui règne, on y reviendra peut-être si on a le temps. Alors voilà la métaphore. Donc la métaphore dont je vous parlais tout à l'heure. Il faut absolument que vous ayez une image mentale de ce que c'est qu'un topos. Donc on avait l'habitude, comme je le disais, de mettre l'espace à étudier sur le devant de la scène. Ce que fait Grothendieck, c'est de lui faire jouer ce rôle de Deus ex machina, qui n'est pas présent, qui reste dans les coulisses. Mais ce qui est important, c'est de savoir que, quand vous avez un topos, vous pouvez faire toutes les manipulations, vous pouvez parler de groupes abéliens, vous pouvez parler d'algèbres, etc., et si vous travaillez avec un topos provenant d'un espace topologique, ça vous donnerait les faisceaux de groupes abéliens, ou les faisceaux d'algèbres, etc., c'est formidable, c'est formidable d'avoir cette liberté de manœuvre. Bon, alors, lorsqu'on travaille dans un topos, tout se passe comme si on manipulait des ensembles ordinaires. Donc c'est ça qu'il faut savoir. En fait, dès qu'on fait des fibrés vous savez sur un espace, on prend l'habitude de penser à un fibré comme à un espace vectoriel variable. Mais là, la variabilité, c'est la **bonne** notion de variabilité, parce que ça paramétrise les ensembles. Sauf que l'on ne peut plus appliquer la règle du tiers-exlus. Donc ce qui apparaît, c'est qu'on ne peut plus, pour une proposition dire la proposition p est vraie, ou la proposition *non* p est vraie, on n'a plus le tiers-exclus. Alors on va très vite voir un exemple concret d'un topos pour lequel cette notion de vérité devient plus subtile que le simple vrai ou faux que nous utilisons familièrement. Par exemple, si vous regardez la télévision, et vous regardez une discussion politique à la télévision ; eh bien, nous avons l'habitude de dire "celui-là a raison et celui-là a tort". Eh bien, je prétends qu'on n'a pas l'outil conceptuel qu'il faut pour juger. Et je vais vous donner des exemples. Je vais vous montrer à quel point la notion de vérité est une notion beaucoup plus subtile et à quel point l'idée du topos permet de la formaliser. Donc on va faire marcher ça sur un exemple. Pour faire marcher ça, on va introduire des topos qui sont autres que les topos qui viennent d'un espace topologique et qui ont une nature extrêmement simple : ce sont les topos qui consistent à prendre une petite catégorie et à prendre simplement la catégorie de tous les foncteurs contravariants vers les ensembles. Donc là, on ne fait pas de distinction entre faisceaux et pré-faisceaux. On prend tous les pré-faisceaux. On dit que ce sont tous des faisceaux. Donc à une petite catégorie, on va associer un topos qui est son espèce de dual, qui est tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, et on va s'amuser avec ça.

Alors en 91, Grothendieck était encore parfaitement en contact avec certains mathématiciens, et voilà ce qu'il écrivait, c'est dans une lettre à Thomasson, il dit :

"D'autre part pour moi, le paradis originel pour l'algèbre topologique n'est nullement la catégorie simpliciale..." donc, je ne sais pas si on aura le temps d'en parler, mais il parle des topos.

"En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $\hat{C}$, avec C une petite catégorie, sont de loin les plus simples des topos connus." Et c'est pour l'avoir senti qu'il insiste tant sur ces topos catégoriques dans SGA4. Donc si vous regardez SGA4, vous verrez qu'il y a deux exemples fondamentaux de topos ; bien sûr, il y a le topos étale, et puis il y a les topos qui sont duaux d'une catégorie. D'accord. Alors on va s'amuser avec ça.

Alors quelle est la notion de vérité dans un topos ? *(rires)* En quel sens la notion de vérité est-elle différente dans un topos ? Alors, en quel sens d'abord, est-ce qu'on est capable, dans les ensembles, de définir le vrai et le faux ? Alors, comment va-t-on définir le vrai et le faux dans la théorie des ensembles ? On va s'intéresser à essayer de classifier les sous-ensembles d'un ensemble, d'accord. Vous voyez, si vous travaillez avec les ensembles ordinaires, et si je vous dis “j’ai un foncteur qui, si vous me donnez un ensemble, lui associe tous ses sous-ensembles.”. C’est un foncteur parce que si vous avez une application qui va de X dans Y, vous pouvez rappeler en arrière les sous-ensembles de Y, donc c’est un foncteur. Alors maintenant, la question, c’est “est-ce que ce foncteur est représentable ?”. C’est une notion mathématique, d’accord, et alors dans les ensembles, il est représentable à cause d’une notion que nous, nous connaissons très très bien : c’est qu’à un sous-ensemble, on associe ce qu’on appelle sa fonction caractéristique. C’est-à-dire quand on a un sous-ensemble d’un ensemble, on définit une fonction : cette fonction, elle vaut 1 si on est dans le sous-ensemble, et elle vaut 0 si on n’est pas dans le sous-ensemble. Alors cette fonction, il se fait qu’elle a une propriété assez miraculeuse : c’est qu’elle classifie, c’est-à-dire qu’elle représente ce foncteur. Dans le cas des ensembles, il y a un objet privilégié Ω qui est l’objet qui est formé de l’ensemble $\{0, 1\}$, l’ensemble à deux points, et quand vous regardez tous les sous-ensembles d’un ensemble, ça revient à regarder toutes les applications de cet ensemble vers l’ensemble $\{0, 1\}$. Puisque quand vous avez une application qui va vers l’ensemble $\{0, 1\}$, le sous-ensemble, il est défini par le sous-ensemble sur lequel elle prend la valeur 1. Mais là où elle ne prend pas la valeur 1, eh bien, elle prend forcément la valeur 0. Eh bien, si on réfléchit suffisamment, en logique, en pensant dans le langage des topos, on s’aperçoit que c’est ce simple fait qu’il n’y avait que 0 et 1 dans les ensembles qui permet d’avoir le principe du tiers-exclus.

Donc maintenant on va s’amuser avec un topos qui est un tout petit peu plus compliqué. On va prendre... alors, c’est ce que j’appelle “à deux pas de la vérité”. Alors, qu’est-ce qu’on va prendre comme topos ? On va prendre la catégorie C qui n’a qu’un seul objet, et qui a pour morphisme les puissances d’un seul morphisme. C’est-à-dire que je choisis un seul morphisme qui va de cet objet dans lui-même et je l’élève à des puissances, d’accord, T^n. Alors qu’est-ce que ça veut dire, un objet de la catégorie des foncteurs contravariants de cette catégorie vers les ensembles ? Ça veut simplement dire un ensemble avec une application de X dans X. C’est tout. Pourquoi vous n’avez qu’un seul ensemble ? Parce que la catégorie n’avait qu’un objet. Donc vous n’avez qu’un ensemble. Et en fait, la catégorie, elle n’avait qu’un seul morphisme, bon, on l’élève à ses puissances, mais, je veux dire... il suffit de le connaître, il suffit de connaître son image. Qu’est-ce que c’est que son image ? C’est une transformation T de X dans X. Quel est le topos ? Eh bien, ce sont les ensembles munis d’une transformation. Bon, eh bien, les ensembles munis d’une transformation, ça fait un topos. C’est une catégorie, d’accord. Comment est-ce une catégorie ? C’est une catégorie parce que si vous avez deux ensembles avec une transformation, vous avez les applications de X dans Y qui respectent la transformation. C’est à dire qu’ils vérifient que l’image $f(TX)$ de TX, c’est $Tf(x)$. Donc vous avez une catégorie, et cette catégorie, c’est un topos. Pourquoi c’est un topos ? Parce que c’est le dual d’une petite catégorie que je vous ai donnée.

Bon alors maintenant, on va chercher Ω, pour ça, donc on va chercher à classifier les sous-objets d’un objet. Alors, pourquoi est-ce embêtant, d’essayer de classifier les sous-objets d’un objet ? Eh bien, on va essayer avec $\Omega = \{0, 1\}$. On va essayer avec la fonction caractéristique, comme on faisait tout à l’heure. Après tout, si je prends un ensemble avec une application, si je prends un sous-objet, c’est un sous-ensemble qui est stable par l’application, d’accord. Donc si je prends mon X, je vais prendre un sous-ensemble Y qui était invariant, qui était invariant par l’application T. Bon. Très bien. Il est invariant par l’application T. Donc je vais associer la valeur 1 sur ce sous-ensemble, d’accord. Sur le sous-ensemble, je vais donner 1. Pourquoi est-ce que je ne peux pas donner la valeur 0, sur le complémentaire ? Eh bien, parce qu’il peut y avoir des points du complémentaire qui vont finir par atterrir dans l’ensemble en question. Je ne suis pas du tout assuré que le complémentaire va être invariant par T. Il peut très bien se produire qu’un point du complémentaire, au bout d’un moment, tac !, il va taper dans le sous-ensemble en question. C’est pas parce que le sous-ensemble en question est invariant que son complémentaire est invariant. Bien sûr que non ! La transformation, je n’ai pas pris une action de Z, j’ai pris une action de N. Alors comment on va faire ? C’est embêtant ! Ça veut dire que l’application qui allait vers 0 et 1, elle ne marche pas, elle ne marche pas. Bon ! Eh bien, il faut se creuser la tête un petit peu. Qu’est-ce qu’il faut faire ? Eh bien, quand je prends un x qui est dans X, il va exister un plus petit entier, un premier entier, tel que quand j’applique T, n fois, ça tape dans le sous-ensemble. D’accord. Donc je vais lui associer cet entier. Cet entier, il sera l’∞, bien sûr, si on n’arrive jamais dans le sous-ensemble.

Donc on voit qu’il faut remplacer l’ensemble $\{0, 1\}$ par l’ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$. Et comment va-t-on faire de cet ensemble un ensemble muni d’une transformation ? Eh bien, on s’aperçoit que si je regarde le h, c’est-à-dire le plus petit entier pour TX, eh bien, le plus petit entier pour TX, ça va être le plus petit entier pour X moins 1 sauf si ça devient négatif ; si ça devient négatif, ça ne marche pas ; donc je prends le *sup* avec 0. D’accord.

Donc vous voyez que pour ce topos, alors la notion de vérité qui avant était simplement 0 ou 1, maintenant, elle est donnée par l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$, avec la transformation qui remplace par $n-1$. Alors qu'est-ce que ça veut dire ? Eh bien, ça veut dire qu'on a un exemple incroyablement simple d'un topos qui permet de dire "Ouais, ce que tu fais, ouais, je dirais, c'est à 10 pas de la vérité...". Moi, j'ai toujours dit que les gens qui font de la théorie des cordes, c'est à une infinité de pas de la vérité. *(rires)*

Donc vous voyez que cette notion, pour innocente qu'elle soit, pour bêbête qu'elle ait l'air, en fait, elle a un potentiel d'une richesse absolue. Et ce que je prétends, c'est que notre esprit, notre formation logique, est extrêmement primitive parce que nous avons l'habitude, lorsque nous écoutons une discussion politique de décréter "oui ou non", "telle personne a raison, telle personne a tort" et on est dans l'erreur en faisant cela et s'il y avait des philosophes, bon, je rêve hein, s'il y avait des philosophes connaissant les maths, et qui comprennent les topos de l'intérieur, et il y en a très peu, qui comprennent les topos de l'intérieur, ils seraient capables de donner des modèles, qui seraient utiles, pour beaucoup mieux apprécier ce genre de discussions, ce genre de situations, qui sont en fait beaucoup plus subtiles par rapport à la notion de vérité, que cette notion d'une inefficacité absolue, que nous utilisons tout le temps, et qui est "un tel a raison ou un tel a tort.". Donc, je voulais absolument vous donner cet exemple pour que vous le gardiez en tête, et que vous essayiez de construire d'autres exemples semblables ; il y a des exemples finis bien entendu, ne soyez pas effrayés par le fait qu'il y a des n qui vont de 0 à l'infini, en fait, vous pouvez très bien imaginer des constructions finies, d'accord. Les constructions finies, il y a une richesse combinatoire dans les topos qui fait que les constructions finies ont un potentiel extraordinaire.

Alors qu'est-ce qu'un crible ? Cet exemple va nous permettre de définir ce que c'est qu'un crible. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Je vous ai donné un exemple de crible. Le Ω en général, quand vous prenez le topos qui est donné par tous les foncteurs contravariants d'une petite catégorie vers les ensembles, eh bien, on construit le Ω et comment est construit le Ω ? Le Ω, il est construit à partir d'un crible. Alors qu'est-ce qu'un crible ? Eh bien, un crible sur un objet d'une catégorie, le Ω, va être construit à partir des objets de cette catégorie, rappelons-nous que la catégorie dont j'ai parlé tout à l'heure, elle n'avait qu'un seul objet. Donc pour le moment, on n'a rien. On a un seul objet. Alors, un crible sur un objet X, sur notre objet X, c'est la donnée d'une famille de morphismes $C(X)$ qui est contenue dans tous les morphismes dont l'image est X... enfin, ça va d'un ensemble Z vers X, dont le codomaine est X, et qui est stable par composition à droite.

Quels sont les cribles, dans l'exemple de tout à l'heure ? On avait un seul objet ; les morphismes qui allaient dans cet objet, c'étaient simplement les entiers, puisque c'étaient les puissances de T, il y avait $T^0, T^1, T^2, \ldots$. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Eh bien, un crible, c'est un espèce d'idéal, c'est-à-dire que c'est une famille de morphismes qui est stable par composition à droite, par n'importe quel morphisme. Donc dans le cas de tout à l'heure, qu'est-ce que c'est que la composition à droite ? Ça rajoute à un entier, eh bien, ça lui rajoute n'importe quel entier. Ça revient à regarder tous les intervalles infinis d'un côté. Alors, parmi les intervalles infinis, vous avez quoi, vous avez 0, jusqu'à l'infini, ça, c'est ce qu'on appelle... enfin, c'est un crible qui doit être toujours présent ; c'est le crible qui est formé de tous les morphismes. Et puis ensuite, on avait tous les morphismes qui étaient à partir d'un certain entier n. Ca, c'était un crible, d'accord, et c'était quand on était à distance n. Et puis, il y a le crible où il n'y en a aucun, c'est l'ensemble vide, et ça, ça correspondait à l'infini tout à l'heure. Voilà.

Alors il se fait que donc en général, on peut définir le Ω, les valeurs de vérité, pour le dual d'une petite catégorie, et on le définit exactement à partir des cribles. Quand on calcule Ω donc, on construit cet objet, simplement comme toujours comme un foncteur contravariant d'un ensemble etc., mais on le construit à partir des cribles sur chacun des objets de la catégorie. Dans notre cas, il y avait un seul objet donc c'était très simple. C'était très très simple.

Alors moi j'ai été longtemps fasciné par l'idée que Grothendieck avait appelé crible et qu'il n'ignorait pas que ce nom avait déjà été utilisé par les mathématiciens, et qu'il y a par exemple un crible qui est bien connu et qui est le crible d'Eratosthène. Alors j'ai finalement trouvé la réponse, j'ai finalement trouvé pourquoi le crible d'Eratosthène est un crible, au sens de Grothendieck et ça, ça vient d'un travail en commun qu'on a fait avec Katia Consani et dans lequel la catégorie qu'on prend, elle est très semblable à celle de tout à l'heure, où il y avait une seule transformation, mais cette fois, elle est un peu plus compliquée quand-même, parce que, au lieu d'avoir (on a toujours un seul objet, comme avant), mais au lieu d'avoir les puissances d'un seul morphisme, on a une action des entiers multiplicatifs. C'est-à-dire que pour chaque entier, on a un morphisme, et quand on fait le produit de deux entiers, les morphismes se composent.

Alors c'est un exercice de démontrer que le crible d'Eratosthène est un crible de la manière suivante : c'est très amusant. Parce que... qu'est-ce que c'est que le crible d'Eratosthène ? Le crible d'Eratosthène, ça consiste à prendre le premier nombre non trivial. On va foutre en l'air 1, hein, on s'en fout de 1, d'accord. Donc on prend le premier nombre non trivial qui est 2. Et que fait le crible ? Le crible considère tous les multiples de 2, tous les nombres pairs, sauf 2. Et puis après, il reste des choses, bon. Il reste 3 par exemple, alors il prend tous les multiples de 3 sauf 3. Et puis il reste des choses, 4 on l'a déjà pris puisque... Donc il prend tous les multiples de 5 sauf 5. Eh bien, je prétends que si vous regardez les entiers comme les morphismes, les entiers multiplicatifs, comme les morphismes d'une catégorie qui n'a qu'un seul objet, et si vous regardez tout ce que je viens de vous dire, c'est-à-dire si vous regardez tous les entiers pairs sauf 2, tous les multiples de 3 sauf 3, etc., ça, ça fait un crible au sens que je vous ai donné tout à l'heure. Et ça vous montre à quel point la notion de vérité est subtile pour cette catégorie-là, parce que ça, je vous ai donné seulement **un** exemple de crible. Vérifier que c'est un crible, c'est trivial, c'est pas la question, c'est pas la difficulté.

Alors maintenant, une fois qu'on a la notion de crible, on va voir la notion de topologie de Grothendieck. Je ne pouvais pas faire un exposé sur les topos sans donner la définition d'une topologie de Grothendieck. Alors, moi, je vais vous dire le moment qui pour moi a été crucial dans l'appréciation de la notion de topos. Le moment qui a été crucial, c'est le suivant : c'est qu'avant, quand on me présentait un topos, on me présentait toujours un topos en me disant "je prends une catégorie, une petite catégorie, et je suppose qu'elle est stable par produit fibré." A ce moment-là, mon oreille se fermait et je pensais à autre chose, d'accord *(rires)*. Et la raison, c'est la suivante : c'est que, quand on dit ça, et qu'après on écrit ce que c'est qu'une base, etc., on a bien sûr en tête l'intuition topologique ; c'est-à-dire que quand on dit que la catégorie a des produits fibrés, on pense à deux ouverts qui ont une intersection. Et à partir de là, bon, on peut développer les choses. Et alors, ce qui pour moi a été crucial, c'est le moment où j'ai compris en fait que, déjà dans SGA4, Grothendieck avait défini les sites, et les produits fibrés sur les sites, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, on n'a absolument pas besoin de supposer *quoi que ce soit* sur la petite catégorie, et l'avantage énorme, c'est que lorsqu'on fait ça, on comprend mieux ce dont on parle. Vous savez, en mathématiques, il y a une chose qu'il faut comprendre, c'est que la principale difficulté quand on est devant un problème, c'est d'arriver à **penser juste**. Et penser juste, ça a l'air idiot, ça a l'air de... chercher à penser juste... mais une fois qu'on arrive à penser juste, les choses tombent comme des fruits mûrs, mais il faut savoir penser juste. Et ça n'est pas penser juste que de demander à la petite catégorie d'avoir des produits fibrés. Penser juste, c'est ce qu'il y a là, c'est-à-dire le crible maximal, le fait que quand vous avez un crible... Donc, qu'est-ce que c'est qu'une topologie de Grothendieck, c'est une collection de cribles, on donne pour chaque objet une collection de cribles, et on a des conditions de compatibilité. Mais quelle est l'intuition qu'il faut avoir derrière ? Peu importe le détail des axiomes. Quelle est la... Quand vous faites de la topologie, vous avez l'intuition des recouvrements ouverts. C'est une intuition qui est très délicate, je vais vous expliquer pourquoi elle est très délicate. Prenez par exemple l'intervalle $[0, 1]$. Et puis ne prenez dans l'intervalle $[0, 1]$ que les nombres rationnels. Ils sont denses, donc vous reconnaîtrez les ouverts, avec les nombres rationnels, puisque les ouverts, ce sont des réunions d'intervalles. Un intervalle, je le connais par son intersection avec les rationnels. D'accord ? Qu'est-ce qui va changer ? Pourquoi est-ce que si je prends le topos qui est donné par les rationnels avec ces ouverts-là, j'obtiens quelque-chose de différent que le topos qui est donné par l'intervalle $[0, 1]$ avec ses ouverts ordinaires ? Ils se ressemblent, ils ont l'air d'être les mêmes. Eh bien, si vous cherchez, vous allez trouver qu'en fait, il y a beaucoup plus de recouvrements ouverts pour les rationnels qu'il n'y en a pour les réels. Pour les rationnels, il y a des recouvrements ouverts qui sont là alors qu'ils ne sont pas là pour les réels. Voilà. Typiquement, c'est que si vous prenez une suite d'ouverts de plus en plus grands mais dont la limite est un nombre irrationnel, eh bien, cela, ça va apparaître comme un recouvrement au niveau rationnel mais ça ne sera pas un recouvrement au niveau réel. D'accord ? C'est-à-dire qu'au niveau réel, si vous prenez le complémentaire de ça, la réunion des deux, ça ne sera pas un recouvrement ouvert. Donc en fait, il y a beaucoup moins de recouvrements ouverts pour les réels qu'il n'y en a pour les rationnels. Quand on pense topologiquement, on pense comme ça. Quand on pense au niveau des topos, on pense différemment : comment on pense au niveau des topos ? On pense que les cribles, ça signifie des choses petites, ça signifie des objets petits. Passer au crible, ça revient à donner des objets qui sont petits. Et à ce moment-là, les axiomes, ils deviennent presque absolument évidents. Et qu'est-ce que ça signifie qu'un objet est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Qu'est-ce que ça signifie qu'un recouvrement est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Ça signifie qu'il passe à travers, ça signifie qu'il est contenu dans un des ouverts du recouvrement : il passe à travers un trou. Donc, c'est ça l'intuition qu'il faut avoir : l'intuition du crible, c'est que ce sont des choses qui sont petites, et qui passent à travers les trous. D'accord.

Alors ceci dit, maintenant, on a l'intuition d'une topologie de Grothendieck quand il y a une base, etc. ; je ne vais pas vous embêter avec ça. Alors il y a une notion essentielle dans les topos mais c'est pareil, je ne vais pas en parler trop longtemps : c'est la notion de point. Et surtout la notion de morphisme géométrique. Donc, les topos... Il se fait qu'une fois qu'on pense juste à propos des topos, les mêmes propriétés qui sont vraies pour les espaces topologiques continuent à avoir un sens, mais évidemment, elles sont beaucoup plus subtiles. Typiquement, ce qui se produit, et ça, j'ai copié une page de SGA4, c'est ce que c'est qu'un morphisme d'un topos dans un autre, ce qu'on appelle un morphisme géométrique.

Alors pour comprendre ce que c'est qu'un morphisme géométrique, c'est-à-dire un morphisme d'un topos dans un autre, il faut avoir une certaine familiarité avec les faisceaux sur un espace. Pourquoi ? Parce que lorsqu'on a une application continue d'un espace X vers un espace Y, si j'ai une application continue f qui va de X dans Y, eh bien, il se fait qu'il y a deux manières de relier les faisceaux sur X avec les faisceaux sur Y. Il y a deux manières de le faire. Et ces deux manières, il y en a une qui est tautologique, presque triviale, et qui consiste à prendre un faisceau sur X et à l'envoyer en avant vers un faisceau sur Y. Et ça, en quel sens c'est trivial ? C'est trivial parce qu'il vous suffit, quand vous prenez un ouvert sur Y, de prendre son image inverse et de regarder les sections du faisceau sur X sur cet ouvert, sur l'image inverse. Donc ça, ça fait un faisceau, il n'y a pas de problème. Donc cette définition, elle va de soi. Mais il y a une autre manière de relier les faisceaux de X et les faisceaux de Y qui va dans l'autre sens, c'est-à-dire qui envoie un faisceau sur Y vers un faisceau sur X, et celle-là, elle est beaucoup plus intéressante, elle est beaucoup moins triviale. Elle est visuellement évidente si on pense à un faisceau comme un espace étalé sur l'espace de base, et c'est en particulier le cas pour les faisceaux d'ensembles, mais, là où elle est extrêmement intéressante, c'est que cette application qui va dans l'autre sens, elle a une propriété merveilleuse, elle a une propriété totalement inattendue. D'abord, elle est adjointe à gauche de l'autre. Ca, ça se vérifie, ça n'est pas une grande chose, on aurait pu la définir comme ça. Donc elle est adjointe à gauche de l'autre, de celle qui allait en avant, très bien. Mais elle a une propriété merveilleuse, et cette propriété merveilleuse, c'est la propriété qu'elle est exacte à gauche, c'est-à-dire qu'elle commute avec les limites. Donc ça, c'est une propriété extrêmement puissante, extrêmement étonnante, et je pense que l'exemple qui est dû à Pierre, l'exemple le plus frappant de ça, il faut être frappé par un exemple, tant que vous n'êtes pas frappé par un exemple, vous ne comprendrez pas. L'exemple le plus frappant de ça, c'est ce qu'on appelle les ensembles simpliciaux, les complexes simpliciaux. Donc ce que vous faites, il y a une petite catégorie, donc un peu plus compliquée que celle de tout à l'heure, (intervention de Pierre Cartier) *dont Grothendieck ne veut pas*, repris par Alain Connes, dont Grothendieck ne veut pas, précisément. Je vais revenir à la page de Grothendieck parce qu'il n'en veut pas. C'est amusant d'ailleurs. Voilà.

C'est celle dont Grothendieck ne veut pas. C'est cette petite catégorie qu'on appelle Δ^{op}, c'est la catégorie semi-simpliciale, c'est quoi ? Ce sont les ensembles finis, totalement ordonnés, avec les applications non décroissantes. Cette catégorie, elle est très importante pour la raison suivante : en topologie, dans les années 40-50, s'est développée une notion, au départ, elle était formulée de manière un peu trop simple, qui était la notion de complexe simplicial. On prenait un espace et on le triangulait. Quand on prend l'espace ordinaire, on peut le trianguler, ou bien en dimension plus grande, etc. Quand on le triangule, on peut donner une donnée combinatoire qui encode la triangulation. Cette donnée combinatoire, on peut la formuler en regardant ce qu'on appelle le complexe simplicial mais de manière entièrement combinatoire, en prenant des simplexes, etc. Alors, il se fait que si on fait les choses comme ça, ça ne marche pas très bien du tout pour le produit. C'est-à-dire que comme le produit de deux simplexes n'est pas un simplexe, par exemple, le produit de deux intervalles, c'est un carré, ça n'est pas un simplexe, mais ça ne marche donc pas bien du tout pour le produit. Mais c'est parce qu'on n'a pas pensé juste. Et c'est parce qu'on n'a pas fait une chose qui paraît triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale. Et cette chose qui est triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale, c'est qu'il faut beaucoup mieux comprendre la réalisation géométrique de cet objet combinatoire, et cette réalisation géométrique de l'objet combinatoire, en fait, c'est un point d'un topos. Il se fait qu'à cette catégorie est associé un topos, le topos bêbête, le topos des foncteurs contravariants qi va de cette catégorie vers la catégorie des ensembles, et que, c'est un théorème qu'on peut démontrer facilement, les points de ce topos, dans un sens sur lequel on ne va pas s'éterniser, les points de ce topos, ce sont exactement les intervalles. C'est-à-dire ce sont exactement les ensembles totalement ordonnés qui ont un plus petit élément et un plus grand élément. Donc les points de ce topos sont donnés exactement comme ça. Et quand on a un point du topos, eh bien, le foncteur d'image inverse, qui va vers les ensembles, eh bien, ce foncteur, c'est le foncteur de réalisation géométrique si on prend pour l'espace totalement ordonné avec un plus petit élément et un plus grand élément, si on prend l'intervalle $[0, 1]$, ça donne exactement la réalisation géométrique du simplexe, du complexe simplicial.

Alors maintenant, merveille des merveilles : ce foncteur préserve les limites finies et donc, il préserve les produits. Et donc, quand on prend le produit bêbête de deux ensembles simpliciaux, c'est-à-dire de deux foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, eh bien, quand on prend la réalisation géométrique, ça va donner le produit des réalisations géométriques. C'est un exercice immédiat de vérifier que c'est compatible avec la topologie. Ça ne présente pas de difficulté, la difficulté, elle est purement ensembliste. Et, Pierre, c'est toi qui as démontré ce théorème pour la première fois, non ? (Pierre Cartier répond "Milnor"). Oui, Milnor ou toi. Mais, ce qu'il faut bien voir, c'est que la notion de topos comprend cette chose-là. Elle comprend cette chose-là et elle la généralise à un point absolument incroyable, c'est-à-dire qu'un point d'un topos maintenant, va justement préserver non seulement les colimites arbitraires, mais va préserver les limites finies, donc va préserver les produits, etc.

Et c'est pourquoi quand on prend un point d'un topos, ça nous emmène vers la théorie des ensembles mais en respectant tout ce qu'on sait. C'est à dire que ça va transformer un groupe abélien dans le topos en un vrai groupe abélien ; ça va transformer toutes les notions élémentaires qu'on peut avoir en une vraie notion en théorie des ensembles. Alors, il y a un pas sur lequel je ne vais pas m'attarder du tout, mais qui est extrêmement important et dans lequel justement, il y a des travaux très très intéressants qui se font maintenant, qui est celui des topos classifiant. C'est-à-dire qu'exactement comme il y a un espace classifiant pour les fibrés, ou vectoriel, etc., il y a un topos classifiant pour des notions logiques. Et une des merveilles de ça, qui répond un peu à la question de Grothendieck quand il dit *"la sempiternelle catégorie Δ^{op}"*, c'est que le topos qui est associé, pas cette catégorie, mais le topos qui est associé à cette catégorie, c'est exactement le topos qui classifie les intervalles. C'est-à-dire que si on définit abstraitement ce que j'ai expliqué tout à l'heure, c'est-à-dire un intervalle, un ensemble totalement ordonné, mais il ne faut pas parler d'ensemble, dans une théorie arbitraire, eh bien, on s'aperçoit que cette notion a un topos classifiant et que ce topos classifiant, c'est exactement le dual de la catégorie Δ^{op}. Bon.

Alors on ne va pas rentrer dans les détails. Maintenant on va faire autre chose : je ne veux pas rentrer dans les détails techniques, je ne veux pas. On va revenir à Grothendieck, on va relire du Grothendieck et puis on terminera en lisant la fin de l'échange entre Grothendieck et Serre dans leur correspondance. Donc voilà ce que dit Grothendieck. Bon, c'est très important d'avoir parlé des topos, mais c'est encore plus important d'essayer d'avoir perçu la manière de travailler de Grothendieck, parce que c'est de ça dont nous avons besoin. Bon, bien sûr, on va peut-être utiliser les topos pour faire toutes sortes de choses, mais on a aussi besoin, terriblement, dans notre civilisation : quand on assiste maintenant à un laïus qui est fait en public, on s'aperçoit qu'il y a un tiers des gens qui ont leur ordinateur ouvert devant eux et qui font leurs emails, *(rires)*, ou qui font autre chose, ou téléphone portable. Mais c'est une catastrophe, parce que quand on lit Grothendieck et quand on s'imprègne de sa manière de penser, on s'aperçoit d'une chose, la chose qui frappe le plus, c'est le temps dont il disposait. On a l'impression qu'il disposait d'un temps infini, d'un temps infini, qu'il n'était pas constamment dérangé. Vous savez, maintenant, on parle de la génération Y, c'est-à-dire ce sont les gens qui font 3 choses à la fois. On croit qu'on gagne du temps, mais ça n'est pas vrai. On a un besoin maintenant fondamental, dans notre civilisation, de s'isoler, et de pouvoir penser lentement, et de prendre le temps de tout vérifier, pour être sûr des choses, pour le faire deux fois, pour le faire trois fois, etc. C'est pour ça que j'ai fait durer, quand Grothendieck parlait des faisceaux, ça durait, hein, *(rigolard)*, ça durait, mais c'est exprès que je l'ai fait, je l'ai fait à dessein, parce que je voulais que vous vous rendiez compte de cette lenteur fondamentale. C'est une lenteur qui, quand on la ressent au premier degré, est irritante. C'est la lenteur de la tortue et du lièvre *(rires)* Et c'est elle qui gagne. Donc voilà ce que dit Grothendieck :

"Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. J'y crois plus ou moins, à mon affirmation, ça dépend bien sûr du point où j'en suis dans la compréhension des choses que je suis en train de regarder. Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il la faire pour pouvoir s'en convaincre. Souvent, il suffisait de l'écrire.".

Une chose fondamentale que fait souvent Grothendieck, c'est qu'il est capable d'écrire une idée qui n'est pas encore mûre. Il est capable de se mettre à écrire, ça, c'est fantastique comme qualité.

"Souvent, il suffisait de l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la

charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque". Plus souvent encore, l'affirmation prise au pied de la lettre s'avère fausse, mais l'intuition qui, maladroitement encore, a essayé de s'exprimer à travers elle est juste, tout en restant floue."

Je m'arrête une seconde : quand il parle d'écrire, c'est encore une catastrophe l'ordinateur, parce qu'on écrit mieux, dans ce genre de situation lorsqu'on écrit sur du papier avec un crayon, parce que quand on écrit sur l'ordinateur, il faut que ça ait l'air parfait. On va se poser des question de LaTex, on va se poser des questions comme ça, mais c'est complètement ridicule, on n'en est pas là, on en est à un point où on a envie de laisser le crayon qui fait ce qu'il veut sur la feuille de papier. C'est très très important ça. Donc voilà ce qu'il dit :

"Cette intuition peu à peu va se décanter d'une gangue toute aussi informe d'abord d'idées fausses ou inadéquates, elle va sortir peu à peu des limbes de l'incompris qui ne demande qu'à être compris, de l'inconnu qui ne demande qu'à se laisser connaître, pour prendre une forme qui n'est qu'à elle, affiner et aviver ses contours, au fur et à mesure que les questions que je pose à ces choses devant moi se font plus précises ou plus pertinentes, pour les cerner de plus en plus près. Mais il arrive aussi que par cette démarche, les coups de sonde répétés convergent vers une certaine image de la situation,..."

Ca, ça veut dire qu'on est en train de se faire une image mentale.

"...sortant des brumes avec des traits assez marqués pour entraîner un début de conviction que cette image-là exprime bien la réalité - alors qu'il n'en est rien pourtant, quand cette image est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. Le travail, parfois laborieux ; qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse. à partir des premiers "décollages" constatés entre l'image obtenue et certains faits patents, ou entre cette image et d'autres qui avaient également notre confiance".

Il faut dire là, que c'est très bien, dans ces cas-là qu'il décrit, de prendre un peu de recul, de faire autre chose, et Grothendieck avait souvent, Cartier me disait souvent qu'il avait 100 fers au feu. Quand on voit que les choses ont tendance à déconner un petit peu, il vaut mieux prendre du champ, parce qu'en fait, on est viscéralement attaché aux idées qu'on avait, et on ne veut pas accepter qu'elles soient fausses.

"Ce travail est souvent marqué par une tension croissante, au fur et à mesure qu'on approche du noeud de la contradiction, qui de vague d'abord se fait de plus en plus criante - jusqu'au moment où enfin elle éclate, avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense, comme une libération. La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte, qu'il s'agisse d'un travail mathématique, ou d'un travail de découverte de soi. C'est un moment où notre connaissance de la chose sondée soudain se renouvelle."

Et voilà maintenant un des paragraphes les plus magnifiques que je connaisse :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mûs, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée.".

Si un jour, vous n'avez pas le moral ou tout ça, relisez cette phrase. C'est une espèce de talisman. Alors je vais terminer en... J'avais commencé par la discussion entre Serre et Grothendieck, au tout début, sur l'article de Tohoku de Grothendieck, et je vais terminer avec une note assez différente, d'une tonalité très différente, qui est justement la réaction de Serre quand il a reçu *Récoltes et Semailles*. Donc, bon, je ne sais pas si vous connaissez Serre, mais je veux dire, il n'a pas l'habitude de mâcher ses mots, et il n'aime pas trop les états d'âme en général et donc, je veux dire, c'est extrêmement intéressant que dans la correspondance entre Serre et Grothendieck, ils aient continué leurs échanges, au moment où Grothendieck s'était isolé délibérément du monde mathématique. Je veux dire, ce n'est pas le monde mathématique qui l'avait chassé, c'est Grothendieck qui s'est chassé lui-même, qui s'est isolé du monde mathématique, il a écrit ce texte ; tous les passages que je vous ai lus de Grothendieck sont dans *Récoltes et Semailles*, donc c'est un texte admirable, et il faut le lire avec un certain recul, bien entendu, parce qu'il y a des moments où, il dit des choses qui ne sont pas idéales, mais en tout cas, il s'exprime. Alors voilà ce que dit Serre après l'avoir reçu :

"Cher Grothendieck,
J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées." (rires)

Bon évidemment, il y a tellement de pages. Moi, je dois vous dire, d'ailleurs, que c'est un texte qu'il faut lire... il ne faut pas lire plus de 5 pages à la fois. Je me souviens d'avoir passé un été extraordinaire en lisant en parallèle *Récoltes et Semailles* et *A la recherche du temps perdu* de Proust. Et je veux dire, de la même manière. C'est-à-dire que, bien sûr, les gens qui cherchent des anecdotes croustillantes, ils vont le lire en sautant les pages, si vous faites ça, vous perdez tout. C'est exactement pareil avec Proust. Proust, on ne peut pas le lire en lisant plus de 5 pages à la fois, il faut les méditer, il faut les repenser, etc. Il faut se laisser pénétrer par une atmosphère qui est absolument extraordinaire. Donc voilà ce que dit Serre, il dit :

"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"." (rires)

C'est quand-même une sacrée question. Et alors après, ce qui est formidable, c'est que Serre a une réponse, et ce n'est pas du tout une réponse évidente. Non, non, mais c'est une lettre de Serre mais il continue sa lettre et il a une proposition pour expliquer pourquoi Grothendieck est parti. Alors voilà ce qu'il dit, il dit :

"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue, Tu étais tout simplement fatigué de l'énorme travail que tu avais entrepris."

Bon ça, tout le monde le comprendra. Je veux dire quand je parlais du temps, ça veut dire qu'il avait peu de temps pour faire autre chose. Donc je veux dire, c'est immense. Au début, je vous ai lu des passages dans lesquels il parlait de tout ce qu'il devait absorber, etc., bon je veux dire, c'est monstrueux comme quantité de travail.

"D'autant plus qu'il y avait aussi les SGA qui prenaient du retard, année après année. Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5 où les rédacteurs se perdaient dans des masses de diagrammes, dont ils étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes." (rires)

"et ces commutativités étaient essentielles pour la suite. C'est à cet état désastreux et non pas idyllique, tel qu'on le croirait à lire Récoltes et Semailles que se réfère ma phrase du séminaire Bourbaki, la version définitive du SGA5 qui devrait être plus convaincante que les exposés et polycopiés existant."

C'est du Serre craché.

"On aimerait avoir tes impressions sur tout ceci, même modifié par 15 ans d'enterrement pour employer tes termes, on reste sur sa faim."

Alors maintenant, il va aller à une explication beaucoup plus profonde :

"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

C'est ce dont je parlais tout à l'heure quand je parlais de penser juste. Et par exemple, il y a une anecdote, Cartier ne me contredira pas, qui est qu'une fois, en remontant de la cafétéria à l'IHES, il y a je crois que c'est Demazure qui pose une question à Grothendieck sur $SL(\mathbb{Z})$ ou sur... voilà. Et alors Grothendieck dit que ça n'est pas la bonne manière de formuler cette question et le résultat, ça a été SGA3, c'est-à-dire la théorie des groupes algébriques de Grothendieck *(rires)*. Voilà, donc, ce que fait

Grothendieck, c'est... il peut avoir une question précise, on peut lui formuler une question précise, mais il va dire "cette question n'est pas dans le bon cadre". Et il va développer une théorie générale de telle sorte que la question devienne naturelle. Et à partir du moment où la question est naturelle, et où on a pris la peine et le temps de penser juste, elle va tomber comme un fruit mûr. Donc c'est ce que dit Serre quand il dit :

"...mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

Donc la question se dissout. Et dans *Récoltes et Semailles* d'ailleurs, Grothendieck a de très belles images, il parle d'une noix, et il dit qu'il y a deux manières de s'occuper de la noix : la première manière, c'est de prendre un marteau et de la casser, et la deuxième manière, c'est justement de la laisser s'assouplir dans de l'eau, etc., de telle sorte que finalement, elle s'ouvre d'elle-même.

"Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement, du moins pour les EVT[5] *et la géométrie algébrique."*

Alors voilà ce que dit Serre, et ça, c'est du sérieux. Il dit :

"C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres, où les structures en jeu sont loin d'être évidentes, ou plutôt, toutes les structures possibles sont en jeu."

Et je préfère terminer là-dessus. C'est-à-dire, c'est extrêmement frappant de voir ces deux manières de penser les mathématiques. La manière de Grothendieck, d'accord, qui est une manière qui consiste justement à essayer de penser juste, et à essayer de formuler, si un problème est donné, de le formuler de telle sorte qu'il tombe tout seul, d'explorer tous les coins, les moindres recoins. Dans sa demeure, la demeure dont il parle, il n'y a aucun coin qui est sale, qui n'est pas exploré, etc. Il veut que tout soit impecc. Et il ne peut penser que quand c'est comme ça. Et le prix à payer, c'est un travail colossal. Mais c'est un travail qui n'est pas vraiment difficile, au sens où, on développe les choses, etc., etc. A aucun moment donné, on n'est sur une falaise raide, et on risque de tomber, à aucun de ces moments-là. C'est un peu comme si vous connaissez IsraÃ«l, comme la manière dont les romains ont voulu attaquer Massada, je ne sais pas si vous connaissez. Bon, c'est quelque-chose de très frappant parce qu'ils ont remblayé de la terre, de la terre, de la terre, pour que ça arrive finalement au niveau... et ça leur a pris, je ne sais pas, je crois que c'est une dizaine d'années ou quelque-chose comme ça. *(le public donne son avis, 3 ou 4 ans).*

La méthode de Grothendieck, c'est ça. Et ce que l'on voit avec le recul, c'est tout ce qu'on peut en apprendre, de cette méthode. Tout ce que nous pouvons en apprendre... Par opposition à une autre méthode, que moi, j'aime beaucoup, qui consiste à, dans les couloirs de l'Ecole Normale, dans le temps, quand j'étais à l'Ecole, il y avait un copain qui m'avait posé un problème : il était au troisième étage et moi, j'étais au rez-de-chaussée, et puis j'étais parti en week-end, et puis j'avais passé tout mon week-end à essayer de résoudre... bon. C'est le problem solver, on vous donne un problème, et vous cherchez à le résoudre, eh bien, vous cherchez à le résoudre de la manière la plus efficace possible. Ce sont deux manières complètement orthogonales d'agir et en fait, Grothendieck a toute une discussion dans *Récoltes et Semailles* sur ces deux manières d'agir et il les distingue, bon, il les formule avec le yin et le yang. Bon, mais c'est très très important : il dit que la méthode qu'il a, elle est plus féminine, que l'autre, qui est une méthode masculine. Ca, c'est difficile de le dire exactement. Mais c'est très important, quand on fait des maths, de s'imprégner de cette idée, effectivement, qu'il y a ce besoin, et que souvent, on ne le croit pas. Par exemple, récemment, j'avais un collègue qui m'avait posé un problème à l'Académie que j'ai fini par résoudre, mais j'étais sidéré de voir que je l'ai résolu quand j'ai commencé à penser juste. Ça m'a sidéré ! Parce qu'on me dirait "mais tu veux résoudre un problème, mais pourquoi est-ce que tu te préoccupes de ça ?". Non, ça n'est pas vrai, c'est quelque-chose de fondamental, arriver à penser juste, c'est quelque-chose d'absolument fondamental. Jamais, ça ne sera inutile d'essayer de penser juste. Jamais ça ne sera inutile, d'accord.

