Transcription d'une video d'Alain Connes au Collège de France, Colloque Langage et Pensée (octobre 2018) (Denise Vella-Chemla, 19.1.2019)

Voilà donc... merci. Alors, je vais essayer de détendre l'atmosphère, parce que... donc je vais rebondir sur l'introduction de Jean-Noël Robert, pour vous signaler une variante de «je pense donc je suis»qui je pense, si vous voulez, est en fait le meilleur graffiti que j'aie jamais vu, c'était dans les toilettes de Jussieu (rires) et y avait une pancarte qui mettait... si vous voulez, qui indiquait «Veuillez laisser ces toilettes aussi propres lorsque vous sortez que quand vous rentrez»et y avait un p'tit malin qui avait écrit en-dessous : «j'y pense donc j'essuie»(éclats de rires)... D'accord !... Donc je vais vous parler du langage mathématique et donc si vous voulez, mon exposé sera en fait à la fois une initiation au langage mathématique et en même temps, une réflexion sur le langage mathématique. Donc ce langage, le langage mathématique est un langage codé, c'est un langage codé au départ qui fait qu'il y a certaines habitudes. Par exemple, en mathématiques, si vous voulez, il est traditionnel d'appeler l'inconnue x. C'est ainsi que dans une école, un professeur avait posé l'exercice suivant : on donne un triangle, le triangle est un triangle équilatère et euh, bon ben, qu'est-c'qu'on sait ? On a le théorème de Pythagore : le théorème de Pythagore dit que le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des 2 côtés, donc il faut comprendre carré comme vraiment un carré, donc, ici, qu'est-ce qu'on écrit ? On écrit qu'on a 3 au carré, ça vaut 9, 4 au carré ça vaut 16, 9 plus 16, ça fait 25, donc on devine... la réponse. D'où si vous voulez l'embarras du professeur quand il a vu la réponse qui lui était donnée par un élève (éclats de rires). D'accord ? Donc évidemment, c'était... c'était une réponse imparable, hein, c'est imparable, le professeur peut pas dire «c'est faux»donc... alors, pour revenir aux choses sérieuses hein, parce qu'on va revenir aux choses sérieuses maintenant donc mon exposé sera divisé en 4 parties.

Dans la première partie, je vous donnerai des éléments de langage. Donc je vous parlerai de géométrie, de théorèmes, je vous expliquerai ce que c'est qu'un lemme, une démonstration, un contre-exemple, une conjecture, je vous parlerai d'algèbre et la grande difficulté de cette partie de l'exposé, ce sera de ne pas me laisser submerger par la démonstration, donc, parce que ce qui nous intéresse, c'est le langage, c'est pas, si vous voulez, le contenu sémantique, c'est le langage qui va nous intéresser donc... Et pourtant, je ne peux pas vous expliquer tout ça en abstrait, je suis obligé de vous l'expliquer sur un exemple parce que, je vais dire, on verra que c'est extrêmement important en fait d'avoir un support qui est un exemple précis.

Dans la deuxième partie, je vous parlerai d'un livre, qui est un livre de Hans Freudenthal qui est un mathématicien, voilà le livre, et c'est un mathématicien qui a compris qu'en fait, il y avait une particularité, une spécificité du langage mathématique, sur laquelle je ne reviendrai pas, qui est que c'est sans doute l'un des seuls langages qui ne soit pas entièrement auto-référentiel. Vous voyez, quand vous prenez un dictionnaire, le dictionnaire définit des mots par rapport à d'autres mots. Mais en mathématiques, justement, il est possible, et c'est ce qu'a fait Hans Freudenthal dans le Lincos, il est possible de construire la mathématique, de manière progressive, en partant si vous voulez de... une impulsion, deux impulsions, tout ça, ça va signifier les entiers, etc., etc. Et il a compris que, en fait, s'il y avait une possibilité de communiquer avec une intelligence extraterrestre, euh, eh bien, il faudrait construire entièrement la langue, c'est parce que là, il s'agit vraiment d'une langue, à partir des mathématiques. Et c'est ce qu'il a fait. Alors il y a des réflexions extrêmement intéressantes, mais ce que nous verrons, ce que nous verrons, qui est aussi tout à fait extraordinaire, c'est qu'en fait, l'univers communique avec nous, il communique en langage mathématique et je vous expliquerai sous quelle forme il communique avec nous.