Donc j'espère que je vous aurai donné envie de lire *Récoltes et Semailles* et puis surtout, de manipuler des topos les plus simples, et d'essayer de vous en servir, par rapport à notre logique, qui est bien pauvre, même dans des circonstances tout à fait extérieures aux mathématiques. Evidemment, ça demande du travail, ça demande un travail qui est très lent, etc. qui est celui de s'approprier la notion. Et c'est une notion qui est maudite, elle est maudite : avec Pierre, et puis surtout avec Laurent Lafforgue, par exemple, on a essayé pendant plusieurs années, de soutenir une mathématicienne très très brillante, qui est Olivia

5. Espaces vectoriels topologiques

Caramello, et on s'est heurté à l'hostilité, pour ne pas dire le mépris, du monde mathématique en général. Et on a pu expérimenter à cette occasion à quel point il y a une espèce de, je ne sais pas, de fatalité, sur la notion de topos, il y a quelque-chose qui irrite les gens, parce que sans doute, ils ressentent, c'est ce que dit Grothendieck, il le dit tellement bien, il le dit explicitement, il l'avait déjà ressenti à son époque, sans doute, ils ressentent qu'il y a quelque-chose, mais ils ne le comprennent pas vraiment. Et pour le comprendre vraiment, il faut en faire, bien sûr, mais il y aura un moment où la notion va vous appartenir et vous allez arriver à vous l'approprier. Et la meilleure manière, c'est cette métaphore, c'est le fait que l'espace n'est pas au-devant de la scène, il est derrière, c'est une espèce de Deus ex machina, et c'est lui qui fait tourner les ensembles, c'est lui qui introduit un aléa, un aléa dans les ensembles, dans la théorie des ensembles. De même qu'il y a un aléa dans les nombres premiers, que nous connaissons tous, et de même qu'il y a un aléa du quantique, donc voilà, il faut garder tout cela en tête, et je vais m'arrêter là.

Parcours d'un mathématicien
Alain Connes

Voilà, donc je m'excuse par avance pour le côté narcissique de mon exposé. Mais je veux dire, ça fait partie du jeu et bon, on m'a demandé de parler de mon parcours. Et donc, je vais vous expliquer un certain nombre de choses que vous ne trouverez pas dans d'autres conférences et que vous ne trouverez nulle part. La première scène, si vous voulez, elle se produit au lycée Thiers, donc à Marseille en l'année 1966, et c'est au mois de mai et je suis en train de passer le concours de l'École Normale Supérieure. Et c'est la première épreuve. Une épreuve qui dure six heures. Je suis assis sur un banc et j'ai un voisin immédiat. On nous donne le problème de math et mon voisin. Il commence à écrire, à gratter. Moi, je lis l'énoncé du problème. Et puis une heure passe et mon voisin, il continue à écrire. Moi, je ne comprend pas l'énoncé du problème. J'arrive pas, ça ne va pas quoi... Je veux dire. Au bout de deux heures, je regarde tout seul et je réfléchis à rien. Mon voisin écrit. Trois heures, Ça dure six heures, trois heures, rien. Quatre heures. 5. Rien. 6 heures. Je sors de la salle en rendant pratiquement copie blanche et en sortant de la salle, je trouve la solution du problème. Bon, alors là, normalement, la conclusion s'impose. Mais j'avais une bande de copains formidables. J'avais une bande de copains extraordinaires. Ils m'ont dit "Tu ne peux pas faire ça, tu ne peux pas t'arrêter, on va aller se baigner à Cassis !", donc ils m'emmènent me baigner au lieu de rentrer chez moi et de broyer du noir. Ils m'emmènent me baigner à Cassis. On se baigne et tout ça, je commence à me détendre, tout ça. Puis, le lendemain, je dis "j'y retourne". Allez hop ! Puis j'ai été reçu à l'École Normale. Donc, si vous voulez, ce à quoi j'ai réfléchi avant de faire cette conférence, c'est à essayer de vous donner des trucs qui pourront vous servir vraiment. Donc, quand on parle de ténacité, qu'est-ce que cela veut dire ? La ténacité, ça ne veut pas dire qu'on est têtu, etc. Non, ça veut dire que quand les circonstances sont les pires qu'elles puissent être (et là, c'était le cas, je veux dire l'épreuve principale, 6 heures, rien) donc, quand les circonstances sont les pires qu'elles puissent être, eh bien, il ne faut pas renoncer. Quand on peut continuer, il le faut. Il faut continuer. Voilà. C'est ça qui s'est produit au début, au tout début.

Et donc, je suis rentré à l'École Normale et à l'École Normale, j'ai trouvé une ambiance absolument extraordinaire, c'est-à-dire qu'à l'époque, on ne nous obligeait à rien, on ne nous obligeait à rien et en particulier, on ne nous obligeait pas à passer l'agreg. Et ce qui comptait simplement, c'était de se poser des problèmes les uns aux autres et d'essayer de les résoudre, etc. C'était ça l'ambiance de l'École et au bout de trois ou quatre ans, j'avais un prof qui était Gustave Choquet et j'avais été séduit par une théorie qui s'appelle l'analyse standard, qui existe toujours. Mais je ne m'étais pas aperçu au moment où j'avais été séduit par cette théorie qu'en fait, c'était quelque chose qui était un peu chimérique. Et mon prof Gustave Choquet m'avait envoyé à une école d'été de physique qui existe toujours, l'école d'été des Houches,

Conférence donnée dans le cadre du cycle Maths pour tous le 18.12.2017 à l'École Normale Supérieure, à Paris, visionnable ici https://www.youtube.com/watch?v=QfZLKxKTS2c

qui a été créée par Cécile de Witt et qui est un endroit extrêmement intéressant pour la communication, justement, de gens plus chevronnés avec des étudiants. Et donc bon, je vais écouter des cours à l'École d'été des Houches et j'avais été repéré à ce moment-là et on m'avait envoyé l'année d'après... on m'avait invité à Seattle, aux Etats-Unis, au Battelle Institute, et on m'avait invité là. J'étais jeune marié et j'avais décidé d'accepter l'invitation. C'était surtout pour visiter les Etats-Unis. Et puis, avec ma femme, on était passés voir mon frère Bernard, qui était à ce moment-là à Princeton. C'était le mois de juillet et à Princeton, il faisait une température terrible. Mais vous savez, la chaleur humide, et il y avait un seul endroit dans le campus qui était agréable. C'était le Book Store. Donc, avec Danye, ma femme, on avait passé l'après-midi au Book Store. Et bon, à l'époque, je n'avais pas trop internet. Il y avait vraiment des livres très intéressants et j'avais cherché un livre parce que je savais qu'on avait décidé de traverser le Canada en train. Au lieu de prendre l'avion pour aller de Princeton, de New York à Seattle, on avait décidé d'aller au Canada, et ensuite, de traverser tout le Canada en train. Mais ça prenait cinq jours. Je m'étais dit cinq jours sans rien. Ça va faire beaucoup. Je vais essayer de trouver un bouquin de math et puis de le lire pendant le trajet, j'avais beaucoup hésité. J'avais regardé pas mal de bouquins, j'avais hésité entre pas mal de bouquins. J'avais fini par en prendre un, et je l'avais regardé, j'avais essayé de le comprendre, je ne comprenais pas tout. J'avais essayé de le comprendre pendant le trajet en train canadien. Il y avait des grandes plaines qu'on traversait pendant des jours et des jours et des jours. Et puis, on était arrivé à Vancouver et à Victoria, l'île de Victoria et enfin on était arrivé à Seattle au bout d'une semaine.

Et à Seattle, quand on arrive, j'étais allé au Battelle Institute pour regarder le programme des conférences. Et à ma grande stupéfaction, j'avais trouvé que l'auteur du livre, que j'avais acheté complètement par hasard quand j'étais passé à Princeton, faisait des conférences là. À ce moment-là, je me suis dit... Ah vraiment, si vous voulez, c'est quelque chose de tout à fait extraordinaire qui arrive, donc en fait, je n'écouterai aucune autre conférence. Je n'irai qu'à celle-là. C'étaient des conférences sur les algèbres de von Neumann, mon premier sujet et donc voilà, von Neumann, il est connu surtout pour autre chose, que les algèbres de von Neumann. Mais c'est lui, si vous voulez, qui a développé ce qu'on appelle les algèbres d'opérateurs. Et le personnage central qui était derrière le livre que j'avais acheté, c'est un mathématicien japonais qui s'appelle Tomita. Et dans l'histoire, c'est aussi une histoire tout à fait extraordinaire, donc je continue en vous racontant des histoires. J'espère que c'est OK. Tomita, si vous voulez, c'est un mathématicien japonais qui a échappé par miracle à la guerre entre le Japon et les Etats-Unis. Il était sourd depuis l'âge de deux ans et comme il était sourd, dans le régiment dans lequel il était, on l'a exempté d'aller dans l'expédition qui devait être faite, parce que comme il était sourd, il n'entendait pas bien les ordres. Ils l'ont laissé tranquille. Or, tout le régiment a été anéanti dans l'expédition qu'ils ont faite. Lui, il a trouvé une théorie absolument géniale, mais il avait un mal fou à communiquer et c'est un autre mathématicien japonais qui s'appelle

Takesaki, qui a écrit un livre dans ces années-là sur la théorie de Tomita, la théorie que Tomita avait inventée. Et donc, si vous voulez, ce qui s'est produit, c'est que j'ai écouté les conférences de Takesaki sur la théorie de Tomita et donc c'était toute une théorie assez nouvelle, etc. Et quand je suis rentré en France. Je me suis décidé à aller au séminaire de Jacques Dixmier. Donc, si vous voulez, Jacques Dixmier faisait un séminaire sur les algèbres d'opérateurs, algèbres d'opérateurs qui avaient été inventées par von Neumann. Elles ont été inventées pour comprendre la mécanique quantique. Pour comprendre ce qu'on appelle les sous-systèmes.

En mécanique quantique, donc, il y avait un formalisme de la mécanique quantique qui avait été bien développé et von Neumann voulait comprendre les sous-systèmes et il y a des sous-systèmes qui correspondent à des factorisations de l'espace de Hilbert. Mais en fait, von Neumann, avec Murray, avait découvert d'autres factorisations et il avait découvert trois types d'algèbres qu'on appelle les algèbres de von Neumann. Il y a ce qu'on appelle les algèbres de type I qui sont très simples. Il y a le type II, qui est beaucoup plus incompréhensible, et le type III, c'est ce qui reste, c'étaient les autres.

Alors quand je suis rentré, il y avait le séminaire Dixmier. Donc je suis allé pour la première fois au séminaire Dixmier et dans le séminaire Dixmier, Dixmier a proposé un sujet qui était la classification des algèbres et il a distribué des articles qu'ensuite on devait exposer dans son séminaire pour expliquer aux autres. Alors là aussi, j'ai levé la main pour avoir un article, je suis allé chercher l'article et quand je suis rentré en train en banlieue, il m'est apparu quelque chose de complètement évident qui était que l'article qu'il m'avait donné pour l'exposer dans le séminaire Dixmier, qui était a priori sur un sujet totalement différent, était en fait parfaitement relié à la théorie de Tomita. Et ça a été ça le début de ma thèse. Donc, en fait, ce que j'ai fait, j'ai écrit une petite lettre à Jacques Dixmier. Il m'a dit "Bon, votre lettre n'a qu'une demi page, ce n'est pas assez détaillé, etc. Renvoyez-moi une lettre plus détaillée.". Je lui ai envoyé une lettre plus détaillée. Je suis allé le voir dans son bureau et la seule chose qu'il m'ait dite lorsque je suis allé le voir, il m'a dit "Foncez !". Et à partir de là, les choses se sont déroulées de manière naturelle mais il y a eu une espèce de concours de circonstances qui a fait qu'au début au moins, les choses se sont passées de manière absolument merveilleuse. Alors, après, il y a eu une période, bien sûr, où il fallait faire des calculs extrêmement compliqués, etc. Et il y a eu un moment effectivement où il y a eu, si vous voulez, dans une vie entière, il y a très peu de moments comme ça. Il y en a peut être deux ou trois au grand maximum. Il y a eu un jour ou j'amenais Danye à son lycée et je rentrais en voiture et à un moment donné, il y avait un feu rouge. Alors là, je me suis rendu compte. Mon cerveau s'est rendu compte qu'il y avait une chose qui était complètement évidente, qui était devant moi, que je n'avais pas vue avant, et qui permettait de complètement débloquer la situation. Qu'est-ce que c'était ? C'était la chose suivante. C'était que Tomita et Takesaki, donc, avaient démontré, si vous voulez, que si on a une algèbre comme ça, qu'on appelle algèbre de

von Neumann. Si on donne un état de l'algèbre, c'est une chose assez compliquée, on a automatiquement un groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre. Mais ce qui n'était absolument pas clair, c'était que ça, ça dépendait d'un état de l'algèbre. Qu'est-ce qui se passe lorsqu'on change l'état de l'algèbre ? Ce que j'ai compris lorsque j'étais au feu rouge, c'est qu'en fait, lorsqu'on change l'état, le groupe à un paramètre ne change pratiquement pas.
Il ne change pas. Si vous voulez. Si on néglige ce qu'on appelle les automorphismes intérieurs, qui sont les automorphismes qui apparaissent naturellement lorsqu'on prend un espace non-commutatif, lorsqu'on prend une algèbre non-commutative, automatiquement, les automorphismes qui viennent de la non-commutativité, lorsqu'on les efface, l'ambiguïté disparaît. Alors quel a été, si vous voulez, le message, quelle a été la conséquence philosophique de ce truc-là. C'est un truc qui m'a suivi toute mon existence mathématique. C'est le fait que la non-commutativité implique, engendre le temps, implique une évolution temporelle. Alors, je n'ai pas fait de transparent là-dessus, mais pour vous expliquer ce que c'est que la non-commutativité, il faut que je vous raconte à nouveau une histoire qui explique comment elle a été découverte en physique. Elle a été découverte en physique par Heisenberg. Donc Heisenberg était un physicien et à un moment donné, il était, je crois, à Göttingen et il a été victime d'un rhume des foins qui était terrible et qui faisait qu'à l'époque, on ne pouvait pas le soigner de manière efficace. La seule manière de soigner le rhume des foins, c'était d'envoyer les gens sur une île où il n'y avait pas de pollen. On l'a envoyé sur une île qui s'appelle Heligoland et bon, alors il était dans cette île, il était logé par une vieille dame et là, il s'est attelé à faire des calculs. Il était en train de faire des calculs et vers les 4 heures du matin, il a eu une illumination. Il a compris. En fait, il a vu un espèce de paysage qui s'est dévoilé sous ses yeux. Il a compris que les quantités physiques, par exemple, si vous écrivez $e = mc^2$ ou que vous mettiez c^2 fois m, ça fait pareil.

Heisenberg a compris que lorsqu'on regarde un système microscopique, ce n'est pas pareil. C'est-à-dire que si vous multipliez la position d'une particule par le moment ou le moment par la position, vous n'obtenez pas le même résultat. Et ça, c'était quelque chose de faramineux qu'il a trouvé. Et ce qu'il raconte dans ses mémoires, il raconte qu'au lieu d'aller se coucher lorsqu'il a fait cette découverte, il ne pouvait pas. Il est allé gravir un piton rocheux qui était au bord de l'île et il a attendu le lever du soleil en haut d'un piton rocheux. Donc, si vous voulez, la chose extraordinaire, c'est que les quantités physiques au niveau microscopique ne commutent pas. C'est ça qui a complètement débloqué la mécanique quantique et c'est ça qui a entraîné von Neumann à développer les algèbres de von Neumann parce que les algèbres de von Neumann sont précisément, si vous voulez, les algèbres qui vont rentrer dans la physique de la mécanique quantique. Et alors ? Donc, l'apport que j'ai fait dans ma thèse, si vous voulez, c'était de comprendre, justement, qu'en fait cette non-commutativité, elle va engendrer le temps de manière complètement canonique, complètement naturelle. Alors ça, bien sûr, ça a donné un tas d'invariants de ces algèbres. Ça a permis de les classifier, mais bien sûr, ça a pris beaucoup de temps de les classifier, c'est-à-dire que ça a aussi permis de résoudre le type III. Ça a permis de le réduire. C'est ce que j'ai fait dans la deuxième partie de ma thèse, c'est de réduire le type III au type II avec des automorphismes. Mais bien sûr, après, il fallait classifier les types II au moins dans le cas hyperfini et classifier les automorphismes, ça a pris, ça m'a pris un temps absolument considérable et il y a eu une période de mon existence mathématique qui a été très, très propice pour ça. Ça a été la période de mon service militaire. Alors bien sûr, vous allez rigoler parce que si j'avais fait vraiment mon service militaire, ça aurait été très difficile de faire des maths. Mais bon, j'ai eu de la chance. J'ai fait mon service militaire en coopération avec les pays sous développés, avec le Canada anglais.

Donc, c'était quand même drôlement sympa. Alors, j'étais dans une petite université qui est l'université de Kingston, dans l'Ontario. Et là, à nouveau, je veux dire, on a rencontré des gens extrêmement extraordinaires, humainement, autour de nous, dans un petit groupe. Et le fait que cette université n'était pas une université centrale, ce n'était pas Princeton, etc. Ça donnait une liberté de pensée qui est incroyable, c'est-à-dire si vous voulez, ça permet dans une petite université, ou bien si vous êtes dans un endroit comme ça, d'être un peu décalé. Ça permet de ne pas avoir le poids de la science, de toutes les connaissances, etc., sur les épaules, et ça permet d'avoir une certaine liberté. Donc, j'ai ressenti cette liberté peut-être plus que jamais dans cet endroit-là. Donc moi, j'étais très content à ce moment-là puisque j'avais pratiquement terminé ce que je voulais faire qui était de comprendre les facteurs, de comprendre le type III, etc.

Et puis, je suis rentré en France et quand je suis rentré en France, j'ai été invité à l'IHES à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Et là, quand je suis arrivé, j'ai eu un sacré choc, c'est-à-dire que je suis allé au déjeuner là où les gens vont déjeuner d'habitude, il y a une petite cafétéria et il y avait des gens qui parlaient de math. Je ne comprenais absolument pas ce qu'ils racontaient. C'est-à-dire que si vous voulez, j'étais un spécialiste d'un sujet pointu, bien sûr très difficile, mais je n'étais pas... je ne connaissais pas, par exemple, ce que c'est que le complexe de De Rham, etc. Il y avait tous ces trucs-là qui me passaient largement au-dessus de la tête et j'ai eu de la chance à nouveau. J'ai eu vraiment beaucoup de chance. J'ai rencontré un mathématicien qui s'appelle Dennis Sullivan qui, à l'époque, était l'un des piliers de l'IHES. Ça, c'était en 1976. Et ce mathématicien, il avait la propriété suivante, très, très unique. Il avait la propriété suivante, qui était que quand il voyait quelqu'un de nouveau, il venait s'asseoir à côté de lui, et il lui posait des questions en commençant par “Sur quoi vous travaillez ?”. Bon, alors, on discutait avec lui et au début, on pensait qu'il était complètement idiot, parce qu'il posait des questions naïves, si vous voulez. Puis ça continuait comme ça et il continuait à poser des questions de nature naïve. Et puis, au bout d'une dizaine de questions, vous vous aperceviez que vous ne compreniez pas de quoi vous parliez.

Il avait un pouvoir socratique absolument extraordinaire. Donc, j'ai commencé à discuter, à discuter en détail avec lui, etc. Et en discutant avec lui, il m'a appris un tas de choses, m'a appris quantité de choses que je ne connaissais pas. Il m'a appris la géométrie et ce qui m'embêtait beaucoup, c'était que les travaux que j'avais faits sur les algèbres de von Neumann, si vous voulez, ça paraissait être dans un endroit assez excentré des mathématiques. Il y a une espèce de paysage des mathématiques et dans ce paysage, il y a des endroits qui sont vraiment tout à fait au centre. Et puis, il y a des endroits qui sont beaucoup plus périphériques et j'avais l'impression que c'était relié à la physique, bien sûr, mais j'avais l'impression que les algèbres de von Neumann, c'était quelque chose quand même qui restait assez périphérique. Et je me suis rendu compte, en discutant avec Dennis Sullivan, qu'en fait, on pouvait associer à une donnée géométrique qui est parfaitement connue, qui est ce qu'on appelle un feuilletage, on pouvait lui associer une algèbre de von Neumann. Et qu'est ce que ça permettait de faire ? Ça permettait d'illustrer la classification que j'avais faite à partir d'objets géométriques qui étaient des objets géométriques parfaitement compréhensible. Le plus simple des feuilletages, vous savez, le feuilletage, vous avez pensé à un feuilletage inversé. C'est en gros. C'est un espace comme ici, le tore. Mais le feuilletage, ce sont les lignes qui s'enroulent ici. Mais ce qui est frappant dans un feuilletage, c'est le fait qu'alors que l'espace total est compact et fini, si vous voulez, les feuilles là dans l'enroulement, sont infinies, c'est-à-dire que les feuilles, lorsqu'on regarde localement comme à droite, on voit quelque chose qui est très simple, c'est un produit. Mais lorsqu'on regarde globalement les feuilles, elles ne reviennent pas au même endroit. Elles s'enroulent indéfiniment, d'accord. Alors ça a été un point absolument crucial parce que les feuilletages, en géométrie, les gens savent très bien ce que c'est. Et ils en ont quantités d'exemples. Et il se fait que la classification que j'avais faite avec les facteurs de type III_λ, de type III, etc, qui paraissait quelque chose d'assez bizarre et d'assez reculée, d'assez excentrée dans le paysage mathématique, en fait, elle était parfaitement illustrée par les feuilletages les plus naturels, les plus géométriques qu'on puisse imaginer. Par exemple, ce feuilletage-là, c'est un feuilletage de type II_∞. Et si on prend par exemple un feuilletage géodésique et cyclique, c'est un feuilletage de type III, etc. Donc, si vous voulez, ça, ça, donnait un sens aux objets algébriques que j'avais trouvés, ça leur donnait un sens géométrique. Une autre rencontre qui a été absolument cruciale pour moi à ce moment-là, c'était en 78, j'étais invité à donner une conférence d'une heure au Congrès international des mathématiciens. J'ai été très frappé par la chose suivante, c'est que quand j'ai fait mon exposé, je l'avais préparé et préparé, préparé. Quand j'ai fait mon exposé, bien sûr, mon exposé était sur mes résultats, sur la classification des facteurs. Mais à la fin, j'avais rajouté des résultats sur les feuilletages, une annexe, et alors de manière très, très bizarre, pour moi, la partie sur les feuilletages, c'est une partie complètement triviale et par contre, la partie vraiment vraiment dure, très, très dure, c'était la partie sur les algèbres d'opérateurs. Après mon exposé, Armand Borel est venu me voir et il était tout excité par la partie sur les feuilletages.

Et du coup, il m'a invité à Princeton et j'ai été invité à Princeton dans l'année

78-79 et là, à Princeton, j'ai fait une rencontre qui allait jouer un rôle essentiel dans ma vie mathématique. C'est la rencontre de mon collaborateur qui s'appelle Henri Moscovici, qui est professeur à Colombus, aux Etats-Unis, et avec lequel, si vous voulez, j'ai vraiment collaboré, la plupart de mes articles ont été écrits en collaboration avec lui. Il faut aussi que je vous raconte une autre histoire sur Princeton. J'avais un collègue à l'École Normale qui avait fait un séjour à Princeton avant, très longtemps avant. Je crois qu'il avait fait un séjour pendant qu'on était encore élèves à l'École. Et c'était quelqu'un d'assez gros. Et alors qu'il était un peu rond, il avait passé un an à Bristol et quand il était revenu, il était absolument filiforme. On lui avait demandé "Mais qu'est ce qui s'est passé ?". Il nous avait raconté qu'il avait passé un an à Princeton, qu'il n'avait parlé à personne, qu'il n'avait parlé à personne, c'est-à-dire que c'était un endroit qui était tellement, comment dire, hiérarchisé, etc., qu'en fait, il n'avait réussi à parler à personne. Donc, il y avait ce côté-là, il y avait ce côté-là, vraiment, à Princeton. Et moi, j'ai eu une chance inouïe qui a été de rencontrer Henri et avec Henri, bien sûr, on a tout de suite commencé à travailler et on a collaboré ensemble.

Donc, si vous voulez, quel point essentiel est apparu jusque-là ? Quel était le point essentiel ? En fait, j'ai compris à ce moment-là, à cause des feuilletages, j'ai compris la portée de ce qui se passait parce qu'en fait, ce qui se passe, si vous voulez, lorsque vous regardez ce type d'espace, ce qui se passe, c'est que l'on a en fait un espace qui, si on essaye de chercher sa cardinalité au niveau ensembliste du mot... Si on regarde l'espace des feuilles d'un feuilletage, d'accord, si on regarde l'espace des orbites ici, si on regarde l'espace des feuilles d'un feuilletage, on s'aperçoit que si on prend la théorie des ensembles ordinaires, cet ensemble a la cardinalité du continu. Mais qu'en fait, on ne peut pas le mettre en bijection avec le continu de manière constructive. En fait, on s'aperçoit qu'il est impossible, on peut le démontrer, il est impossible de construire une injection de cet ensemble dans les nombres réels. Donc, en fait, je me suis aperçu très, très progressivement que ces espaces en fait, si on cherchait à les comprendre de la manière usuelle avec la théorie des fonctions, etc., on n'y arriverait absolument pas et que la seule manière de les comprendre, c'était de leur associer une algèbre non-commutative. Et c'est là le début de la géométrie non-commutative. Pourquoi est ce que c'est le début ? Le tout début, parce que l'algèbre des fonctions associée à un tel espace ne voit cet espace qu'au niveau de la théorie de la mesure. Or, la théorie de la mesure, c'est une théorie extrêmement floue qui vous permet de déchirer l'espace en plusieurs parties, etc. Mais qui n'en donne pas la topologie, qui ne donne pas tout le reste. Et graduellement, la géométrie non-commutative, c'est une théorie qui a permis, si vous voulez, de redéfinir, de reconstruire toutes les notions habituelles qui vont de la théorie de la mesure, bien sûr, à la topologie, à la géométrie différentielle et même à la vraie géométrie, à la géométrie riemannienne. Si vous voulez, dans le cas commutatif, des espaces comme ça, en fait, ce qui s'est dévoilé à ce moment-là, c'est qu'il y avait tout un univers complètement nouveau, d'espaces complètement nouveaux qui ne demandaient qu'à être compris. Mais dans la compréhension, il était d'abord nécessaire de savoir que ce serait forcément intéressant. Pourquoi était-on sûr que ce serait intéressant ? On était sûr que ça serait intéressant parce qu'un tel espace était automatiquement un objet dynamique. C'est-à-dire qu'un tel espace a automatiquement son propre temps, il engendre son propre temps, alors qu'un espace ordinaire comme une variété, etc., c'est statique, ça ne bouge pas. Alors que ces espaces-là, ils tournent avec le temps. Donc c'est quelque chose d'absolument extraordinaire. Donc, on savait que ce serait tout à fait extraordinaire. Mais bon, bien sûr, après, il fallait développer la théorie et donc il fallait développer la géométrie. Si vous voulez, des espaces dans les corps, ils ne commutent pas. Le premier exemple, bien sûr, c'était l'exemple qu'avait trouvé Heisenberg, c'est-à-dire l'exemple de la mécanique quantique. Donc, il fallait complètement retrouver, redéfinir la géométrie pour ces espaces.

Alors, quand on parle de géométrie, bien sûr, bon, en mathématiques, il y a toutes sortes de géométries que les gens ont inventées et qui sont plus ou moins élaborées. Mais bon, la géométrie la plus, la plus pertinente, la plus importante, c'est la géométrie de l'espace dans lequel on vit. Donc, en fait, c'est ça qui va m'intéresser, c'est ça qui m'a intéressé pendant des années. C'est la géométrie de l'espace dans lequel on vit. Et ce qui est tout à fait étonnant, c'est qu'en fait, ce travail est basé sur la mécanique quantique, il est basé sur le formalisme quantique, etc. En fait, je réponds à une question qui était posée par Riemann dans sa leçon inaugurale. Dans sa leçon inaugurale, Riemann était parfaitement conscient du fait que la notion de géométrie qu'il avait formulée, lui, à partir de Gauss, etc., à partir de ce qu'on savait à l'époque, la notion que Riemann avait formulée n'était pas nécessairement une notion qui continuerait à avoir du sens dans l'infiniment petit. Qu'est-ce que ça veut dire ? Il était clair à son époque que ça couvrait les grandes distances, mais Riemann était extrêmement précautionneux. Et ce qu'il explique, c'est que les raisons pour lesquelles il ne croit pas que ça continue à avoir un sens dans l'infiniment petit, c'est que le concept de corps solide ou le concept de rayon lumineux n'a plus de sens dans l'infiniment petit. En fait, on est tout de suite dans le domaine quantique quand on regarde ça. Donc oui, il écrit explicitement dans ses écrits que dans l'infiniment petit, il est tout à fait probable que la notion de géométrie ne sera pas conforme à ce qu'elle est, à celle qu'il avait donnée dans sa leçon inaugurale. Alors, en fait, ce qui se produit, donc, il continue bien sûr et continue. Et il explique d'ailleurs qu'en fait, le fondement des rapports métriques doit être cherché dans les forces de liaison qui agissent dans l'espace. Je ne sais pas comment il a fait pour avoir cette intuition absolument extraordinaire. Donc, ce que dit Riemann, si vous voulez, c'est que pour comprendre vraiment la géométrie de l'espace dans lequel on vit, il faut en fait comprendre les forces qui tiennent les choses ensemble. Alors, bien sûr, depuis Riemann, il y a eu des progrès absolument extraordinaires par rapport à ce qu'a dit Riemann. C'est que, bien sûr, il faut la non-commutativité.

Cela conduit directement au domaine qui est la physique, qui ne fait pas partie des math. Mais bon, il explique en quel sens la réflexion mathématique est cruciale pour ça.

Et ce qui est très important, surtout, c'est que Riemann fait référence à Newton. Et Newton avait pressenti lui aussi que lorsqu'on va dans des distances beaucoup plus petites, celles qu'on ne peut pas observer avec l'œil, il y aura sûrement de nouvelles forces qui apparaîtront. Donc, ce que dit Newton, c'est que l'attraction de la gravité ou du magnétisme, et l'électricité sont visibles à grande distance. Donc, on peut les observer de manière usuelle. Mais bien sûr, on sait tout ce qui va se passer à distance.

Les distances eaucoup plus courtes échappent à l'observation. Et il y a un livre que je vous recommande sur l'histoire de la physique des particules dont l'auteur est Abraham Pais et dans lequel il explique justement comment, en 1895, c'était après Riemann, puisque Riemann s'était dans les années 1860, entre 1895 et maintenant, on a réussi au niveau vision dans l'infiniment petit, à augmenter la vision par un facteur 10. C'est quelque chose de colossal et en faisant cela, en fait, le vrai microscope, le vrai microscope qui a permis de voir dans cette toute petite distance, c'est le LHC.

D'accord ? C'est au LHC, en fait, qu'on a réussi à percer la structure à un niveau beaucoup plus, beaucoup plus petit. Mais lorsqu'on parle de distances beaucoup plus petites, ça revient à dire des énergies beaucoup plus grandes. Donc maintenant, effectivement, on arrive à 10 TeV, c'est-à-dire à 10 puissance 13 électronvolts.

Donc, ce qui s'est produit, c'est que le formalisme que j'avais dû mettre au point pour des raisons purement mathématiques, pour faire la géométrie des espaces non-commutatifs, s'est révélé, ce formalisme, dans les années 85, à partir du moment où je suis rentré au Collège de France, il s'est révélé incroyablement adapté pour comprendre la structure géométrique de l'espace dans lequel on vit. Mais à partir des résultats expérimentaux, c'est-à-dire pour arriver à comprendre que l'espace dans lequel on vit n'est pas simplement le continu à toutes les échelles, qu'il a une structure fine, mais que cette structure fine, en fait, elle est exactement, selon les mots de Riemann, dictée par les forces qui agissent dans l'infiniment petit.

Et alors, comment est-ce que le paradigme a changé ? Ça, je peux parfaitement l'expliquer. Le paradigme a changé de la manière suivante. Donc, le but du voyage ?

Si vous voulez, ce à quoi on est arrivé dans les années très récentes, c'est à comprendre cet espèce d'énorme mécanisme qu'on appelle le modèle standard couplé avec la gravitation. Mais le comprendre comme étant simplement la gravitation, simplement sur un espace qui est plus subtil, qui est plus compliqué et qui a une structure plus fine que celle de l'espace ordinaire. Mais alors, que se passe-t-il au niveau des concepts ? Au niveau des concepts, ce qui se passe, c'est quelque chose de très simple à comprendre. Au moment de Riemann, au moment où Gauss, etc., définissaient leur métrique, les mesures des distances étaient faites en essayant de prendre le chemin le plus court qui va du point A au point B.

C'est ce qui est montré ici sur cette image et en fait, il y a eu toute une expédition qui a été faite à la fin de la Révolution et puis jusqu'aux années 1799, par deux Français. Je ne sais pas si vous avez entendu parler de ça, mais c'est eux qui ont mesuré le méridien. C'est eux qui ont essayé de définir l'unité de longueur en mesurant la distance entre Dunkerque et Barcelone et à partir de leurs mesures. Bon, il y a eu toutes sortes d'épisodes, mais à partir de la mesure, on a défini une unité de longueur qu'on appelait le mètre.

Et quand j'allais à l'école, on apprenait que l'unité de longueur, c'était le mètre-étalon qui était déposé au Pavillon de Breteuil, près de Paris. C'était une barre de platine. Mais les choses ont évolué. C'est l'ancienne géométrie qui consiste à mesurer les longueurs comme ça.

Mais ce qui s'est produit, il s'est produit quelque chose d'extraordinaire qui est qu'un jour, il y avait une réunion de la conférence des poids et mesures. Et il y a quelqu'un dans la salle qui a dit “votre unité de longueur, eh bien, elle change de longueur.”. C'est embêtant quand même si l'unité de longueur change de longueur. Et qu'est ce qui s'était produit ? Ce qui s'était produit, c'est que l'homme en question avait mesuré le mètre étalon en le comparant à la longueur d'onde du krypton.

Et il s'était aperçu que la longueur changeait. De fil en aiguille, les physiciens ont beaucoup réfléchi et ils en sont arrivés à définir l'unité de longueur non plus comme étant le mètre-étalon qui est déposé quelque part au pavillon de Breteuil, etc. Il faut bien réfléchir que quand vous dites l'unité de longueur, c'est le mètre-étalon déposé au Pavillon de Breteuil, si vous voulez unifier le système métrique dans la galaxie, si vous expliquez aux gens d'une autre planète de notre système solaire que pour mesurer leur lit, il faut qu'ils viennent au Pavillon de Breteuil, ce sera un peu compliqué, donc il a trouvé une bien meilleure solution.

Ils ont trouvé une bien meilleure solution qui était de définir l'unité de longueur. D'abord, ils l'ont pris à partir de la longueur d'onde, du krypton, etc. Après, ils ont défini à partir de la longueur d'onde de ce qu'on appelle la transition hyperfine du césium. Le césium a une certaine transition hyperfine dans la longueur d'onde. C'est une longueur d'onde de type micro-ondes qui est de l'ordre de 3,5 cm et ça permet de mesurer de manière très, très efficace.

Et alors ? Évidemment, là, ça change tout. Parce que si, par exemple, on définissait l'unité de longueur à partir du spectre de l'hydrogène, par exemple, l'hydrogène est présent dans tout l'univers. Donc là, ce serait parfaitement valable. D'accord. Alors, il se fait que la transition entre l'ancienne définition du maître localisé à Breteuil et la définition à partir de la longueur d'onde du spectre du césium, c'est exactement la transition entre l'ancienne géométrie et la géométrie non-commutative.

C'est exactement ça.

C'est une géométrie de type spectral, de nature spectrale. Et donc, c'est ça, le changement, c'est le changement de l'unité de longueur. Donc, c'est une géométrie de nature spectrale et en plus, si vous voulez la non-commutativité, il y a la non-commutativité de l'algèbre, elle est pratiquement imposée par ce qu'on appelle les théories de jauge. Les physiciens ont découvert les interactions fortes, par exemple, ils ont découvert qu'il n'y a pas seulement l'électrodynamique, mais qu'il y a aussi des interactions fortes qui tiennent ensemble les quarks dans un atome.

Et pour cela, ils ont eu besoin de théories de jauge non-abéliennes. Eh bien, c'est ça, c'est ça qui est vraiment à la racine du fait que l'espace a une toute petite structure fine qui est non-commutative.

Donc, il y a une saga, une saga très, très longue que je ne veux pas vous raconter. Mais je vous raconterai seulement la fin, il y a eu des hauts et des bas, c'est-à-dire ? J'ai eu des collaborateurs, comme Chamseddine, avec qui on a donc fait un modèle si vous voulez, un modèle de l'espace-temps qui était basé sur ces idées-là, sur la structure hyperfine, sur la structure qui vient de la géométrie non-commutative. Il y a eu des hauts et des bas.

Il y a eu, en 98, la découverte du neutrino, du mélange des neutrinos, les modèles de Calabi-Yau. Donc là, on a abandonné, on a abandonné pendant un certain nombre d'années. Après, on est revenu en 2005 avec une nouvelle idée qui était de changer une dimension. Tout a marché. Formidable. Sauf qu'en 2008, il y a eu. Il y a eu une exclusion de la masse du Higgs qui contredisait notre travail.

Par exemple, j'ai écrit un blog, j'avais écrit en citant Lucrèce qui parle des gens qui se réjouissent du malheur des autres. Donc effectivement, là, on était très malheureux, très malheureux. Et puis il y a eu une période, donc ça, c'était à partir de 2008. Et puis, il y a eu une espèce de résurrection à nouveau, simplement, c'est la raison pour laquelle je vous dis ça, c'est qu'il ne faut jamais se décourager.

Faut jamais se décourager.

Il y a eu une période de découragement qui était très longue à partir de 2008 et en 2012, mon collaborateur m'a envoyé un mail et il m'a dit la chose suivante, il m'a dit : “Ecoute, il y a 3 équipes différentes de physiciens qui ont réussi à stabiliser le modèle standard jusqu'à le rendre compatible avec la masse du Higgs.” Bon, alors d'accord, je continue à lire son mail et il me dit “ils ont fait ça en rajoutant un champ scalaire qui vérifie certaines propriétés de couplage avec le vide.”. Puis, je continue à lire son message, il me dit : “ce champ scalaire, on l'avait dans notre article de 2010, mais on l'avait négligé.”. Donc en fait, on l'avait. En fait, on s'était découragé. Quoi ? C'est-à-dire qu'on avait dit : “Le champ scalaire, il ne change rien.”. Si on avait été courageux, vraiment courageux, on l'aurait pris en compte et on aurait vu que tout marchait merveilleusement. Donc voilà ça, c'est pour ce côté-là.

Et en fait, donc, ce qui s'est produit si vous voulez, au niveau de mon développement mathématique, c'est qu'après avoir développé la théorie qu'on appelle la géométrie non-commutative, donc c'est une théorie qui est quand même... je ne voudrais pas vous faire croire que c'est une théorie qui est simple, c'est une théorie qui est très élaborée, elle a un tas de relations avec un tas de concepts différents, etc. Et en gros, chacun des concepts qui intervient dans la géométrie dont on a l'habitude doit être modifié et on le regarde d'une manière complètement différente.

Même l'intégrale, même la notion d'intégrale est changée, elle est remplacée par ce qu'on appelle la trace de Dixmier et qui est un concept qui a été inventé par Dixmier et qui joue un rôle absolument central dans cette théorie. Bon, elle est reliée à un tas d'autres théories, mais je ne voulais pas vous embêter avec ça. Maintenant, je vais vous expliquer ça...

Alors en fait, il s'est produit un autre phénomène assez bizarre, c'est que dans l'année 1996, j'ai été à nouveau invité à Seattle. Je ne pouvais pas refuser si j'étais à nouveau invité à Seattle, et c'était pour l'anniversaire d'Atle Selberg, qui était un grand théoricien des nombres, et j'avais été invité parce qu'avec mon collaborateur Jean-Benoît Bost, on avait écrit un article dans lequel on trouvait qu'on avait ce qu'on appelle une transition de phase sur un système de mécanique statistique et on trouvait que la fonction de partition du système était la fonction zêta de Riemann.

Donc, comme cette conférence était une conférence sur la fonction zêta de Riemann, ils m'avaient invité, alors j'avais bien fait, j'avais un peu suivi le même parcours qu'avant. Je m'étais arrêté à Victoria, puis après, j'étais allé à Seattle et à Seattle, j'avais donné ma conférence et après la conférence, j'avais vu Selberg qui m'avait dit : “It is not clear that what you are doing will be related to...”. Si vous voulez, bien sûr, on connaît la fameuse conjecture. Il m'avait dit ça, il m'avait dit ça. Et bon, évidemment, je veux dire, on aime bien aussi être provoqué, on aime bien que les gens vous critiquent. Ça manque pas, ça, en mathématiques, pas de difficulté là-dessus.

Et d'ailleurs, je dois rajouter une chose, c'est que non seulement les gens vous critiquent, mais vous avez de bons amis qui vous répercutent les critiques. Donc ça ne manque pas, mais ça a un côté positif. Ça a un côté positif parce que non seulement il faut être accrocheur, mais il faut être capable d'être, de transformer la frustration que vous avez lorsque les gens vous critiquent en énergie positive. Cela, c'est une qualité absolument cruciale. C'est une qualité essentielle, c'est-à-dire que si quelqu'un vous critique d'une manière ou d'une autre, il faut arriver à prendre ça et à le considérer comme un potentiel d'énergie, pas comme quelque chose de négatif. Il faut être capable de se distancier par rapport à soi-même et de le voir comme une énergie positive. D'accord, donc, quand je suis rentré de Seattle au lieu de... je ne me suis pas occupé du décalage horaire. C'est-à-dire ? Je suis resté sur l'heure de Seattle, je suis resté sur l'heure de Seattle et ce que j'ai fait, c'est que pendant une semaine, je n'ai pas travaillé.

Je lisais le livre qui s'appelle *The Staff*, je ne sais pas si vous connaissez ce livre, c'est un livre sur les astronautes et sur Apollo 13, etc. Sur toute cette histoire, c'est un livre magnifique. Bon, je lisais ce livre, je l'ai lu, je l'ai dégusté sur place, on aurait pu, j'aurais pu le lire en quelques heures.

Mais en fait, je l'ai dégusté petit à petit et au bout d'une semaine, j'ai compris qu'en fait, ce que les gens cherchaient lorsqu'ils cherchaient une réalisation spectrale des zéros de zêta, ils la cherchaient tous sous la forme de ce qu'on appelle un spectre d'émission, c'est-à-dire un spectre d'émission, c'est un spectre, vous aurez un fond noir et vous aurez des raies d'émission. Par exemple, si vous prenez du sodium et que vous le chauffez, le sodium va vous donner un spectre. Si vous faites passer la lumière à travers un prisme, il va vous donner un certain nombre de raies très brillantes, mais bien isolées comme ça, sur un fond noir. D'accord, mais en fait, ce n'est pas comme ça qu'on a vu les spectres pour la première fois. Les spectres, c'est Fraunhofer qui les a découverts vraiment et il les a découverts en prenant la lumière qui venait du soleil, on avait déjà regardé cette lumière à travers un prisme, le prisme décompose la lumière en couleurs différentes, les couleurs de l'arc en ciel.

Mais ce qu'a fait Fraunhofer, il a eu une idée géniale. Il a eu l'idée géniale de regarder ça au microscope. Et quand il a regardé au microscope, il s'est aperçu qu'en fait, il y avait plein de raies noires. D'abord, il a nettoyé son truc, d'accord. Et puis, en fait, il s'est aperçu que quel que soit l'instrument qu'il prenait, il y avait les mêmes raies noires. Et alors ? L'histoire merveilleuse qui était derrière, c'est qu'après, il y a Bunsen et Kirchhoff qui ont réussi en chauffant des corps comme le sodium, etc., à produire les mêmes raies, mais à les produire comme spectres d'émission. Pas comme des raies noires, l'inverse, sauf qu'il manquait encore d'essayer avec la lumière du soleil. Il y avait des raies noires qu'on ne pouvait pas produire par émission. Alors évidemment, les physiciens sont toujours malins, ils ont dit ces raies noires, c'est un nouveau corps qu'on va appeler Hélium, comme le soleil, bien sûr, quand ils l'ont appelé Hélium, bien sûr, c'est un peu comme la matière noire.