Alors la troisième partie, ce sera, elle viendra du fait que le langage mathématique bien sûr évolue et, très graduellement le paradigme qui était au centre des mathématiques pendant... euh, jusqu'aux cinquante dernières années, qui était le paradigme des ensembles, a été remplacé, très progressivement pendant les cinquante dernières années, par un nouveau paradigme qui est le paradigme des catégories. Et ce remplacement en fait, au niveau du langage est extrêmement important et en fait, c'est grâce à ce remplacement qu'un concept extraordinaire est né dans les mains de Alexandre Grothendieck. Ce concept, c'est le concept de topos, et c'est un concept qui illustre à merveille le fait que justement les mathématiques ne sont pas du tout, euh, si vous voulez, euh, confinées à un langage, confinées à des calculs ou des choses comme ça. En fait, les mathématiques sont une usine qui fabrique des concepts nouveaux et pour vous montrer la richesse, la variété si vous voulez de ces concepts, le concept de topos est tellement... puissant qu'en fait, il donne des nuances sur la notion de vérité et on verra à la fin de mon exposé que le concept de topos permet par exemple de définir de manière parfaitement rigoureuse ce que c'est que d'être à trois pas de la vérité, à quatre pas de la vérité, etc. Donc c'est quelque chose d'extraordinaire parce que ça montre que le langage mathématique si vous voulez, et pas seulement les mathématiques mais le langage mathématique touche... en fait... a une portée philosophique qui est bien au-delà de ce qui est normalement admis dans le grand public. Le grand public confine les mathématiques à des calculs ou à des figures géométriques mais c'est très très loin d'être là. En fait, si vous voulez, la plupart des concepts vraiment importants ont une origine mathématique et ont une formulation mathématique précise.

Voilà, donc, voilà le plan, voilà le plan, donc ce que j'ai choisi de faire, comme je l'ai dit, c'est de partir d'un exemple concret. Alors, cet exemple concret, c'est un théorème, c'est un théorème qui a un peu été trouvé par hasard, par Franck Morley. Pourquoi il a été trouvé par hasard ? Il a été trouvé par hasard, il a été trouvé en 1899, Franck Morley ne se préoccupait pas de la question qu'on va voir, de l'énoncé qui est là. Euh, en fait, il cherchait un problème géométrique qui était beaucoup plus compliqué sur des cardioïdes, etc., mais en gros, il est tombé dans son cheminement, il est tombé sur un fait, qu'on va considérer comme un fait, et qui est un fait tout à fait frappant, tout à fait extraordinaire, qui dit la chose suivante : il dit que quand vous prenez un triangle, un triangle quelconque, le triangle est absolument quelconque ici, et ce que vous faites, c'est, vous divisez chacun des angles du triangle en trois parties égales, donc, c'est ce qu'on appelle les trissectrices des angles, et vous intersectez ces trissectrices 2 à 2. Ce que dit le fait, ce que dit le théorème de Morley si vous voulez, c'est que vous avez toujours un triangle équilatéral. Alors ça, c'est quelque chose d'extrêmement simple, d'extrêmement frappant, et la réaction d'un géomètre, c'est le doute. C'est-à-dire si vous êtes un géomètre et on vous énonce un énoncé pareil, eh bien, la première chose que vous avez à faire, c'est à douter. Donc vous doutez, vous dites : «Boah, je dis «ça peut pas être vrai !que je vais vous fabriquer un triangle qui ne va pas marcher. D'accord ?». Bon alors là, qu'est-c'qui va se mettre en route dans le cerveau, peut-être que Stanislas nous le dira de manière beaucoup plus précise, mais ce sont les aires visuelles, c'est-à-dire c'est le géomètre qui va se mettre en route, et qui va essayer, il va essayer de construire d'autres triangles et il va regarder ce qui se passe. Donc en fait, on va regarder simplement on va regarder, on va construire d'autres triangles, vous voyez. On construit un autre triangle, eh bien, ça a quand même l'air d'être vrai, quoi (petits rires).

D'accord ? Donc on continue, on continue comme ça, alors vous voyez ce que je suis en train de faire là, je suis en train de faire sur le triangle une opération extrêmement bizarre, je suis en train de descendre le sommet qui est là sans bouger le sommet qui est là, et normalement quand on fait ça, c'est une transformation affine donc ça ne préserve pas du tout les longueurs donc c'est très étonnant que malgré ça, le triangle reste équilatéral au milieu. Donc on continue comme ça, on continue, on cherche toutes sortes d'exemples, on cherche à aplatir le triangle, à le..., on fait la même opération, eh bien, ça a l'air de toujours marcher. Donc au bout d'un moment, au bout d'un moment, quand on a fait ça suffisamment de fois, ben, le doute commence à se dissiper, et là, il faut qu'on se mette en route parce qu'il ne suffit pas d'avoir pris des exemples, bien sûr, des exemples n'ont jamais démontré un théorème, donc le doute a commencé à se dissiper et on va partir, on va se mettre en route, on va se mettre en route pour la démonstration. Et alors, dans une démonstration en général, la démonstration est précédée par des étapes, ces étapes s'appellent des lemmes, d'accord ? Alors c'est pas un hasard si le nom de lemme a été utilisé lorsqu'en fait les astronautes sont allés sur la lune, ils ont employé le terme de lemme, hein, et c'est exactement dans le même sens, c'est-à-dire que le lemme, c'est pas euh, si vous voulez le résultat, mais c'est ce qui vous permet d'avancer et d'aller vers le résultat. Donc dans le langage mathématique, le lemme a un sens extrêmement précis : en général, l'énoncé du lemme en soi n'est pas suffisamment, comment dire, euh, convaincant, pour que ça fasse un théorème, c'est juste un petit résultat qui permet d'avancer, c'est pas vraiment un théorème, d'accord ? Alors là, on va voir un premier lemme et on va voir comment, justement, ce lemme va nous permettre de mieux illustrer, de mieux, si vous voulez, initier au langage mathématique. Donc que dit le lemme ?