Vous allez me dire qu'est-ce que c'est que cette histoire ? Sauf qu'il y a eu une éruption du Vésuve. Et quand ils ont fait les spectres d'émission de la lave du Vésuve, ils ont trouvé de l'hélium dedans. D'accord donc, ce que j'avais compris en rentrant de Seattle, c'était qu'en fait, au lieu de chercher un spectre d'émission, ce qui était ce que les gens cherchaient, mais il y avait un signe "-" qui ne marchait pas, il y avait toujours un signe "-" dans la formule qui ne marchait pas.

En fait, il fallait chercher le spectre comme un spectre d'absorption. Et alors ? J'avais déjà l'espace non-commutatif qu'il fallait pour ça. J'avais déjà l'espace non-commutatif qu'il fallait. Et je savais démontrer que cet espace non-commutatif donnait les bons termes dans ce qu'on appelle la formule de Riemann. Mais j'avais vu alors après, bien sûr, comme je savais qu'il fallait chercher un spectre d'absorption. J'ai regardé si ça, effectivement, ça donnait la réalisation spectrale. Et alors, le miracle, c'est que ça donnait la réalisation spectrale.

C'est ça que j'ai compris en rentrant de Seattle. Après une période d'ennui total, que je ne recommanderais jamais assez. Il n'y avait pas de mails à cette époque. Moi, je n'étais pas connecté. D'accord. C'était une période qui était propice à laisser le cerveau fonctionner parce que je lisais autre chose. Je ne faisais pas de math. D'accord. Je lisais autre chose et au bout d'un moment, c'est venu comme quelque chose qui est devenu complètement naturel. Et alors, qu'est ce que ça voulait dire ?

Mais ça voulait dire que cette géométrie très abstraite qui était venue de loin, n'est-ce pas, et qui était venue de von Neumann, qui était venue de Heisenberg, etc. Elle avait l'air de marcher, elle avait l'air de marcher aussi bien pour l'espace dans lequel on vit que pour l'espace sans doute le plus difficile qui existe, qui est celui qui comprend la nature des nombres premiers, de l'ensemble des nombres premiers, parce que ce qui est derrière la réalisation spectrale, la fonction d'état, etc., c'est exactement la nature de l'ensemble des nombres premiers. Alors ça, c'était le point de départ, c'était le point de départ. J'ai écrit une petite note aux Comptes-Rendus. J'ai été invité à Princeton.

Et alors là, ce qui s'est produit, moi, j'appelle ça un gag, je trouve ça très marrant. C'est-à-dire que j'ai fait ma conférence à Princeton. Bon, etc. C'est vrai que ce qu'il faut savoir, c'est que le sujet en question, qui est l'hypothèse de Riemann dès qu'on s'approche, c'est un sujet qui est miné. Donc, il faut savoir que c'est protégé par des montagnes de scepticisme. D'accord. Mais toujours est-il que bon, j'avais trouvé quand-même quelque chose.

Je suis allé là bas. J'ai fait mon exposé, j'avais sûrement compris quelque chose, si vous voulez, c'était la compréhension de la formule de Riemann-Weil sous forme de formule de traces. Et puis, il y a deux personnes que je connaissais et que je connais très bien. Il y a une personne avec laquelle j'avais collaboré, Paula Cohen et Bombieri qui ont fait un canular. En fait, un canular pour le 1$^{\text{er}}$ avril, c'est-à-dire le 1$^{\text{er}}$ avril, vous savez, d'habitude, on fait des canulars, on voit des trucs. Donc, ils ont envoyé un canular par email en disant qu'après ma conférence, il y avait un Russe qui était là et qui avait réussi à démontrer l'hypothèse de Riemann. Bon, alors c'était très drôle.

J'ai rigolé, etc. Sauf que je n'avais pas réalisé ça, c'était en 98, en mars 98, et je n'avais pas réalisé que ce canular allait être envoyé un peu partout. Alors c'est envoyé un peu partout. Forcément, il y a des gens qui l'ont pris au sérieux. Et alors ? Ce qui est absolument incroyable, c'est qu'il a été pris au sérieux. C'était en 1998. C'est une année où le Congrès international des mathématiciens avait lieu à Berlin. Bon, je n'ai rien contre les Allemands, mais bon, si vous voulez, il y a eu, en gros, il y a eu des Allemands qui ont pris ça au sérieux. Et alors, qu'est ce qu'ils ont décidé de faire ?

C'est quelque chose qui est absolument incroyable. Je m'en suis rendu compte seulement récemment parce que je veux dire, à l'époque, j'avais ignoré ce jeu. Je haussais les épaules. Qu'est-ce qu'ils ont décidé de faire ? Ils ont décidé d'inviter pour parler une heure au congrès, la personne qui était la mieux placée pour être mon compétiteur. D'accord. Donc, au lieu de m'inviter, moi, par exemple, ils ont invité une personne qui travaillait sur le même sujet et ils lui ont donné un boulevard.

Et bon bah, je me souviens que Selberg, quand je l'ai revu la même année, c'était après le congrès. Il m'a dit qu'il n'avait jamais entendu un exposé aussi vide. Et moi, je ne savais pas à cette époque-là, je n'avais pas regardé, j'ai regardé récemment et j'ai été estomaqué parce que je me suis aperçu que cet exposé, en fait, c'est un exposé qui reprenait mes idées sans vraiment les citer. Ou plutôt en les citant avec ce que Grothendieck appelle la technique pouce. La technique pouce, c'est la suivante si ça peut vous servir, c'est... vous savez, vous empruntez l'idée de quelqu'un. Mais vous ne voulez pas vraiment le citer. Vous mettez son article en bibliographie, mais vous le citez pour autre chose. Ça marche très, très bien. D'accord, donc ça, c'est le prototype de ce qui m'est arrivé à ce moment-là. C'est le prototype de l'expérience qui arrive lorsqu'on s'approche de ce sujet, lorsque on s'intéresse à ce sujet-là, etc.

Mais d'un autre côté, on ne peut pas avoir peur. Il ne faut pas avoir peur. Ça, c'est une chose absolument essentielle. Il faut être capable de supporter ce genre d'avanies sans en tirer de conséquences. Et justement, en essayant de les transformer en énergie positive. D'accord, alors, ce qui s'est produit depuis ? Je vais, je ne vais pas tarder... je ne sais pas. Qu'est-ce qui s'est produit depuis. Si vous voulez, ce qui s'est produit depuis ce moment-là, c'est la chose suivante. C'est que j'ai collaboré avec Katia Consani. Et à l'époque, à l'époque de Grothendieck, je n'avais qu'une idée, c'était de fuir les sujets que Grothendieck traitait. Pourquoi ? Parce qu'il y avait une sorte de snobisme autour. Il y avait une espèce de cour qui l'entourait, etc. C'est pour ça que j'avais fait des algèbres d'opérateurs. Donc là, j'ai commencé à apprendre la géométrie algébrique avec Katia Consani.

Et en 2014, ça ne fait pas longtemps. Ça veut dire qu'il ne faut jamais se décourager. En 2014, on a fait une découverte tout à fait incroyable. C'est qu'on a découvert que cet espace non-commutatif que j'avais utilisé pour faire la réalisation spectrale, etc., mais que les gens pouvaient considérer comme un espace tout à fait bizarre parce que non-commutatif, etc., en fait, c'était l'espace des points d'un topos de Grothendieck d'une simplicité incroyable, qu'on appelle le topos des fréquences, simplement la demi-droite produit semi-direct par l'action, par les entiers, par multiplication. Donc, c'est quelque chose qui est merveilleusement simple. Mais quand on calcule les points de ce topos, parce que la notion de topos, elle est suffisamment subtile pour que lorsque vous calculez les points, ça soit quelque chose. C'est en général très, très difficile lorsque vous calculez les points de ce topos. Vous trouvez un espace non-commutatif et cet espace non-commutatif, c'est exactement l'espace que j'avais construit pour avoir la réalisation spectrale.

Et qu'est ce que ça nous a donné avec Katia Consani ? Ça nous a donné sur cet espace le faisceau structurel, c'est-à-dire avant, on n'aurait jamais imaginé cela et on a vu, on a compris que ce faisceau structurel, c'était en fait un faisceau qu'on appelle tropical, c'est-à-dire qui est relié à ce qu'on appelle la géométrie tropicale. Et donc, ça nous permet d'avancer. Ça nous permet d'avancer. J'ai fait mes deux derniers cours du Collège en grande partie là-dessus.

Donc ça nous a permis, si vous voulez, on n'est pas loin du but. Bien sûr, on ne peut pas le dire tant qu'on n'est pas arrivé au but, on ne peut rien dire. On ne peut absolument rien dire. Et si on disait quelque chose ? Les gens nous taperaient dessus à coups de marteau. Il faut surtout ne rien dire, mais si vous voulez, ce qu'on a découvert, peu importe qu'on arrive ou pas. Parce que dans cette conjecture, ce qui est merveilleux, c'est que si on connait vraiment les dessous des mathématiques, on s'aperçoit que cette conjecture, elle est à la racine de la plupart des concepts qui ont été élaborés au XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Je ne vous ferai pas une description, mais en fait, dans presque chacun des concepts mathématiques qui ont été développés, ils ont été développés avec ça en tête, derrière, donc ici, en fait, on est arrivé à un espace. Bon, maintenant, ça progresse aussi : on est arrivé à un espace qui est beaucoup plus, comment dire, géométrique, qui est beaucoup plus compréhensible, mais qui n'est, comment dire ? qui n'est compréhensible que parce que Grothendieck a eu cette merveilleuse idée des topos. Et cette idée des topos de Grothendieck, en fait, cette idée-là, elle a la même relation avec la géométrie non-commutative que la relation qui existe dans le programme de Langlands entre la théorie de Galois et les fonctions automorphes. Donc, c'est exactement la même, la même relation qui apparaît encore.

Alors pour terminer, juste une chose que je voulais dire, c'est qu'il y a une autre collaboration qui a été cruciale et qui est ce qu'on a réussi à faire avec Chamseddine et Mukhanov qui est un chercheur qui fait de la cosmologie, donc ce qu'on a réussi à faire : on a réussi à comprendre quelle était la racine profonde du modèle standard couplé avec la gravitation. Parce qu'avant, on mettait la structure fine dont je parlais, on la mettait à partir des expériences, on partait des résultats expérimentaux et tout ça, on disait qu'il fallait telle algèbre pour que ça colle avec l'expérience. Et on n'avait aucune raison conceptuelle de dire pourquoi il fallait mettre cette algèbre et pas une autre. Et ça, cette raison, on l'a trouvée et on l'a trouvée par un concours de circonstances. On cherchait à résoudre un problème géométrique, purement géométrique, et en résolvant ce problème géométrique, on est tombé sur la bonne algèbre de Clifford qu'on avait mise à la main avant.

Donc c'est ça. Et il y a un théorème très profond qui permet de montrer qu'on a réalisé comme ça toutes les variétés. C'est un théorème qui, géométriquement, est basé sur sur ce genre d'images. Voilà donc je crois que je vais m'arrêter. J'ai oublié de vous dire quelque chose. D'accord, mais bon, j'ai oublié de vous dire quelque chose, c'est qu'en fait, ce qui sous-tend mon exposé est quelque chose qui avait déjà été compris par Shakespeare.

Je vais vous dire ce que Shakespeare écrit, il y a la traduction aussi, mais j'ai essayé de traduire. Shakespeare est toujours bien meilleur que sa traduction. Donc, ce que dit Shakespeare, c'est la chose suivante :

> *There is a tide in the affairs of men,*
> *Which taken at the flood, leads on to fortune.*
> *Omitted, all the voyage of their life*
> *Is bound in shallows and in miseries.*
> *On such a full sea are we now afloat.*
> *And we must take the current when it serves*
> *Or lose our ventures.*
>
> *Il est une marée dans les affaires des hommes,*
> *Qui, prise à son apogée, conduit à la fortune.*
> *Ignorée, tout le voyage de leur vie*
> *Est confiné aux bas-fonds et aux écueils.*
> *Sur une telle mer, nous sommes maintenant à flots*
> *Et devons suivre le courant quand il forcit*
> *Ou réduire à néant nos projets.*

C'est la seule chose que je veux que vous reteniez : quand vous voyez la marée, il faut la suivre. Mais il faut la sentir, bien sûr, il faut sentir qu'elle est là, d'accord. C'est l'intuition. C'est ce qu'on appelle intuition, c'est quelque chose qui est impossible à définir. C'est pas quelque chose que l'on peut rationnaliser, mais c'est quelque chose qui est fondamental dans le métier qu'on fait.

(Applaudissements).

L'un des étudiants de l'ENS qui ont organisé le cycle Maths pour tous : Merci beaucoup pour cet exposé. Si vous avez des questions, n'hésitez pas. On a un peu de temps, je pense.

Question : Shakespeare a dit je crois que le monde est un théâtre, est-ce pareil pour les mathématiques ?

Oui, il y a beaucoup de vrai et c'est formidable que vous ayez dit ça parce que ça me permet de vous expliquer ce que c'est qu'un topos. C'est formidable, c'est absolument formidable, je vais vous expliquer ce que c'est qu'un topos. Le théâtre usuel des mathématiques, c'est la théorie des ensembles. On connaît tous la théorie des ensembles, on connaît les groupes, on connaît les algèbres, on connaît... C'est le théâtre usuel des mathématiques. Qu'est-ce que c'est qu'un topos ? C'est quelque chose d'extraordinaire parce que... le théâtre est le même, les acteurs sont les mêmes, ... Mais il y a derrière les coulisses une espèce de Deus Ex Machina, qui rend les choses variables, qui introduit une variabilité.

Ça veut dire que dans la théorie des ensembles, il va y avoir une variabilité et ça veut dire quelque chose d'extraordinaire qui est qu'un espace géométrique, il n'est pas perçu par ce qu'il est, il n'est pas au devant de la scène du tout. C'est le Deus ex machina qui est dans les coulisses, qui fait varier les choses. Et c'est en comprenant comment les choses varient qu'on comprend l'espace géométrique qui est caché derrière ça. C'est purement du théâtre, c'est purement du théâtre.

La théorie des ensembles ordinaire, c'est le théâtre statique, mais le topos est beaucoup plus intéressant. D'accord, ça, c'est une idée fondamentale de Grothendieck, mais vous, vous ne la verrez jamais expliquée comme ça dans les bouquins.

Question : C'est une question peut-être un peu souvent posée, mais est-ce que pour vous, on découvre les mathématiques, c'est quelque chose qui existe sans la rationalité de l'homme ?

Bien sûr. Alors, bien sûr, on découvre... La raison... J'ai eu cette très longue discussion dans ce livre avec Changeux, avec Jean-Pierre Changeux, je vais dire... Jean-Pierre Changeux voulait démontrer qu'en fait, les mathématiques, c'était le fonctionnement du cerveau.

Mais non. Mais à mon avis, ça ne tient pas. Et la raison pour laquelle ça ne tient pas, c'est la chose suivante, c'est que grâce aux mathématiques, on explique le tableau de Mendeleïev, on explique, si vous voulez, pourquoi il y a des corps chimiques, etc., etc. Bon, alors, la comparaison que je prends toujours, je prends deux comparaisons. La comparaison que je prends, c'est, prenez Watson et Crick. Quand Watson et Crick découvrent la structure en double hélice de l'ADN, ils la découvrent, ils ne l'ont pas inventée. Ce n'est pas eux qui l'ont inventée. Les maths, c'est exactement ça, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que... Et surtout maintenant qu'on a l'ordinateur. Si vous voulez, c'est terrible maintenant, ça, je n'en ai pas parlé. Mais le fait d'avoir des ordinateurs et des ordinateurs qui sont tellement puissants, ça permet de se colleter à la réalité mathématique. Mais tout le temps, tout le temps. C'est-à-dire que quel que soit le problème que vous avez, vous pouvez toujours le tester avec l'ordinateur, toujours.

Et si c'est un problème de calcul symbolique, vous pouvez le résoudre avec l'ordinateur. Donc, je vais dire, l'ordinateur, il n'invente pas. Je vais dire merde, on lui met un problème, d'accord, je veux dire, il vous dit si ce que vous avez trouvé est correct ou pas, etc. Donc non, c'est une vraie réalité, c'est une vraie réalité. Ce n'est pas une réalité qui est réalisée concrètement dans le monde tel qu'il est, mais c'est une réalité qui est tout aussi résistante, tout aussi impossible à modifier que la réalité extérieure.

Ça, c'est sûr, c'est certain. On invente des outils, car Watson et Crick observent la double hélice. Ils utilisent le microscope électronique. On invente des outils, mais il y a une réalité qui est là, une réalité qui est là, qui est impossible à modifier.

Question : Toujours dans la même optique, est-ce que vous pensez que l'on pourrait aussi découvrir des intuitions qui nous étaient auparavant totalement cachées, et qu'on se retrouve à faire des maths avec des choses qui sortent de pouvoirs humains, récemment découverts et qu'une nouvelle branche que l'on explore...

Quel genre de pouvoir récemment découvert ?

Suite de la question de l'étudiant : C'est-à-dire, par exemple, quand vous traitez de sujets comme les topos par exemple, ce ne sont pas des choses que directement, on pourrait saisir par l'intuition qui n'est pas éduquée mathématiquement. Est-ce que, *d'après vous, après une maîtrise du domaine, maîtrise plus ou moins relative, on pourrait approcher une intuition…*

Mais alors, c'est une très bonne question. C'est une très bonne question parce que l'esprit humain n'est pas n'est pas entraîné au quantique. L'esprit humain est entraîné au classique et donc l'esprit humain en particulier a l'habitude de donner toujours une image classique de choses quantiques. Ce qui est certain, c'est qu'il y a de plus en plus d'instruments maintenant qui sont basés sur le quantique. Par exemple, il y a un instrument qui fabrique des nombres aléatoires, qui est fait par des Suisses et avec un téléphone portable, on fabrique des nombres aléatoires, on les fabrique avec du quantique et le quantique est de plus en plus répandu maintenant. Et alors ? Si on arrivait effectivement à s'entraîner au quantique, à entraîner, bon... c'est évident que le quantique ne servait pas beaucoup pour la sélection naturelle jusqu'à présent, donc on n'est pas entraînés à ça. Mais si on arrivait effectivement à se familiariser beaucoup plus avec l'optique quantique, avec le quantique, etc., c'est absolument évident qu'on ferait des progrès. C'est évident. Ça, c'est évident.

Je ne parle pas du machine learning et de l'intelligence artificielle parce que pour moi, c'est exactement l'opposé de ce qu'on fait en math, c'est-à-dire de chercher à comprendre et de chercher à inventer, à inventer des outils, donc à trouver les concepts qui sont derrière ce qu'on découvre. Et ça, bon le machine learning, il résout des problèmes. Mais si on résout un problème sans savoir comment, ce n'est pas vraiment intéressant.

Question : J'ai une question sur ce papier que vous avez écrit avec Mukhanov. J'ai eu l'impression que vous travaillez avec une métrique riemannienne mais notre notre monde n'est pas riemannien. Bon, ça marche aussi ? ou…

Bien sûr, ça marche. Mais la vraie réponse, c'est la suivante, la vraie réponse est que quand on fait ça, les physiciens le savent très bien, c'est que quand on fait la théorie des champs et quand on fait les intégrales fonctionnelles, etc., il y a un truc qu'on appelle l'astuce du I_ε de Feynmann, c'est-à-dire qu'on rajoute au propagateur un terme I_ε, et si on réfléchit bien à ce que ça signifie, ça signifie qu'on travaille en euclidien. Donc, en fait, on veut faire les intégrales fonctionnelles en euclidien et la vraie intégrale fonctionnelle qu'on veut faire, dans ce cas-là, c'est qu'on prend deux espaces riemanniens à trois dimensions et on regarde les cobordismes entre les deux et on fait l'intégrale euclidienne là-dessus, d'accord ? Mais c'est parfaitement vrai ce que vous dites.

Est-ce que vos théories mathématiques permettent de bien comprendre ce qu'est l'intrication quantique ?

Ah, c'est... Alors là, je suis parti encore pour une heure... Alors là, merveilleuse question, bien sûr, mais j'ai déjà fait des exposés qui sont sur Internet là-dessus. Si vous voulez, c'est une question merveilleuse. Pourquoi ? Parce que ce que je vous ai expliqué, c'est qu'un objet non-commutatif engendre son propre temps. Donc, il est évident qu'on veut comprendre en quel sens c'est relié au temps qui nous est familier, etc. On a beaucoup réfléchi à ça et j'ai eu un épisode que je raconte, qu'on raconte dans notre livre *Le théâtre quantique* avec un physicien qui s'appelle Carlo Rovelli.

Et si vous voulez ce qui se produit, c'est la chose suivante. J'ai réfléchi beaucoup plus, beaucoup plus encore, après, sur ce temps qui apparaît, etc. Et ce qu'on a dit dans le livre sur le théâtre quantique, on a une phrase qui résume l'idée. La phrase, c'est "*L'aléa du quantique est le tic tac de l'horloge divine.*", c'est-à-dire que c'est l'aléatoire du quantique, le fait que quand on fait une expérience deux fois, on fait passer un électron à travers une toute petite fente et on regarde l'endroit où il arrive.

Il n'arrivera jamais au même endroit. On connaît seulement la probabilité, donc ça, c'est l'aléa du quantique, et la théorie qui est basée là-dessus, si vous voulez, c'est que justement, cet aléa quantique engendre le temps. Mais en fait, quand on y réfléchit plus avant et à cause de l'intrication, on s'aperçoit qu'on commet tout le temps une erreur. Toute la physique qu'on connaît, elle est écrite par des équations en fonction du temps.

Pour revenir à mon année de maths spé, j'avais un prof de maths spé et une fois, il m'avait fait passer au tableau et il m'avait dit "Monsieur Connes ? Quel est le paramètre ?" *(AC dessine une courbe dans l'espace devant lui.)* J'ai réfléchi, réfléchi... Puis, au bout d'un moment, j'avais dit "C'est le temps !". Il était très content. Donc vous voyez, toutes les équations de la physique, sont écrites comme des dt, dt^2. Ce que je pense en fait, pour répondre à ça, et je répondrai à votre question.

Je pense que le temps n'est qu'une variable émergente et que la vraie variabilité... puisque nous, nous attribuons toute variabilité au passage du temps. Mais je pense que la vraie variabilité est plus primitive que le temps et que cette vraie variabilité, c'est l'aléa du quantique. Alors, quelle est la signification de l'intrication, la signification de l'intrication, c'est que l'aléa du quantique, il est synchronisé dans deux événements qui sont en corrélation. Il est synchronisé, c'est-à-dire au lieu d'être purement aléatoire et purement indépendant. Il est synchronisé. Donc, il faudrait une réflexion très profonde, que je ne suis pas capable d'avoir, et qui consisterait à dire que la variabilité dans la physique, elle vient de l'aléa du quantique et que le temps n'est qu'un phénomène émergeant et comprendre l'intrication de cette manière-là. Parce que l'intrication est incompréhensible, sinon. Pourquoi elle est incompréhensible ? Parce que ce que dit l'intrication d'un phénomène de mécanique quantique qui est intriqué, c'est que vous allez avoir, dès que vous faites une observation sur A, ça va se répercuter immédiatement sur B. Mais ça ne transmettra pas d'informations, mais quand même, ce sont deux évènements qui sont causalement indépendants. Donc vous ne pouvez pas dire qu'il y en a un qui est avant l'autre. Donc, c'est complètement incompréhensible. Et ce que je dis, c'est que justement, l'erreur, l'hérésie terrible, c'est de tout essayer d'écrire en fonction du temps et qu'on a besoin d'une réflexion plus profonde et qui devrait être basée sur ces choses-là.

C'est une deuxième question qu'on doit vous poser souvent aussi, mais est ce que pour vous, l'hypothèse de Riemann est vraie ?

Eh bien là, je ne résiste pas à la tentation. Je ne résiste pas à la tentation, mais je n'ai pas le droit d'en parler. C'est qu'on est en train de terminer un livre dont on a rendu les épreuves aujourd'hui chez Odile Jacob et dans lequel on raconte une histoire qui est l'histoire d'un mathématicien, un peu comme moi, qui a suffisamment travaillé sur cette hypothèse et qui est prêt à vendre son âme au Diable. Alors, il est prêt à vendre son âme au Diable, pas pour récupérer de la jeunesse ou quoi que ce soit, parce que bon, il en a marre. Il est découragé, il veut savoir, il veut vendre son âme au Diable. Et alors, si vous voulez, le problème, c'est comment rencontrer le Diable. Et en fait, un jour, il va à une conférence sur le machine learning. Alors là, lui, il faisait un tas de calculs, si vous voulez, un tas de trucs, et il reconnaît dans les calculs que fait le gars parce que vous savez, on dit en mathématiques "le diable est dans les détails". Il reconnaît dans l'exposé du gars, du spécialiste de machine learning, il reconnaît le Diable. Alors, je ne vais pas vous raconter la suite de l'histoire parce que vous la saurez dans un livre, je ne vous la raconte pas à l'avance.

Tu ne veux pas que je raconte, Danye ? Je ne vous la raconte pas, mais vous verrez que c'est une histoire très, très élaborée, et à la fin du bouquin, eh bien, il y a un truc comme ça, voilà. Bon, maintenant, voilà. Donc je vais dire, comme je le disais dès le départ, on ne peut rien savoir tant qu'on n'est pas au bout et sans doute qu'il ne faudrait pas arriver au bout parce qu'il y a un autre aspect des mathématiques dont je n'ai pas parlé, parce que c'est un aspect plus, comment dire, plus difficile.

C'est toujours la peur de se tromper et j'imagine que si on arrivait au bout, on ne vivrait plus parce qu'on aurait constamment la peur d'avoir fait une erreur quelque part. Et ce serait une situation absolument invivable. D'accord, ce n'est pas souhaitable, vraiment. D'accord, voilà. En tout cas, vous aurez tous les détails bientôt de l'histoire, cette histoire du Diable.

Une dernière question : Oui, c'est peut être un peu prosaïque, mais tout à l'heure, vous avez parlé des ordinateurs ? Vous avez dit que vous pouviez résoudre des calculs symboliques ou qu'on pouvait se confronter à la réalité. Mais vous-même, vous l'utilisez ou... ?

Terriblement, terriblement.

En ce moment, je suis branché sur les grosses machines de Polytechnique pour faire un calcul. Je l'utilise terriblement.

Terriblement, bien sûr, bien sûr. C'est formidable. C'est formidable parce que dès qu'on a un peu de pratique, on arrive à mettre n'importe quel problème. Par exemple, le problème le plus bizarre auquel vous puissiez penser, vous penserez "non, on ne peut pas le faire résoudre par ordinateur, si, si.". Et on peut comprendre un tas de choses, un tas de choses. Même pour des problèmes de géométrie, etc. Donc, parce que surtout, la visualisation, la capacité à visualiser, le *manipulate* et tout ça.

C'est formidable. C'est formidable. C'est un outil merveilleux, merveilleux, merveilleux, merveilleux. Je ne dirai jamais assez que c'est un outil merveilleux.

Dernière question, oui.

Dernière question : Vous diabolisez, apparemment, le machine learning, il y a quelque chose qui ne va pas avec le machine learning. Alors moi, je voudrais comprendre, justement. Le machine learning, c'est encore un autre domaine, qu'est ce que vous avez essayé de faire avec le machine learning, en fait, et qui vous énerve, et que vous n'arrivez pas à faire ?...

Imaginez que le machine learning vous dise "l'hypothèse de Riemann est vraie." mais ne vous donne pas de raison, ne vous donne pas de concepts qui ont été inventés pour l'occasion, etc. Ce serait triste, triste à mourir. Donc, ce que je reproche, je ne reproche pas, mais je veux dire, j'ai compris à un moment donné, en discutant avec Alain Prochiantz l'analogie qu'il y avait entre la sélection naturelle et le machine learning. C'est vrai qu'on arrive à un résultat, mais si on arrive par exemple à un résultat, et qu'on ne comprend pas pourquoi et qu'on n'en dégage pas un concept. Je suis frustré. Personnellement, je suis très, très frustré. Si ce n'est pas renouvelable...

Il faut que vous en tiriez une énergie positive ;-)

Comment ? Ah oui, en tirer une énergie positive, là, je veux dire, il y a de quoi faire. Bien sûr, bien sûr. Non, mais je ne dis pas, mais pour le moment, ça ne marche pas terrible, parce que quand on a le machine learning au téléphone, c'est vraiment pas terrible. "Répétez, je ne comprends pas ce que vous dites.". Bon, ça va s'améliorer, ça, c'est sûr.

L'organisateur : Merci beaucoup, encore une fois pour votre exposé.

(Applaudissements).

Alain Connes : Donc au départ, on pourrait aborder les mathématiques en les considérant comme faisant partie de la physique, comme étant un langage qui est développé pour mieux comprendre le monde physique qui nous entoure ; et effectivement, on s'aperçoit que les mathématiques ont cette efficacité remarquable dans ce domaine-là. Et très souvent, on a de l'extérieur une compréhension de ces choses qui est beaucoup trop superficielle, et un exemple que je voulais prendre, c'est la version à laquelle on aboutit maintenant sur la réalité physique.

Donc le réel physique n'est rien d'autre que la superposition de possibles imaginaires. Et je ne donnerai pas la formule mais dans cette phrase, il y a quelque chose d'extraordinaire, c'est que les nombres imaginaires, les nombres complexes sont impliqués, et ces nombres, par même leur nom, comme nombres imaginaires, au début, étaient des fictions mathématiques.

Donc il y a cette efficacité incroyable des mathématiques dans le monde physique qui bouleverse même notre conception philosophique de ce que c'est que la réalité et qui met en question, bien sûr, le matérialisme comme idée un peu naïve parce que le matérialisme est une théorie qui se base sur une compréhension partielle des choses et qui identifie le réel au matériel.

Or d'après ce que j'ai dit, justement, le fait que le réel soit cette superposition de possibles imaginaires montre bien à quel point la réalité est bien plus subtile. Mais en fait, au bout d'un moment, on s'aperçoit qu'il y a un voyage propre, à l'intérieur du monde mathématique, qui devient disjoint du monde physique, et le principal outil qui permet justement de débuter ce voyage et de commencer, c'est l'analogie ; c'est le fait que l'esprit humain est capable de voir entre des domaines très très différents certains reflets, certaines correspondances, et à partir de ces reflets, de ces correspondances, de transposer, de transplanter des idées qui était valables dans un domaine, de les transplanter dans un autre domaine ; c'est ainsi que les mathématiciens ont découvert des pans entiers de mathématiques qui n'ont rien à voir avec le monde physique, et qu'il serait illusoire de vouloir trouver dans le monde physique. C'est ce qu'on appelle par exemple le monde p-adique. Le monde p-adique, c'est le monde dans lequel par exemple, l'entier deux est tout petit, et quand, par analogie, on transplante les concepts que l'on a pour les nombres réels, on s'aperçoit, un petit peu comme Alice au pays des merveilles qui découvre 36 choses, que l'on n'aurait jamais soupçonnées.

Donc c'est la première chose, la première chose, c'est que justement il y a un monde des mathématiques, qui n'est absolument pas soumis au monde de la physique et lorsqu'on explore ce monde beaucoup plus avant, on s'aperçoit en fait que dans ce monde mathématique, il y a par exemple des choses vraies mais non démontrables.

Transcription d'une vidéo écoutable ici https://www.youtube.com/watch?v=i08kF-NLVS4

Alors ça, c'est quelque chose qui est assez difficile à expliquer, j'ai essayé de l'expliquer dans un livre qu'on a écrit avec Lichnerowicz et Schützenberger, par la fable du lièvre et la tortue. Alors ce serait techniquement compliqué à expliquer mais c'est un exemple typique d'un énoncé mathématique, dont on sait qu'il est vrai, on sait aussi qu'il est indémontrable dans ce qu'on appelle l'arithmétique de Peano, c'est à dire par des moyens simples, et la raison pour laquelle on sait qu'il est vrai, c'est ce qu'on appelle la théorie des ordinaux, la théorie des ensembles, la théorie de Zermelo-Fraenkel, etc.. Donc en fait, on a depuis réussi à voir que si on prend des énoncés simples, des énoncés arithmétiques qu'on peut formuler de manière simple, et en fait, on sait que la plupart de ces énoncés sont indémontrables, c'est-à-dire que la proportion des énoncés qui sont vrais mais non démontrables tend vers un, c'est à dire que la plupart des énoncés qui sont vrais sont en fait indémontrables. Et l'image qu'il faut garder en tête pour la relation entre le mathématicien et cette réalité mathématique que j'appelle réalité mathématique archaïque, parce que justement, il y a des choses vraies mais qu'on n'arrive pas à percevoir de manière directe, c'est la même relation qu'il y a entre la réalité extérieure et un tribunal : dans le tribunal, vous avez des données, alors en mathématique, c'est ce que l'on appelle les axiomes, et à partir de ces données, vous pouvez faire un certain nombre de déductions c'est ce que fait le mathématicien lorsqu'il travaille. Mais, il serait faux d'identifier les déductions qui sont faites à l'intérieur du tribunal avec la réalité extérieure et ceci pour des raisons évidentes.

Alain Connes J'ai écrit ce livre *Le spectre d'Atacama* avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, donc l'une est littéraire, l'autre est un grand scientifique, un mathématicien et le thème général, l'idée générale, c'est un roman scientifique, c'est un nouveau genre et on veut, en fait, faire découvrir des idées profondes à la fois sur les mathématiques et sur la physique, mais de telle sorte qu'elles soient accessibles, qu'on arrive à en avoir une idée en lisant vraiment le livre comme un roman. L'histoire, le roman, qui est un roman d aventures, met en scène trois personnages, qui sont trois scientifiques ; d'un côté, il y a un mathématicien qui connaît bien la physique ; il y a un as de l'informatique qui va jouer un rôle essentiel ; et il y a une physicienne qui est rescapée d'un séjour dans le quantique. En fait, le personnage central on peut dire au niveau scientifique, c'est le spectre. Cette notion de spectre, c'est une notion qui est commune à la physique et aux mathématiques. Elle a d'abord été identifiée par Newton lorsqu'il décomposait la lumière avec un prisme. Et c'est ce qu'on voit dans les arcs-en-ciel, mais elle est devenue aussi une notion essentielle en mathématiques au début du XX^e^ siècle en gros. Et on s'est aperçu à un moment donné que les deux notions coïncidaient, c'est à dire qu'on pouvait expliquer les spectres de la physique, les spectres qu'on reçoit par exemple des étoiles très lointaines, des galaxies, qu'on pouvait les expliquer par les mathématiques. Et ce qu'on a essayé de faire, j'espère qu'on a réussi, c'est de rendre ce thème parfaitement compréhensible, de le rendre sensible, de le faire passer sans être dogmatique, c'est-à-dire sans des quantités d'explications, etc., mais en lisant le livre, en le lisant comme un roman d'aventures.

Il peut être lu vraiment comme un roman d'aventures, il y a des scènes, vraiment, qui se produisent et qui sont tout à fait extraordinaires. A travers cette lecture, il y a une osmose qui se produit et on arrive à comprendre ce que c'est que les spectres, la musique des formes et le message doit passer. Il y a un autre message qui est important dans le livre, et en gros, je peux le résumer sous la forme suivante : c'est que nous vivons une période de transition que tout le monde connaît, je veux dire qu'il y a de plus en plus de machines et en particulier, il y a ce qu'on appelle le machine learning qui va remplacer, bientôt, quand on va téléphoner à une compagnie, au lieu d'avoir "faites le 1, etc.", et puis finalement on a quelqu'un, on n'aura jamais quelqu'un, on n'aura que le machine learning. Donc en fait, ce roman est un plaidoyer pour les concepts ; c'est un plaidoyer pour essayer de résister à cette dérive du monde actuel qui fait qu'on abandonne notre individualité et on le fait en fait consciemment, c'est-à-dire que les gens qui sont sur facebook, etc. ils abandonnent consciemment, ce sont eux qui le font, qui donnent leur individualité, et en fait, il y a un message très important à la fin du livre qui est que nous devons sauver nos âmes, nous devons sauver nos âmes en échappant à cette tentation, cette tentation qui ferait de chacun de nous une espèce de cellule dans un corps beaucoup plus grand, dont l'âme nous échapperait totalement. Et le rôle dans le livre du machine learning est tenu par le Diable et heureusement, il y a un autre personnage central qui intervient, qui est la spiritualité, et qui termine le livre de manière optimiste, c'est-à-dire qu'il y a un

Transcription d'une vidéo écoutable ici https://www.youtube.com/watch?v=qPA5DywLFeI message que l'on doit écouter, et qui résume en gros cette idée que les concepts sont tellement plus importants et les concepts créés par l'homme comme celui du topos, les concepts sont tellement importants par rapport à cette dérive actuelle dans laquelle on se laisse glisser...

Grand entretien avec le mathématicien Alain Connes

Nicolas Martin : On retrouve souvent chez les grands scientifiques ce point commun, cette ligne de fuite ou cette échappée belle vers le monde des arts.

Poète, peintre, musicien ou romancier, en l'occurrence pour Alain Connes, médaille Fields et médaille d'or du CNRS, mathématicien à l'origine de la géométrie non commutative, une branche des mathématiques qui a pour ambition d'embrasser la GUT, la Grand Unified Theory, la théorie du tout qui réconcilierait la relativité générale et la mécanique quantique. Romancier, donc, musicien aussi, mais avant tout et pour toujours, chercheur obsessionnel.

Alain Connes est notre grand invité pour l'heure qui vient. Bienvenue dans la méthode scientifique.

Bonjour Alain Connes.

Alain Connes : Bonjour.

Nicolas Martin : Mille merci d'avoir accepté notre invitation, alors je vais faire un rapide mot de présentation sommaire que je vous laisserai le soin de compléter pour nos auditeurs qui ne vous connaissent pas encore.

Vous êtes donc mathématicien dans ce paradis pour chercheurs qu'est l'IHÉS, l'Institut des Hautes Études Scientifiques à Bures sur Yvette.

Alain Connes : Je suis d'abord au Collège de France, ne l'oublions pas, le Collège de France.

Nicolas Martin : J'y viens, également Professeur émérite au Collège de France, titulaire de la chaire Analyse et géométrie, membre de l'Académie des Sciences française, mais d'autres académies des sciences, notamment l'Académie des sciences, la National Academy of Sciences aux Etats-Unis, mais aussi au Danemark, en Norvège. Vous avez obtenu la médaille Fields qui est, je le rappelle, la plus grande distinction mathématique en 1982 pour vos travaux sur les algèbres d'opérateurs.

---

interviewé par Nicolas Martin le 17.5.2018 dans le cadre de l'émission de radio La méthode scientifique sur France Culture
https://www.franceculture.fr/emissions/la-methode-scientifique/la-methode-scientifique-du-jeudi-17-mai-2018

On peut dire que vous avez en quelque sorte révolutionné l'algèbre en fondant la géométrie non commutative, vous nous en reparlerez et le CNRS vous a décerné sa médaille d'or en 2004 pour la résolution des problèmes mathématiques soulevés par la physique quantique et la relativité. Et vous venez de publier votre deuxième roman après *"Le théâtre quantique"*, *"Le Spectre de l'Atacama"*, coécrit avec votre épouse Danye Chéreau et votre ancien directeur de thèse Jacques Dixmier. C'est aux éditions Odile Jacob. Que faut-il ajouter Alain Connes à cette description ?

Alain Connes : Disons que si vous voulez, effectivement, c'est un parcours scientifique qu'on peut regarder maintenant avec du recul. Et je commencerai par dire si vous voulez que chaque mathématicien est un cas particulier. Donc, je veux dire il n'y a pas de généralité à faire et en fait, le parcours que j'ai suivi, j'ai mis beaucoup de temps pour trouver ma voie, c'est-à-dire, au départ, si vous voulez, j'avais commencé par faire de la logique avec l'analyse non standard, avec Gustave Choquet. J'avais fait un peu de théorie des nombres aussi, et c'est finalement avec Jacques Dixmier que j'ai trouvé ma voie.

Et donc, en fait, le parcours commence avec lui, avec les algèbres d'opérateurs et en fait, avec, si vous voulez, ce que von Neumann avait compris à partir des découvertes de la mécanique quantique, c'est von Neumann, qui avait formalisé la mécanique quantique et donc le formalisme qu'il avait mis au point, si vous voulez, n'a pas changé depuis, on peut dire que ce cadre qu'il a créé, le cadre de l'espace de Hilbert, des vecteurs dans l'espace de Hilbert, des états, etc., c'est quelque chose qui n'a jamais été remis en question depuis les années 1930. Mais il a été beaucoup plus loin, avec un collaborateur qui s'appelle Murray, et en gros, si vous voulez von Neumann s'est posé la question de savoir quand est ce qu'on pouvait définir un sous-système d'un système quantique. C'est-à-dire que quand on prend un système quantique, normalement, il implique tous les opérateurs dans l'espace de Hilbert. Bon, ça, c'est un peu technique, mais von Neumann s'était posé la question de savoir quand est-ce qu'on a un sous-système ? Et au départ, on penserait que simplement quand on a un sous-système, l'Espace de Hilbert se factorise en produit de deux sous-systèmes, mais von Neumann avait réfléchi de manière beaucoup plus profonde, en cherchant à comprendre au niveau algébrique, donc, on revient à l'algèbre, au niveau algébrique, en quoi se manifestait cette factorisation. Et avec Murray, ils ont eu une surprise extraordinaire, C'est-à-dire qu'ils ont trouvé qu'au-delà des factorisations très simples de l'espace de Hilbert en produit tensoriel, comme on appelle cela en mathématiques, il y avait des factorisations algébriques, ce qui a donné la notion de facteur, c'est-à-dire que dans le langage des algèbres d'opérateurs, il y a une notion essentielle qu'il faut arriver à comprendre dès le départ comme étant issue d'un problème essentiel de mécanique quantique, qui est de savoir quand est-ce qu'on peut caractériser un sous-système.

Et alors ? La merveille qui s'est produite, c'est la suivante, c'est que von Neumann a créé ses facteurs. Dieudonné les a appelés algèbre de von Neumann, puisque elles étaient dues à von Neumann, Dixmier a travaillé énormément dessus. Et quand je suis arrivé, j'ai eu la chance d'arriver à un bon moment. C'était à un moment ou un mathématicien japonais qui s'appelle Tomita avait, peut être 5 ou 6 ans avant, trouvé une théorie très, très intéressante. Et j'ai eu la chance de découvrir qu'en fait, l'évolution dans le temps qui était associée à chaque état, normalement, dans une algèbre, après avoir fait des calculs très, très, très compliqués pendant pendant des mois et des mois, j'ai fini par découvrir que cette évolution dans le temps, elle était unique, elle était en fait indépendante de l'état modulo, ce que l'on appelle les automorphismes intérieurs, c'est quelque-chose d'invisible. Donc, en fait, j'ai compris à ce moment-là que, si vous voulez, ces facteurs de von Neumann lorsqu'ils étaient d'un type assez exotique qu'on appelle le type III, ils engendraient leur propre temps. Et du fait qu'ils engendrent leur propre temps, ça a créé quantités d'invariants qui ont permis de débloquer complètement effectivement la classification de ces facteurs. Ces facteurs apparaissaient comme quelque chose d'intraitable avant, et dans ma thèse, sous Jacques Dixmier, en fait, j'ai montré comment on pouvait, si vous voulez, ramener ces facteurs à des choses beaucoup plus simples grâce à cette évolution dans le temps et comment ils avaient, si vous voulez, toutes sortes d'invariants, comme les périodes, etc., etc.

Nicolas Martin : C'est la non commutativité.

Alain Connes : Non, ce qu'il faut retenir, à un niveau abstrait, au niveau conceptuel, ce qu'il faut retenir, c'est que la non commutativité avait été découverte par un physicien, par Heisenberg. Donc, ça, c'était une découverte, presque, comment dire... presque à partir de l'expérience, c'est à dire que Heisenberg s'était basé sur les lois de la spectroscopie. C'est-à-dire qu'on observe des spectres. Ces spectres ont des propriétés très particulières et Heisenberg avait compris, à partir de ce qu'on appelle le principe de composition de Ritz-Rydberg, qu'en fait, si vous voulez l'algèbre qui était sous-jacente à la mécanique quantique, il a compris ça en 1925 et c'est une découverte fondamentale, était une algèbre non-commutative. Je ne rappelle pas l'anecdote, bien sûr, qui était qu'il était sur l'île d'Helligoland, qu'il était seul. Il pouvait enfin travailler tranquille parce qu'il n'avait plus de cours à donner, parce qu'on l'avait envoyé là, parce qu'il avait le rhume des foins. Il habitait chez une vieille dame, il pouvait travailler tant qu'il voulait. Il faisait des calculs, des calculs très compliqués. Et puis, une nuit, à 4 heures du matin, il a compris.

Nicolas Martin : Eurêka ! Ça existe, donc !

Alain Connes : Ça existe.

Et il a eu devant ses yeux, ça, il le dit, un paysage absolument merveilleux, qui était presque effrayant de nouveauté. C'était le paysage de la mécanique quantique et c'était le paysage du non commutatif. Ce qu'avait compris Heisenberg, c'est que quand on travaille avec un système microscopique, un tout petit système, on n'a plus le droit de permuter les lettres quand on fait des calculs en physique, vous savez, quand on écrit $e = mc^2$, on pourrait écrire $e = c^2$ fois m, ce serait kif kif, ce serait pareil. Bon.

Nicolas Martin : Ça, c'est commutatif.

Alain Connes : Ça, c'est commutatif. Mais ce qu'a compris Heisenberg, c'est que quand on travaille justement, par exemple, avec la position et le momemt, bon, c'est la vitesse multipliée par la masse, d'une particule microscopique, à ce moment-là, il faut faire attention, exactement comme nous faisons attention lorsque nous écrivons. Lorsque nous écrivons, évidemment, on n'a pas le droit de permuter les lettres, puisque si on les permute, ça fait une anagramme, on peut obtenir n'importe quoi à partir de quelque chose. Le premier livre qu'on a écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, aussi chez Odile Jacob...

Nicolas Martin : *Le théâtre quantique...*

Alain Connes : Oui, *Le théâtre quantique*, on cite des anagrammes, donc, je veux dire, par exemple *L'Horloge des anges ici-bas* et *Le boson scalaire de Higgs*. On voit qu'en permutant les lettres, on peut changer le sens de manière complète.

Nicolas Martin : C'est le bonheur de notre collègue Etienne Klein.

Alain Connes : Absolument, voilà. Étienne Klein est un grand spécialiste des anagrammes.

Nicolas Martin : Alain Connes, ça fait Nicolas Anne, vous voyez, c'est à peu près mon niveau en mathématiques.

Alain Connes : Non, mais une fois, j'avais reçu un e-mail de quelqu'un. Je ne comprenais absolument pas ce qu'il voulait dire. Je croyais qu'il était devenu fou, mais il y avait l'anagramme de mon nom cinq fois. Bon, ce qui est facile à trouver, je veux dire... Donc, pour en revenir à Heisenberg, si vous voulez, il a eu cette découverte extraordinaire, qui est que quand on travaille avec un système microscopique, ce qu'on appelle les observables, les variables naturelles du système ne commutent plus entre elles. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que quand on prend ce qu'on appelle en physique l'espace des ases du système, c'est un espace qui ne correspond plus à la description que Descartes faisait et qui a été à la source de toute la géométrie algébrique, ce qu'on appelle la géométrie algébrique, c'est à dire d'un côté, il y a la géométrie, de l'autre côté, il y a les coordonnées de l'espace comme Descartes le faisait, mais ces coordonnées, elles commutent d'habitude.

La découverte d'Heisenberg, c'est que quand on prend l'espace des phases de la physique, on ne peut plus supposer que les coordonnées commutent. Et ce qui est à la racine de la géométrie non commutative, c'est exactement cela. C'est-à-dire qu'il y a des espaces qui sont en fait des espaces naturels, ce ne sont pas des espaces pathologiques ou quoi que ce soit.

Il y a des espaces naturels dans lesquels, justement, les coordonnées ne commutent plus. Alors en fait, si vous voulez, ce qui a rendu la théorie intéressante, ce qui a rendu la théorie vraiment intéressante, parce que généraliser la géométrie algébrique aux cas où les coordonnées ne commutent plus, ça paraît une tâche fastidieuse, et qui ne réserve pas de grandes surprises. Mais ce qui moi m'a motivé, si vous voulez, pour développer la géométrie non commutative, c'est précisément le travail que j'avais fait dans ma thèse sous la direction de Jacques Dixmier, et qui avait montré qu'un espace non commutatif, c'est-à-dire une algèbre non commutative, engendre son propre temps. Et alors ça, si vous voulez, c'est tellement nouveau par rapport à la géométrie ordinaire... Qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que la géométrie ordinaire, commutative, elle est statique, elle bouge pas, alors que la géométrie non commutative, il y a automatiquement un temps qui se dégage. Et ce temps va permettre de faire des choses qu'on n'aurait aucune idée de faire autrement. En particulier, il permet de faire la thermodynamique d'un espace non commutatif. Il permet par exemple d'avoir un espace non commutatif, et de le refroidir. Donc ça, c'est tout à fait inattendu, si vous voulez, c'est quelque chose qui est complètement nouveau.

Et c'est ça, bien sûr, qui m'a motivé pendant des années et des années, pendant pratiquement tout mon trajet scientifique, à explorer ces espaces, à explorer la géométrie pour ces espaces qui sont complètement nouveaux.

Nicolas Martin : Et cette notion de temps, d'ailleurs, que vous avez explorée aussi avec Carlo Rovelli, que nous recevions ici même, il y a peu de temps. On va remettre le lien sur le fil Twitter de l'émission. J'aimerais interroger, Alain Connes, quelque chose que je fais souvent avec les grands scientifiques qui se succèdent à ce micro, c'est la question de la vocation. On vous décrit en ce début de carrière que vous venez de nous raconter brillamment et cette anecdote, que vous avez fini par nous raconter, d'Heisenberg, finalement, malgré avoir dit l'inverse. On vous décrit comme un jeune mathématicien au talent exceptionnel. Quel est le sentiment... Quelle est la conception que vous avez justement de cette vocation, de cet attrait pour les mathématiques ? A quel moment ça naît ? Comment ça germe ? Est-ce qu'il y a une vocation ou est-ce qu'il n'y a pas une vocation, est-ce que c'est un accident de parcours ?

Alain Connes : Bon, je pense que c'est quelque chose qui naît assez lentement, c'est-à-dire que, si vous voulez dans mes études, effectivement, assez vite, j'ai passé beaucoup plus de temps à essayer de développer mes propres idées, à essayer de me créer mon propre terrain que d'être scolaire et de suivre les cours, etc. Donc, ça s'est produit en fait très tôt, ça s'est produit très tôt et je me souviens, par exemple *(petit rire)*. Je me souviens que quand j'étais enfant, je crois que c'était en seconde ou en première : j'avais eu un prof de math et il avait dit dans la classe qu'il n'y avait pas de formule qui donnait le nombre de nombres premiers plus petits que n.

Alors évidemment, ce n'est pas vrai, je veux dire. Je pense que ce qu'il avait en tête, c'est qu'il y a pas de formule simple ; en fait, d'ailleurs, il existe une formule simple, mais elle n'est pas très, très utile. Je peux vous la donner, comme ça on verra.

Nicolas Martin : Donnez-la nous.

Alain Connes : Donc ce n'est pas une formule pour $\pi(n)$, le nombre de nombres premiers plus petits que n. C'est une formule pour $n - 2\pi(n) - 2$. Mais enfin bon, peu importe. Et puis, c'est vrai seulement pour n plus grand que 13. D'accord ? Mais n'empêche, c'est très simple. C'est la partie entière de la somme de 1 à n de cosinus $\pi\Gamma(k)$ sur k. D'accord, on ne peut pas dire que c'est très compliqué. D'accord, donc, moi, le lendemain, j'étais revenu, j'étais revenu et j'avais donné à mon prof une formule qui était bien plus compliquée que celle là. Mais à partir de ce moment-là, j'avais franchi un pas qui est un pas essentiel pour le jeune mathématicien et ce pas essentiel, c'est de ne croire qu'en soi-même, c'est-à-dire de ne pas donner du crédit à l'autorité. Et ça, c'est extrêmement important. Et je pense que les mathématiques sont un sujet dans lequel c'est possible. Ce serait beaucoup plus difficile en chimie, en histoire, etc. Parce que là, la connaissance joue un rôle absolument essentiel...

Nicolas Martin : L'observation ?

Alain Connes : Pas seulement, mais l'accumulation des connaissances, alors qu'en mathématiques, on peut très bien se trouver face à face à un problème. Le problème est très simple à poser et a priori, il n'y a pas de raison pour que si on trouve une solution, elle ne soit pas juste. Donc, les mathématiques sont très particulières en ce sens-là, en ce sens où il n'y a pas, si vous voulez a priori, une espèce de bourrelet de savoir, de connaissances qui empêchent un jeune qui commence d'arriver à comprendre quelque chose que personne d'autre n'a compris. Ça, c'est extrêmement important.

Nicolas Martin : Ni Dieu ni maître en mathématiques.

Alain Connes : Oui, d'une certaine manière. Je vais dire, et en fait, une des conditions essentielles dans le parcours d'un mathématicien, c'est d'arriver à se remettre soi-même en question, c'est-à-dire si vous voulez, si, à partir du moment où on croit qu'on est plus fort que les autres, etc., là, c'est le début du déclin. Je crois qu'il est absolument essentiel de jamais penser que, justement, on a acquis suffisamment de connaissances, etc., ou je pense que ça, c'est essentiel, ou que la voie que l'on suit est forcément la bonne.

Je pense que ça, c'est un des sujets essentiels de notre livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier.

Donc, dans *Le spectre d'Atacama*, on décrit le parcours d'un mathématicien qui s'appelle Armand, Armand Lafforêt. Et on met en évidence justement cette qualité, cette propriété essentielle qu'est le doute. Pourquoi ? Parce que rien ne dit que la voie dans laquelle on est engagé quand on veut résoudre un problème, soit la bonne. Il faut constamment se remettre en question. Il faut constamment se poser la question de savoir si, bien sûr, si on arrive au bout, tant mieux.

Mais quand le problème est très difficile et le problème dont on parle dans le livre est un problème extrêmement difficile, dans ces cas-là, effectivement, il n'y a pas d'autre issue que de douter constamment et d'être capable de se remettre en question.

Nicolas Martin : Sur justement ce rapport au travail, sur cet acharnement à résoudre les problèmes, vous vous êtes attaqué à la conjecture de Riemann, à l'hypothèse de Riemann qui est le huitième des 23 problèmes mathématiques pour le 20$^{\text{ème}}$ siècle de Hilbert, qui n'a, sauf preuve du contraire, et je parle sous votre contrôle pour le moment toujours pas été résolu. Vous parlez, Alain Connes, à ce propos-là et sur votre travail en général, de l'obsession du mathématicien, il y a quelque chose d'obsessionnel dans ce travail ?

Alain Connes : Oui, en fait, je me suis intéressé à ce problème complètement par hasard. Ça, il faut bien le savoir.

Nicolas Martin :

C'est-à-dire ?

Alain Connes : C'est-à-dire que comme c'est un des grands problèmes, mon principe de départ, c'était le contraire, c'est-à-dire que c'est toujours de rester marginal, de rester un petit peu en embuscade et de ne jamais m'intéresser à un problème comme celui-là. Sauf que ce qui est arrivé, c'était en 1996, et j'ai été invité à une conférence qui était pour le 70ème anniversaire de Atle Selberg.

Alors Atle Selberg est un très, très grand mathématicien norvégien qui, lui, a travaillé énormément sur l'hypothèse de Riemann et a trouvé des choses formidables.

Et à l'occasion de cette rencontre qui avait lieu à Seattle, en 96, il y a eu un jour... Bon, j'ai fait ma conférence parce que j'avais trouvé avec un collaborateur, avec Jean-Benoît Bost, on avait trouvé un système de mécanique quantique qui était relié à la fonction zêta de Riemann, mais il apparaissait comme étant relié de manière périphérique, c'est-à-dire la fonction zêta apparaissait, comme ce qu'on appelle la fonction de partition, mais c'était périphérique. Or, ce qui est arrivé, c'est que j'ai donné ma conférence. Et puis, à la fin de ma conférence, Atle Selberg est venu me voir et il m'a dit "It is not so clear that what you do will be related to the Riemann hypothesis."

Nicolas Martin : Il n'est pas très évident que ce que vous faites est relié à l'hypothèse de Riemann ?

Alain Connes : Exactement. Alors après, il y a eu, on a eu une rencontre, etc. Puis quand je suis rentré, j'étais vraiment pensif, pendant une semaine. À l'époque, il n'y avait pas de mail. Je ne regardais pas mes mails. Je pouvais être complètement déconnecté. Je suis resté dans le décalage horaire pendant environ 8 jours. Et puis, au bout de 8 jours, je me suis rendu compte qu'en fait, le système qu'on avait défini avec Jean-Benoît Bost donnait exactement l'espace que des gens avaient cherché à propos de ça.

Donc bon, alors j'ai dit "donnait "l"'espace". Rien ne dit que ce soit encore le bon.

Il n'empêche que ce que ça montrait tout de suite, ça montrait qu'une formule qui est essentielle dans cette théorie-là qu'on appelle la formule explicite de Riemann-Weil, elle apparaissait complètement naturellement à partir de la géométrie qu'on avait définie. Du coup, si vous voulez, j'ai écrit une note aux Comptes-Rendus. Et puis, de fil en aiguille, j'ai été pris dans cette espèce de... comment dire ? dans cette espèce de situation dans laquelle on ne contrôle plus, parce que c'est vrai que si vous voulez, dès que quelqu'un s'intéresse à ce problème, en gros, je rigole hein, mais en gros, si vous voulez, les autres mathématiciens souhaitent qu'il se casse la gueule et surtout, qu'il ne le résolve pas, et pour une bonne raison.

Nicolas Martin : Décidément, le milieu mathématique est encore plus anarchique qu'on ne l'imaginait avant de commencer cette émission.

Alain Connes : En fait, c'est plus compliqué que ça parce qu'en fait, comment dire, c'est très intéressant la sociologie du milieu mathématique. Mais cette hypothèse, l'hypothèse de Riemann, il faut comprendre en fait que sans que cela soit évident, elle est derrière un nombre incalculable de développements très fructueux dans les mathématiques du $20^{\text{ème}}$ siècle. Ça a commencé par la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr. Ça a continué avec tout ce qu'a fait André Weil et puis, bien sûr, Hasse, Artin, etc. sur la géométrie en caractéristique finie, ce qu'a fait Deligne, ce qu'a fait Grothendieck. Donc, si vous voulez, il y a une énorme influence de cette conjecture sur le développement des mathématiques.

Et en tout cas, ce qui, moi, m'attristerait terriblement, c'est si elle était résolue de manière anecdotique.

Et en fait, j'ai récemment, par exemple, j'ai gagné de l'argent par un journal de théorie des nombres qui reçoit assez souvent des articles qui prétendent démontrer cette hypothèse. En fait, ils me l'envoient et ils me payent quand je trouve l'erreur.

Pourquoi ? Parce que donc, vous voyez, je veux dire. C'est très, très compliqué.

C'est une situation extrêmement compliquée, extrêmement intéressante, extrêmement intéressante, parce qu'en fait, ce qui est probable, c'est qu'elle ne soit démontrée que quand le paysage qui l'entoure sera entièrement dévoilé. C'est un peu comme un sommet de montagne. Mais avant qu'on comprenne vraiment ce qui est derrière, apparemment, il n'y a pas de manière de couper, si vous voulez, il n'y a pas de raccourci et s'il y en avait un, ce serait un peu catastrophique parce que ça voudrait dire que le magnifique paysage que l'on doit découvrir à propos de cette conjecture, eh bien, il n'aurait pas été dévoilé.

Nicolas Martin : Et à 16h22, Nous poursuivons notre entretien avec Alain Connes, qui vient de publier un roman, son deuxième, *Le Spectre d'Atacama*, co-écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, puisqu'on parlait de la vocation dans votre carrière mathématique, Alain Connes, d'où vous vient cette volonté, cette envie d'écriture romanesque, de fiction ?

Alain Connes : Ah alors ça, c'est une envie de liberté, si vous voulez, en fait. C'est à dire qu'on en a beaucoup discuté ensemble, les trois auteurs. Mais le travail mathématique est un travail dans lequel, bien sûr, l'imagination joue un rôle, non négligeable, c'est évident. Mais cette imagination est terriblement corsetée. C'est-à-dire qu'il y a une réalité mathématique. J'utilise beaucoup l'ordinateur, énormément. Et cette réalité mathématique, elle est indéniable. C'est-à-dire que si on a une idée d'une formule, etc., on peut essayer de la vérifier, et si ça marche, ça marche et si ça ne marche pas, ça ne marche pas.

Donc, on a un rôle de l'imagination. Bien sûr, on a un rôle surtout, je dirais, de la création d'images mentales, c'est-à-dire que quand je dis imagination, c'est beaucoup plus, le fait qu'en cherchant un problème, même si on n'arrive pas à le résoudre, en fait, quand on n'arrive pas à le résoudre, c'est mieux parce que ça veut dire que c'est un problème qui nous permet de nous améliorer nous-mêmes, à ce moment-là, on crée des images mentales.

Quand vous voyez quelqu'un dans le métro, qui lit une partition de musique, si vous n'êtes pas musicien, ça ne vous dit rien. Si vous voyez un mathématicien qui lit des maths, ça ne vous dit rien non plus. Et par contre, un mathématicien, ça va lui parler tout de suite. Ça va lui parler tout de suite parce qu'il a des images mentales. Et ces images mentales, elles se réveillent dès qu'il voit les formules correspondantes.

Donc ça, c'est extrêmement important. Malheureusement, c'est très dur. C'est très, très difficile, c'est-à-dire que bon, on peut avoir une idée. Et puis, au bout d'un moment, quand on essaye d'écrire une démonstration, non, ça, il y a un truc qui colle pas, etc. donc si vous voulez, on se heurte à une réalité qui est extrêmement résistante. Par contre, dans l'écriture romanesque, qui est ce plaisir qu'on a eu tous les trois, ces deux fois, mais surtout la deuxième, parce qu'on a passé énormément de temps à écrire ce deuxième livre, dans cette écriture romanesque, là, justement, l'imagination peut se déployer. Et en fait, ce qui me frappe quand je regarde ce livre, c'est, surtout avec les développements actuels, ce qui me frappe, c'est l'infinie liberté dont jouit le héros, qui est Armand.

Nicolas Martin : Dans lequel on a du mal à ne pas vous reconnaître, Alain Connes.

Alain Connes : Oui...

Nicolas Martin : Il est mathématicien, il travaille à l'IHES...

Alain Connes : Oui, mais en fait, c'est vrai, il y a quelques ingrédients. Bien sûr, c'est vrai, Mais en fait, non, non, non, non. En fait, c'est un personnage de roman et c'est un personnage de roman qui jouit d'une liberté qui, malheureusement, sera de plus en plus difficile à avoir. Par exemple, bon, il va au Chili. Après, il décide de prendre un bateau, il va dans l'île des États, etc. Et alors, on se dit bien que maintenant, à l'heure actuelle, il aurait eu un compte Facebook, les gens se seraient aperçus qu'il ne répond plus, qu'il n'est plus là. On serait parti à sa recherche, etc. Donc cette notion de liberté fondamentale, cette magnifique liberté, elle est présente dans le livre. Elle montre, si vous voulez, à quel point elle est essentielle à la maturation d'une idée, etc. Justement, quand le mathématicien est obsédé par une idée.

Mais, ce qui me fait peur, c'est à quel point elle risque de disparaître. Vous savez, je raconte toujours cette anecdote, qui m'avait tellement frappé, qui était au moment d'une visite inopinée du président des Etats-Unis à l'Institut de Princeton et le directeur de l'Institut avait fait visiter les bureaux puisque bon, il voulait montrer... À un moment-donné, ils avaient frappé au bureau d'un mathématicien et ils étaient rentrés dans le bureau. Ils avaient trouvé le mathématicien allongé sur sa table, en train de dormir. *(rire d'AC).*

Donc voilà, alors que maintenant, ils seraient rentrés, qu'est-ce qu'ils auraient vu ? Ils auraient vu le mathématicien, devant son ordinateur, en train de répondre à 36 sollicitations, en général complètement sans intérêt. Il aurait dû, je sais pas, écrire un rapport ou faire etc. Mais si vous voulez, cette notion de ne rien faire, cette notion de laisser son esprit complètement en roue libre et capable, justement, à un moment donné, de vous réveiller et de vous dire voilà, là, il y a quelque chose, etc., eh bien, cette notion elle est, malheureusement, très, très menacée, par la technologie, par le fait que nous sommes de plus en plus enrégimentés, de plus en plus corsetés, de plus en plus labélisés.

Donc, je vais dire, la lecture de ce livre, je pense, donne un plaisir dans ce sens-là, c'est-à-dire on voit cet état pur en train d'être menacé, en train de disparaître, malheureusement.

Nicolas Martin : On reviendra... parce que vous parlez, effectivement, dans ce livre *Le Spectre d'Atacama* de l'intelligence artificielle sur laquelle vous n'avez pas un regard très clément, va-t-on dire. Mais avant cela, peut être, un mot, il y a plein de choses qui me viennent à l'esprit, mais peut-être, pour la suite de notre entretien et pour les auditeurs, un mot sur ce que raconte *Le Spectre d'Atacama*, trois personnages, vous l'avez dit, Armand, un mathématicien, Charlotte, une physicienne, et Ali, un informaticien, que se passe-t-il ? Ce sont les mêmes personnages que dans votre premier roman, par ailleurs.

Alain Connes : Bien sûr, ce sont les mêmes personnages. En fait, ce que raconte le roman, c'est un spectre, qui est reçu par l'Observatoire d'Alma...

Nicolas Martin : Alors ce n'est pas un fantôme, c'est un spectre...

Alain Connes : Ce n'est pas un fantôme ; un spectre, vous savez, c'est quelque chose qui a un sens à la fois physique et mathématique. La première manière dans les spectres sont apparus. C'est ce qu'on appelle des spectres d'absorption. Et c'est Fraunhofer, un physicien qui était opticien plutôt allemand, qui a eu cette idée géniale qui était de regarder le spectre du soleil qui avait été par exemple divulgué par Newton. C'est-à-dire on fait passer les rayons du soleil à travers un prisme et on obtient bien sûr les couleurs de l'arc en ciel.

Mais il avait eu cette idée extraordinaire de regarder ce spectre, par exemple, avec un microscope, et il s'était aperçu qu'il y avait des raies noires. Alors bien sûr, au départ, on peut penser les raies noires, c'est l'objectif qui est sale ou un truc comme ça. En fait, ce n'était pas le cas. Ces raies noires, il en avait répertorié environ 500 et c'est le premier spectre dont on a eu la trace physique. Et c'est ce qu'on appelle un spectre d'absorption.

Qu'est-ce que cela signifie ? Ça signifie si vous voulez que ces raies noires, en fait, elles viennent de la signature de certains corps chimiques qui sont contenus dans la couronne solaire, ça veut dire que la lumière qui vient du soleil, elle est absorbée par ces corps chimiques. Et comme ils ont une signature, ces corps chimiques, elle permet de savoir quelle est la composition, justement, de la couronne solaire. Alors après, on s'est aperçu qu'il n'y avait pas seulement des spectres d'absorption, mais qu'il y avait aussi des spectres d'émission.

Par exemple, quand on prend du sodium, qu'on le chauffe et on fait passer la lumière qui sort du sodium à travers un prisme. On obtient cette fois des raies brillantes sur un fond noir et ces raies brillantes sur un fond noir correspondaient exactement à certaines des raies noires, sur le fond lumineux, dans le spectre du soleil.

Et alors il y avait quelque chose de formidable aussi qui s'est produit.

C'est que parmi les spectres qu'on a pu reconnaître, il y en avait un complètement mystérieux, qui ne correspondait pas à un corps chimique sur la Terre. Et les physiciens et les chimistes ont eu cette idée formidable de dire "Oh ! C'est un corps chimique qu'on ne connaît pas." Et ils l'ont appelé l'hélium comme le Soleil, bien sûr. Alors, la merveille des merveilles, c'est qu'il y a eu une éruption du Vésuve, je ne sais plus en quelle année et qu'on a pu observer dans la lave du Vésuve exactement le spectre de l'hélium. Donc, la boucle était bouclée. Ça, ce sont les spectres de la physique. Au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens et les physiciens ont compris comment calculer ces spectres de la physique, à partir des mathématiques, et à partir d'une notion de spectre qui est issue des mathématiques et qui est centrale dans le formalisme de la mécanique quantique de von Neumann.

Donc, le spectre d'un opérateur, ça existe, c'est sa variabilité, c'est son espace vital, si vous voulez. Et en fait, alors le point de départ du livre, c'est Armand, qui est mathématicien, qui est un peu obsédé par un problème, etc. Et puis, un jour, il reçoit un message de Rodrigo, qui est un ami, qui est un astronome à l'observatoire d'Alma et qui lui dit "Viens me voir, viens me voir, il y a quelque chose d'extrêmement mystérieux, au Chili, dans le désert d'Atacama". Et finalement Armand, bien que son ami ne soit plus disponible parce qu'il a eu un AVC, finalement, il récupère le spectre, alors il récupère un spectre très, très bizarre, très bizarre. Et puis après, il va s'embarquer avec ce spectre dans toutes sortes d'aventures qui sont une espèce de fuite par rapport au comment dire, au brouhaha du monde moderne. Il essaye d'échapper au brouhaha du monde moderne pour essayer de se concentrer, de comprendre ce que c'est que ce spectre.

Alors, il va aller d'aventure en aventure. Comme ça, il va... Si vous voulez, son voyage physique est une métaphore de son voyage intellectuel, bien sûr. D'accord ?

Et alors après, ce qui est absolument incroyable, c'est qu'il va retrouver au fil de ses aventures, un autre des personnages du premier livre, qui est Charlotte et Charlotte, avait eu elle-aussi une expérience. Elle, elle avait vécu vraiment dans sa chair, si vous voulez, Charlotte, physicienne, qui est physicienne au CERN et dans le premier livre, elle avait vécu une expérience dans sa propre chair. Et c'est une expérience qui paraissait folle dans le premier livre, je pense que beaucoup de gens qui ont lu le premier livre considéraient que c'était une expérience tout à fait folle...

Nicolas Martin : *Le théâtre quantique*, publié chez Odile Jacob.

Alain Connes : Et alors, en fait, cette expérience, on a compris ce qui était derrière, dans le deuxième livre, et on a, comment dire, on a expliqué ce qui lui était arrivé parce qu'en fait, c'est d'ailleurs, c'est très amusant parce qu'Armand, lui, il l'avait fuie, et quand il apprend l'expérience dont Charlotte est rescapée...

Nicolas Martin : Une expérience de vie quantique

Alain Connes : Une expérience de vie quantique, quand il apprend cette nouvelle, en fait, elle est juxtaposée avec un article du Monde sur une représentation de *La Belle au bois dormant*. Et ce qui est derrière, parce qu'il y a beaucoup de choses cachées dans le livre, il faut le lire à plusieurs reprises, il y a énormément de choses qu'il faut comprendre. Ce qu'il faut comprendre, c'est que l'expérience de Charlotte, c'était exactement l'expérience de *La Belle au bois dormant*.

C'est-à-dire ? Elle avait été transpercée par une aiguille et elle a été réveillée par un Prince charmant, en l'occurrence, le Prince charmant, c'est Florimont. C'est un ordinateur.

Et on apprend dans le livre qu'alors que dans le premier livre, on disait "elle est ressuscitée". Elle est morte puisqu'elle a été transpercé dans le CERN, dans un des du CERN. Son cerveau a été entièrement pris par les ordinateurs, etc. Et puis, elle est ressuscitée par l'ordinateur. Donc, on ne comprenait pas. En fait, dans le deuxième livre, on comprend qu'elle n'est jamais morte parce que la mort est la mort cérébrale. Et quand son cerveau a été récupéré par l'ordinateur, alors, on pourrait se demander "mais pourquoi est-ce que l'ordinateur a voulu la ressusciter ?". En fait, c'est elle-même qui s'est ressuscitée. Et c'est elle-même qui s'est ressuscitée, en se rajoutant quelque chose, elle s'est rajouté un petit plus dans le cerveau. Et dans le deuxième livre, justement, ce qui est absolument étonnant, c'est qu'elle s'est rajouté quelque chose dans le cerveau. Alors ça lui permet de fonctionner beaucoup mieux quand elle est à proximité de Florimont, ce n'est pas au hasard. C'est le nom de l'ordinateur qui ressuscite, dans le ballet, c'est Florimont qui joue ce rôle-là.

Et donc, en fait, ce qui se produit, c'est que comme elle est, en fait, elle est un peu trans-humaine, c'est-à-dire qu'elle s'est rajouté quelque chose dans le cerveau, qui fait que quand elle est proche de l'ordinateur, elle fonctionne mieux. Alors, ce qui est très étonnant, c'est que ça lui permet de décanuler, comme on dit en mathématiques, c'est-à-dire de comprendre un autre spectre, qui est aussi envoyé en alternance par l'Observatoire d'Alma. Mais c'est Armand qui trouve la signification du premier spectre.

Nicolas Martin : Ne nous dévoilez pas tout parce que... il y a plein d'aventures, effectivement, à lire sur différents niveaux, et puis, il y a quelque chose aussi de très important dans ce roman dont il faudra que vous nous expliquiez la couverture aussi, parce qu'elle est assez surprenante, et cet autre élément, c'est la place de la musique, et notamment de cette musique.

Extrait du Quatuor pour la fin du temps de Messiaen

Nicolas Martin : Voilà, c'est un extrait du *Quatuor pour la fin du temps* d'Olivier Messiaen. Pourquoi, Alain Connes, en quelques mots, parce qu'on va entendre votre co-auteur, Jacques Dixmier, à ce propos, pourquoi l'importance d'Olivier Messiaen ?

Alain Connes : Alors pourquoi Olivier Messiaen en particulier ? C'est qu'en fait, si vous voulez, le temps, comme je le disais, a joué un rôle permanent dans mon évolution, dans mon parcours de mathématicien, et à propos de zêta, donc la fonction zêta de Riemann, alors que la plupart des autres chercheurs sur le problème, cherchent les zéros de zêta, c'est à dire le spectre, comme un spectre d'énergie ou un spectre de fréquences, je me suis aperçu que dans mon approche, ça apparaît comme un spectre de temps, un spectre de longueurs.

Et alors, quand on regarde ce qui correspond à zêta, mais qui a déjà été compris par le travail... par André Weil, si vous voulez, c'est un cas analogue, mais plus simple. Eh bien, dans ce cas-là, on obtient des temps, exactement comme dans le cas de zêta. Et ces temps vérifient une propriété extrêmement particulière comme temps d'attaque dans une mélodie et cette propriété extrêmement particulière est une propriété qui avait été mise en évidence par Messiaen, sous le nom de rythmes non-rétrogradables, et ça revient à une palindromie. Et cette propriété, en fait, est une propriété essentielle de la fonction zêta correspondante.

Donc, j'ai pensé que c'était une opportunité extraordinaire de faire le lien entre, justement, les zéros de fonction zêta, pour le cas analogue à celui d'André Weil avec Messiaen.

Nicolas Martin : N'en dites pas trop puisque nous allons entendre justement votre co-auteur et ex-directeur de thèse à ce propos sur le lien entre mathématiques et musique, puisque vous êtes allée rencontrer Jacques Dixmier, Céline Loozen, bonjour.

Céline Loozen : Oui, bonjour Nicolas, bonjour Alain Connes, bonjour a tous.

Je suis allée voir votre ancien directeur de thèse, Jacques Dixmier, pour comprendre un peu le lien entre les mathématiques et la musique, car dans l'écriture de votre roman, vous avez puisé des idées auprès de Messiaen, qui vous a inspiré sur la question du rythme et du temps. Et vous avez découvert une relation directe entre les concepts développés par Messiaen et les mathématiques. Cela vous a alors donné l'idée de composer vous-même de la musique, à partir des nombres premiers pour créer ce qu'on appelle des rythmes non-rétrogradables.

Jacques Dixmier : Les aspects de la musique dont il est question ici sont relativement élémentaires. On a été inspirés spécialement par le *Traité* de Messiaen, *Traité de musique et d'ornithologie*, je crois bien. Et comme il était beaucoup question de spectre dans le début de l'histoire, c'est lié, dans l'histoire, c'est lié à des observations astronomiques, puis c'est lié à des ondes de tremblements de terre. Enfin, les ondes, les valeurs propres interviennent souvent. Alors c'était pas tellement étonnant que la musique intervienne puisque c'est une question de fréquences, quand même, la hauteur d'un son, ça veut dire la fréquence de la vibration de l'air.

Céline Loosen : Quel est le rapport entre les nombres premiers et la composition arithmétique musicale, qui est mis en évidence à travers un des morceaux d'Olivier Messiaen.

Jacques Dixmier : Alors ça, c'est à la fin du livre, effectivement, où on utilise les nombres premiers pour fabriquer des rythmes. Pour trouver certains rythmes, on fait appel alors à une théorie mathématique qui elle est extrêmement élaborée. Ça s'appelle la théorie des courbes algébriques sur les corps finis et à l'action de l'automorphisme de Frobenius *(J.D. rit.)* C'est lié à ça. Les diagrammes qu'on trouve vers la fin, avec les différents rythmes, sont liés à ce problème.

Céline Loosen : Et on retrouve l'idée du spectre qui, elle, est omniprésente à travers l'histoire.

Jacques Dixmier : Oui, l'idée de spectre intervient dans le livre, à beaucoup d'aspects. Ce n'est pas étonnant d'ailleurs, vus les travaux d'Alain Connes. Pour lui, le spectre d'un opérateur, c'est quelque chose de fondamental. Mais alors, ce qui nous a amusés, c'est que ça puisse intervenir dans une histoire et pas dans un mémoire...

Céline Loosen : Notamment, il est question de l'espace, espace à une gamme musicale. Et qu'est-ce qu'on retrouve dans la musique de Messiaen qui est cité tout au long de l'ouvrage ?

Jacques Dixmier : Eh bien, il parle de rythmes.

Céline Loosen : Mais rythmes non-rétrogradables. Qu'est-ce que ça veut dire ?

Jacques Dixmier : Ça veut dire qu'on peut les retourner dans le temps et qu'ils sont identiques à eux-mêmes. Ce sont des rythmes, donc non-rétrogradables, ça veut dire un rapport assez particulier au temps qui sont obtenus par la méthode des courbes sur les corps finis qui sont dans le bouquin. Il y a des rythmes non-rétrogradables. Vous pouvez trouver les dessins. Voilà, là, par exemple, la droite représente le temps et les petites barre verticales donnent les temps d'attaque des notes.

Le fait que ça soit non-rétrogradable, vous pouvez le voir très bien. Par exemple, prenez le rythme qui est là et si vous allez dans les deux sens, regardez. Vous avez deux, deux notes rapprochées... ici aussi. Là, il s'agit donc des rythmes, pas des hauteurs. Vous voyez que, si vous le lisez à l'envers...

Céline Loosen : C'est comme un palindrome ?

Jacques Dixmier : Oui, c'est aussi le terme qu'il emploie. Mais là, c'est plus net, regardez. Ça commence ici ou là. Et puis, vous avez deux notes très rapprochées, deux notes très rapprochées, etc. Donc vous pouvez le lire à l'envers.

Céline Loosen : Il y a une forme de symétrie.

Jacques Dixmier : Voilà, d'ailleurs un mathématicien parlerait plutôt de symétrie. D'ailleurs, quand on parle d'automorphisme de Frobenius des courbes sur les corps finis, on parle de la symétrie de son spectre. Oui, mais alors, donc vous voyez les nombres qui sont là, ce sont les nombres premiers. Enfin, ceux-là sont compris entre 43 et 83. Et en particulier, donc, ils donnent lieu... C'est ça le point de vue du bouquin. On explique comment à chaque nombre premier, on peut associer un rythme. C'est ça.

Céline Loosen : Et quel est le rapport avec l'espace physique ?

Jacques Dixmier : En un sens, il y en a aucun. Sauf qu'on parle de spectre dans les deux cas. Dans l'espace physique, il y a des... Eh bien, par exemple, vous avez entendu parler des ondes gravitationnelles, qu'on vient de mettre en évidence et expérimentalement. Eh bien, comme toutes les ondes, elles ont des longueurs d'ondes, et des fréquences. Donc, ça démarre tout juste. Donc, on sait encore presque rien, mais on mesurera des vibrations de l'univers entier. On arrivera à faire ça d'ici quelques années. Il y aura sûrement là des spectres d'opérateurs qu'on pourra analyser mathématiquement. On vérifiera expérimentalement et ça sera l'analogue à l'échelle de l'univers, des vibrations d'un tambour, des vibrations, dans l'histoire, du désert d'Atacama, lorsqu'il y a un tremblement de terre, des notes de la guitare, tout ça ressort d'un schéma assez général.

Retour à l'interview initial.

Nicolas Martin : Voilà Jacques Dixmier, co-auteur avec vous, Alain Connes, du *Spectre d'Atacama*. Un mot sur cette analyse, cette interprétation en tout cas de votre usage de la musique dans le roman ?

Alain Connes : Oui, alors disons qu'effectivement, il y a deux aspects. D'abord, si vous voulez, lorsqu'on regarde le cas analogue de la fonction zêta, mais qui avait été résolu, lui, par André Weil, comme l'explique Jacques Dixmier, ce que ça va donner ? Ça va donner des rythmes, ça va donner des temps d'attaque, mais qui ont cette propriété particulière de palindromie, de symétrie et que Messiaen appelle rythmes non-rétrogradables. Mais qu'est-ce qu'il a en tête ? Il a en tête que si on les rétrograde, on obtiendra le même. Donc, ça ne donnera rien de nouveau. Donc c'est ça l'idée.

Alors, en fait, donc là, ce sont des rythmes. Mais j'ai été amené à composer, pour chaque nombre premier, des hauteurs qui ensuite seraient jouées par ces rythmes-là.

C'est ça qu'on va entendre. Et pour composer ces hauteurs, je me suis attelé à la tâche d'associer à chaque premier une mélodie, mais de manière purement mathématique.

C'est ça qu'on va écouter.

Nicolas Martin : C'est ça qu'on va écouter. On peut rappeler, bien sûr, à nos auditeurs qui n'ont vraiment pas la fibre mathématique, qu'un nombre premier'est un nombre qui n'est divisible que par lui même et par 1.

Voilà.

Courte écoute musicale.

Nicolas Martin : Qu'est-ce qu'on vient d'entendre, Alain Connes ?

Alain Connes : Alors, ce qu'on vient d'entendre, c'est très étonnant, c'est qu'on vient d'entendre une mélodie qui est différente pour chacun des nombres premiers entre 7 et 67 et comment elle a été construite, cette mélodie, elle a été construite de manière purement mathématique, c'est-à-dire que ce qu'on a fait : on a pris le spectre de la guitare. Quand vous regardez les frettes sur une guitare, en fait, ces frettes, elles ne sont pas du tout espacées de manière égale. Et quand on regarde ce que cela signifie mathématiquement, ce sont les puissances d'un nombre et ce nombre... donc elles sont espacées exactement comme les puissances d'un nombre. C'est q puissance n, disons. Et ce nombre, c'est la racine douzième de deux, mais c'est pratiquement aussi la racine dix-neuvième de trois.

Et c'est ce qui est à l'origine de la musique. Bon, alors, en fait, ce que l'on a fait pour définir cette mélodie associée à chacun des nombres premiers entre 7 et 67, c'est de regarder le nombre premier, de faire son développement en ce qu'on appelle une fraction continue, mais en prenant, par rapport à ces puissances de q, c'est à dire en essayant de l'écrire comme une puissance de q et à ce moment-là, on obtient automatiquement une mélodie, qui est palindromique ici. Et la manière dont on l'a entendue là, on l'a entendue de telle sorte que donc, chaque fois qu'il y avait un nombre premier, il y avait une mélodie correspondante. Elle était différente pour chacun des nombres premiers puisqu'on sait que leur développement en fractions continues sont différents.

Et maintenant, on va entendre jouer cette mélodie pour chaque nombre premier qui était jouée de manière égale, on va l'entendre jouer par un rythme qui est un rythme à la Messiaen, mais qui lui est associé à une fonction de zêta, comme l'expliquait Jacques Dixmier, qui est associée à une courbe. Donc, si vous voulez la différence fondamentale, ça va être que la fonction zêta va vous donner une manière de jouer, qui va être différente, au niveau rythme, au niveau des attaques des notes. Mais sinon, la mélodie sera exactement la même.

(Nouvelle écoute musicale.

Voilà, donc si vous voulez, ce qu'on a entendu, on a bien vu que là, y'avait, ta ta tata *(des accélérations, des notes très courtes)*, donc la manière de jouer est complètement différente. Et alors, ce qui est assez extraordinaire, c'est qu'on a fait les calculs pour 6 courbes différentes, et on s'aperçoit que chaque courbe, donc, elle a, comment dire, sa personnalité et elle joue d'une manière... mais d'une manière qui est cohérente. Donc c'est une espèce d'interprète. Donc ce qu'on dit là, c'est qu'on arrive à percevoir, par l'ouïe, par l'audition, on arrive à percevoir par l'ouïe, par l'audition, on arrive à percevoir quelque chose qui, normalement, est très, très difficile à comprendre, qui est justement, bon, ces valeurs propres du Frobenius qui font cette analogue de la fonction zêta de Riemann, mais qui sont perçues cette fois de manière rythmique, qui sont perçues comme des temps, d'accord, donc ça c'est un... Où ça intervient dans le livre ? Ça intervient de manière cruciale dans le livre parce que, en gros, un des messages du livre, c'est que s'il y a manière de communiquer avec des extraterrestres, avec une intelligence extraterrestre, les mathématiques sont un outil extraordinaire pour cela. Et en fait, donc, il y a là, l'Observatoire d'Alma a reçu deux spectres qui sont envoyés en alternance. C'est ce que l'on apprend au bout d'un moment dans le livre et le fait que l'on reçoive ces deux spectres et que l'on ait compris, grâce à Charlotte pour le premier spectre, grâce à Armand pour le second, ce que signifient ces deux spectres, eh bien, il y a une révélation, c'est forcément, ça nous vient d'êtres intelligents. Alors d'êtres intelligents, en quel sens ? intelligents, en quel sens ?

Là, c'est le summum de l'intelligence. C'est quelque chose qui a été trouvé par Bernard Riemann, qui était un mathématicien du 19$^{\text{ème}}$ siècle. Et c'est sans doute le summum de l'intelligence. C'est avoir compris que ce qui régit les nombres premiers, c'est de la musique. Ce qui régit les nombres premiers, ce sont ce qu'on appelle justement ces zéros de la fonction zêta. C'est eux qui régissent l'aléa qui est dans les nombres premiers et la conjecture de Riemann dont on parlait tout à l'heure, justement, elle est extrêmement signifiante pour la raison suivante. C'est que ce qu'elle dit, en gros, c'est que dans le spectre correspondant qui est *le Spectre d'Atacama*, qui est la couverture du livre. Dans ce spectre, ce que dit la conjecture de Riemann, c'est qu'il n'y aura pas de, il n'y aura pas, ce sera toujours des raies extrêmement précises, il n'y aura pas ce qu'on appelle de résonances, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas d'endroit où, au lieu d'avoir un temps d'attaque qui est précis, il y a un temps d'attaque qui est diffus.

C'est ce que dit la conjecture. Ce qu'elle dit sur les nombres premiers, c'est qu'en fait, bien qu'ils aient l'air complètement aléatoires, ils sont gouvernés par un aléa, mais un aléa qui est parfaitement contrôlé, si vous voulez, et qui est parfaitement... Oui ?

Nicolas Martin : J'aimerais, parce qu'il nous reste juste peu de temps, une petite minute, juste un mot, tout de même, Alain Connes, pour conclure, sur cette tentation que j'ai envie d'appeler la tentation holistique : vous êtes mathématicien, romancier, musicien, la volonté de comprendre, d'intégrer ce langage mathématique comme langage universel, qu'en pensez vous ?

Alain Connes : Si vous voulez, voilà, ce que je pense, c'est la chose suivante : c'est que l'une des grandes trouvailles de l'esprit humain, c'est de comprendre, bon. L'esprit humain, au 19ème siècle, je parlais de Bernard Riemann, mais, parlons de Galois : Galois a été capable, sans avoir d'ordinateur, sans avoir de moyens de calcul, etc. de comprendre comment complètement capturer les relations rationnelles entre les racines d'une équation, en lui associant une autre équation et en résolvant celle-ci de manière tautologique, pratiquement. Mais il disait à l'époque : "Sautons à pieds joints sur les calculs." J'ai eu à faire, à l'Académie, un exposé sur Galois pour le deux-centième anniversaire de sa naissance, et j'ai montré, puisque maintenant on peut faire les calculs avec l'ordinateur, j'ai montré pour une équation du cinquième degré très simple, ce que donneraient les calculs, dans ce cas-là : on voit bien que Galois, ça lui était absolument impossible. Il n'empêche, il avait compris parfaitement, conceptuellement, tout ce qui était derrière. Et le message du livre, un message qui est très, très important, c'est que justement, on a tendance maintenant de nos jours, à se laisser aller à la tentation du faire sans comprendre, par opposition au comprendre sans faire de Galois et par opposition à la création des concepts qui est l'apanage des mathématiques.

Nicolas Martin : Ce sera le mot de la fin, Alain Connes, puisqu'il est 16h52... Un autre livre que nous vous conseillons : *Le Spectre d'Atacama*, d'Alain Connes, qui a été notre invité, co-écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, c'est aux éditions Odile Jacob, merci beaucoup, Alain Connes, d'avoir accepté notre invitation et d'avoir été avec nous tout au long de cette heure.

Les billets d'Alain Connes sur le blog http://noncommutativegeometry.blogspot.com

Dimanche 25 Février 2007
Réel et complexe
Je voudrais discuter d'une "autre entrée" dans les textes parallèles que Masoud a présentés dans son billet.

Du côté théorie des fonctions, on parle de "variables réelles et complexes". Un livre parfait d'introduction à cela est *"Analyse réelle et complexe"* de W. Rudin (McGraw-Hill). C'est un classique et cela reste l'une des meilleures entrées dans le sujet. Ce que l'on y apprend, c'est l'interaction constante entre les techniques à "variable réelle" comme l'intégrale de Lebesgue, la différentiabilité presque partout, etc., et les techniques à "variable complexe". Il y a une citation d'André Weil qui ressemble à "Le monde complexe est beau, le monde réel est sale". On pourrait être tenté d'ignorer le "monde réel" et de ne travailler que dans le paradigme à variable complexe dans lequel "toute" fonction est holomorphe et ainsi infiniment différentiable etc... C'est bien, et on peut parcourir quelque distance avec ça, si ce n'est que la plupart des résultats profonds d'analyse complexe reposent sur l'analyse réelle. Alors maintenant qu'en est-il de l'autre entrée dans le texte en parallèle ? C'est

Variable complexe......................	Opérateur sur l'espace de Hilbert
Variable réelle............................	Opérateur auto-adjoint

où j'ai légèrement réécrit l'entrée précédente en

Fonctions $f : X \to C$.................	Opérateurs sur l'espace de Hilbert

du billet de Masoud pour souligner que la colonne de droite fournit un modèle idéal de cette vaste notion qu'est la notion de "variable"... L'ensemble des valeurs de la variable est le spectre de l'opérateur, et le nombre de fois où la valeur est atteinte est la multiplicité spectrale. Les variables continues (les opérateurs à spectre continu) coexistent allègrement avec les variables discrètes précisément à cause de la non-commutativité des opérateurs.

Le calcul fonctionnel holomorphe donne un sens à $f(T)$ pour toute fonction holomorphe f sur le spectre de T, et un résultat profond contrôle le spectre de $f(T)$. Le fait vraiment incroyable est qu'alors que pour les opérateurs généraux T dans l'espace de Hilbert, les seules fonctions $f(z)$ qui peuvent être appliquées à T sont les fonctions holomorphes (sur le spectre de T), la situation change drastiquement quand on travaille sur des opérateurs auto-adjoints : pour $T = T^*$, l'opérateur $f(T)$ a du sens pour toute fonction f ! On peut prendre un crayon et dessiner le graphe d'une fonction, elle n'a pas besoin d'être continue... même pas continue par morceaux, on peut prendre n'importe quoi qui nous vient à l'esprit... (d'un point de vue technique, la seule contrainte sur f est qu'elle soit partout mesurable mais personne ne peut construire explicitement une fonction qui ne remplisse pas cette condition !)... De plus, un opérateur borné est une fonction de T (i.e. est de la forme $f(T)$) si et seulement s'il partage toutes les symétries de T (i.e. s'il commute avec tous les opérateurs qui commutent avec T).

Je me rappelle que très tôt, dans ma rencontre avec les mathématiques, c'est vraiment ce fait-là qui m'a convaincu du pouvoir des techniques de l'espace de Hilbert en proche relation avec l'opération d'adjonction $T \to T^*$. C'était suffisant pour résister à la tentation de commencer directement dans le "monde complexe" de la géométrie algébrique qui attirait les débutants à ce moment-là, qui suivaient l'aura de Grothendieck qui décrivait si bien sa première rencontre avec ce monde-là : *"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller..."*

AC a dit...
"anonymous", le point est que la classe des fonctions arbitraires (d'analyse réelle) est la classe de celles qui opèrent sur des opérateurs auto-adjoints, alors que les fonctions holomorphes opèrent sur des opérateurs généraux T. Le cas des opérateurs normaux ($[T, T^*] = 0$) est juste "à deux variables" et n'a rien à voir avec l'analyse complexe. Quand la classe des fonctions est plus petite, on attend plus de propriétés, mais ça ne signifie pas que c'est "plus facile" (c'est plutôt le contraire) et donc l'analogie ne va pas en arrière...
Février 26, 2007 à 8 :42 AM

Mercredi 7 Mars 2007
Le rêve mathématique
J'imagine qu'une des utilités possible d'un blog tel que celui-ci, est que c'est un espace de liberté où l'on peut raconter des choses qui n'auraient pas leur place dans un papier de math "sérieux". Le bazar technique fini trouve sa place dans ces papiers et c'est une bonne chose que les mathématiciens maintiennent une exigence standard élevée dans le style d'écriture des articles car si ce n'était pas le cas, on perdrait vite le contrôle de la différence entre ce qui est effectivement prouvé et ce qui est juste un "souhait de vérité". Mais cependant, cette exigence ne laisse pas de place pour la source plus profonde, de nature poétique, qui met les choses en mouvement très tôt dans les étapes du processus mental, et qui amène à la découverte de nouveaux faits avérés ("durs").

Grothendieck a exprimé cela de manière très vive dans *Récoltes et semailles* : *"L'interdit qui frappe le rêve mathématique, et à travers lui, tout ce qui ne se présente pas sous les aspects habituels du produit fini, prêt à la consommation. Le peu que j'ai appris sur les autres sciences naturelles suffit à me faire mesurer qu'un interdit d'une semblable rigueur les aurait condamnées à la stérilité, ou à une progression de tortue, un peu comme au Moyen Age où il n'était pas question d'écornifler la lettre des Saintes Ecritures. Mais je sais bien aussi que la source profonde de la découverte, tout comme la démarche de la découverte dans tous ses aspects essentiels, est la même en mathématique qu'en tout autre région ou chose de l'Univers que notre corps et notre esprit peuvent connaitre. Bannir le rêve, c'est bannir la source - la condamner à une existence occulte".*

J'essaierai de réagir au billet de Masoud à propos des pavages et de donner une description heuristique d'une caractéristique qualitative de base des espaces non-commutatifs qui est parfaitement illustrée par les pavages de Penrose T du plan. Étant données deux tuiles de base, la fléchette et le cerf-volant de Penrose (ceux montrés sur le dessin), on peut paver le plan avec ces deux tuiles (avec une condition de concordance sur les couleurs des arêtes des pièces) mais aucun tel pavage n'est périodique. Deux pavages sont les mêmes si on peut les amener l'un sur l'autre par une isométrie du plan. Il y a plein d'exemples de pavages qui ne sont pas identiques.

L'ensemble T de tous les pavages du plan par les deux tuiles est un ensemble très étrange à cause du fait suivant : "Tout motif fini de tuiles dans un pavage par des fléchettes et des cerfs-volants apparaît, un nombre infini de fois, dans n'importe quel autre pavage contenant les mêmes tuiles".

Cela signifie qu'il est impossible de décider localement quel pavage on est en train de considérer. Les deux pavages de toute paire de pavages peuvent être mis en correspondance avec des grands morceaux arbitraires et il n'y a pas moyen de les différencier en regardant seulement des portions finies de chacun d'entre eux. Cela est en grand contraste avec les nombres réels puisque si deux nombres réels sont différents, leur expansion décimale sera différente suffisamment loin dans leurs chiffres. Je me rappelle avoir assisté il y a longtemps à un exposé de Roger Penrose dans lequel il superposait deux transparents contenant un pavage chacun et il montrait l'impression visuelle étrange obtenue en superposant des grandes parties de l'un sur l'autre... Il exprimait ainsi le sentiment intuitif qu'on a devant la richesse de ces "variations sur le même point" comme étant similaires aux "fluctuations quantiques". Un espace comme l'espace T des pavages de Penrose est en effet un exemple prototype d'un espace non-commutatif. Puisque ses points ne peuvent pas être distingués les uns des autres localement, on découvre qu'il n'y a pas de fonction à valeurs réelles ou complexes intéressantes sur un tel espace qui s'avère ainsi différent d'un espace comme la droite réelle R et que cet espace ne peut pas être analysé au moyen des fonctions à valeurs réelles ordinaires. Mais si on utilise le dictionnaire, on trouve que cet espace T est parfaitement codé par une algèbre (non-commutative) de q-nombres qui rend compte de son aspect "quantique". Voir le livre http://alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf pour davantage de détails.

Dans un commentaire au billet de Masoud sur les pavages, la question a été posée de la relation entre les pavages apériodiques et les nombres premiers. La notion géométrique, analogue à celle de pavage apériodique, qui correspond en effet à celle de nombres premiers est celle de Q-treillis. Cette notion a été introduite dans notre travail commun avec Matilde Marcolli et est simplement donnée par le couple d'un réseau L dans R avec une application additive de Q/Z dans QL/L. Deux Q-treillis sont commensurables quand leurs treillis le sont (ce qui signifie que leur somme est encore un treillis) et quand les applications s'accordent (modulo la somme). L'espace X des Q-treillis à commensurabilité près est naturellement doté d'une action de mise à l'échelle (qui affecte le treillis et l'application) et d'une action du groupe des automorphismes de Q/Z par composition. À nouveau, comme dans le cas des pavages, l'espace X est un espace non-commutatif typique qui n'a pas de fonctions intéressantes. Il est cependant parfaitement encodé par une algèbre non-commutative et la cohomologie naturelle (la cohomologie cyclique) de cette algèbre peut être calculée en fonction d'un espace adéquat des distributions sur X, comme on a pu le montrer dans notre travail joint avec Consani et Marcolli.

Il y a deux points principaux alors, le premier est que les zéros de la fonction zêta de Riemann apparaissent comme un spectre d'absorption (i.e. comme un conoyau) de la représentation du groupe des fonctions de mise à l'échelle dans la cohomologie ci-dessus, dans le secteur où le groupe des automorphismes de Q/Z agit trivialement (les autres secteurs sont étiquetés par des caractères de ce groupe et ils fournissent les zéros des fonctions L correspondantes).

Le second point est que si l'on applique la formule de Lefschetz comme elle a été formulée au sens théorique des distributions par Guillemin et Sternberg (après Atiyah et Bott), on obtient les formules explicites de Riemann-Weil de la théorie des nombres qui relie la distribution des nombres premiers aux zéros de zêta. Un premier fait incroyable est que l'on n'a même pas besoin de définir la fonction zêta (ou les fonctions L), mais seulement son prolongement analytique, pour obtenir les zéros qui apparaissent comme un spectre. Le second est que les formules explicites de Riemann-Weil font intervenir des valeurs principales délicates d'intégrales divergentes dont la formulation utilise la constante d'Euler et le logarithme de 2π, et que cette combinaison apparaît exactement quand on calcule l'opérateur trace théorique, et ainsi l'égalité de la trace avec la formule explicite peut difficilement être un accident. Après le papier initial, une avancée importante a été effectuée par Ralf Meyer qui a montré comment prouver les formules explicites en utilisant le paradigme fonctionnel analytique ci-dessus (plutôt que l'intégrale de Cauchy).

Cela éclairera je l'espère le commentaire de Masoud sur le sujet rusé de l'utilisation de la géométrie non-commutative dans une approche vers RH. C'est un sujet délicat parce que dès que quelqu'un commence à discuter de n'importe quoi en lien avec RH, cela engendre des attitudes irrationnelles. Par exemple, j'ai été un temps aveuglé par la possibilité de se restreindre aux zéros critiques, en utilisant un espace de fonctions adéquat, plutôt que d'essayer de suivre la trace réussie d'André Weil et de développer la géométrie non-commutative jusqu'au point où son argument dans le cas des caractéristiques positives pourrait être transplanté. Nous avons maintenant commencé à marcher sur cette trace dans notre papier commun avec Consani et Marcolli, et alors que l'espoir d'atteindre le but est encore plutôt lointain, c'est une grande motivation que de développer les outils manquants de la géométrie non-commutative. Comme premier but, on devrait avoir comme objectif de traduire la preuve de Weil dans le cas des corps de fonctions dans le paradigme de la géométrie non-commutative. Relativement à ce but, et le papier de Benoit Jacob et celui de Consani et Marcolli que David Goss a mentionné dans son récent billet ouvrent la voie. Je terminerai par une plaisanterie inspirée du mythe européen de Faust, à propos d'un mathématicien qui essaie de faire une bonne affaire avec le Diable pour une preuve de l'hypothèse de Riemann. Cette blague m'a été racontée il y a quelque temps par Ilan Vardi et je l'utilise avec joie dans des exposés parfois, ici je vais la raconter en français car c'est plus facile de ce côté de l'Atlantique, mais elle est facile à traduire...

La petite histoire veut qu'un mathématicien ayant passé sa vie à essayer de résoudre ce problème se décide à vendre son âme au Diable pour enfin connaître la réponse. Lors d'une première rencontre avec le Diable, et après avoir signé les papiers de la vente, il pose la question "L'hypothèse de Riemann est-elle vraie ?" Ce à quoi le Diable répond "Je ne sais pas ce qu'est l'hypothèse de Riemann" et après les explications prodiguées par le mathématicien "hmm, il me faudra du temps pour trouver la réponse, rendez-vous ici à minuit, dans un mois". Un mois plus tard le mathématicien (qui a vendu son âme) attend à minuit au même endroit... minuit, minuit et demi... pas de Diable... puis vers deux heures du matin alors que le mathématicien s'apprête à quitter les lieux, le Diable apparaît, trempé de sueur, échevelé et dit "Désolé, je n'ai pas la réponse, mais j'ai réussi à trouver une formulation équivalente qui sera peut-être plus accessible !".

Mardi 20 Mars 2007
Temps
Je vais essayer de décrire à grands traits les étapes qui ont amené l'émergence du temps de la non-commutativité dans les algèbres d'opérateurs. Cela répondra je l'espère aux questions de Paul et Sirix (au moins en partie) et à celles d'Urs.

D'abord j'expliquerai la formule basique due à Tomita qui associe à un état L un groupe à un paramètre d'automorphismes. Le fait de base est qu'on donne du sens à l'application $x \to s(x) = LxL^{-1}$ comme application (non-bornée) de l'algèbre dans elle-même puis on prend ses puissances complexes s^{it}. Pour définir cette application, on compare juste les deux formes bilinéaires sur l'algèbre donnée par $L(xy)$ et $L(yx)$. Sous certaines conditions de non-dégénérescence sur L cela donne un isomorphisme de l'algèbre avec son espace linéaire dual et ainsi on peut trouver une application s de l'algèbre dans elle-même telle que $L(yx) = L(xs(y))$ pour tout x et y.

On peut vérifier à ce niveau très formel que s vérifie $s(ab) = s(a)s(b)$:
$L(abx) = L(bxs(a)) = L(xs(a)s(b))$.

Ainsi toujours à ce niveau très formel, s est un automorphisme de l'algèbre, et la meilleure façon de la considérer, c'est de la voir comme $x \to LxL^{-1}$ où on respecte l'ordre cyclique des termes en écrivant $Lyx = LyL^{-1}Lx = LxLyL^{-1}$. Maintenant, tout ceci est formel et pour le rendre "réel", on a seulement besoin de la structure la plus basique d'espace non-commutatif, c'est-à-dire de la théorie de la mesure. Cela signifie que l'algèbre qu'on étudie est une algèbre de von Neumann, et qu'on a besoin de très peu de structure pour travailler puisque l'algèbre de von Neumann d'un espace non-commutatif contient seulement sa théorie de la mesure, ce qui constitue très peu de structure en fait. Ainsi, le principal résultat de Tomita (qui a d'abord rencontré beaucoup de scepticisme de la part des spécialistes du sujet, a été ensuite exposé avec succès par Takesaki dans ses notes de cours et est appelé la théorie de Tomita-Takesaki) est que quand L est un état fidèle normal sur une algèbre de von Neumann M, les puissances complexes de l'application associée $s(x) = LxL^{-1}$ ont du sens et définissent un groupe à un paramètre d'automorphismes s_L de M.

Il y a de nombreux états normaux fidèles sur une algèbre de von Neumann et du coup, beaucoup de groupes s_L d'automorphismes à un paramètre qui lui correspondent. C'est ici que le truc des matrices 2×2 entre en scène (Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 274, 1972, voir AC-biblio10.pdf) et montre qu'en fait, les groupes d'automorphismes s_L sont tous les mêmes modulo les automorphismes intérieurs !

Ainsi, si on appelle $\mathrm{Out}(M)$ le quotient du groupe des automorphismes de M par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs, on obtient un groupe complètement canonique d'automorphismes du groupe additif des nombres réels $R : \delta : R \to \mathrm{Out}(M)$ et c'est ce groupe que j'ai toujours vu comme un candidat extrêmement alléchant pour le "temps émergent" en physique.

Bien sûr cela donne immédiatement des invariants des algèbres de von Neumann tels que le groupe $T(M)$ des "périodes" de M qui est le noyau du morphisme de groupes ci-dessus. Ceci est la base de la classification des facteurs et de la réduction du type III au type II + automorphismes que j'ai effectuée en Juin 1972 et publié dans ma thèse (avec le cas III_1 manquant complété plus tard par Takesaki).

Ce "temps émergent" est non trivial quand les espaces non-commutatifs considérés sont loin d'être "'classiques". C'est par exemple le cas pour l'espace des feuilles de feuilletages tels que les feuilletages d'Anosov pour les surfaces de Riemann et également pour l'espace des Q-treillis modulo le facteur d'échelle dans notre travail conjoint avec Matilde Marcolli.

Le véritable problème alors est d'établir le lien avec le temps de la physique quantique. Par les calculs de Bisognano-Wichmann, on sait que les s_L pour la restriction de l'état vide à l'algèbre locale en théorie quantique des champs associée à une région de coin de Rindler (définie par $x_1 > \pm x_0$) est en fait l'évolution de cette algèbre selon le "temps propre" de la région. Cela est lié à la thermodynamique des trous noirs et à la température d'Unruh. Il y a toute une littérature sur ce qui se passe en théorie des champs conformes en dimension 2. Je discuterai du problème réel ci-dessus de la connexion avec le temps en physique quantique dans un autre billet.

AC a dit... Urs : Oui, ce qui se passe en fait c'est que pour tout système quantique à un nombre infini de degrés de liberté, l'hamiltonien H n'appartient pas à l'algèbre des observables. Ainsi, les automorphismes correspondant ne sont pas intérieurs. Pour voir ce qui se passe, il est plus simple de prendre le cas d'un système de spins sur un réseau. L'algèbre des observables est la limite inductive des produits tensoriels finis des algèbres de matrices, une pour chaque site du réseau. L'halmitonien H est, même dans le cas le plus simple sans interaction, une somme infinie d'hamiltoniens associés à chaque site du réseau. Ainsi, il n'appartient pas à l'algèbre des observables et le groupe à un paramètre correspondant n'est pas intérieur (à la fois dans la fermeture de la norme i.e. la C^*-algèbre, et également dans la fermeture faible)... En

théorie quantique des champs, la situation est complètement similaire et a bien sûr une infinité de degrés de liberté dès le départ...
26 Mars 2007 à 8 :53 AM

Dirac et le fait d'être entier
Dans le premier article sur la "seconde quantisation", i.e. dans l'article "La théorie quantique de l'émission et de la radiation", le processus de seconde quantisation est introduit et est à nouveau lié au caractère "entier". Cette fois, ce n'est pas l'index de Fredholm qui est derrière l'intégralité (le fait d'être entier) mais le simple fait suivant : si un opérateur a satisfait $[a, a^*] = 1$, alors le spectre de a^*a est contenu dans $N*$, l'ensemble des entiers positifs (comme cela découle de l'égalité entre les spectres de aa^* et de a^*a excepté potentiellement pour 0)... La seconde quantisation est simplement obtenue en remplaçant les nombres complexes ordinaires a_j qui étiquettent l'expansion de Fourier ordinaire du champ électromagnétique par les variables non-commutatives vérifiant $[a_j, a_j^*] = 1$... (plus précisément, le 1 est remplacé par $\hbar\nu$ où ν est la fréquence du mode de Fourier). Cet exemple montre bien sûr que l'intégralité (caractère d'être entier) et que la non-commutativité sont étroitement reliés... Alors que l'index de Fredholm est un bon modèle pour les entiers relatifs (positifs ou négatifs), le aa^* pour $[a, a^*] = 1$ est un bon modèle pour les entiers positifs...

Mercredi 25 Avril 2007
Un autre développement récent très surprenant a été décrit dans l'exposé d'U. Haagerup sur son travail conjoint (je pense que c'est avec Magdalena Musat mais je n'en suis pas sûr, cet article n'est pas encore sorti) sur la classification des facteurs modulo les isomorphismes des espaces d'opérateurs associés. Il a donné une surprenante condition nécessaire et suffisante pour la classe des facteurs hyperfinis de type III_1 : que le flot des poids admette une mesure invariante de probabilité. (On sait que c'est le cas pour l'algèbre de von Neumann d'un feuilletage à classe de Godbillon-Vey non nulle). Ce cas particulier suggère que la condition nécessaire et suffisante devrait être la "commensurabilité" des flots de poids et l'idée de Mackey de voir un flot ergodique comme un "sous-groupe virtuel" du groupe additif R serait essentiel pour développer la notion appropriée de "commensurabilité" des flots ergodiques.

J'étais absent au début de la semaine à cause d'un ennuyeux voyage cours en Suède (les exposés "Witten" d'Atiyah sont toujours ennuyeux) et j'ai entendu un exposé vraiment intéressant de Nirenberg qui suggère que l'exposant de Holder 1/3 qui entre comme limite de régularité dans la formule du nombre d'enroulement de Kahane correspond au $3 = 2 + 1$ de la séquence longue exacte de périodicité en cohomologie cyclique. Il y a également une autre conférence qui a lieu toute la semaine à Paris, organisée par Vincent Rivasseau.

Samedi 26 Mai 2007
Meeting à Ascona sur Pauli et Jung
Merci à Masoud de maintenir le blog en vie au milieu de tous ces voyages pour des conférences. La dernière à laquelle j'ai assisté s'est terminée aujourd'hui et était dédiée aux idées philosophiques de Pauli. C'était assez intéressant et cela m'a donné l'occasion d'avoir une meilleure connaissance de ces idées. Un exposé intéressant a été donné par Rafael Nunez "D'où viennent les mathématiques ? Pauli, Jung, et la science cognitive comtemporaine" avec une tentative courageuse de rejeter le platonisme (et en particulier le point de vue de Pauli) en utilisant la "science cognitive contemporaine". L'exposé était vraiment intéressant, en particulier dans la représentation du futur comme un mouvement relatif dans des expressions de la forme "l'hiver arrive" or "nous arrivons à la fin de l'année", ou bien dans l'exemple d'un infâme dictateur qui a successivement dit : "Le communisme nous a amenés au bord du goufre" et "aujourd'hui nous avons fait un grand pas en avant". Malheureusement, j'ai raté l'exposé d'Arthur Miller "Quand Pauli a rencontré Jung - et ce qui est arrivé ensuite"... Mais j'ai pu lui parler directement et j'ai été très intéressé par ces images que Jung montrait à Pauli après avoir entendu ses rêves. J'ai dû donner un exposé plutôt improvisé mercredi matin (à propos de la nature de la réalité mathématique et également de ses relations avec la physique) et ai pu tout juste le faire à temps, parce que mon avion vers Milan avait été annulé la veille (grève du contrôle aérien) et que j'avais dû y aller en train. Cela m'a pris toute la journée et le seul moyen possible pour atteindre Ascona à temps a été de louer une voiture à Milan et de rouler jusque-là au milieu de la nuit. J'ai fait ça parce que je déteste vraiment accepter de donner un exposé et ne pas être capable de le faire au dernier moment mais il y avait là une sorte d'"effet Pauli" qui a rendu difficile mon atteinte du lieu à temps...

Jürg Fröhlich était absent et l'exposé sur le travail de Pauli a été fait par Harald Atmanspacher qui a remplacé Fröhlich au pied levé. Ce qui était vraiment incroyable dans ce meeting, c'est que les exposés étaient suivis de longues et passionnantes discussions qui duraient habituellement plus d'une demi-heure et qu'on en apprenait beaucoup, juste par ces si nombreuses interactions.

AC a dit...
Cher Nic, oui et c'était un point très plaisant de l'exposé. Je partage complètement ce point de vue que le passé est la seule chose que nous contrôlons et en fait, je crois que nous essayons seulement de réarranger le passé de manière à ce qu'il colle avec ce que le présent nous donne...

30 Mai 2007 à 10 :09 AM
AC a dit...
Anonymous, l'exposé d'Arthur Miller était basé sur un livre dont la publication est programmée l'année prochaine. On devra donc attendre pour celui-là.

Autant que je le sache, c'est vrai que Grothendieck a beaucoup écrit au sujet des rêves, mais mon information n'est pas fiable et la seule source est le site du "Grothendieck Circle" ici http://www.grothendieckcircle.org/ où vous pouvez obtenir de meilleures informations.
Mai 30, 2007 at 4 :41 PM

AC a dit...
Cher Lieven
Merci pour votre commentaire, c'est assez difficile pour Masoud et moi seuls de "maintenir" le blog. Nous accueillons agréablement des commentaires tels que les vôtres et serions contents de vous avoir comme blogger "invité".

L'un des objectifs de base que j'ai est d'essayer de combler le fossé entre les différents aspects de la NCG[1]. J'aime vraiment les aspects purement algébriques (et ai un peu travaillé avec Michel Dubois-Violette sur ces sujets). Aussi bien la géométrie non-commutative purement algébrique que la géométrie non-commutative différentielle plus "théorie des opérateurs" sont assez mûres maintenant pour ne pas avoir peur d'interagir plus ouvertement. Quand une théorie est à son début, je crois qu'il est important de lui laisser ses chances de grandir par elle-même et de la "protéger" en quelque sorte, mais il est clair que le temps est mûr maintenant pour avoir une perspective et une attitude plus larges. C'est à peu près ce qui est en train de se produire avec le nouveau Journal et les rencontres organisées comme celle du programme de l'Institut Newton de l'automne dernier ou précisément le colloque de Chicago. Comme je n'y étais que brièvement, il est difficile pour moi d'en écrire un rapport complet mais je ferai ce que je peux (après l'avoir fait pour la rencontre à Vanderbilt) et essaierai de trouver un "volontaire" pour donner un meilleur compte-rendu que le mien qui sera partiel (à cause du peu d'exposés auxquels j'ai pu assister, étant assez fatigué après les cours que j'ai donnés à Vanderbilt).
6 Juin 2007 à 8 :11 PM

Mardi 3 Juillet 2007
Espace-temps non-commutatif
Comme je l'ai expliqué dans un billet précédent, c'est uniquement parce qu'on laisse tomber la commutativité que, dans le calcul, les variables de domaines continus peuvent coexister avec des variables de domaines discrets. Dans la formulation classique des variables, du fait de la définition des applications d'un ensemble X vers l'ensemble des nombres réels, nous avons vu ci-dessus que les variables discrètes ne peuvent pas coexister avec des variables continues.

L'unicité de l'espace de Hilbert de dimension infinie séparable résout ce problème, et les variables de domaines continus coexistent avec bonheur avec des variables de domaines dénombrables, telles que les infinitésimaux. Le le seul fait nouveau est qu'ils ne commutent pas.

Une façon de comprendre la transition du commutatif au non-commutatif est que dans ce dernier cas, il faut se soucier de l'ordre des lettres quand on écrit. À titre d'exemple, utilisez la règle de commutativité entre les lettres pour simplifier le message cryptique suivant, que j'ai reçu d'un ami : "Je suis alençonnais, et non alsacien. Si t'as besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin Annales. Qui suis-je ?"

C'est Heisenberg qui a découvert qu'un tel soin était nécessaire lors du traitement des coordonnées de l'espace des phases des systèmes microscopiques.

1. Géométrie non-commutative

Au niveau philosophique, il y a quelque chose de tout à fait satisfaisant dans la variabilité des observables de la mécanique quantique. Habituellement, lorsqu'on cherche à expliquer quelle est la cause de la variabilité de monde, la réponse qui vient naturellement à l'esprit est juste : le temps qui passe. Mais précisément le monde quantique fournit une réponse plus subtile depuis la réduction du paquet d'onde qui se produit dans toute mesure quantique n'est rien d'autre que le remplacement d'un "nombre q" par un nombre réel qui est choisi parmi les éléments de son spectre. Il y a donc une variabilité intrinsèque dans le monde quantique, et qui jusqu'à présent ne se réduit à rien de classique. Les résultats des observations sont intrinsèquement des quantités variables, et ce au point que leurs valeurs ne peuvent être reproduites d'une expérience à l'autre, mais que, prises ensemble, elles forment un nombre q. La découverte de Heisenberg montre que l'espace des phases des systèmes microscopiques est un espace noncommutatif dans la mesure où les coordonnées sur cet espace ne satisfont plus les règles commutatives de l'algèbre ordinaire. Cet exemple de l'espace des phases peut être considéré comme l'origine de la géométrie non-commutative. Mais qu'en est-il de l'espace-temps lui-même ? Nous montrons maintenant pourquoi l'étape permettant de passer d'un espace-temps commutatif à un espace-temps non-commutatif est une étape très naturelle.

La pleine action de la gravité couplée à la matière admet un énorme groupe naturel de symétries. Le groupe d'invariance pour l'action d'Einstein-Hilbert est le groupe des difféomorphismes de la variété et l'invariance de l'action n'est que la manifestation de sa nature géométrique. Un difféomorphisme agit par permutations des points de sorte que les points n'ont pas de signification absolue.

Le groupe complet d'invariance de l'action de la gravité couplée à la matière est cependant plus riche que le groupe de difféomorphismes de la variété car il faut inclure quelque chose appelé "le groupe des transformations de jauge" que les physiciens ont identifié comme la symétrie de la partie matière. Ceci est défini comme le groupe des applications de la variété vers un autre groupe fixe, G, appelé le "groupe de jauge", dont nous savons qu'il est tel que : $G = U(1).SU(2).SU(3)$. Le groupe de difféomorphismes agit sur le groupe des transformations de jauge par permutations des points de la variété et le groupe complet de symétries de l'action est le produit semi-direct des deux groupes (de la même manière, le groupe de Poincaré, qui est le groupe d'invariance de la relativité restreinte, est le produit semi-direct du groupe de traductions par le groupe des transformations de Lorentz). En particulier, ce n'est pas un groupe simple (un groupe simple est un groupe qui ne peut pas être décomposé en plus petits morceaux, un peu comme un nombre premier ne peut pas être factorisé en un produit de nombres plus petits que lui mais est un "composé" et contient un énorme sous-groupe normal.

Maintenant que nous connaissons le groupe d'invariance de l'action, il est naturel d'essayer de trouver un espace X dont le groupe des difféomorphismes est simplement ce groupe, afin que nous puissions espérer interpréter l'action complète comme de la gravité pure sur X. C'est la vieille idée de Kaluza-Klein. Malheureusement, cette recherche est vouée à l'échec si l'on cherche une variété ordinaire puisque par un résultat mathématique, les composantes connexes de l'identité dans le groupe des difféomorphismes forment toujours un groupe simple, à l'exclusion d'une structure de produit semi-direct comme celui cidessus du groupe d'invariance de la pleine action de la gravité couplée à la matière. Mais les espaces non-commutatifs du type le plus simple donnent facilement la réponse, modulo quelques points subtils. Pour comprendre ce qui se passe, notez que pour les variétés ordinaires, l'objet algébrique correspondant à un difféomorphisme n'est qu'un automorphisme de l'algèbre des coordonnées, c'est-à-dire une transformation des coordonnées qui ne détruit pas leurs relations. Lorsqu'une algèbre involutive A n'est pas commutative, il est facile de construire des automophismes. On prend un élément unitaire u de l'algèbre c'est-à-dire tel que $uu^* = u^*u = 1$. En utilisant u on obtient un automorphisme appelé intérieur, par la formule $x \to uxu^*$.

Notez que dans le cas commutatif, cette formule donne juste l'automorphisme d'identité (car on pourrait alors permuter x et u^*). Cette construction n'est donc intéressante que dans le cas non-commutatif. De plus, les automorphismes intérieurs forment un sous-groupe noté $\mathrm{Int}(A)$ qui est toujours un sous-groupe normal du groupe des automorphismes de A.

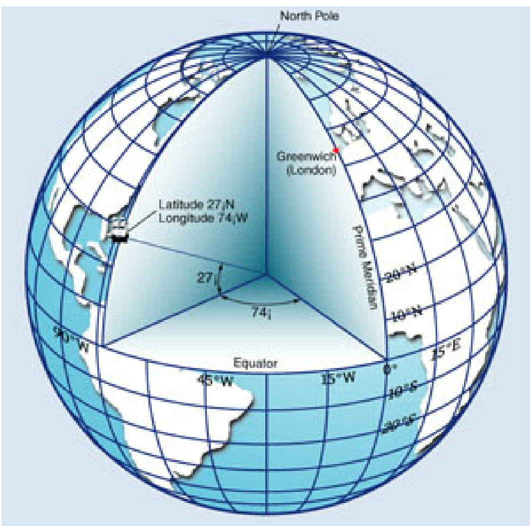
Dans l'exemple le plus simple, où nous prenons pour A l'algèbre des applications lisses d'une variété M à l'algèbre de matrices sur les nombres complexes, on montre que le groupe $\mathrm{Int}(A)$ dans ce cas est (localement) isomorphe au groupe de transformations de jauge, c'est-à-dire des applications lisses de M au groupe de jauge $G = PSU(n)$ (quotient de $SU(n)$ par son centre). De plus, la relation entre les automorphismes internes et tous les automorphismes devient identique à la séquence exacte régissant la structure du groupe d’invariance ci-dessus de la pleine action de la gravité couplée à la matière.

Il est assez frappant de constater que la terminologie issue de la physique : les symétries internes, s’accordent si bien avec les mathématiques des automorphismes intérieurs. Dans le cas général, seuls les automorphismes qui sont unitairement mis enœuvre dans l’espace Hilbert seront pertinent mais modulo cette subtilité on peut voir à la fois à partir de l’exemple qui précède l’avantage de traiter les espaces non-commutatifs sur le même pied que les espaces ordinaires. La prochaine étape consistera à définir correctement la notion de métrique pour ces espaces et nous nous livrerons, dans le prochain billet, à une brève description historique de l’évolution de la définition de “l’unité de longueur” en physique. Cela préparera le terrain pour l’introduction au paradigme spectral de la géométrie non-commutative.

AC a dit...
Mec de la rue, essayez juste de permuter quelques lettres et obtenez 4 fois un nom qui n’est pas si difficile à deviner... que pouvez-vous trouver en commençant par “non alsacien” par exemple ?
4 Juillet 2007 à 6 :59 PM
AC a dit...
Cher Fabien Votre question est pertinente. Le rôle de l’espace fini est maintenant beaucoup mieux compris à partir du tout récent article avec A. Chamseddine : “*Pourquoi le modèle standard*”[2] et “*Un habit pour Modèle standard le mendiant* ”[3] qui sont sur le he-th arXiv. Mon intention est d’utiliser ce blog, ces vacances d’été, pour expliquer leur contenu dans les détails, mais une étape à la fois. Jusqu’à présent, je voulais juste expliquer pourquoi il est naturel de considérer les espaces-temps non-commutatifs et ne pas être aussi dépendants de la vue commutative “ponctuelle” des espaces. Donc même si on ne peut pas exclure que l’espace fini F soit, comme vous le suggérez, un “vestige d’un continu ancestral rétréci, l’espace” cela nous donnera beaucoup plus de liberté pour abandonner la dépendance au point de vue commutative.
4 Juillet 2007 à 7 :10 PM

AC a dit...
Je crois que l’extension du cadre “symplectique” au monde NC est simplement la notion de terme de premier ordre dans une déformation de l’algèbre NC. Ceci est assez clair dans le cas commutatif où une structure symplectique (ou plus généralement une structure de Poisson) n’est que le premier terme dans l’expansion de la déformation du produit. Il s’agit donc d’une forme semi-classique de déformation. Dans le cas NC, il existe de nombreux exemples où il est naturel d’utiliser un point de départ similaire pour les déformations (par exemple, des crochets de Rankin-Cohen généralisés aux déformations des structures projectives NC).
8 Juillet 2007 à 11 :35 AM

Mardi 10 Juillet 2007
Une brève histoire du système métrique



2. https://arxiv.org/pdf/0706.3688.pdf
3. https://pdfs.semanticscholar.org/765c/4b648502de8f1628258f79ca7bc7e61fe3fc.pdf

L'étape suivante consiste à comprendre quel est le remplacement du paradigme riemannien par les espaces non-commutatifs. Pour me préparer à cela, et en utilisant l'excuse des vacances d'été, permettez-moi d'abord de raconter l'histoire du changement de paradigme qui a déjà eu lieu dans le système métrique avec le remplacement du solide “mètre-étalon” par une unité spectrale de mesure.

La notion de géométrie est intimement liée à la mesure de la longueur. Dans le monde réel, la mesure dépend du système d'unités choisi et l'histoire du système le plus couramment utilisé - le système métrique - illustre les difficultés liées à la conclusion d'un accord sur une unité physique de longueur qui unifierait les nombreux choix existants. Comme on le sait, les États-Unis sont l'un des rares pays qui n'utilisent pas le système métrique et ce manque d'uniformité dans le choix d'un unité de longueur est devenue douloureusement évident lorsqu'il a entraîné la perte d'une sonde d'une valeur de 125 millions de dollars seulement parce que deux équipes différentes d'ingénieurs avaient utilisé les deux unités différentes (le pied et le système métrique).

En 1791, l'Académie française des sciences a convenu de la définition de l'unité de longueur dans le système métrique, le “mètre”, comme étant la dix millionième partie du quart du méridien de la Terre. L'idée était de mesurer la longueur de l'arc du méridien de Barcelone à Dunkerque tandis que l'angle correspondant (environ 9,5°) a été déterminé en utilisant la mesure de la latitude à partir des étoiles de référence. Dans un sens ce n'était qu'un raffinement de ce qu'Ératosthène avait fait en Égypte, 250 ans avant JC, pour mesurer la taille de la terre (avec une précision de 0,4%).

Ainsi, en 1792, deux expéditions furent envoyées pour mesurer cet arc du méridien, une pour la portion nord était dirigée par Delambre et l'autre pour la partie sud était dirigée par Méchain. Tous deux ont été des astronomes qui utilisaient un nouvel instrument de mesure des angles, inventé par Borda, un physicien français. La méthode qu'ils ont utilisée est la méthode de triangulation et de mesure concrète de la “base” d'un triangle. Il leur a fallu beaucoup de temps pour effectuer leurs mesures et c'était une entreprise risquée. Au début de la révolution, la France entre en guerre avec l'Espagne.

Essayez d'imaginer à quel point il est difficile d'expliquer que vous essayez de définir une unité universelle de longueur lorsque vous êtes arrêté au sommet d'une montagne avec des instruments optiques très précis vous permettant de suivre tous les mouvements des troupes dans les environs.

Delambre et Méchain essayaient tous deux d'atteindre la plus grande précision dans leurs mesures et une partie importante du retard est due au fait que cette quête a atteint un niveau obsessionnel dans le cas de Méchain. En fait, quand il a mesuré la latitude de Barcelone, il l'a fait à partir de deux endroits proches, mais ils ont trouvé des résultats contradictoires discordants de 3,5 secondes d'arc. Pressé de donner son résultat, il a choisi cacher cette divergence juste pour “sauver la face”, ce qui est une mauvaise attitude pour un scientifique. Chassé d'Espagne par la guerre avec la France, il n'a pas eu une seconde chance de comprendre l'origine de l'écart et a dû jouer un peu avec ses résultats pour les présenter à la Commission internationale qui s'est réunie Paris en 1799 pour recueillir les résultats de Delambre et Méchain et en déduire la longueur du “mètre”. Depuis ce jour, comme Méchain était un honnête homme obsédé par la précision, l'écart ci-dessus le hantait et il a obtenu de l'Académie de diriger une autre expédition quelques années plus tard pour trianguler plus loin en Espagne. Il est parti en Espagne et est mort du paludisme à Valence. Après sa mort, ses cahiers ont été analysés par Delambre qui a trouvé l'écart dans les mesures de la latitude de Barcelone mais n'a pas pu l'expliquer. L'explication a été trouvée 25 ans après la mort de Méchain par un jeune astronome du nom de Nicollet, qui était un élève de Laplace. Méchain avait fait dans les deux sites qu'il avait choisis à Barcelone (Mont Jouy et Fontana del Oro) un certain nombre de mesures de latitude en utilisant plusieurs étoiles de référence. Puis il avait simplement pris la moyenne de ses mesures à chaque endroit. Méchain savait très bien que la réfraction fausse le chemin des rayons lumineux, ce qui crée une incertitude lorsque vous utilisez des étoiles de référence proches de l'horizon. Mais il a estimé que le résultat moyen éliminerait ce problème.

Ce que Nicollet a fait, c'est de réfléchir à la moyenne pour éliminer l'incertitude créée par la réfraction et, en utilisant les mesures de Méchain, il a obtenu un accord remarquable (0,4 seconde soit quelques mètres) entre les latitudes mesurées depuis le Mont Jouy et Fontana del Oro. En d'autres termes, Méchain n'a commis aucune erreur pour prendre ses mesures et il aurait pu comprendre par pure pensée ce qui n'allait pas dans son calcul. Je recommande le livre de Ken Adler (*La mesure de toutes choses : l'odyssée de sept ans et l'erreur cachée qui a transformé le monde*, eds Little, Brown et compagnie, 2003, ou sa traduction *Mesurer le monde*, Flammarion, 2005) pour un joli compte rendu de l'histoire complète des deux expéditions.

En tout cas, entre-temps, la commission internationale avait pris les résultats des deux expéditions et calculé la longueur de la dix millionième partie du quart du méridien les utilisant. De plus, une barre de platine d'environ cette longueur a ensuite été réalisée et a été prise comme définition de l'unité de longueur dans le système métrique. Avec cette unité, la longueur réelle du quart de méridien se révèle être 10 002 290 plutôt que l'objectif de 10 000 000 mais ce n'est plus pertinent. En réalité en 1889, la référence est devenue une autre barre métallique spécifique (de platine et d'iridium) appelée "mètre-étalon", déposé près de Paris dans le pavillon de Breteuil. Cette définition a perduré jusqu'en 1960.

Déjà en 1927, lors de la septième conférence sur le système métrique, afin de prendre en compte les inévitables variations naturelles du platine appelé "mètre-étalon", l'idée est apparue de le comparer à une longueur d'onde de référence (la ligne rouge du cadmium). Vers 1960, la référence au dénommé "mètre-étalon" a finalement été abandonnée et une nouvelle définition de l'unité de longueur dans le système métrique (le "mètre") a été adoptée comme 1650763,73 fois la longueur d'onde du rayonnement correspondant à la transition entre les niveaux 2p10 et 5d5 du Krypton 86Kr.

En 1967, la seconde a été définie comme la durée de 9192631770 périodes de rayonnement correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfin de Césium-133. Enfin, en 1983, le "mètre" a été défini comme la distance parcourue par la lumière en 1/299792458 seconde. En fait, la vitesse de la lumière n'est qu'un facteur de conversion et pour définir le "mètre" on lui donne la valeur spécifique de $c = 299792458$m/s. En d'autres termes, le "mètre" est défini comme étant une certaine fraction 9192631770/299792458 $\sim$ 30.6633... de la longueur d'onde du rayonnement provenant de la transition entre les niveaux hyperfins ci-dessus de l'atome de césium.

Les avantages du nouveau standard de longueur sont nombreux. D'abord en n'étant lié à aucun emplacement, il est en fait disponible partout où il y a du césium. Le choix du césium par opposition à l'hélium ou l'hydrogène qui sont beaucoup plus communs dans l'univers est bien sûr encore discutable, et il est tout à fait possible qu'une nouvelle norme soit bientôt adoptée impliquant des raies spectrales de l'hydrogène plutôt que du césium. Voir cet article de Bordé pour une mise à jour http://christian.j.borde.free.fr/ChB.pdf.

Même s'il serait difficile de communiquer notre standard de longueur avec d'autres civilisations extraterrestres s'ils devaient effectuer des mesures de la Terre (telles que sa taille), la définition spectrale peut facilement être encodée dans une sonde et envoyée. En fait, les motifs spectraux fournissent une parfaite "signature" des produits chimiques, et une information universelle disponible partout où ces produits chimiques peuvent être trouvés, de sorte que la longueur d'onde d'une ligne spécifique est une unité parfaitement acceptable, alors que si vous commencez à réfléchir un peu, vous découvrirez que nous serions incapables de dire où se trouve la Terre dans l'univers...

Coordonnées ? oui mais avec quel système ? Une possibilité serait de donner la séquence de décalages vers les galaxies voisines, et d'une manière plus raffinée vers les étoiles proches, mais ce serait assez difficile à expliciter pour être sûr que cela permette d'aboutir à un endroit précis.

AC a dit...
Cher physicien apprenti.
Tout d'abord, je ne connais aucune preuve réelle de la variation dans le temps des constantes de nature. Regardez par exemple
http://www-cosmosaf.iap.fr/Cste%208%20mai%202004%20html.htm
En fait l'idée de grand nombre de Dirac de 1937, qui prédit une variation de G avec le temps n'a pas été validée par expérience et on a une borne supérieure expérimentale de l'ordre de $dG/G < 4\ 10^{-11}$ par an. Donc je ne suis pas sûr qu'il existe encore des preuves expérimentales convaincantes de ce que vous dites. S'il y en avait, ce serait intéressant de discuter plus précisément de la constante dont nous parlons. Par exemple, le spectre unité de longueur dont j'ai parlé dans le billet dépend de la constante de Rydberg et donc de la masse de l'électron. Dans NCG, cette masse est liée à la taille inverse de la géométrie fine F qui sera discutée plus loin dans ce blog. Au moins, on peut dire que, dans le NCG, les "unités atomiques" sont intimement liées à la la géométrie de l'espace fin F, tandis que les unités astronomiques sont liées à la variété M. Le modèle de l' espace-temps en NCG est le produit M fois F, mais rien n'empêche la géométrie de F de varier dans M.
Juillet 13, 2007 at 10 :27 AM

Mardi 17 Juillet 2007
Truc non standard
Je ne suis pas sûr de vraiment savoir comment utiliser un "blog" comme celui-ci. Récemment j'ai été sollicité et j'ai dû écrire un article décrivant la perspective sur la structure de l'espace-temps obtenue du point de vue de la géométrie non-commutative. Au début, je pensais que je pouvais être paresseux et après avoir rédigé le document (il est disponible ici https://alainconnes.org/docs/shahnlong.pdf), que je pourrais simplement utiliser des morceaux du document pour garder ce blog vivant pendant les vacances d'été. Cependant, en essayant de faire ça, j'ai réalisé que c'était mieux (en partie à cause de l'utilisation peu pratique du Latex dans le blog) de mettre d'abord le papier à disposition puis de dire dans le blog les choses supplémentaires que l'on n'écrirait pas "normalement" dans un article (même un article grand public non technique comme celui ci-dessus). Je n'ai pas envie de transformer le blog en lieu de controverses car il n'est pas clair pour moi que l'on gagne beaucoup dans de telles discussions. La règle semble être que, le plus souvent, les gens ont des préjugés contre de nouvelles choses principalement parce qu'ils ne les connaissent pas suffisamment et ils optent pour l'attitude paresseuse qu'il est plus facile de dénigrer une théorie que d'essayer de l'apprécier. Je ne suis pas une exception et j'ai certainement adopté cette attitude en ce qui concerne la supersymétrie ou la théorie des cordes. Un débat montrera généralement les opinions bien arrêtées des différentes parties et il est rare qu'un vrai changement ait lieu. Voilà pour le côté "controverse". Cependant, je crois qu'il existe certains points qui peuvent être assez utiles à connaître et qui, à condition d'être présentés de manière non polémique, peuvent beaucoup aider à éviter certains pièges. Je vais discuter à titre d'exemple les deux notions d'"infinitésimaux" que je connais et essayer d'expliquer la pertinence des deux. Ce n'est pas un "papier mathématique" mais plutôt une discussion informelle.

Quand j'étais étudiant à l'Ecole Normale il y a environ 40 ans, je suis tombé amoureux d'un nouveau sujet de mathématiques appelé "Analyse non standard" qui a été créée par A. Robinson. Être étudiant de Gustave Choquet à ce moment-là fait que je savais beaucoup de choses sur les ultrafiltres. Ces filtres maximaux ont été (corrigez-moi si je me trompe) découverts par H. Cartan lors d'un atelier Bourbaki. À cette époque, Cartan n'avait pas de nom pour ces nouveaux objets mais il avait découvert l'efficacité remarquable qu'ils avaient dans toute preuve où une compacité et des arguments de choix étaient nécessaires. Donc (ce que j'ai entendu de Cartan) le nom qu'il utilisait était "boum"!!! Bien sûr, il savait que cette notion permettait de fournir une preuve d'une ligne de l'existence de la mesure de Haar (boum ...). Et aussi qu'en raison de l'unicité de cette dernière, il s'agit en fait d'une déclaration de convergence assez forte sur les fonctions de comptage à proximité de la mesure de Haar. Il voulait en être sûr et il a écrit dans une note aux Comptes-Rendus tous les détails d'un argument géométrique direct prouvant la convergence attendue. Passer des ultrafiltres aux ultra-produits est une étape facile. Et j'ai été complètement charmé par les ultraproduits quand j'ai appris (à cette époque) le théorème d'Axe-Cochen : l'ultraproduit des corps p-adiques est isomorphe à l'ultraproduit des corps fonctionnels locaux avec les mêmes corps de résidus. J'ai donc commencé à travailler sur ce sujet et j'ai obtenu, en utilisant un classe d'ultrafiltres dite "sélective", une construction de modèles minimaux en analyse non standard. Ils sont obtenus comme ultraproduits mais les ultrafiltres utilisés sont si particuliers que, par exemple, pour connaître les éléments de l'ultra-puissance d'un ensemble X, on n'a pas besoin de se soucier des étiquettes : l'ultrafiltre image en X est tout ce qui est nécessaire. J'ai écrit un article expliquant comment utiliser les ultraproduits et j'ai toujours gardé cet outil prêt pour une utilisation ultérieure. Je l'ai utilisé de manière essentielle dans mon travail sur la classification des facteurs. Tant pour le côté positif de la pièce. Cependant, très tôt, j'ai essayé en vain de mettre en œuvre l'une des plus-values de l'analyse non standard, à savoir qu'elle donnait enfin la terre promise pour les "infinitésimaux". En fait, les ajouts sont venus avec un exemple spécifique : une prétendue réponse à la question naïve "quel est la probabilité "p" qu'une fléchette atterrisse à un point donné x de la cible" lors d'une partie de fléchettes. C'était suivi par 1) l'argument simple pour lequel ce nombre positif "p" était plus petit que ε pour tout ε un réel positif 2) cent pages de logique 3) l'identification de "p" avec un nombre "non standard"...
Au début, j'ai attribué mon incapacité à obtenir concrètement "p" à mon manque de connaissances en logique, mais après avoir réalisé que les modèles pourraient être construits comme des ultra-produits, cette excuse ne s'applique plus. À ce moment-là, je me suis rendu compte qu'il y avait une raison fondamentale pour laquelle on ne serait jamais capable de trouver "p" parmi les nombres non standard : à partir d'un nombre non standard (non trivial bien sûr), on déduit canoniquement un caractère non mesurable du produit infini de deux groupes d'éléments (l'argument est plus simple en utilisant un entier infini non standard "n", il suffit de prendre l'application qui à la séquence a_n (de 0 et 1) assigne sa valeur pour l'indice "n"). Désormais, le caractère d'un groupe compact est soit continu, soit non mesurable. Ainsi, un nombre non standard nous donne canoniquement un sous-ensemble non mesurable de $[0\ ,\ 1]$. C'est la fin

de la corde pour être “explicite” puisque (d’un point de vue logique) on sait qu’il est tout simplement impossible de construire explicitement un sous-ensemble non mesurable de $[0\ ,\ 1]$!

Il m’a fallu de nombreuses années pour trouver une bonne réponse à la question naïve ci-dessus concernant “p”. La réponse est expliquée ici en détail https://alainconnes.org/docs/2000.pdf. Elle est donnée par le formalisme de la mécanique quantique, qui, comme expliqué dans le billet précédent sur les “variables infinitésimales” donne un cadre où les variables continues peuvent coexister avec les variables infinitésimales, au seul prix d’avoir des règles algébriques plus subtiles où la commutativité n’est plus forcément vérifiée. Les nouveaux infinitésimaux ont un “ordre” (un infinitésimal d’ordre un est un opérateur compact dont les valeurs caractéristiques μ_n sont un grand O de $(1/n)$). Le fait nouveau est qu’ils ont une intégrale qui en termes physiques est donnée par le coefficient de la divergence logarithmique de la trace. On obtient ainsi un nouvelle étape pour le “calcul” et elle est au cœur de la géométrie différentielle non-commutative.

En géométrie riemannienne, la donnée naturelle est le carré de l’élément de longueur, de sorte que lors du calcul de la distance $d(A, B)$ entre deux points, il faut minimiser l’intégrale de A à B le long d’un chemin continu de la racine carrée de $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Maintenant, il est souvent vrai que “prendre une racine carrée” de manière brutale comme dans l’équation ci-dessus cache un niveau plus profond de compréhension. En fait, cette question de prendre la racine carrée a conduit Dirac à sa célèbre équation analogue de l’équation de Schrödinger pour l’électron et à la découverte théorique du positron. Dirac cherchait une forme invariante relativiste de l’équation de Schrödinger. La propriété de base de cette équation est qu’elle est que la variable de temps y apparaît au premier ordre. L’équation de Klein-Gordon qui est la forme relativiste de l’équation de Laplace, est invariante relativiste mais de second ordre dans le temps.

Dirac a trouvé cette idée de prendre la racine carrée de l’opérateur de Klein-Gordon en utilisant l’algèbre de Clifford. En fait (comme me l’a fait remarquer Atiyah) Hamilton avait déjà écrit la combinaison magique des dérivées partielles en utilisant ses quaternions comme coefficients et il avait noté que cela donnait une racine carrée du laplacien. Quand j’étais à Saint-Pétersbourg pour le 300e d’Euler, j’ai remarqué qu’Euler pouvait partager les honneurs pour les quaternions puisqu’il avait explicitement écrit leur règle de multiplication afin de montrer que le produit de deux sommes de 4 carrés est une somme de 4 carrés.

Quelle est donc la relation entre la racine carrée de Dirac du Laplacien et la question ci-dessus de prendre le racine carrée dans la formule de la distance $d(A, B)$. Le fait est que l’on peut utiliser la solution de Dirac et réécrire la même distance géodésique $d(A, B)$ de la manière suivante : on ne mesure plus la longueur minimum d’un chemin continu mais on mesure la variation maximale d’une fonction : i.e. la valeur absolue de la différence $f(A) - f(B)$. Bien sûr, sans restriction sur f, cela donnerait l’infini, mais il faut que le commutateur $[D, f]$ de f avec l’opérateur de Dirac soit borné par 1.

Nous voici dans notre étape de “calcul quantifié”, de sorte que les fonctions de notre espace géométrique comme l’opérateur de Dirac sont toutes concrètement représentées dans le même espace de Hilbert H. H est l’espace de Hilbert des spineurs de carrés intégrables et les fonctions agissent par multiplication point par point. Le commutateur $[D, f]$ est la multiplication de Clifford par le gradient de f de sorte que lorsque la fonction f est réelle, sa norme est juste la norme Sup du gradient. Dire ensuite que la norme de $[D, f]$ est inférieure à 1 revient à demander que f soit une fonction de Lipschitz de la constante 1, c’est-à-dire que la valeur absolue de $f(A) - f(B)$ soit inférieure à $d(A, B)$ où cette dernière distance est la distance géodésique. Pour les fonctions de valeur complexes, on obtient seulement une inégalité, mais il suffit de montrer que la variation maximale de tels f donne exactement la distance géodésique : c’est-à-dire qu’on récupère la distance géodésique $d(A,B)$ comme Sup $f(A)-f(B)$ pour une norme de $[D,f]$ inférieure à 1.

Notez que D a la dimension de l'inverse d'une longueur, c'est-à-dire d'une masse. En fait, dans la formule ci-dessus pour des distances en termes de supremum le produit de "f" par D est sans dimension et "f" a la dimension d'une longueur puisque $f(A)-f(B)$ est une distance.

Maintenant, quelle est la signification intuitive de D ? Notez que la formule ci-dessus mesurant la distance $d(A,B)$ comme un supremum est basée sur le manque de commutativité entre D et les coordonnées "f" sur notre espace. Donc il devrait y avoir une tension qui empêche D de commuter avec les coordonnées. Cette tension est fournie par l'hypothèse clé suivante "l'inverse de D est un infinitésimal".

En effet, nous avons vu dans un article précédent que les variables à domaine continu ne peuvent pas commuter avec des variables infinitésimales, ce qui donne la tension nécessaire. Mais il y a plus, en raison de l'équation fondamentale $\mathbf{ds} = 1/D$ qui donne à l'inverse de D la signification heuristique de l'élément de longueur. Ce changement de paradigme de $g_{\mu\nu}$ à cet opérateur théorique **ds** est le parallèle exact du changement de l'unité de longueur dans le système métrique à un paradigme spectral.

Ainsi, on peut considérer une géométrie comme une représentation concrète de l'espace de Hilbert non seulement de l'algèbre de coordonnées sur l'espace X qui nous intéresse, mais aussi de son élément de longueur infinitésimal **ds**. Dans le cas riemannien habituel cette représentation est d'ailleurs irréductible. Ainsi, à bien des égards, cela est analogue à penser une particule comme nous l'a appris Wigner, c'est-à-dire comme une représentation irréductible (du groupe de Poincaré).

AC a dit...
Cher Arivero, merci ! C'est bien que Tao et moi discutions de la même chose. En fait ma première note aux Comptes Rendus (1970) portait sur les ultrafiltres sélectifs et les modèles non standards minimaux construits en utilisant des ultraproduits. Ma conviction est que les deux points de vue sur les infinitésimaux sont le reflet des nuances existant déjà au début de l'invention du calcul. Les nombres non standards au sens de la logique ou les ultrafiltres sont très proches du point de vue de Leibniz.
17 Juillet 2007 à 7 :30 PM

AC a dit...
Cher Alon Levy
Oui, bien sûr, je suis d'accord pour mettre le billet sur l'analyse non standard sur le blog du carnaval, merci,
Alain
19 Août 2007 à 1 :57 PM

Vendredi 3 Août 2007
70 ans de Paul
Je reviens tout juste d'un très bel événement autour des 70 ans de Paul Baum, qui s'est déroulé à Varsovie lundi, merci en particulier à Piotr Hajac. Je connais Paul depuis l'été 1980, lorsque nous nous sommes rencontrés à Kingston. J'ai vraiment eu, lors de ma première rencontre, l'impression de rencontrer l'"homologie en personne". Plus je l'ai connu grâce à notre très longue collaboration, plus j'ai apprécié sa clarté d'esprit et sa quête incessante de simplicité et de beauté. À bien des égards, il réussit devant un problème difficile à faire ce que Grothendieck conseillait dans *Récoltes et Semailles*, c'est-à-dire à garder "une innocence enfantine" devant les mathématiques. Le dîner du lundi soir était d'une intensité comparable à celle du mémorable dîner organisé par Martin Walter, à Boulder, pour les 60 ans de Paul lorsque l'équipe Paul Baum - Raoul Bott avait forcé Martin à chercher (encore et encore) dans sa cave plus de bouteilles de vin pour suivre leur capacité à boire !

Raoul Bott est décédé en décembre 2005. Peu de temps auparavant, Paul est allé jusqu'en Californie pour lui rendre visite et ils ont parlé ensemble pendant une journée entière. Ce type de fidélité dans l'amitié et la compréhension de ce qui compte vraiment, c'est une attitude envers la vie que Paul a et que j'admire vraiment.

Lundi 13 Août 2007
Moyenne harmonique
Ce "billet" est principalement une tentative de voir si l'on peut réussir à utiliser des formules dans le blog et

discuter de vrais trucs en quelque sorte. Les formules doivent être vraiment visibles, un peu comme avec les transparents. Donc, comme prétexte, je vais commencer par discuter d'un problème lié à l'Ansatz de base :

$$\mathbf{ds} = D^{-1}$$

qui donne l'élément de longueur théorique de l'opérateur en termes de l'opérateur de Dirac dans le cadre général de la géométrie non-commutative "métrique". Le noyau de l'opérateur D est de dimension finie et on prend **ds** qui s'évanouit sur ce noyau. Comme cela a déjà été discuté ici, la connaissance de D retourne la métrique. De plus l'intégrale non-commutative, sous la forme de la trace de Dixmier, redonne la forme volumique. Ainsi l'intégrale d'une fonction f de dimension n est simplement donnée par

$$⨍ f|\mathbf{ds}|^n$$

où l'intégrale "coupée" est la trace de Dixmier c'est-à-dire la fonctionnelle qui assigne à un infinitésimal d'ordre 1 le coefficient de la divergence logarithmique dans la série qui donne la somme de ses valeurs propres.

Je n'essaierai pas de justifier davantage la définition heuristique de l'élément de longueur. Il est plus intéressant de le mettre à l'épreuve, de le remettre en question, et je vais discuter d'un exemple d'un problème qui m'a laissé perplexe assez longtemps parfois mais qui a une jolie résolution.

Il s'agit de comprendre ce qui se passe quand on prend le produit de deux géométries non-commutatives. On obtient la relation suivante pour les carrés des opérateurs de Dirac correspondants :

$$D^2 = D_1^2 + D_2^2$$

où nous abusons des notations en éliminant le produit tensoriel par l'opérateur d'identité qui va normalement avec chacun des opérateurs D_j. Maintenant, cette relation est très différente de la simple relation de Pythagore des éléments de longueur classiques dont le carré s'additionne et pose donc la question de savoir comment concilier la formule d'Ansatz au-dessus avec la formule simple d'addition des carrés des opérateurs de Dirac. Plus généralement, on peut considérer un tas d'espaces NC avec les opérateurs de Dirac D_μ et les combiner comme suit : on commence avec une matrice positive d'opérateurs dans l'espace de Hilbert :

$$g = (g^{\mu\nu}) \in M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$$

et on étend la formule ci-dessus donnant D^2 pour un produit de deux espaces et on forme la somme suivante :

$$D^2 = \sum_{\mu,\nu} D_\mu g^{\mu\nu} D_\nu^*$$

où la notation avec z souligne le fait que nous ne supposons même pas l'auto-adjonction des différents D_μ qui n'est pas nécessaire. Nous voulons une formule pour l'inverse du carré de D i.e. pour :

$$\mathbf{ds}^2 = D^{-2}$$

en fonction de la matrice inverse :

$$g^{-1} = (g_{\mu\nu})$$

qui joue un rôle similaire au $g_{\mu\nu}$ de la géométrie Riemannienne, et des opérateurs

$$dz^\mu = D_\mu^{-1}$$

Cela semble totalement désespéré, car il faut une formule pour l'inverse d'une somme d'opérateurs non-commutants. Heureusement, il s'avère qu'il existe une belle formule simple qui fait le travail en toute généralité. Il s'agit de se rappeler de la définition d'une distance comme un minimum. Elle est donnée par :

$$\langle \xi, \mathbf{ds}^2 \xi \rangle = \operatorname{Inf} \sum_{\mu,\nu} \langle dz^\mu \xi^\mu, g_{\mu\nu} dz^\nu \xi^\nu \rangle$$

L'infimum est repris par toutes les décompositions du vecteur donné comme une somme :

$$\sum_\mu \xi^\mu = \xi$$

Notez que cette formule suffit pour déterminer complètement l'opérateur $\mathbf{ds}^2$, car elle donne la valeur de la forme quadratique positive correspondant à n'importe quel vecteur de l'espace de Hilbert. La preuve de la formule n'est pas difficile et peut être effectuée en appliquant la technique des multiplicateurs de Lagrange pour faire respecter la contrainte qui précède sur les vecteurs libres ξ^μ.

AC a dit...
Dear Christophe
Ce que j'ai fait, c'est d'incorporer de petites images dans le texte, j'ai d'abord écrit un fichier pdf, puis j'ai extrait des petites parties du pdf en utilisant Adobe Professional et en les enregistrant au format JPEG.
7 Septembre 2007 à 4 :51 PM

Mardi 18 Septembre 2007
Les motifs - ou le coeur dans le coeur
C'est avec ce titre fascinant que A. Grothendieck présente dans *Récoltes et Semailles* (cf. Promenade à travers une œuvre ou l'Enfant et la Mère) le sujet des motifs : le plus profond des douze thèmes de recherche autour desquels il a développé son programme de recherche "à long terme" qui a littéralement révolutionné le domaine de la géométrie algébrique dans la décennie 1958-68. Les motifs étaient envisagés comme le "cœur dans le cœur" d'une nouvelle géométrie (la géométrie arithmétique) que Grothendieck a inventée en suivant une stratégie scientifique basée sur l'introduction d'une série de nouveaux concepts organisés sur un plan de généralité progressive : à commencer par les schémas, topos et sites puis en poursuivant par le yoga des motifs et les groupes de Galois motiviques et enfin par l'introduction de la géométrie algébrique anabelienne et de la théorie de Galois-Teichmuller.

Si les notions de schéma et de topos étaient les deux idées cruciales qui constituaient le moteur originel dans le développement de cette nouvelle géométrie - Grothendieck était évidemment fasciné par les concepts de point géométrique, espace et symétrie - ce n'est qu'avec la notion de motif que l'on finit par capter la structure la plus profonde, le cœur de l'identité profonde entre la géométrie et l'arithmétique.

Grothendienck a très peu écrit sur les motifs. Les fondations sont documentées dans son document inédit. "Motifs" et ont été discutés lors d'un séminaire à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, en 1967. On sait, en lisant *Récoltes et Semailles*, qu'il a commencé à penser aux motifs en 1963-64. J.-P. Serre a inclus dans son article "Motifs" un extrait d'une lettre que Grothendieck lui a écrite en août 1964 dans laquelle il parle (plutôt vaguement, en fait) des notions de motif, foncteur fibré, groupes de Galois motiviques et poids.

Les motifs ont été introduits dans le but ultime de fournir une explication intrinsèque aux analogies entre les différentes théories cohomologiques des variétés algébriques : ils devaient jouer le rôle d'une théorie cohomologique universelle (la cohomologie motivique) et aussi fournir une linéarisation de la théorie des variétés algébriques, en finissant par fournir (c'était le point de vue de Grothendieck) le bon cadre pour une attaque réussie des Conjectures de Weil sur la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini.

Contrairement à la topologie algébrique où le foncteur cohomologique standard est uniquement caractérisé par les axiomes d'Eilenberg-Steenrod en termes de normalisation associée à la valeur du foncteur en un point, en géométrie algébrique il n'existe pas de théorie cohomologique appropriée à coefficients entiers, pour les variétés définies sur un corps k, à moins que l'on ne prévoie une intégration de k dans les nombres complexes.

En fait, au moyen d'une telle cartographie, on peut former l'espace topologique des points complexes de la variété algébrique originale et enfin calculer sa cohomologie de Betti (singulière). Cependant, cette construction dépend généralement du choix de l'incorporation de k dans le domaine des nombres complexes. De plus, la cohomologie de Hodge, la cohomologie algébrique de de-Rham, la cohomologie l-adique étale fournissent plusieurs exemples de foncteurs de cohomologie pouvant être associés simultanément à une variété algébrique donnée, dont chacun fournit une information pertinente sur l'espace topologique.

Grothendieck a émis l'hypothèse que cette pléthore de données cohomologiques différentes devrait être quelque peu codée systématiquement dans une théorie unique et plus générale de la nature cohomologique qui agit comme une "liaison" entre la géométrie algébrique et l'ensemble des théories cohomologiques disponibles. C'est l'idée du "motif", à savoir la raison commune derrière cette multitude d'invariants cohomologiques qui régit et contrôle systématiquement tous les appareils cohomologiques appartenant à une variété algébrique ou plus généralement à un schéma.

La construction originale d'une catégorie M de motifs (purs) sur un corps k commence par deux considérations préliminaires. La première considération est que M devrait être la cible d'un foncteur contravariant naturel reliant la catégorie C de variétés algébriques projectives lisses, sur un corps k à M. Un tel foncteur devrait associer à un objet X de C son motif $M(X)$. La deuxième considération est que ce foncteur devrait, par construction, prendre en compte chaque théorie cohomologique particulière.

Maintenant, en gardant à l'esprit cet objectif, on pense au processus axiomatisant une théorie cohomologique en géométrie algébrique. Cela se fait en introduisant un foncteur contravariant $X \to H(X)$ de C vers une catégorie abélienne graduée, où les ensembles de morphismes entre ses objets forment des K-espaces vectoriels (K est un corps de caractéristique zéro, que pour simplifier, je fixe ici égal aux rationnels). On aimerait aussi que toute correspondance $V \to W$ (un cycle algébrique dans le produit cartésien $V \times W$ qui peut être vu comme le graphe d'une application algébrique à valeurs multiples) induise à contrario, une application sur la cohomologie et que la catégorie cible soit convenablement définie de façon à contenir parmi ses objets toute "théorie cohomologique de Weil", à savoir une cohomologie qui satisfait entre autres axiomes la dualité de Poincaré et la formule de Künneth.

Cette présentation préalable aide à formaliser la construction de la catégorie des motifs suivant une procédure en trois étapes. On souhaite élargir la catégorie C de manière précise dans l'espoir de produire également une catégorie abélienne. Les trois étapes sont brièvement reprises comme suit :

(1) On passe de C à une catégorie avec les mêmes objets mais où les ensembles de morphismes sont les classes d'équivalence de correspondances rationnelles. Ici, le choix naturel de la relation d'équivalence est le relation d'équivalence numérique car elle est la plus grossière parmi les relations possibles entre cycles algébriques qui peuvent être considérés comme induisant, via les axiomes cohomologiques de toute théorie cohomologique de Weil, les homomorphismes définis en cohomologie.

(2) On agrandit la collection d'objets de la catégorie définie en (1), en ajoutant formellement des noyaux et images de projecteurs. Cette étape est appelée techniquement "enveloppe pseudo-abélienne" de la catégorie définie en (1) et elle est motivée par le besoin de définir une catégorie abélienne de motifs pour lesquels, par exemple, la formule de Künneth peut être appliquée.

(3) Enfin, on considère l'opposé de la catégorie définie en (2).

Maintenant, après avoir appliqué avec diligence toutes ces machines abstraites, on aimerait voir une application fructueuse de ces idées, sous la forme, par exemple, de la preuve d'une conjecture majeure. Cependant, on perçoit également très tôt qu'une application réussie du yoga des motifs est subordonnée à une connaissance approfondie de la théorie des cycles algébriques, puisque la construction de la catégorie M est centrée sur l'idée d'élargir les ensembles de morphismes en mettant en œuvre la notion de correspondance. C'est pour cette raison que les Conjectures Standard (critères cohomologiques pour l'existence de cycles algébriques intéressants) ont été associées, depuis le début, à la théorie des motifs car elles semblent remplir la "conditio sine qua non" une théorie des motifs a une application concrète et réussie.

Cependant, afin de mettre les Conjectures Standard dans la bonne perspective et pour éviter peut-être une surestimation de leur importance, il convient également de noter que Y. Manin a été en 1968, le premier à appliquer ces idées sur les motifs en produisant une preuve élégante de l'hypothèse de Riemann-Weil pour les variétés unirationnelles projectives tridimensionnelles non singulières sur un corps fini, sans faire appel aux Conjectures Standard. De plus, nous savons également que les Conjectures de Weil ont été prouvées par P. Deligne en 1974 sans utiliser ni la théorie des motifs ni les Conjectures Standard.

Près de quarante ans se sont écoulés depuis que ces idées ont été discutées de manière informelle dans le "cercle de Grothendieck". Une théorie élargie et en partie encore conjecturale des motifs mixtes a entretemps prouvé son utilité pour expliquer conceptuellement certains phénomènes intrigants qui se produisent dans plusieurs domaines des mathématiques pures, tels que la théorie de Hodge, la théorie K, les cycles algébriques, les polylogarithmes, les fonctions L, les représentations de Galois, etc.

Très récemment, de nouvelles applications de la théorie des motifs à la théorie des nombres et à la théorie quantique des champs ont été trouvés ou sont sur le point d'être développés, avec le soutien de techniques fournies par la géométrie non-commutative et la théorie des algèbres d'opérateurs.

En théorie des nombres, une compréhension conceptuelle de l'interprétation proposée par A. Connes des formules explicites de Weil en tant que formule de trace de Lefschetz sur l'espace non-commutatif des classes d'adèles, nécessite l'introduction d'une catégorie généralisée de motifs qui comprend des espaces très singuliers d'un point de vue classique. Plusieurs questions se posent déjà quand on considère des espaces non-commutatifs de dimension zéro de types spéciaux, tels que l'espace sous-jacent au système statistique quantique dynamique défini par J.-B. Bost et Connes dans leur article "Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec rupture spontanée de symétrie"(Selecta Math. (3) 1995). Cet espace est une version simplifiée des classes d'adèles et il encode dans son groupe de symétries l'arithmétique de l'extension abélienne maximale des rationnels. Une nouvelle théorie des endomotifs (algébrique et analytique) a été récemment développée dans "Géométrie non-commutative et motifs : la thermodynamique des endomotifs" (à paraître dans Advances in Mathematics). Les objets de la catégorie des endomotifs sont des espaces non-commutatifs décrits par des actions de semi-groupe sur les limites projectives des motifs d'Artin (ce sont parmi les exemples les plus simples de motifs purs, car ils sont associés aux variétés algébriques de dimension zéro). Les morphismes de cette nouvelle catégorie généralisent la notion de correspondances (algébriques) et sont définis au moyen de groupoïdes étales pour tenir compte de la présence des actions du semi-groupe.

Un problème ouvert et intéressant est lié à la définition d'une théorie dimensionnelle supérieure des motifs commutatifs et en particulier la mise en place d'une théorie des motifs elliptiques et formes modulaires non-commutatifs. Une généralisation appropriée du yoga des motifs à la géométrie non-commutative a déjà produit des résultats intéressants sous la forme, par exemple, d'un analogue pour la caractéristique zéro de l'action du groupe de Weil sur la cohomologie étale d'une variété algébrique. Il semble assez excitant de poursuivre ces idées : l'espoir est que les techniques motiviques, une fois convenablement transférées dans le cadre de la géométrie non-commutative, puissent fournir des outils utiles et produire des applications encore plus substantielles que celles obtenues dans le contexte commutatif classique.
1 commentaire :
AC a dit...
Chère Katia
Merci pour ce beau billet. Votre question est restée sans réponse depuis assez longtemps maintenant, et je vais essayer (pourquoi pas) de donner une réponse dans un prochain billet. Bien sûr, ce sera une réponse (partielle), il s'agira de mon point de vue et en tant que tel, elle n'aura aucune prétention à être "la" réponse.
4 Octobre 2007 à 1 :21 PM

Mercredi 31 Octobre 2007
Battement de cœur 1
Le dernier billet de Katia s'est terminé par une question provocatrice motivée par la description de Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* du "cœur dans le cœur" de la géométrie arithmétique, à savoir la théorie des motifs. Sa question a été formulée comme ceci :
——— Qu'est-ce que le "cœur du cœur" de la géométrie non-commutative ? ———
J'essaierai d'expliquer ici qu'il existe un "supplément d'âme" certain, obtenu lors du passage de la classe des espaces commutatifs aux espaces non-commutatifs. La principale nouveauté est que "les espaces non-commutatifs génèrent leur propre temps "et peuvent en outre subir des opérations thermodynamiques telles que le refroidissement, la distillation etc.

Cela ouvre de nouvelles façons de gérer les espaces géométriques et notre travail avec Matilde Marcolli et Katia Consani http://alainconnes.org/docs/ccm.pdf n'est qu'un exemple d'applications potentielles à la théorie des nombres. Il est étroitement lié à la fonction zêta de Riemann et est très proche dans l'esprit des idées de Grothendieck sur les motifs, ce qui ne le rend pas hors de propos dans la discussion présente de la question de Katia. L'histoire commence par une distinction qualitative entre espaces issus de la classification (par von Neumann) des algèbres non-commutatives des types I, II et III. Les espaces commutatifs sont tous de type I. Lors du codage d'un espace X par une algèbre A de fonctions (à valeurs complexes) sur X, on utilise une certaine structure sur X pour restreindre la classe de fonctions (par exemple pour lisser les fonctions sur un espace lisse) et la distinction ci-dessus entre les types utilise la structure la plus grossière possible qui est la théorie de la mesure. Les algèbres correspondantes (appelées algèbres de von Neumann) sont assez simples à caractériser de façon abstraite : ce sont des commutants dans l'espace de Hilbert d'une certaine représentation unitaire. Alors on peut prendre la somme directe des algèbres A et B, on peut mélanger des algèbres de différents types. Plus précisément, toute algèbre de von Neumann se décompose de amnière unique comme une intégrale d'algèbres qui ne peuvent pas être décomposés davantage et qu'on appelle facteurs. Un facteur est une algèbre de von Neumann dont le centre est aussi petit qu'il peut l'être, à savoir qu'il se réduit aux nombres complexes. Les facteurs de type I sont équivalents au sens de Morita aux nombres complexes, et donc un facteur de type I correspond bien à la notion classique de "point" dans un espace X .

Pour comprendre géométriquement à quoi ressemblent les facteurs de type II et III, il est utile de décrire l'algèbre (de von Neumann) A associée à l'espace des feuilles d'une variété feuilletée : (V, F). Un élément T de A assigne à chaque feuille un opérateur dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur la feuille, et il est logique de dire que T est borné, mesurable ou nul presque partout. Les opérations algébriques se font feuille par feuille, et l'algèbre des éléments mesurables bornés modulo les éléments négligeables est une algèbre de von Neumann. L'exemple le plus simple correspond au feuilletage dont l'espace des feuilles est le tore non-commutatif.

C'est un feuilletage de deux tores par l'équation "$dy = a\ dx$" en coordonnées plates. L'algèbre de von Neumann correspondante est un facteur lorsque "a" est irrationnel et ce facteur n'est pas de type I mais de type II. Pour obtenir des exemples de type III on peut prendre n'importe quel feuilletage de codimension un dont l'invariant de Godbillon-Vey ne s'évanouit pas. La sous-variété intégrable F définissant un feuilletage de codimension un est l'orthogonal d'une forme v et l'intégration donne dv comme le produit extérieur de v par une unique forme w. L'invariant de Godbillon-Vey est l'intégrale sur V du produit extérieur de w par dw lorsque V est compact orienté de dimension trois. Par essence la forme w est la dérivée logarithmique d'un élément de volume transversal et l'invariant GV est une obstruction à la recherche d'un élément de volume transversal invariant par holonomie, c'est-à-dire qui ne change pas quand on se déplace le long d'une feuille en gardant une trace de la façon dont les feuilles voisines se développent. Plus généralement les facteurs de type II sont ceux qui possèdent une trace et ceux de type III sont ceux qui ne sont ni de type I ni de type II. Dans le contexte des feuilletages, un élément de volume transversal invariant par holonomie permet d'intégrer la trace ordinaire des opérateurs et cela donne une trace sur l'algèbre de von Neumann du feuilletage.

Jusqu'au travail du mathématicien japonais Minoru Tomita, très peu de résultats positifs existaient sur les facteurs de type III. Le résultat clé de Tomita est qu'un vecteur v cyclique et séparateur pour un facteur A dans l'espace de Hilbert H génère un groupe à un paramètre d'automorphismes de A par la recette suivante : on considère le module carré $S \times S$ de l'opérateur fermable S qui envoie xv sur $S(xv) = x * v$ pour tout x dans A, puis on l'élève à la puissance purement imaginaire "it". Tomita a montré que l'opérateur unitaire normalise A et définit donc un automorphisme de A. On obtient ainsi un groupe à un seul paramètre d'automorphismes de A associés au choix d'un vecteur cyclique et séparateur v. Il a également montré que la phase J de l'opérateur fermable S ci-dessus donne un anti-isomorphisme de A avec son commutant A qui coïncide avec JAJ. Dans son récit du travail de Tomita, Takesaki a caractérisé la relation entre l'état défini par le vecteur cyclique et séparateur v et le groupe de paramètres d'automorphismes de Tomita comme condition de Kubo-Martin-Schwinger (KMS), qui avait été formulée en termes C^*-algébriques par les physiciens Haag, Hugenholtz et Winnink.

Le résultat clé de ma thèse (en 1972) est que la classe modulo les automorphismes intérieurs du groupe d'automorphismes de Tomita est en fait **indépendante** du choix de l'état (normal fidèle) utilisé pour sa construction. Il va sans dire que c'est cette unicité qui permet de définir des **invariants** de facteurs. Le plus simple est le sous-groupe $T(A)$ de R qui est formé des **périodes**, à savoir l'ensemble des temps t pour lesquels l'automorphisme correspondant est intérieur. Ceci, avec l'invariant spectral $S(A)$, m'a conduit à la classification des facteurs de type III en sous-types III_s pour s dans $[0, 1]$ et la réduction du type III au type II et les automorphismes réalisés dans ma thèse https://alainconnes.org/docs/THESE.pdf à l'exception du cas III_1 qui a ensuite été complété par Takesaki. Tout cela remonte au début des années 70 et suffira pour ce premier battement de cœur. C'est seulement le début d'une longue saga qui est loin d'être terminée et dont le thème principal est cette mystérieuse génération d'un "temps" intrinsèque qui émerge de la non-commutativité d'une algèbre de von Neumann.

Exactement comme les variétés sont livrées avec une classe de mesure "lisse" naturelle, un espace non-commutatif X donne généralement lieu à une algèbre de von Neumann A qui code la classe de mesure naturelle sur X. C'est donc une caractéristique totalement nouvelle du monde non-commutatif que l'évolution temporelle correspondante soit bien définie et donne un homomorphisme canonique :

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathrm{Out}(A)$$
$$1 \to \mathrm{Int}(A) \to \mathrm{Aut}(A) \to \mathrm{Out}(A) \to 1$$

où la deuxième ligne donne la définition du groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(A)$ de A comme quotient du groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes par le sous-groupe normal $\mathrm{Int}(A)$ des automorphismes intérieurs (qui sont obtenus par conjugaison par un élément unitaire de l'algèbre A).

AC a dit...
Cher Urs
Ce que vous devez comprendre, c'est que toutes les choses intéressantes se produisent ici lorsque le nombre de degrés de liberté impliqué est infini. Un exemple typique est la mécanique statistique quantique (comme un système de spin sur un réseau). Les systèmes qu'on trouve dans la théorie quantique des champs, les exemples liés aux nombres premiers impliquent tous une infinité de degrés de liberté et sont le plus souvent de type III. Les systèmes de mécanique quantique très simples sont bien sûr de type I et la structure plus profonde n'y apparaît pas. Ça n'a rien à voir avec les anomalies.

AC a dit...
Chers Urs

L'évolution temporelle est aussi "canonique" que possible car toute algèbre non-commutative a des automorphismes intérieurs. De plus on peut montrer que l'évolution temporelle appartient au centre de $\mathrm{Out}(A)$!

Si vous prenez des exemples très simples comme le cas de réseau, vous constaterez qu'un automorphisme intérieur affecte ce qui se passe sur un nombre fini d'endroits du réseau. Dans une situation simple de translation invariante par produit, l'hamiltonien (qui génère l'évolution temporelle dont nous parlons) est une somme infinie de contributions des endroits du treillis et son essence est inchangée par une perturbation provenant d'un nombre fini de terme dans la somme. C'est le fait que la somme soit infinie et n'appartienne pas à l'algèbre des observables qui crée le comportement de type III.

Vous pouvez légèrement perturber cette évolution temporelle par un automorphisme intérieur mais son action globale sur l'algèbre des observables restera essentiellement inchangée, car elle ne sera modifiée que sur un nombre fini de degrés de liberté. En d'autres termes, cette "évolution temporelle" de l'algèbre se déroule globalement, sur tous les degrés de liberté, alors que les automorphismes internes ne contrôlent qu'un nombre fini de nombreux degrés de liberté ! Vous devez étudier attentivement divers exemples, y compris les feuilletages, l'ensemble des nombres premiers ou le cas de QFT pour apprécier ce qui se passe... (et je dois dormir un peu maintenant)...
31 Octobre 2007 à 10 :16 PM

AC a dit...
Cher Urs
Ce n'est pas vraiment bien expliqué nulle part, donc le mieux est de comprendre l'idée de base sur un exemple sans entrer dans les détails techniques. Considérez le système de spin sur un réseau infini.

L'algèbre des observables est la limite inductive des algèbres de dimension finie qui proviennent du produit tensoriel des algèbres matricielles sur des sous-ensembles finis du réseau. Par construction, ils impliquent seulement un nombre fini d'endroits du treillis à un instant donné. De ce fait, un automorphisme intérieur - puisqu'il est implémenté par un élément unitaire de l'algèbre - ne "voit" vraiment qu'un nombre fini de degrés de liberté.
1er Novembre 2007 à 5 :49 PM

AC a dit...
Cher Anonymous
L'espace-temps qui permet de récupérer le modèle standard couplé à la gravité est de type I, car c'est le produit d'une variété M par un espace fini F c'est-à-dire un espace dont l'algèbre de coordonnées est de dimension finie. Ce n'est pas à ce niveau que nous nous attendons à obtenir du "temps émergent" mais plutôt au niveau de l'algèbre des observables dans QG. L'origine de cette idée vient de Carlo Rovelli qui - complètement indépendamment de l'histoire de KMS - avait trouvé en réfléchissant aux questions philosophiques de base dans QG que le "temps que nous ressentons" (par opposition à une coordonnée temporelle

dans l'espace-temps) doit être de nature thermodynamique et doit être lié à un état thermique : le bain de chaleur du reliquat de rayonnement photonique qui rompt naturellement l'invariance de Lorentz. La vraie chose maintenant est de mettre la main sur un bon modèle pour une algèbre d'observables spectraux dans QG. Quelques ingrédients pour cela sont expliqués à la fin de notre prochain livre avec Matilde Marcolli. Mais je préfère raconter l'histoire dans l'un des "battements de cœur" à venir plutôt que de l'expliquer dans un commentaire ...
2 Novembre 2007 à 2 :42 PM

AC a dit...
Cher anonymous
Je n'aime pas être trop négatif dans mes commentaires. Le document de Li est une tentative de prouver une variante de la formule de trace de mon papier dans Selecta. La "preuve" est celle du Théorème 7.3 page 29 du document de Li, mais je me suis arrêté de le lire quand j'ai vu qu'il étend la fonction de test h des idèles aux adèles par 0 à l'extérieur des ideles puis en utilisant la transformée de Fourier (voir page 31). Cela ne peut pas fonctionner et les ideles forment un ensemble de mesure 0 à l'intérieur des adèles (contrairement à ce qui se passe quand on ne traite qu'un nombre de places fini).
3 Juillet 2008 à 7 :50 AM

AC a dit...
1er août 2008
En tant qu'épilogue de ces longs articles sur l'atelier de l'Université Vanderbilt, nous aimerions remercier tous les intervenants pour leur participation spontanée et généreuse et pour avoir partagé leurs idées avec nous sur le corps à un élément et sa nouvelle connexion avec NCG. Nous remercions également tous les participants pour avoir assisté aux échanges et avoir écouté patiemment les discussions qui étaient parfois intenses et certainement "très vivantes" et stimulantes...

Lundi 4 Août 2008
IRONIE
De manière assez ironique, la première masse de Higgs qui est maintenant exclue par les derniers résultats de Tevatron est précisément 170 GeV, à savoir celle qui était privilégiée dans l'interprétation NCG du modèle standard, de l'unification de l'auto-couplage quartique de Higgs avec les autres couplages de jauge et en faisant l'hypothèse du "grand désert", qui suppose qu'il n'y a pas de nouvelle physique (à part le mélange des neutrinos) jusqu'à l'échelle d'unification. Ma première réaction est bien sûr un découragement profond, mélangé à la curiosité de savoir quelle nouvelle physique sera découverte au LHC.

Je termine avec ces vers de Lucrèce :
Suave, mari magno turbantibus aequora ventis,
e terra magnum alterius spectare laborem ;
non quia vexari quemquamst jucunda voluptas,
sed quibus ipse malis careas quia cernere suave est.

[Il est plaisant, lorsque les vents troublent les eaux d'une immense mer,
De regarder depuis le rivage les épreuves infligées à un autre,
Non pas parce que les malheurs de quiconque procurent une joie délectable,
Mais parce qu'il est plaisant de ne pas être dans ce malheur qu'un autre subit.]

Mardi 21 Février 2012
Galois
Ceci est juste un très court message pour ceux qui seraient intéressés par un exposé simple au sujet de Galois, ses relations avec les mathématiciens français de son temps, et une introduction générale à la "théorie de l'ambiguïté". La conférence est en français, disponible sur http://www.alainconnes.org/fr/videos.php N'oubliez pas de cliquer sur le symbole "HD" à l'écran pour obtenir une meilleure qualité de la vidéo.

Samedi 9 Juin 2012
TRISTE NOUVELLE
C'est avec une profonde tristesse que nous apprenons la mort subite de Jean-Louis Loday, tombé par accident de son voilier le 6 juin. Nous perdons un mathématicien exceptionnel qui a produit tant de grandes réalisations et un merveilleux ami de longue date.

Vendredi 10 Août 2012
UNE ROBE POUR LE MENDIANT ?

Depuis 4 ans, je pensais qu'il y avait une incompatibilité inévitable entre le modèle spectral et l'expérience. J'ai écrit un article dans ce blog pour expliquer le problème, le 4 août 2008, dès qu'une masse d'environ 170 GeV pour le Higgs avait été exclue par le Tevatron. Maintenant, 4 ans se sont écoulés et nous savons enfin que la particule de Brout-Englert-Higgs existe et a une masse d'environ 125 Gev.

Pendant tout ce temps, le problème de cet écart dans la masse de Higgs semblait très difficile à résoudre et cela a certainement ralenti un peu l'intérêt pour le modèle spectral car il ne semblait pas y avoir de moyen facile et tout ce que l'on essaierait ne réussirait pas à réduire la masse de Higgs. La raison de ce billet est que cette incompatibilité a finalement été résolue de manière pleinement satisfaisante dans un travail conjoint avec mon collaborateur Ali Chamseddine, l'article est maintenant sur arXiv ici http://fr.arxiv.org/pdf/1208.1030

Ce qui est vraiment remarquable, c'est qu'il n'est pas nécessaire de modifier le modèle spectral, en aucune façon, il avait déjà les bons ingrédients et notre erreur a été d'avoir négligé le rôle d'un véritable champ scalaire qui était déjà présent et dont les couplages (avec le champ de Higgs notamment) avaient déjà été calculés en 2010 comme on peut le voir sur http://fr.arxiv.org/pdf/1004.0464

Cela change complètement la perspective sur le modèle spectral, d'autant plus que le champ scalaire ci-dessus a été indépendamment suggéré par plusieurs groupes comme un moyen de stabiliser le modèle standard malgré la faible masse expérimentale de Higgs. Donc, après cette interaction fructueuse avec les résultats expérimentaux, il est juste de conclure qu'il y a de fortes chances que l'approche spectrale de la physique des hautes énergies soit la bonne piste pour une unification géométrique de toutes les forces connues, y compris la gravité.

Quelques mots sur l'image, la métaphore du modèle standard en mendiant avec un diamant dans la poche a été suggérée par Daniel Kastler il y a longtemps, donc cela explique le personnage de droite. Le personnage de gauche porte les symboles issus de la NCG, les ingrédients de nature spectrale qui permettent de construire la géométrie à partir des observables gravitationnels, tels que le spectre de l'opérateur de Dirac, et d'écrire l'action du modèle standard couplé à la gravité.

Mardi 30 Octobre 2012
LA MUSIQUE DES SPHERES
Le titre de cet article, la musique des sphères, fait référence à un exposé *La musique des formes* https://www.dailymotion.com/video/xuiyfo que j'ai donné à Lille, le 26 septembre, à l'occasion d'une réunion conjointe avec le Fields Institute. La conférence est une introduction à l'aspect spectral de la géométrie non-commutative et à ses implications en physique.

Le point de départ est la question naïve "Où sommes-nous ?", ou comment est-il possible de communiquer avec des extraterrestres notre position dans l'Univers. Cette question conduit, dans le cadre riemannien de la géométrie, à celle de déterminer un ensemble complet d'invariants géométriques, à la fois pour un espace et pour un point dans un espace. Le thème de Mark Kac, "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?" associe à une forme son échelle musicale qui est le spectre de la racine carrée du laplacien, ou mieux de l'opérateur de Dirac. Après avoir illustré ce thème familier par de nombreux exemples concrets, nous donnons un indice de l'invariant supplémentaire qui permet de récupérer l'image géométrique, à savoir l'invariant CKM, et l'illustrer, sous une forme simplifiée, pour l'exemple le plus simple possible de formes isospectrales mais non congruentes. Et la relation avec la musique ? On constate rapidement que la musique est plutôt basée sur l'échelle (spectre) qui se compose de l'ensemble des puissances entières positives q^n pour le nombre réel $q = 2^{1/12} \sim 3^{1/19}$. En raison de la croissance exponentielle de ce spectre, il ne peut correspondre à une forme familière mais plutôt à un objet de dimension moindre que tout nombre strictement positif. Comme expliqué dans l'exposé, il y a un bel espace qui a le bon spectre : c'est la sphère quantique de Poddles, Dabrowski, Sitarz, Brain, Landi et all. Son spectre se compose d'une légère variante des q^j où chacune apparaît avec multiplicité $O(j)$. (Voir le papier original de Dabrowskiet Sitarz arXiv:math/0209048 (Banach Center Publications, 61, 49-58, 2003)
pour la formule précise, et le papier de Brain et Landi arXiv:math/1003.2150 pour une variante et les nombreuses références aux mathématiciens impliqués, mes excuses à chacun d'eux pour ne pas en avoir mis la liste ici.)

Nous expérimentons en interagissant avec ce spectre et montrons à quel point il est adapté pour jouer de la musique. La nouvelle géométrie qui encode ces nouveaux espaces, est ensuite introduite sous sa forme spectrale, c'est la géométrie non-commutative, qui est alors confrontée à la physique. Là, le noyau est le modèle standard spectral de A. Chamseddine et l'auteur, modèle qui remonte à 1996. Nous racontons l'histoire de la résilience de ce modèle dans ses confrontations successives aux expériences. Le début et la fin de l'exposé sont inhabituels. La conférence précédente était une conférence d'Alain Aspect sur ses récentes expériences, avec ses collaborateurs, confirmant expérimentalement le "choix différé" Gedankenexperiment de John Wheeler. Donc, le tout début de mon exposé fait référence au point souligné par Aspect sur la subtilité du concept de "réalité" impliquée par le quantique. La thèse que je défends brièvement est que le manque total de contrôle que nous avons sur le résultat d'une expérimentation quantique (nous ne contrôlons que les probabilités), est une "variabilité" plus primordiale que la variabilité classique régie par le temps qui passe (sur lequel nous n'avons aucun contrôle non plus). J'explique aussi brièvement pourquoi le temps émerge de la variabilité quantique. La partie finale, dans la session de questions, est également inhabituelle, c'est une longue réponse à une question posée par Alain Aspect.

Les trois intervenants, Lille 26 septembre : E. Ghys, A.Aspect, A. Connes
Mise à jour : Le discours d'Alain Aspect est désormais également disponible sur le site de la conférence https://www.youtube.com/watch?v=vqEg4VnoCmc.

Dimanche 9 Novembre 2014
PARTICULES EN GRAVITE QUANTIQUE
Le but de cet article est d'expliquer une découverte récente que nous avons faite avec mes deux collaborateurs physiciens Ali Chamseddine et Slava Mukhanov. Nous avons écrit un long article *Geometry and the Quantum : Basics* https://arxiv.org/abs/1411.0977 que nous avons mis sur l'arXiv, mais en quelque sorte je ressens le besoin d'expliquer le résultat en termes non techniques.

Le sujet est la notion de particule dans la gravité quantique. En physique des particules, il existe une notion bien acceptée de particule qui est la même que celle de représentation irréductible du Groupe de Poincaré. Il est donc naturel de penser que la notion de particule dans la gravité quantique impliquera des représentations irréductibles dans l'espace de Hilbert, et la question est “de quoi ?”.

Ce que nous avons trouvé est une réponse candidate qui est un analogue de degré 4 de la relation de commutation canonique de Heisenberg $[p, q] = ih$. Le degré 4 est lié à la dimension de l'espace-temps. Le rôle de l'opérateur p est maintenant joué par l'opérateur de Dirac D. Le rôle de q est joué par la barre oblique de Feynman, de sorte que l'on applique la même recette aux variables spatiales qu'on le fait aux variables de moment. L'équation est alors de la forme $E(Z[D, Z]^4) = \gamma$ où γ est la chiralité et où le E d'un opérateur est sa projection sur le commutant des matrices gamma utilisées pour définir la barre oblique de Feynman.

Nos principaux résultats sont alors les suivants :

1) Chaque 4-variété M de spins (compact lisse connexe) apparaît comme une représentation irréductible de notre équation bilatérale.

2) L'algèbre générée par les champs coupés est l'algèbre des fonctions sur M avec des valeurs dans $A = M_2(H) \oplus M_4(C)$, qui est exactement l'algèbre légèrement non-commutative nécessaire pour produire la gravité couplée au modèle standard étendu au minimum à une théorie asymptotiquement libre.

3) La seule contrainte sur la métrique riemannienne de la 4-variété est que son volume est quantifié, ce qui signifie qu'il s'agit d'un entier (supérieur à 4) en unités de Planck.

Le résultat 1) est la conséquence de résultats profonds dans la théorie de l'immersion remontant aux travaux de Smale, mais aussi aux résultats géométriques sur la construction de 4-variétés comme couvertures ramifiées de la 4-sphère, où le résultat optimal est le résultat d'Iori et Piergallini affirmant que l'on peut toujours supposer que la ramification se produit sur des surfaces lisses et à 5 couches dans la couverture ramifiée. La dimension 4 apparaît comme la dimension critique car trouver une variété donnée comme une représentation irréductible nécessite de trouver deux cartes de la sphère de telle sorte que leurs ensembles singuliers ne se croisent pas. Dans la dimension n, les ensembles singuliers peuvent avoir (en vertu de l'analyse complexe) une dimension aussi petite que $n - 2$ (mais pas moins) et donc un argument de position générale fonctionne si $(n - 2) + (n - 2)$ est inférieur à n, tandis que $n = 4$ est la valeur critique.

Le résultat 2) est une conséquence de la classification des algèbres de Clifford. Lorsque vous travaillez en dimension 4, la sphère vit dans l'espace euclidien à cinq dimensions et pour écrire son équation comme la somme des carrés des cinq coordonnées, on a besoin de 5 matrices gamma. Les deux algèbres de Clifford $Cliff(+, +, +, +, +)$ et $Cliff(-, -, -, -, -)$ sont respectivement $M_2(H) + M_2(H)$ et $M_4(C)$. Ainsi prendre une représentation irréductible de chacune d'elles donne respectivement $M_2(H)$ et $M_4(C)$.

Le résultat 3) provient de la formule d'index en géométrie non-commutative. On montre que l'équation de degré 4 implique que le volume de la variété (qui est défini comme le terme principal des asymptotes de Weyl des valeurs propres de l'opérateur de Dirac) est la somme de deux indices de Fredholm et est donc un entier. Il s'appuie fortement sur la formule de l'indice de cohomologie cyclique et la détermination de la classe de Hochschild du caractère de Chern. Le grand avantage de 3) est que, comme le volume est quantifié, l'énorme terme cosmologique qui domine l'action spectrale est maintenant quantifié et n'interfère plus avec les équations de mouvement qui, c'est un résultat de notre collaboration de longue date avec Ali Chamseddine, ramènent aux équations d'Einstein couplées au modèle standard.

Le gros plus de 2) est que l'on comprend enfin le sens de l'étrange choix des algèbres qui semble être privilégié par nature : c'est le moyen le plus simple de remplacer un certain nombre de coordonnées par un seul opérateur. De plus, suite à notre collaboration avec Walter van Suijlekom, nous avons constaté que la légère extension du Modèle standard à un modèle de Pati-Salam donné par l'algèbre $M_2(H) \oplus M_4(C)$ améliore considérablement les choses du point de vue mathématique tout en rendant le modèle asymptotiquement libre ! (voir Au-delà du spectral modèle standard, émergence de l'unification Pati-Salam http://www.alainconnes.org/docs/beyond.pdf). Pour avoir une image mentale de la signification de 1), je vais essayer une image qui est venue progressivement pendant que nous travaillions sur le problème de la réalisation de toutes les 4-variétés à spin avec un volume quantifié arbitrairement grand comme solution à l'équation.

“*L'histoire euclidienne de l'espace-temps se déroule à la dimension macroscopique à partir du produit de deux 4-sphères du volume planckien tandis qu'un papillon se déploie de sa chrysalide.*”

Annexe : Section extraite des *Récoltes et semailles* de Grothendieck

Les motifs - ou le cœur dans le cœur

Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas - mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.

Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas. Je m'exprime à ce sujet en diverses occasions dans Récoltes et Semailles, et ce n'est pas le lieu ici de m'attarder sur les vicissitudes étranges qui ont frappé cette notion. Deux des maîtres-thèmes de la géométrie nouvelle sont pourtant issus de celui du topos, deux "théories cohomologiques" complémentaires, conçues l'une et l'autre aux fins de fournir une approche vers les conjectures de Weil : le thème étale (ou "ℓ-adique"), et le thème cristallin. Le premier s'est concrétisé entre mes mains en l'outil cohomologique ℓ-adique, qui dès à présent apparaît comme un des plus puissants outils mathématiques du siècle. Quant au thème cristallin, réduit après mon départ à une existence quasi-occulte, il a finalement été exhumé (sous la pression des besoins) en juin 1981, sous les feux de la rampe et sous un nom d'emprunt, dans des circonstances plus étranges encore que celles autour des topos.

L'outil cohomologique ℓ-adique a été, comme prévu, l'outil essentiel pour établir les conjectures de Weil. J'en ai démontré moi-même un bon paquet, et le dernier pas a été accompli avec maestria, trois ans après mon départ, par Pierre Deligne, le plus brillant de mes élèves "cohomologistes".

J'avais d'ailleurs dégagé, vers l'année 1968, une version plus forte et surtout, plus "géométrique" des conjectures de Weil. Celles-ci restaient "entachées" (si on peut dire !) d'un aspect "arithmétique" apparemment irréductible, alors pourtant que l'esprit même de ces conjectures est d'exprimer et de saisir "l'arithmétique" (ou "le discret") par la médiation du "géométrique" (ou du "continu")[4]. En ce sens, la version des conjectures que j'avais dégagée me paraît plus "fidèle" que celle de Weil lui-même à la "philosophie de Weil" - à cette philosophie non écrite et rarement dite, qui a été peut-être la principale motivation tacite dans l'extraordinaire essor de la géométrie au cours des quatre décennies écoulées[5]. Ma reformulation a consisté, pour l'essentiel, à dégager une sorte de "quintessence" de ce qui devait rester valable, dans le cadre des variétés algébriques dites "abstraites", de la classique "théorie de Hodge", valable pour les variétés algébriques "ordinaires"[6]. J'ai appelé "conjectures standard" (pour les cycles algébriques) cette nouvelle version, entièrement géométrique, des fameuses conjectures.

Dans mon esprit, c'était là un nouveau pas, après le développement de l'outil cohomologique ℓ-adique, en direction de ces conjectures. Mais en même temps et surtout, c'était aussi un des principes d'approche possibles vers ce qui m'apparaît encore comme le thème le plus profond que j'aie introduit en mathématique[7] : celui des motifs (lui-même né du "thème cohomologique ℓ-adique"). Ce thème est comme le cœur ou l'âme, la partie la plus cachée, la mieux dérobée au regard, du thème schématique, qui lui-même est

4. (A l'intention du mathématicien) Les conjectures de Weil sont subordonnées à des hypothèses de nature "arithmétique", du fait notamment que les variétés envisagées doivent être définies sur un corps fini. Du point de vue du formalisme cohomologique, cela conduit à donner une place à part à l'endomorphisme de Frobenius associé à une telle situation. Dans mon approche, les propriétés cruciales (type "théorème de l'index généralisé") concernent les correspondances algébriques quelconques, et ne font aucune hypothèse de nature arithmétique sur un corps de base préalablement donné.

5. Il y a eu cependant, après mon départ en 1970, un mouvement de réaction très nette, lequel s'est concrétisé par une situation de stagnation relative, que j'ai occasion plus d'une fois d'évoquer dans les lignes de Récoltes et Semailles.

6. "Ordinaire" signifie ici : "définie sur le corps des complexes". La théorie de Hodge (dite "des intégrales harmoniques") était la plus puissante des théories cohomologiques connues dans le contexte des variétés algébriques complexes.

7. C'est le thème le plus profond, tout au moins dans la période "publique" de mon activité de mathématicien, entre 1950 et 1969, c'est-à-dire jusqu'au moment de mon départ de la scène mathématique. Je considère le thème de la géométrie algébrique anabélienne et de la théorie de Galois-Teichmüller, développé à partir de 1977, comme étant d'une profondeur comparable.

au cœur de la vision nouvelle. Et les quelques phénomènes-clef dégagés dans les conjectures standard[8] peuvent être vus comme formant une sorte de quintessence ultime du thème motivique, comme le "souffle" vital de ce thème subtil entre tous, de ce "cœur dans le cœur" de la géométrie nouvelle.

Voici en gros de quoi il s'agit. Nous avons vu, pour un nombre premier p donné, l'importance (en vue notamment des conjectures de Weil) de savoir construire des "théories cohomologiques" pour les "variétés (algébriques) de caractéristique p". Or, le fameux "outil cohomologique ℓ-adique" fournit justement une telle théorie, et même une infinité de théories cohomologiques différentes, à savoir une associée à tout nombre premier différent de la caractéristique p. Il y a là encore visiblement, une "théorie qui manque", qui correspondrait au cas d'un ℓ qui serait égal à p. Pour y pourvoir, j'ai imaginé tout exprès une autre théorie cohomologique encore à laquelle il a été déjà fait allusion tantôt), dite "cohomologie cristalline". D'ailleurs, dans le cas important où p est infini, on dispose de trois autres théories cohomologiques encore[9] - et rien ne prouve qu'on ne sera conduit, tôt ou tard, à introduire encore de nouvelles théories cohomologiques, ayant des propriétés formelles toutes analogues. Contrairement à ce qui se passait en topologie ordinaire, on se trouve donc placé là devant une abondance déconcertante de théories cohomologiques différentes. On avait l'impression très nette qu'en un sens qui restait d'abord assez flou, toutes ces théories devaient "revenir au même", qu'elles "donnaient les mêmes résultats"[10]. C'est pour parvenir à exprimer cette intuition de "parenté" entre théories cohomologiques différentes, que j'ai dégagé la notion de "motif" associé à une variété algébrique. Par ce terme, j'entends suggérer qu'il s'agit du "motif commun" (ou de la "raison commune") sous-jacent à cette multitude d'invariants cohomologiques différents associés à la variété, à l'aide de la multitude de toutes les théories cohomologiques possibles à priori. Ces différentes théories cohomologiques seraient comme autant de développements thématiques différents, chacun dans le "tempo", dans la "clef" et dans le "mode" ("majeur" ou "mineur") qui lui est propre, d'un même "motif de base" (appelé "théorie cohomologique motivique"), lequel serait en même temps la plus fondamentale, ou la plus "fine", de toutes ces "incarnations" thématiques différentes (c'est-à-dire, de toutes ces théories cohomologiques possibles). Ainsi, le motif associé à une variété algébrique constituerait l'invariant cohomologique "ultime", "par excellence", dont tous les autres (associés aux différentes théories cohomologiques possibles) se déduiraient, comme autant d'"incarnations" musicales, ou de "réalisations" différentes. Toutes les propriétés essentielles de "la cohomologie" de la variété se "liraient" (ou s'"entendraient") déjà sur le motif correspondant, de sorte que les propriétés et structures familières sur les invariants cohomologiques particularisés (ℓ-adique ou cristallins, par exemple), seraient simplement le fidèle reflet des propriétés et structures internes au motif[11].

8. (A l'intention du lecteur géomètre algébriste) Il y a lieu, éventuellement, de reformuler ces conjectures. Pour des commentaires plus circonstanciés, voir "Le tour des chantiers" (ReS IV note n° 178, p. ... (chercher Chantier 6)) et la note de b. de p. dans "Conviction et connaissance" (ReS III, note n° 162).

9. (A l'intention du lecteur mathématicien) Ces théories correspondent respectivement à la cohomologie de Betti (définie par voie transcendante, à l'aide d'un plongement du corps de base dans le corps des complexes), à la cohomologie de Hodge (définie par Serre) et à la cohomologie de De Rham (définie par moi), ces deux dernières remontant déjà aux années cinquante (et celle de Betti, au siècle dernier).

10. (A l'intention du lecteur mathématicien) Par exemple, si f est un endomorphisme de la variété algébrique X, induisant un endomorphisme de l'espace de cohomologie $H^i(X)$, le "polynôme caractéristique" de ce dernier devait être à coefficients entiers, ne dépendant pas de la théorie cohomologique particulière choisie (par exemple : ℓ-adique, pour ℓ variable). Itou pour des correspondances algébriques générales, quand X est supposée propre et lisse. La triste vérité (et qui donne une idée de l'état de lamentable abandon de la théorie cohomologique des variétés algébriques en caractéristique $p > 0$, depuis mon départ), c'est que la chose n'est toujours pas démontrée à l'heure actuelle, même dans le cas particulier où X est une surface projective et lisse et $i = 2$. En fait, à ma connaissance, personne après mon départ n'a encore daigné s'intéresser à cette question cruciale, typique de celles qui apparaissent comme subordonnées aux conjectures standard. Le décret de la mode, c'est que le seul endomorphisme digne d'attention est l'endomorphisme de Frobenius (lequel a pu être traité à part par Deligne, par les moyens du bord...).

11. (A l'intention du lecteur mathématicien) Une autre façon de voir la catégorie des motifs sur un corps k, c'est de la visualiser comme une sorte de "catégorie abélienne enveloppante" de la catégorie des schémas séparés de type fini sur k. Le motif associé à un tel schéma X (ou "cohomologie motivique de X", que je note $H^*_{mot}(X)$) apparaît ainsi comme une sorte d'"avatar" abélianisé de X. La chose cruciale ici, c'est que, tout comme une variété algébrique X est susceptible de "variation continue" (sa classe d'isomorphie dépend donc de "paramètres" continus, ou "modules"), le motif associé à X, ou plus généralement, un motif "variable", est lui aussi susceptible de variation continue. C'est là un aspect de la cohomologie motivique, qui est en contraste frappant avec ce qui se passe pour tous les invariants cohomologiques classiques, y compris les invariants ℓ-adique, à la seule exception de la cohomologie de Hodge des variétés algébriques complexes. Ceci donne une idée à quel point la "cohomologie motivique" est un invariant plus fin, cernant de façon beaucoup plus serrée la "forme arithmétique" (si j'ose hasarder cette expression) de X, que les invariants purement topologiques traditionnels. Dans ma vision des motifs, ceux-ci constituent une sorte de "cordon" très caché et très délicat, reliant les propriétés algébro-géométriques d'une variété algébrique, à des propriétés de nature "arithmétique" incarnées par son motif. Ce dernier peut être considéré comme un objet de nature "géométrique" dans son esprit même, mais où les propriétés "arithmétiques" subordonnées à la géométrie se trouvent, pour ainsi dire, "mises à nu". Ainsi, le motif m'apparaît comme le plus profond "invariant de la forme" qu'on a su associer jusqu'à présent à une variété algébrique, mis à part son "groupe fondamental motivique". L'un et l'autre invariant représentent pour moi comme les "ombres" d'un "type d'homotopie motivique" qui resterait à décrire (et sur lequel je dis quelques mots en passant dans la note "Le tour des chantiers - ou outils et vision" (ReS IV, n° 178, voir chantier 5 (Motifs),

C'est là, exprimé dans le langage non technique d'une métaphore musicale, la quintessence d'une idée d'une simplicité enfantine encore, délicate et audacieuse à la fois. J'ai développé cette idée, en marge des tâches de fondements que je considérais plus urgentes, sous le nom de "théorie des motifs" ou de "philosophie (ou "yoga") des motifs", tout au long des années 1963-69. C'est une théorie d'une richesse structurale fascinante, dont une grande partie est restée encore conjecturale[12].

Je m'exprime à diverses reprises dans Récoltes et Semailles au sujet de ce "yoga des motifs", qui me tient particulièrement à cœur. Ce n'est pas le lieu de revenir ici sur ce que j'en dis ailleurs. Qu'il me suffise de dire que les "conjectures standard" découlent le plus naturellement du monde de ce yoga des motifs. En même temps elles fournissent un principe d'approche pour une des constructions en forme possibles de la notion de motif.

Ces conjectures m'apparaissaient, et m'apparaissent aujourd'hui encore, comme l'une des deux questions les plus fondamentales qui se posent en géométrie algébrique. Ni cette question, ni l'autre question tout aussi cruciale (celle dite de la "résolution des singularités") n'est encore résolue à l'heure actuelle. Mais alors que la deuxième de ces questions apparaît, aujourd'hui comme il y a cent ans, comme une question prestigieuse et redoutable, celle que j'ai eu l'honneur de dégager s'est vue classer par les péremptoires décrets de la mode (dès les années qui ont suivi mon départ de la scène mathématique, et tout comme le thème motivique lui-même[13]) comme aimable fumisterie grothendieckienne. Mais encore une fois j'anticipe...

---

et notamment p. ...)). C'est ce dernier objet qui me semble devoir être l'incarnation la plus parfaite de l'élusive intuition de "forme arithmétique" (ou "motivique") d'une variété algébrique quelconque.

12. J'ai expliqué ma vision des motifs à qui voulait l'entendre, tout au long de ces années, sans prendre la peine de rien publier à ce sujet noir sur blanc (ne manquant pas d'autres tâches au service de tous). Cela a permis plus tard à certains de mes élèves de piller plus à l'aise, sous l'œil attendri de l'ensemble de mes anciens amis, bien au courant de la situation (Voir note de b. de p. qui suit.).

13. En fait, ce thème a été exhumé en 1982 (un an après le thème cristallin), sous son nom d'origine cette fois (et sous une forme étriquée, dans le seul cas d'un corps de base de caractéristique nulle), sans que le nom de l'ouvrier ne soit prononcé. C'est là un exemple parmi un nombre d'autres, d'une notion ou d'un thème enterré aux lendemains de mon départ comme des fantasmagories grothendieckiennes, pour être exhumés l'un après l'autre par certains de mes élèves au cours des dix ou quinze années suivantes, avec une fierté modeste et (est-il besoin encore de le préciser) sans mention de l'ouvrier...

Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers
André Weil
1952

La théorie analytique des nombres connaît quelques formules qui relient des sommes étendues à tous les zéros non triviaux de la fonction zêta à des sommes étendues aux puissances de nombres premiers[1]. Il n'est pas difficile d'étendre ces formules, dites "explicites", à des cas beaucoup plus généraux, et ce n'est là à vrai dire qu'un simple exercice. Si je me permets de l'offrir en hommage à Marcel Riesz, c'est que d'une part il met en valeur le rôle que joue dans la question une transformée de Fourier qui n'est pas une fonction mais une distribution au sens de L. Schwartz, et que d'autre part la structure formelle des formules ainsi obtenues semble présenter quelque intérêt, de sorte que par là elles méritent d'être mises à la disposition des chercheurs.

Rappelons d'abord la définition des fonctions L de Hecke "mit Grössencharakteren"[2]. Soit k un corps de nombres algébriques, de degré d sur le corps des rationnels ; si v est une valuation de k, on désignera par k_v, le corps déduit de k par complétion par rapport à v, et par k_v^* le groupe multiplicatif des éléments non nuls de k_v. Si v est une valuation diserète, elle correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de k, et on se donnera le droit d'écrire $\mathfrak{p}$ au lien de v, donc $k_\mathfrak{p}, k_\mathfrak{p}^*$, au lieu de k_v, k_v^* ; on désignera en ce cas par $U_\mathfrak{p}$ le groupe (compact) des unités du corps $\mathfrak{p}$-adique $k_v = k_\mathfrak{p}$. On désignera par $v_\rho, (1 \leq \rho \leq r_1))$ les valuations archimédiennes réelles de k, par $v_{\imath, r_1+1 \leq \imath \leq r_1+r_2})$ les valuations archimédiennes complexes de k, et par k_λ le complété de k par rapport à v_λ $(1 \leq \lambda \leq r_1+r_2)$; k_ρ est donc pour tout ρ le corps des réels, et $k_\imath$ est pour tout $\imath$ le corps des complexes ; on posera $\eta_\rho = 1, \eta_{\imath=2}$.

On sait qu'on entend par un idèle de k un élément $a = (a_v)$ du groupe $\prod\limits_c k_c^*$ tel que $a_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$ pour presque tout $\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire pour tout $\mathfrak{p}$ à un nombre fini d'exceptions près) ; le groupe des idèles, topologisé de la manière "naturelle"[3], sera désigné par I_k ; P_k étant le groupe des idèles principaux, soit $C_k = I_k/P_k$. Soit χ un caractère de C_k, ou, ce qui revient au même, un caractère de I_k, prenant la valeur 1 sur P_k. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de k, soit $m(\mathfrak{p})$ le plus petit des entiers $m \geq 0$ tels que $\chi(a) = 1$ pour $a \in U_\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire $a_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$, et $a_v = 1$ pour $v \neq \mathfrak{p}$) et $a_\mathfrak{p} \equiv 1 \bmod. \mathfrak{p}^m$; de la continuité de χ sur I_k, il résulte que $m(\mathfrak{p})$ est toujours fini, et nul pour presque tout $\mathfrak{p}$, donc que $\mathfrak{f} = \prod \mathfrak{p}^{m(\mathfrak{p})}$ est un idéal de k ; $\mathfrak{f}$ s'apelle le *conducteur* de χ. D'autre part, sur le sous-groupe $\prod\limits_\lambda k_\lambda^*$ de I_k, χ est de la forme

$$\chi(a_1, \ldots, a_{r_1+r_2}) = \prod_{\lambda=1}^{r_1+r_2} \left(\frac{a_\lambda}{|a_\lambda|}\right)^{-f_\lambda} |a_\lambda|^{i\eta_\lambda\sigma_\lambda} \tag{1}$$

où chacun des f_ρ est égal à 0 ou 1, où les $f_\imath$ sont entiers, et où les φ_λ sont réels.

Soit $a = (a_v)$ un idèle; pour chaque $\mathfrak{p}$, $a_\mathfrak{p}$ détermine un idéal principal $(a_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$ de $k_\mathfrak{p}$; par définition des idèles, $n(\mathfrak{p})$ est 0 pour presque tout $\mathfrak{p}$, donc $\prod \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$ est un idéal entier ou fractionnaire

Université de Chicago
Transcription Denise Vella-Chemla, décembre 2020.
[1]Voir par exemple A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers* Cambridge Tracts, n^o 30, Cambridge, 1932), Chap. IV ; dans ce qui suit, nous nous référerons à ce livre par le sigle DP.
[2]E. Hecke, *Eine neue Art von Zetafunktionen...*, Math. Zeitschr. I (1918), p. 357, et 5 (1919), p.11.
[3]Cf. A. Weil, *Sur la théorie du corps de classes*, Journ. Math. Soc. Japan, vol. 3, (1951), p. 1.

de k, qu'on désignera par (a). Par définition de $\mathfrak{f}$, on a $\chi(a) = 1$ si $(a) = 1, a_\lambda = 1$ pour tout λ, et $a_\mathfrak{p} = 1$ pour tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{f}$; donc, si $a_\lambda = 1$ pour tout λ, et $a_\mathfrak{p} = 1$ pour tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{f}$, $\chi(a)$ dépend seulement de l'idéal $\mathfrak{a} = (a)$; on a ainsi défini une fonction $\chi(\mathfrak{a}) = \chi(a)$ des idéaux $\mathfrak{a}$ de k premiers à $\mathfrak{f}$. On pose alors

$$L(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} \tag{2}$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers $\mathfrak{a}$ de k premiers à $\mathfrak{f}$, et le produit à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de k qui ne divisent pas $\mathfrak{f}$. Si χ est le caractère χ_0 partout égal à 1, $L(s)$ est la fonction zêta $\zeta(s)$ du corps k. On tire de (2):

$$L'/L(s) = -\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \log(N\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})^n (N\mathfrak{p})^{-ns}. \tag{3}$$

Si on pose $s = \sigma + it$, les séries et produits ci-dessus convergent absolument et uniformément dans tout demi-plan $\sigma \geq 1 + a$, pour $a > 0$; donc, dans un tel demi-plan, $L(s), L(s)^{-1}$, et $L'/L(s)$ sont bornées.

Pour $a \in I_k$ et $\mathfrak{a} = (a)$, soit $\|a\| = \prod_\lambda |a_\lambda|^{\eta_\lambda} N(\mathfrak{a})^{-1}$. Comme $\|a\| = 1$ pour $a \in P_k$, $\chi_1(a) = \|a\|^{i\tau}\chi(a)$ est encore un caractère de C_k ; la fonction L associée à χ_1, est $L_1(s) = L(s + i\tau)$; on dira que χ, χ_1 sont associés. Parmi tous les caractères associés à un caractère donné, il y en a un et un seul pour lequel les exposants φ_λ qui figurent dans (1) satisfont à $\sum \eta_\lambda \varphi_\lambda = 0$; sans restreindre la généralité, on pourra donc supposer désormais que cette condition est satisfaite.

Soit Δ le discriminant de k ; soit $A = (2\pi)^{-d}|\Delta|N\mathfrak{f}$. On posera :

$$\begin{aligned} s_\lambda &= s + i\varphi_\lambda \qquad\qquad (1 \leq \lambda \leq r_1 + r_2) \\ G(s) &= (2^{r_1}A)^{\frac{s}{2}} \prod_\lambda \Gamma\left(\frac{\eta_\lambda s_\lambda + |f_\lambda|}{2}\right) \\ G_1(s) &= \overline{G(1-\overline{s})} = (2^{r_1}A)^{\frac{1-s}{2}} \prod_\lambda \Gamma\left(\frac{\eta_\lambda(1-s_\lambda) + |f_\lambda|}{2}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

où $\overline{}$ désigne l'imaginaire conjugué, puis

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\eta,f}(s) &= (2/\eta)^s \Gamma\left(\frac{\eta s + |f|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\eta(1-s) + |f|}{2}\right)^{-1} \\ \mathcal{G}(s) &= G(s)/G_1(s) = 2^{-\sum\limits_\rho (\frac{1}{2} + i\sigma_\rho)} A^{s-\frac{1}{2}} \prod_\lambda \mathcal{G}_{\eta_\lambda, f_\lambda}(s_\lambda). \end{aligned} \tag{5}$$

En vertu des propriétés connues de la fonction Γ, $|G(s)|^{-1}$ est $O(e^{c|t|})$ uniformément dans toute bande $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, pour $c > \pi d/4$, et, dans la même bande, $|\mathcal{G}(s)|$ est $O(|t|^N)$ pour $N = d(\sigma_1 - \frac{1}{2})$ si on exclut un voisinage des pôles de $\mathcal{G}(s)$.

Posons maintenant $\Lambda(s) = G(s)L(s)$. Un théorème fondamental de Hecke (loc. cit.[2]) dit que $\Lambda(s)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan, ayant ses pôles en $s = 0, 1$ si $\chi = \chi_0$, sans pôle si $\chi \neq \chi_0$, et qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1 - \bar{s}) = \varkappa\overline{\Lambda(s)} \tag{6}$$

où $\varkappa$ est une constante, et $\|\varkappa\| = 1$. La démonstration se fait en exprimant $\Lambda(s)$ au moyen d'une intégrale définie ; cette expression montre en même temps que $\Lambda(s)$ est bornée dans toute bande $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, des voisinages des pôles $s = 0, 1$ étant exclus pour $\chi = \chi_0$. Soit $L_1(s) = s(s-1)L(s)$, et prenons $\sigma_0 < 0 < 1 < \sigma_1$; dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, on aura $|L_1(s)| \leq Ce^{c|t|}$, où c, C sont des constantes. Mais, d'après (2), $L(s)$ est bornée sur $\sigma = \sigma_1$, et $L(1 - \bar{s})$ l'est sur $\sigma = \sigma_0$; comme on a

$$|L_1(s)| = |s(s-1)L(s)| = |s(s-1)\mathcal{G}(1-\bar{s})L(1-\bar{s})|,$$

il s'ensuit que $|L_1(s)|$ est $O(|t|^N)$ sur $\sigma = \sigma_0$, et sur $\sigma = \sigma_1$ si N est pris assez grand. D'après des théorèmes classiques, on en conclut que $|L_1(s)| \leq D|t|^N$ dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, |t| > 1, D$ étant une constante ; appliquant alors par exemple le théorème D de DP, p. 49, à deux cercles de rayons constants r, R et de centre $1 + a + it$, où a est fixe > 0, on voit que le nombre de zéros de $L_1(s)$ dans le plus petit de ces cercles est $O(log|t|)$. Comme, en vertu de (2) et de (6), tous les zéros de $\Lambda(s)$ sont dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$,[4] il s'ensuit que le nombre des zéros de $\Lambda(s)$ satisfaisant à $T \leq |t| \leq T + 1$ est $O(\log T)$; il y a donc une constante a, et, pour tout entier m tel que $|m| \geq 2$, un T_m compris dans l'intervalle $m < T_m < m + 1$, tels que $\Lambda(s)$ n'ait pas de zéro dans la bande $|t - T_m| \leq a/\log|m|$.

D'autre part, $|G(s)|$ est $O(e^{|s|^{1+\varepsilon}})$ pour tout $\varepsilon > 0$ dans le demi-plan $\sigma \geq 1$; comme $L(s)$ est bornée dans le demi-plan $\sigma \geq 1+a$, pour $a > 0$, il s'ensuit que $|\Lambda(s)|$ est $O(e^{|s|^{1+\varepsilon}})$ dans ce demi-plan, donc aussi, d'après (6), dans le demi-plan $\sigma \leq -a$; comme $\Lambda(s)$ est bornée dans $-a \leq \sigma \leq 1+a$ (à un voisinage près des pôles), il s'ensuit que $[s(s-1)]^{\delta_\chi}\Lambda(s)$ est une fonction entière d'ordre 1 si on pose $\delta_\chi = 1$ pour $\chi = \chi_0$ et $\delta_\chi = 0$ pour $\chi \neq \chi_0$. On a donc :

$$\Lambda(s) = ae^{bs}[s(s-1)]^{-\delta_\chi} \prod_\omega \left(1 - \frac{s}{\omega}\right) e^{s/\omega}$$

où a, b sont des constantes, et où le produit est étendu aux zéros ω de $\Lambda(s)$ comptés avec leur multiplicité.[5] On a donc, quels que soient s, s_0 :

$$\Lambda'/\Lambda(s) - \Lambda'/\Lambda(s_0) = \sum_\omega \left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s_0 - \omega}\right) - \delta_\chi \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s_0} - \frac{1}{s_0 - 1}\right),$$

d'où en particulier pour $s = 1 - \overline{s_0}$, en tenant compte de (6):

$$\Re[\Lambda'/\Lambda(s_0)] = \sum_\omega \Re\left(\frac{1}{s_0 - \omega}\right) - \delta_\chi \Re\left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_0 - 1}\right)$$

[4]Le raisonnement classique d'Hadamard, appliqué comme le fait Landau (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, vol. II, p. 14-15), montre d'ailleurs que $\Lambda(s)$ n'a pas de zéros sur la droite $\sigma = 1$, ni par conséquent sur $\sigma = 0$. Ce raisonnement ne tombe en défaut que si χ est un caractère réel $\neq \chi_0$; mais en ce cas $L(s)$ est le quotient, par la fonction zêta de k, de la fonction zêta d'une extension quadratique de k, et par suite le résultat reste valable.

[5]Si $s = 0$ était un zéro de Λ, le facteur correspondant devrait être remplacé par s, et il n'y aurait rien à changer à ce qui suit ; d'ailleurs cette circonstance ne peut pas se présenter (cf. note 5.)

où $\Re$ désigne la partie réelle. Pour $s_0 = 1 + a + it, 0 < a \leq 1$, cela donne:

$$|\Lambda'/\Lambda(s_0)| \geq \Re[\Lambda'/\Lambda(s_0) \geq \sum_{\omega} \frac{a}{(a+1)^2 + (t-y)^2} - \delta_\chi \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a}\right)$$

où on a posé $\omega = \beta + i\gamma$. Mais $L'/L(s)$ est bornée sur la droite $\sigma = 1 + a$; sur cette droite, $G'/G(s)$ est $O(log|t|)$; donc $|\Lambda'/\Lambda(s_0)|$ est $\leq A_0 \log|t| + A_1$, et on a par suite

$$\sum_{\omega} \frac{1}{a^2 + (t-\gamma)^2} \leq \frac{(a+1)^2}{a^2} \sum_{\omega} \frac{1}{(a+1)^2 + (t-\gamma)^2} \leq A_0' \log|t| + A_1',$$

où A_0, A_1, A_0', A_1' dépendent de a mais non de t. D'autre part, si on prend $s = \sigma + it$, $-a \leq \sigma \leq 1 + a$, et $t = T_m$, d'où $|t - \gamma| \geq \alpha / \log|m|$, un raisonnement élémentaire (DP th. 26, p. 71-72) montre qu'on a

$$|\Lambda'/\Lambda(s) - \Lambda'/\Lambda(s_0)| \leq \frac{\sqrt{2}}{a}(a + 1 - \sigma) \log|m| \left(\sum_{\omega} \frac{1}{a^2 + (t-y)^2} + \frac{2\delta_\chi}{a^2 + t^2}\right);$$

d'après ce qui précède, le premier membre est donc $\leq B_0(\log|m|)^2 + B_1$, où B_0, B_1 ne dépendent que de a ; comme dailleurs $|\Lambda'/\Lambda(s_0)|$ est $O(\log|m|)$, on a donc en définitive, pour m entier, $|m| \geq 2, s = \sigma + iT_m$, et $-a \leq \sigma \leq 1 + a, 0 < a \leq 1$:

$$|\Lambda'/\Lambda(s)| \leq B(\log|m|)^2 \tag{7}$$

où B dépend de a, mais non de m ni de σ.

Cela posé, soit $F(x)$ une fonction à valeurs complexes définie sur la droite réelle qui possède une "transformée de Mellin"[6]

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{(s-\frac{1}{2})x} dx$$

holomorphe dans une bande $-a \leq \sigma \leq 1 + a$; d'une manière plus précise, nous supposerons qu'il existe $a' > 0$ tel que $F(x)e^{(\frac{1}{2}+a')|x|}$ appartienne à L^1, ce qui assure que $\Phi(s)$ existe et est holomorphe dans $-a' < \sigma < 1 + a'$; et nous supposerons de plus qu'il existe $a > 0$ tel que $a \leq 1, a < a'$, et que $\Phi(s)$ soit $o((log|t|)^{-2})$ uniformément dans la bande $-a \leq \sigma \leq 1 + a$. Prenons $T > 2, T' > 2$; il y aura des entiers l, m tels que $|T - T_m| < 1, |-T' - T_l| < 1$. Le nombre des zéros $\omega = \beta + i\gamma$ de $\Lambda(s)$ dont la partie imaginaire γ est comprise entre T et T_m est $O(\log T)$, donc la somme $\sum \Phi(\omega)$, étendue à ces zéros, tend vers 0 quand T augmente indéfiniment ; il en est de même pour $-T'$ et T_l. Considérons alors l'intégrale de $\Phi(s) d\log\Lambda(s)$ sur le contour du rectangle formé par les droites $\sigma = -a, \sigma = 1 + a, t = T_m, t = T_l$; en vertu de (7) et de l'hypothèse faite sur Φ, l'intégrale prise sur le côté $t = T_m$ de ce rectangle tend vers 0 avec $1/T$, et celle relative au côté $t = T_l$ tend vers 0 avec $1/T'$. En tenant compte de (6), on obtient:

$$\sum_{-T' < \gamma < T} \Phi(\omega) \equiv \delta_\chi[\Phi(0) + \Phi(1)] + I(T_m, T_l) \quad \text{mod. } o(1) \tag{8}$$

[6]Conformément anx usages reçus, il faudrait dire que $\Phi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $v^{-1/2}F(\log v)$, définie pour $v > 0$.

où on désigne par $o(1)$ le groupe additif des fonctions de T, T' qui tendent vers 0 avec $1/T, 1/T'$, et où on pose

$$I(t,t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+a+it'}^{1+a+it} \Phi(s) d\log\Lambda(s) - \Phi(1-\overline{s}) d\log\overline{\Lambda(s)}$$

Comme d'ailleurs, sur la droite $\sigma = 1+a, L'/L(s)$ est bornée, et $G'/G(s)$ est $O(\log|t|), I(T,T_m)$ tend vers 0 avec $1/T$, et $I(-T',T_l)$ avec $1/T'$ de sorte que dans (8) on peut remplacer $I(T_m,T_l)$ par $I(T,-T')$. Dans $I(T,-T')$, remplaçons $\Lambda(s)$ par $G(s)L(s); I(T,-T')$ apparaît comme somme d'une intégrale analogue $I_0(T,-T')$ portant sur $L(s)$ et d'une autre $I_1(T,-T')$ portant sur $G(s)$. Appliquant (3), on obtient:

$$I_0(T,-T') = \frac{-1}{2\pi} \int_{-T'}^{T} dt \sum_{\mathfrak{p},n} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\mathfrak{p},n}(u) e^{itu} du \tag{9}$$

où l'on a posé

$$H_{\mathfrak{p},n} = \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n/2}} \left[\chi(\mathfrak{p})^n F(u+\log N\mathfrak{p}^n) e^{(\frac{1}{2}+a)u} + \chi(\mathfrak{p})^{-n} F(u-\log N\mathfrak{p}^n) e^{-(\frac{1}{2}+a)u} \right]$$

D'autre part, on a

$$2\pi i I_1(T,-T') = \int_{1+a-iT'}^{1+a+iT} \Phi(s) d\log G(s) - \int_{-a-iT'}^{-a+iT} \Phi(s) d\log G_1(s).$$

Mais $G'/G(s)$ n'a pas de pôle dans le demi-plan $\sigma > 0$, et par suite $G_1'/G_1(s)$ n'en a pas dans $\sigma < 1$; d'ailleurs ces fonctions sont $O(log|t|)$ dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, en dehors de voisinages de leurs pôles, quels que soient σ_0, σ_1. Il s'ensuit qu'on a

$$I_1(T,-T') \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \Phi(s) d\log\mathcal{G}(s) \qquad \text{mod. } o(1)$$

d'où, en appliquant encore une fois le même raisonnement :

$$I_1(T,-T') \equiv J_0(T,-T') + \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} J_\lambda(T,-T') \qquad \text{mod. } o(1)$$

en posant

$$J_0(T,-T') = \frac{\log\, A}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \phi(s) ds,$$

$$J_\lambda(T,-T') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \phi(s-i\varphi_\lambda) d\log\mathcal{G}_{\eta_\lambda,f_\lambda}(s).$$

On a donc :

$$\sum_{-T'<\gamma<T} \Phi(\omega) \equiv \delta_\chi[\Phi(0)+\Phi(1)] + I_0(T,-T') + J_0(T,-T') + \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} J_\lambda(T,-T') \qquad \text{mod. } o(1) \tag{10}$$

Comme d'ailleurs $\Phi\left(\frac{1}{2}+it-i\varphi_\lambda\right)$ est la transformée de Fourier de $F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}$, on a

$$J_\lambda(T,-T') = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}\mathcal{H}_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x;T,-T')dx$$

avec

$$\mathcal{H}_{\eta,f}(x;T,-T') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-T'}^{T} e^{ixt}d\log\mathcal{G}_{\eta,f}\left(\frac{1}{2}+it\right).$$

Posons maintenant

$$H_{\eta,f}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\left[\frac{2}{\eta}d\log\mathcal{G}_{\eta,f}\left(\frac{1}{2}+it\right) - d\log\mathcal{G}_{2,0}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right];$$

en vertu d'identités et d'évaluations connues, on voit que la différence entre l'intégrale du second membre, et la même intégrale prise entre les limites $-T'$ et T, est, en valeur absolue, $\leq 2(e^{-}+e^{-\pi T'})$ pour $\eta=1, f=0$ ou 1, et $\leq C_f(T^{-1}+T'^{-1})$ pour $\eta=2, C_f$ dépendant de f mais non de T,T'. De plus, en vertu de formules connues, on a:

$$H_{1,f} = \frac{(-1)^{1-f}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}, \qquad H_{2,f} = \frac{1-e^{-|fx|/2}}{|e^{x/2}+e^{-x/2}|}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$J_\lambda(T,-T') \equiv \frac{\eta_\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}H_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x)dx$$
$$+\frac{\eta_\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}\mathcal{H}_{2,0}(x;T,-T')dx \qquad \text{mod. } o(1)$$

Pour aller plus loin, nous ferons sur $F(x)$ des hypothèses plus précises que jusqu'ici, Nous supposerons pour fixer les idées que $F(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

(A) $F(x)$ est continue et continument différentiable partout sauf en un nombre fini de points α_1, en lesquels $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$ n'ont qu'une discontinuité de première espèce, et en chacun desquels on a $F(\alpha_1)=\frac{1}{2}\left[F(\alpha_1+0)+F(\alpha_1-0)\right]$.

(B) Il existe $b>0$ tel que $F(x)$ et $F'(x)$ soient $O\left(e^{-(\frac{1}{2}+b)|x|}\right)$ pour $|x|+\infty$.

Cela entraîne que, pour $0<a'<b$, $F(x)e^{\left(\frac{1}{2}+a'\right)|x|}$ est dans L^1, et que $\Phi(s)$ est $O(|t|^{-1})$ uniformément dans $-a'<\sigma<1+a'$; les résultats précédemment démontrés sont donc valables pourvu qu'on prenne $0<a<a'<b, a\leq 1$. Pour un choix convenable de la constante C, on aura

$$|F(x)| \leq Ce^{-(\frac{1}{2}+b)|x|},$$

d'où, en posant $\delta=b-a$:

$$\frac{H_{\mathfrak{p},n}(u)}{C\log N\mathfrak{p}} \leq \frac{e^{-\delta|u|}}{N\mathfrak{p}^{n(1+b)}} + N\mathfrak{p}^{nb}e^{\delta|u|}\inf(N\mathfrak{p}^{-n(1+2b)}, e^{-(1+2b)|u|}) \leq 2N\mathfrak{p}^{-n(1+a)}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_{\mathfrak{p},n}(u)|du \leq 2C\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{1+2a+\delta}\right)\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n(1+a)}}.$$

Il s'ensuit que la série $H(u)=\sum H_{\mathfrak{p},n}(u)$ est absolument et uniformément convergente et définit une fonction $H(u)$ qui est dans L^1, et que (9) peut s'écrire

$$I_0(T,-T')=\frac{-1}{2\pi}\int_{-T'}^{T} dt \int_{-\infty}^{+\infty} H(u)e^{itu}du.$$

De plus, $H(u)$ est continue et continument différentiable en dehors des points $a_i \pm \log N\mathfrak{p}^n$ où elle a, ainsi que sa dérivée, au plus des discontinuités de première espèce, et où sa valeur est moyenne arithmétique entre ses limites à droite et à gauche. Dans ces conditions, la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier s'applique, c'est-à-dire que $I_0(T,-T)$ tend vers $-H(0)$ pour $T\to+\infty$.

Pour obtenir la limite commune des deux membres de (10) pour $T=T'\to+\infty$, il ne nous reste donc plus qu'à évaluer la limite de $J_\lambda(T,-T)$ dans le cas où $\eta_\lambda=2, f_\lambda=0$. Autrement dit, il faut évaluer la limite de

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)d\log\mathcal{G}_{2,0}\left(\frac{1}{2}+it\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]dt$$

pour $T\to+\infty, \Psi(t)$ étant la transformée de Fourier d'une fonction $F_1(x)=F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}$ qui satisfait aux conditions (A) et (B).

Mais la fonction $\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$ est paire et est de la forme $\log|t|+O(t^{-2})$ pour $|t|\to+\infty$. La transformée de Fourier de $\log|t|$ est une distribution, qui a été déterminée par L. Schwartz[7] ; celle de $\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$ est donc une distribution, qui ne diffère de la précédente que par une fonction continue. On trouve que c'est la distribution $-\pi\mathrm{PF}(|e^{x/2}-e^{-x/2}|^{-1})$, où le symbole PF est défini comme suit. Soit $a(x)$ une fonction appartenant à L^1 sur $(-\infty,-1)$ et sur $(+1,+\infty)$, et telle que $\beta(x)=|x|a(x)$ satisfasse à la condition (A) ; on posera :

$$\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty}a(x)dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{-\lambda|x|})a(x)dx-2\beta(0)\log\lambda\right].$$

Alors, si $a(x)$ est telle que $|x|a(x)$ satisfasse à (A), et si $\varphi(x)$ est continue et continument différentiable à support compact, la formule

$$\mathrm{PF}a(\varphi)=\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty}a(x)\varphi(x)dx$$

définit une distribution PFa, égale à la fonction a sur tout intervalle ne contenant pas 0, et qui ne diffère de la distribution Pfa de Schwartz que par un multiple de la distribution δ de Dirac. Cela posé, il résulte des théorèmes de Schwartz que, si $F_1(x)$ et $\Psi(t)$ sont comme ci-dessus, on a

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]dt=-\pi\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_1(x)dx}{|e^{x/2}-e^{-x/2}|}\ ;$$

[7] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vol. II (Act. Sc. et Ind. n° 1122, Paris, Hermann et C[ie], 1951), formule (VII, 7 ; 18).

on peut d'ailleurs le vérifier directement comme suit. Comme

$$\mathfrak{R}\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$$

ne diffère de $\log|t|$ que par une fonction de L^2, il suffit, en vertu du théorème de Plancherel, de vérifier la formule analogue pour $\int\limits_{-T}^{+T}\Psi(t)\log|t|dt$.

On peut, sans rien changer, remplacer $\Psi(t), F_1(x)$ par $\Psi(t)+\Psi(-t), F_1(x)+F_1(-x)$, ou autrement dit supposer que F_1 et Ψ sont paires ; vérifiant le résultat directement pour F_1 égale à 1 pour $|x|<1$, à 0 pour $|x|>1$, on se ramène au cas où $F_1(0)=0$, donc, compte tenu de (A), où $F_1(x)=|x|F_2(x)$, F_2 étant une fonction paire, continue sauf en un nombre fini de discontinuités de première espèce, et $O(e^{-|x|/2})$ à l'infini. On a alors en définitive à démontrer la formule suivante :

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx=-\frac{2}{\pi}\lim_{T\to+\infty}\int\limits_0^{T}\log\,t\left[\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\cos(tx)dx\right]dt,$$

où, après une intégration par parties

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx=\frac{2}{\pi}\lim_{T\to+\infty}\int\limits_0^{T}\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\frac{\sin(tx)}{t}dtdx\ ;$$

l'intégrale double du second membre est absolument convergente, et peut donc s'écrire :

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\left(\int\limits_0^{xT}\frac{\sin(t)}{t}dt\right)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx-\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\left(\int\limits_{xT}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx$$

et il est immédiat qne le dernier terme tend vers 0 pour $T\to+\infty$, ce qui achève la démonstration.

Nous obtenons donc le résultat définitif suivant :

Si F(x) satisfait aux conditions (A), (B), la somme $\sum\phi(\omega)$, étendue au zéros $\omega=\beta+i\gamma$ de $L(s)$ qui satisfont à $0\le\beta\le1, |\gamma|<T$, tend vers une limite pour $T\to+\infty$, et cette limite a la valeur

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{[\gamma|<T}\Phi(\omega)=\delta_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)(e^{x/2}+e^{-x/2})dx+F(0)\log\,A$$

$$-\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n/2}}\left[\chi(\mathfrak{p})^nF(\log N\mathfrak{p}^n)+\chi(\mathfrak{p})^{-n}F(\log\,N\mathfrak{p}^{-n})\right]$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2}\mathrm{PF}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{i\varphi_\lambda x}K_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x)dx \tag{11}$$

où on a posé :

$$K_{1,f}(x)=\frac{e\left(\frac{1}{2}-f\right)|x|}{|e^x-e^{-x}|},\qquad K_{2,f}(x)=\frac{e^{-f|x|/2}}{|e^{x/2}-e^{-x/2}|}.$$

Telle est la forme la plus générale des "formules explicites", Naturellement, on pourrait élargir sensiblement les hypothèses faites sur F.

Nous allons appliquer ces résultats à une transformation de l'hypothèse de Riemann qui n'est peut-être pas sans intérêt. Pour cela, nous nous appuyerons sur le lemme suivant :

Pour que $L(s)$ satisfasse à l'hypothèse de Riemann, il faut et il suffit que la valeur commune des deux membres de (11) soit ≥ 0 pour toute fonction F de la forme

$$F(x) = F_0(x) * \overline{F_0(-x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(x+t)\overline{F_0(t)}dt,$$

où F_0 est une fonction satisfaisant à (A), (B).

F est alors continue et est la primitive d'une fonction F' continue partout sauf en un nombre fini de discontinuités de première espèce (ce sont les points $\alpha_i - \alpha_j$, si les α_i sont les points de discontinuités de F_0) ; F satisfait à (B) ; et, si Φ_0 est la "transformée de Mellin" de F_0 [8], celle de F est $\Phi(s) = \Phi_0(s)\overline{\Phi_0(1-\overline{s})}$. Si donc tous les zéros ω de $L(s)$ dans la bande critique sont sur $\sigma = \dfrac{1}{2}$, le premier membre de (11) est ≥ 0 pour ce choix de F et Φ. Supposons au contraire que $L(s)$ ait dans cette bande un zéro $\omega_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ avec $\beta_0 \neq \dfrac{1}{2}$. Posons

$$z = i\left(s - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right), \qquad \Phi_0(s) = \Psi_0(z), \qquad \Phi(s) = \Psi(z),$$

de sorte qu'on a $\Psi(z) = \Psi_0(z)\overline{\Psi_0(\overline{z})}$ et que $F_0(x)e^{i\gamma_0 x}, F(x)e^{i\gamma_0 x}$ sont les transformées de Fourier des fonctions induites par $\Psi_0(z), \Psi(z)$ sur l'axe réel. Comme la transformée de Fourier de toute fonction de la forme $P(x)e^{-Ax^2}$, où P est un polynome et $A > 0$, est une fonction de même forme, il s'ensuit que, si on prend pour $\Psi_0(z)$ une fonction $P(z)e^{-Az^2}$, $F_0(x)$ satisfera à (A) et (B). Pour un tel choix de $\Psi_0(z), \Psi(z)$ sera de la même forme, donc $\Phi(s)$ sera $O(e^{-A't^2})$ pour tout $A' < A$, uniformément dans $0 \leq \sigma \leq 1$, et par suite $\sum \Phi(\omega)$ sera absolument convergente ; pour achever de démontrer le lemme, il suffira de faire voir que cette somme sera < 0 pour un choix convenable de $P(z)$ et de A. Posons en effet, pour tout zéro ω de $L(s)$ dans la bande critique, $\eta = i\left(\omega - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right)$, et en particulier $\eta_0 = i\left(\omega_0 - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right) = i\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)$. Soit $Q(z)$ le polynôme ayant pour zéros simples tous les η distincts, autres que η_0 et $\overline{\eta_0}$, qui satisfont à $|\Re\eta| \leq 2$; comme, d'après (6), les η sont réels ou deux à deux imaginaires conjngués, on peut prendre Q à coefficients réels ; on prendra $P(z) = zQ(z)Q(-z)$. Alors, si m est l'ordre de ω_0 comme zéro de $L(s)$, on aura, pour $A > 1$:

$$\sum \Phi(\omega) = -2m\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)^2 |Q(\eta_0)|^4 e^{2A(\beta_0 - \frac{1}{2})^2} + \sum_{|\Re\eta|>2} P(\eta)^2 e^{-2A\eta^2}$$

$$\leq -2m\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)^2 |Q(\eta_0)|^4 e^{2A(\beta_0 - \frac{1}{2})^2} + e^{-3A} \sum_{|\Re\eta|>2} |P(\eta)^2 e^{-\eta^2}|,$$

et il est clair que le dernier membre est < 0 pour A assez grand.

[8] cf. la note 7 de bas de page 4 concernant la transformée de Mellin.

On va maintenant, au moyen du lemme, donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions L construites sur le corps k satisfassent à l'hypothèse de Riemann.

Pour cela, soit comme précédemment $C_k = I_k/P_k$, le groupe des classes d'idèles de k ; pour toute valuation v de k, k_v^* sera identifié avec le groupe des idèles dont toutes les composantes sont égales à 1 sauf au plus celle relative à v ; comme l'homomorphisme canonique de I_k sur C_k induit sur ce groupe k_c^* un isomorphisme de k_c^* sur son image dans C_k, cette image sera, elle aussi, identifiée à k_c^*. On a défini précédemment la fonction $\|a\|$ sur I_k ; comme elle est égale à 1 sur P_k, elle détermine sur C_k, par passage au quotient, une fonction qu'on notera $\|\xi\|$; $\xi \to \|\xi\|$ est un homomorphisme de C_k sur le groupe multiplicatif γ des réels > 0, dont le noyau C_k^0 est compact[9]. La fonction $\|\xi\|$ induit $|x|$ sur k_ρ^*, $|x|^2$ sur $k_\imath^*$ et $N\mathfrak{p}^{-n(x)}$ sur $k_\mathfrak{p}^*$ si $n(x)$ est défini pour $x \in k_\mathfrak{p}^*$ par $(x) = \mathfrak{p}^{n(x)}$.

D'une manière générale, si φ est un homomorphisme à noyau compact d'un groupe G sur le groupe γ, on peut normer la mesure de Haar sur G par la condition que la mesure de la partie compacte de G déterminée par $1 \leq \varphi(\xi) \leq M$ soit $\log M$; si φ est un homomorphisme à noyau compact de G sur un sous-groupe discret γ' de γ, on peut normer la mesure de Haar sur G par la condition que la mesure de la partie compacte (ouverte et fermée) de G déterminée par $1 \leq \varphi(\xi) \leq M$ soit $\log M + O(1)$ pour $M \to +\infty$; en ce dernier cas, si γ' est engendré par $\alpha > 1$, la mesure du noyau de φ sera $\log \alpha$. Dans l'un et autre cas, la mesure de Haar ainsi déterminée sur G sera dite *normée au moyen de* φ. On notera $d\xi$ la mesure de Haar sur C_k, normée au moyen de $\|x\|$; et, quel que soit v, on notera $d^\times x$ la mesure de Haar sur k_c^*, normée aussi au moyen de $\|x\|$; cette notation est destinée à rappeler qu'il s'agit d'une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif k_c^* ; si d^+x est une mesure de Haar sur le groupe additif k_v, $d^\times x$ ne diffèrera de $d^+x/\|x\|$ que par un facteur constant. Sur k_ρ^*, on a $d^\times x = dx/2|x|$; sur $k_\imath^*$, si on pose $x = re^{i\theta}$, on a $d^\times x = drd\theta/\pi r$; sur $k_\mathfrak{p}^*$, la mesure, pour $d^\times x$, du groupe compact $U_\mathfrak{p}$ des unités de $k_\mathfrak{p}$ est $\log(N\mathfrak{p})$.

Considérons le sous-groupe de I_k, formé des idèles $a = (a_v)$ tels que $a_\mathfrak{p} = 1$ quel que soit $\mathfrak{p}$, et $a_\lambda = a_1 > 0$ pour $1 \leq \lambda \leq r_1 + r_2$; soit γ_k l'image de ce groupe dans C_k ; γ_k est isomorphe à γ, et C_k est produit direct de C_k^0 et γ_k ; de plus, les caractères χ de C_k qui satisfont à $\sum \eta_\lambda \varphi_\lambda = 0$ sont ceux qui prennent la valeur 1 sur γ_k, de sorte que le groupe Γ de ces caractères est isomorphe au groupe des caractères du groupe compact C_k^0 ; on attribuera donc à Γ la topologie discrète. Soit $F_0(\chi, x)$ une fonction définie sur $\Gamma \times R$, nulle pour presque tout χ (c'est-à-dire que, pour tous les χ sauf un nombre fini d'entre eux, on a $F_0(\chi, x) = 0$ quel que soit x), et telle que, pour tout χ, $F_0(\chi, x)$ satisfasse à (A) et (B). On posera, pour $\xi \in C_k$:

$$\Omega(\xi) = \sum_{\chi \in \Gamma} F_0(\chi, -\log \|\xi\|)\chi(\xi),$$

et, pour tout $\chi \in \Gamma$,

$$F(\chi, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\chi, x+t)\overline{F_0(\chi, t)}dt.$$

On aura, dans ces conditions :

$$P(\xi) = \Omega(\xi) * \overline{\Omega(\xi^{-1})} = \sum_{\chi \in \Gamma} F(\chi, -\log \|\xi\|)\chi(\xi),$$

[9] cf. la note 5 en bas de la page 3.

où * désigne le produit de composition dans C_k, pour la mesure $d\xi$; $P(\xi)$ est une fonction de type positif sur C_k. Écrivons que le second membre de (11) est ≥ 0 quand on y substitue $F(\chi, x)$ à $F(x)$; et faisons la somme des inégalités ainsi obtenues pour tous les $\chi \in \Gamma$. On obtient, après quelques calculs sans difficulté :

$$D(P) = \rho P(1) + \int\limits_{C_k} P(\xi) \left(\|\xi\|^{1/2} + \|\xi\|^{-1/2}\right) d\xi - \sum_v \int\limits_{k_v^*} \frac{P(x) - P(1)0_v(\|x\|)}{\|x-1\|.\|x\|^{-1/2}} d^\times x \geq 0 \tag{12}$$

avec

$$\rho = \log|\Delta| + \log(2\pi)^{-d} - \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} PF \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta_\lambda(e^{-x}) K_{n_\lambda,0}(x) dx, \tag{13}$$

où on a pris $\theta_v(1) = 1$ quel que soit v, $\theta_\mathfrak{p}(t) = 0$ pour $t \neq 1$ quel que soit $\mathfrak{p}$, et où les θ_λ sont tels que (13) ait un sens ; on peut prendre par exemple $\theta_\lambda(t) = 1$ quel que soit t. La valeur de $D(P)$ est indépendante du choix des θ_λ.

Il résulte du lemme que $D(P) \geq 0$, pour toutes les fonctions P obtenues comme il a été dit, est une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions L construites sur le corps k satisfassent à l'hypothèse de Riemann. Comme D, en tant que fonction de P, est une distribution sur C_k, cette condition peut s'exprimer en disant que D est "de type positif". Il est à peine besoin de dire que l'hypothèse de Riemann ne paraît pas plus facile à démontrer sous cette forme que sous sa forme classique. En revanche, notre énoncé met en évidence l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions. Si en effet k est un corps de fonctions algébriques de dimension 1, sur un corps de constantes fini à q éléments, on peut définir[10] le groupe C_k des classes d'idèles de k (qui ici est totalement discontinu, et limite projective de groupes discrets), ainsi que les sous-groupes k_v^* de C_k relatifs aux valuations v de k (qui ici sont toutes discrètes); pour un idèle a, on pose $\|a\| = q^{-\deg(\mathfrak{a})}$, où $\mathfrak{a}$ est le diviseur associé naturellement à l'idèle a ; de même que plus haut, on normera au moyen de $\|a\|$ les mesures de Haar sur C_k, et sur les groupes k_v^*. On définira une distribution D sur C_k au moyen de (12), en prenant cette fois $\rho = (2g-2)\log q$, g étant le genre, et en prenant $\theta_v(1) = 1$, $\theta_v(t) = 0$ pour $t \neq 1$ quel que soit v. Cela posé, des calculs semblables aux précédents, mais beaucoup plus élémentaires, montrent que l'exactitude de l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L construites sur k équivaut a l'inégalité $D(P) \geq 0$ pour toutes les fonctions

$$P(\xi) = \Omega(\xi) * \overline{(\xi^{-1})}$$

sur C_K, où Ω est une fonction sur C_k, nulle en dehors d'un compact, et constante sur les classes suivant un sous-groupe ouvert de C_k. Bien entendu, dans le cas des corps de fonctions algébriques, l'hypothèse de Riemann est un résultat acquis, et par suite, au sens qu'on vient de dire, la distribution D attachée à un tel corps est bien "de type positif".

UNIVERSITY OF CHICAGO

[10] cf. note 3 en bas de la page 1.

[1939a] Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques

André Weil

On connaît diverses analogies entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques d'une variable ; le but de cette note est, par des moyens tout élémentaires, de préciser en quelques points cette analogie.

Soit K un corps de nombres algébriques, de degré n. Comme on sait, on est conduit à introduire dans l'étude de K des éléments qui correspondent aux points de la surface de Riemann d'un corps de fonctions algébriques d'une variable, et que pour cette raison nous appellerons les "points" de K : on fait correspondre un tel "point" P à toute représentation isomorphe et partout dense de K dans un "corps local" $\mathrm{K_P}$ qui peut être, soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes, soit un corps de nombres P-adiques (au sens de Hensel) ; bien entendu, deux représentations de K ne devront pas être considérées comme distinctes si elles se déduisent l'une de l'autre par un isomorphisme des corps locaux correspondants. Si $\mathrm{K_P}$ est le corps des nombres réels, P s'appellera un point réel à l'infini de K ; si $\mathrm{K_P}$ est le corps des nombres complexes, P s'appellera un point imaginaire à l'infini de K ; si $\mathrm{K_P}$ est un corps P-adique, P correspondra à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de K.

Soit α un élément de K ; soit α_P l'élément de $\mathrm{K_P}$ qui correspond à α dans la représentation de K dans $\mathrm{K_P}$ définie par P. Nous poserons :

$I_\mathrm{P}(\alpha) = \log|\alpha_\mathrm{P}|$ si P est un point réel à l'infini ;

$I_\mathrm{P}(\alpha) = 2\log|\alpha_\mathrm{P}|$ si P est un point imaginaire à l'infini ;

$I_\mathrm{P}(\alpha) = -n\cdot\log \mathrm{N}(\mathfrak{p})$ si P est un point de K correspondant à l'idéal premier $\mathfrak{p}$, celui-ci figurant avec l'exposant n dans l'expression de l'idéal principal (α) comme produit de puissances d'idéaux premiers distincts.

Les théorèmes élémentaires connus sur la norme montrent qu'on a, avec ces notations :

$$\sum_\mathrm{P} I_\mathrm{P}(\alpha) = 0,$$

la sommation étant étendue à tous les points P de K. Bien entendu, $I_\mathrm{P}(\alpha)$ ne diffère de zéro que pour un nombre fini de points P de K, de sorte que la somme du premier membre ne comprend qu'un nombre fini de termes non nuls. Cette relation doit être considérée comme analogue arithmétique du théorème algébrique suivant : soit K un corps de fonctions algébriques d'une variable ; x étant un élément de K, et P un point de la surface de Riemann de K, soit $I_\mathrm{P}(x)$ l'ordre de x au point P, c'est-à-dire l'entier égal à n si x a en P un pôle d'ordre n, à $-n$ si x a en P un zéro d'ordre n, et à 0 si x n'est ni nul, ni infini en P ; on aura :

$$\sum_\mathrm{P} I_\mathrm{P}(x) = 0,$$

égalité qui peut être considérée comme un cas particulier du théorème de Cauchy, puisqu'elle résulte de l'égalité :

$$\int d(\log\ x) = 0,$$

lorsque l'intégrale est étendue à un contour formé de $2g$ rétrosections (g étant le *genre* de K).

Considérons maintenant, dans le corps de fonctions algébriques K, le théorème de Riemann-Roch. Celui-ci peut être énoncé sous la forme suivante[1]. Supposons donné, pour chaque point P, un entier n, de telle façon que n_{P} ne diffère de zéro que pour des points P en nombre fini ; soit $n = \sum n_{\mathrm{P}}$ (la sommation étant étendue à tous les points P). Le théorème de Riemann-Roch indique combien il y a d'éléments linéairement indépendants du corps K qui satisfassent, quel que soit P, à la condition

$$I_{\mathrm{P}}(x) \leq n_{\mathrm{P}}$$

En particulier, il indique que, dès que n est assez grand (et, d'une manière précise, dès que $n > 2g - 2$), ce nombre est $n - g + 1$.

Revenons à un corps K de nombres algébriques ; supposons donné pour tout "point" P de K, un nombre réel n_{P}, de façon que n_{P} ne diffère de zéro que pour des points P en nombre fini, et que de plus, si P correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de K, n_{P} soit de la forme $\nu(\mathfrak{p}) \cdot \log \mathrm{N}(\mathfrak{p})$, le facteur $\nu(\mathfrak{p})$ étant entier. Posons $n = \sum n_{\mathrm{P}}$. Soit N le nombre des éléments α de K qui satisfont, quel que soit P, à la condition :

$$I_{\mathrm{P}}(\alpha) \leq n_{\mathrm{P}}.$$

Cette condition, si on l'applique d'une part à tous les points P correspondant à des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K, donne

$$\alpha \in \mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{-\nu(\mathfrak{p})}$$

où le second membre ne comprend, en vertu de la définition de n_{P} et de $\nu(\mathfrak{p})$, qu'un nombre fini de facteurs différents de 1, et a donc un sens bien défini. D'autre part, la même condition, appliquée aux points à l'infini de K, donne, pour chaque point réel à l'infini

$$|\alpha_{\mathrm{P}}| \leq e^{n_{\mathrm{P}}}$$

et, pour chaque point imaginaire à l'infini:

$$|\alpha_{\mathrm{P}}|^2 \leq e^{n_{\mathrm{P}}}$$

Si, alors, on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ une base de l'idéal $\mathfrak{a}$, de sorte que tout élément de $\mathfrak{a}$ soit de la forme :

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n,$$

N apparaîtra comme le nombre de points $(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ à coordonnées entières qui se trouvent dans un domaine de l'espace à n dimensions défini par certaines inégalités élémentaires. Nous nous contenterons ici de l'évaluation assez grossière de N qui est fournie par le volume de ce domaine, volume qu'il est facile de calculer élémentairement. On trouve ainsi :

$$\log N = n - \log(2^{-r_1-r_2}\pi^{-r_2}\sqrt{|d|}) + \varepsilon,$$

où r_1 est le nombre des points réels à l'infini de K, r_2 le nombre des points imaginaires à l'infini de K, d le discriminant de K, et où ε est aussi petit qu'on veut dès que, les $\nu(\mathfrak{p})$ étant supposés fixes,

[1]Cf. A. Weil, Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen, Journal de Crelle, t. 179 (1938), p. 129.

chacun des nombres n_{P} relatifs aux points à l'infini de K est suffisamment grand.

Pour avoir une formule entièrement analogue au théorème de Riemann-Roch, il faut observer de plus que les racines de l'unité dans K, et elles seules, satisfont à la condition $I_P(\alpha) = 0$ quel que soit P : elles jouent donc le rôle que jouent les constantes dans un corps de fonctions algébriques. Si, dans un corps K de fonctions algébriques, un élément x satisfait en tout point P à la condition $I_{\mathrm{P}}(x) \leq n_{\mathrm{P}}$, il en sera de même de même de cx si c est une constante arbitraire : on a le droit de voir dans ce facteur constant arbitraire l'origine du terme $+1$ du théorème de Riemann-Roch. De même, si, dans un corps de nombres K, un élément α satisfait quel que soit P à la condition $I_{\mathrm{P}}(\alpha) \leq n_{\mathrm{P}}$, le produit de α par une racine de l'unité contenue dans K y satisfait aussi. Cela conduit à poser, en désignant par w le nombre de racines de l'unité contenues dans K :

$$g = \log(2^{-r_1-r_2}\pi^{-r_2} \cdot w\sqrt{|d|}),$$

et à écrire la formule ci-dessus sous la forme:

$$\log \mathrm{N} = n - g + \log w + \varepsilon;$$

le nombre g, qui apparaît ainsi comme le "*genre*" du corps K, joue, comme on sait, un rôle important dans la théorie de la fonction zêta de ce corps. On est conduit à penser, en même temps, que le rôle joué par la quantité $g - 1$ dans la théorie des corps de fonctions sera joué en arithmétique par $g - \log w$; ce qu'on peut confirmer par la remarque suivante. Soit K′ un corps contenant K, non ramifié par rapport à K, et de degré relatif f; s'il s'agit de corps de fonctions algébriques d'une variable, les genres g, g' de K, K′, sont liés entre eux par la relation :

$$g' - 1 = f(g - 1) \ ;$$

dans le cas arithmétique, le genre étant défini comme ci-dessus, on vérifie facilement que l'on a :

$$g' - \log w' = f(g - \log w).$$

Nous allons maintenant montrer qu'à côté de la formule :

$$\sum_{\mathrm{P}} I_{\mathrm{P}}(\alpha) = 0$$

qui est une traduction des résultats classiques sur les normes, l'on peut mettre une formule non moins élémentaire relative aux traces. Soit α un élément de K ; pour simplifier le langage dans ce qui va suivre, on supposera que α engendre K, c'est-à-dire que, n étant le degré de K, α est racine d'une équation *irréductible* de degré n, à coefficients rationnels :

$$F(t) = t^n - t \cdot t^{n-1} + \ldots = 0$$

Par rapport au corps des nombres réels F(t) se décompose en r_1 facteurs du premier degré, et r_2 facteurs du second degré, correspondant respectivement aux points à l'infini réels et imaginaires de K. Posons, si P est un point réel à l'infini de K, $\mathrm{T}_{\mathrm{P}}(\alpha_{\mathrm{P}}) = \alpha_{\mathrm{P}}$; si P est un point imaginaire à l'infini, $\mathrm{T}_{\mathrm{P}}(\alpha_{\mathrm{P}}) = \alpha_{\mathrm{P}} + \overline{\alpha}_{\mathrm{P}}$ (la barre dénotant suivant l'usage l'imaginaire conjugué). On aura donc l'expression suivante de la trace r de α :

$$r = \sum_{\mathrm{P}} \mathrm{T}_{\mathrm{P}}(\alpha_{\mathrm{P}})$$

la sommation étant étendue aux points à l'infini de K.

Soit de même p un nombre premier rationnel ; k désignant le corps des nombres rationnels, on désignera par k_P le corps *p-adique* correspondant à p. Le polynome $\mathrm{F}(t)$ se décomposera, par rapport à k_P, en autant de facteurs que p possède dans K de diviseurs premiers ; chacun de ceux-ci définira un point P de K, et le corps K_P contiendra k_P ; on désignera par $\mathrm{T}_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P})$ la trace de α_P par rapport au corps k_P : c'est un nombre de k_P, et le facteur de $\mathrm{F}(t)$ correspondant à P, s'il est de degré m, commencera par les termes $t^m - \mathrm{T}_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P}) \cdot t^{m-1} + ...$ On aura donc :

$$r = \sum_\mathrm{P} \mathrm{T}_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P})$$

la sommation étant étendue cette fois à tous les points P correspondant aux idéaux premiers de K qui divisent p.

Mais, si u est un nombre quelconque de k_P, il existe des entiers rationnels a, b tels que $u - a \cdot p^{-b}$ soit un entier de k_P ; le nombre $u' = a \cdot p^{-b}$ est bien déterminé, modulo 1, par cette condition : il détermine donc un élément du groupe additif des nombres réels modulo 1, qu'on appellera la partie polaire de u. En particulier, désignons par $t_\mathrm{P}(\alpha)$ la partie polaire de $\mathrm{T}_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P})$; posons

$$r' = \sum_\mathrm{P} t_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P})$$

la sommation étant étendue cette fois aux points P correspondant à tous les idéaux premiers de K ; $t_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P})$ étant nul chaque fois que α_P est entier, c'est-à-dire chaque fois que $I_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P}) \leq 0$, la somme du second membre ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Quel que soit le nombre premier p, le nombre rationnel $r - r'$ est entier dans k_P : $r - r'$ est donc entier rationnel, c'est-à-dire que $r \equiv r' \pmod 1$.

Posons alors, chaque fois que P est un point à l'infini de K, $t_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P}) = -\mathrm{T}_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P}) \pmod 1$. La combinaison des résultats ci-dessus donne la formule que nous avions en vue :

$$\sum_\mathrm{P} t_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P}) \equiv 0 \pmod 1$$

la sommation étant étendue à tous les points de K.

Cette formule, bien entendu, reste vraie même si α n'engendre pas K.

Soit maintenant ω un élément de K ; l'application de la formule ci-dessus à $\omega\alpha$ donne :

$$\sum_\mathrm{P} t_\mathrm{P}(\omega_\mathrm{P}\alpha_\mathrm{P}) \equiv 0.$$

Si, ω étant laissé fixe, on pose $f_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P}) = t_\mathrm{P}(\omega_\mathrm{P}\alpha_\mathrm{P})$, f_P est un caractère du groupe additif des nombres de K_P (c'est-à-dire une représentation continue de ce groupe dans le groupe additif des nombres réels modulo 1). On a ainsi une infinité de relations entre des caractères $f_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P})$. Réciproquement, supposons qu'on ait fait correspondre, à tout point P de K, un caractère $f_\mathrm{P}(\alpha_\mathrm{P})$ du groupe additif des nombres de K_P, de telle manière que, pour α entier dans K, les $f_P(\alpha_P)$ soient tous nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux, et qu'ils soient liés, quel que soit α dans K, par la relation

$$\sum_P f_P(\alpha_P) \equiv 0.$$

Il est facile de montrer que dans ces conditions il existe un nombre ω de K tel que l'on ait, quel que soit P :

$$f_P(\alpha_P) \equiv t_P(\omega_P\alpha_P)$$

Autrement dit, nous avons trouvé toutes les relations de la forme indiquée entre caractères locaux des nombres de K. Cela montre que la relation :

$$\sum_P t_P(\omega_P\alpha_P) \equiv 0$$

doit être considérée comme l'analogue arithmétique de la relation (cas particulier du théorème de Cauchy dans la théorie des fonctions algébriques) :

$$\int x\omega = 0,$$

où x est un élément quelconque d'un corps de fonctions algébriques K, ω une différentielle appartenant au même corps, et où l'intégrale est prise le long d'un contour formé de $2g$ rétrosections.

```
import mpmath
import math
from mpmath import *
from math import *

print(21.0220396387**2/14.1347251417**2)
print(25.0108575801**2/14.1347251417**2)
print(30.4248761258**2/14.1347251417**2)
print(32.9350615877**2/14.1347251417**2)
print(37.5861781588**2/14.1347251417**2)
print(40.9187190121**2/14.1347251417**2)
print(43.3270732809**2/14.1347251417**2)
print(48.0051508811**2/14.1347251417**2)
print(49.773832477**2/14.1347251417**2)
print(52.970321477**2/14.1347251417**2)
print(56.446247697**2/14.1347251417**2)
print(59.34704400**2/14.1347251417**2)
print(60.831778524**2/14.1347251417**2)
print(65.112544048**2/14.1347251417**2)
print(67.079810529**2/14.1347251417**2)
print(69.546401711**2/14.1347251417**2)
print(72.067157674**2/14.1347251417**2)
print(75.704690699**2/14.1347251417**2)
print(77.144840068**2/14.1347251417**2)
print(79.337375020**2/14.1347251417**2)
print(82.910380854**2/14.1347251417**2)
print(84.735492980**2/14.1347251417**2)
print(87.425274613**2/14.1347251417**2)
print(88.809111207**2/14.1347251417**2)
print(92.491899270**2/14.1347251417**2)
print("toto")
print(li(3)-li(15))
print(li(5)-li(15))
print(li(7)-li(15))
print(li(11)-li(15))
print(li(13)-li(15))
print(li(17)-li(15))
print(li(19)-li(15))
print(li(23)-li(15))
print(li(29)-li(15))
print(li(31)-li(15))
print(li(37)-li(15))
print(li(41)-li(15))
print(li(43)-li(15))
print(li(47)-li(15))
print(li(53)-li(15))
print(li(59)-li(15))
print(li(61)-li(15))
print(li(67)-li(15))
print(li(71)-li(15))
print(li(73)-li(15))
print(li(79)-li(15))
print(li(83)-li(15))
print(li(89)-li(15))
print(li(97)-li(15))
print(li(101)-li(15))
print(li(103)-li(15))
```