Le lemme dit la chose suivante : il ne faut pas que je me perde dans la démonstration donc je vais aller très vite, il dit que si vous regardez les rotations, par rapport aux sommets, donc le centre de la rotation, c'est le sommet, mais les angles sont doubles, et vous faites ce produit, vous faites le produit $R_A.R_B.R_C$. Alors vous allez voir, là, il y a une particularité du langage mathématique, c'est que quand on fait le produit, eh bien, on commence par appliquer R_C. Alors ça vous paraîtra bizarre mais ça vient du fait de la notation dans le langage mathématique, du fait que quand on prend une fonction de x, par exemple $\sin x$, le x apparaît après, donc c'est à cause de ça que, quand on va appliquer $R_A.R_B.R_C$, on va appliquer d'abord R_C puis R_B puis R_A. Bon. Alors, donc, que dit le lemme, le petit lemme ? Il dit que si je fais le produit de ces 3 rotations, j'obtiens ce qu'on appelle la transformation identique. Alors maintenant, ce qui est absolument étonnant, c'est que maintenant on va voir que, on va agir. Au départ, si vous voulez, il y avait un théorème, il y avait un fait, on était exposé à ce fait, mais maintenant on va commencer à agir, pour faire la preuve de ce lemme. Comment est-ce qu'on agit ? Eh bien, c'est ce qu'on appelle un groupe qui agit sur un ensemble. Mais qu'est-ce que ça veut dire ici ? Qu'est-ce que ça veut dire ici ? Ca veut dire quelque chose d'incroyablement simple, ça veut dire que contrairement au langage courant, lorsqu'on va faire la démonstration de ce fait que le produit des 3 rotations R_A, R_B, R_C vaut l'identité, eh bien, on va avoir seulement une toute petite opération à faire, qui est l'opération qui consiste à jouer avec les parenthèses. Alors vous voyez le groupe qui va être en action ici, il va contenir les rotations, mais ça va être en fait le groupe des transformations du plan qui préserve les longueurs. Et alors, la chose essentielle, c'est qu'en fait si vous prenez la rotation autour du point B qui est ici, eh bien en fait, on peut la décomposer en deux choses : la symétrie autour de 1, puis la symétrie autour de 3. Vous voyez, si vous faites la symétrie autour de 1, par exemple, si je prends le point qui est ici, et la symétrie autour de 3, ça va bien tourner de l'angle double, qui est là. Et ça, ça marche en général. Donc qu'est-ce qu'il en résulte ?

Pourquoi la démonstration est aussi simple ? Eh bien, parce que le R_B qui est là, je peux, comme je vous l'ai montré, je peux l'écrire comme $s_3 s_1$. Les autres, c'est $s_1 s_2$ et $s_2 s_3$. Et maintenant je peux jouer avec les parenthèses. C'est pas du tout pareil que dans le langage courant, bien sûr. Donc le rôle des parenthèses n'est pas du tout le même. Dans un groupe, on peut se débrouiller avec les parenthèses comme on veut, on peut faire un jeu de parenthèses, et avec ce jeu de parenthèses, on obtient immédiatement le résultat puisque vous voyez, maintenant, je vais remplacer ce produit-là par un produit où s_3, s_3 seront contigues, s_1, s_1 seront contigues mais comme s_3 était une symétrie par rapport à une droite, $s_3 s_3$, ça vaut 1, $s_1 s_1$ ça vaut 1, il ne reste que $s_2 s_2$ et $s_2 s_2$, ça vaut 1. Donc on a fini, d'accord ? Donc voilà la démonstration.

Donc vous voyez le rôle du langage, le rôle de l'écriture, là, dans la démonstration. Alors un autre petit lemme, d'accord, mais qui va vous montrer comment le même type d'action est absolument crucial dans ce type si vous voulez de démonstration, c'est un lemme qui va aussi nous faire beaucoup avancer, et qui est le suivant, et qui dit comment on va trouver les 3 sommets du triangle de Morley, par exemple, le point P qui est ici qui est à l'intersection de ces 2 trissectrices. Eh bien, que dit le lemme ? On aura ces 2 petits lemmes. Que dit le lemme ? Il dit simplement que le sommet P du triangle de Morley, c'est simplement le point fixe de la même chose que tout à l'heure, mais j'ai mis des puissances 1/3. Le fait d'avoir mis des puissances 1/3, ça veut dire que l'angle par lequel je bouge va être le tiers, le tiers du double de l'angle en C. Eh bien, c'est exactement l'angle qui est ici. Que fait le point P ? Voilà l'action maintenant, voilà, maintenant on va être en action. Eh bien, si on fait ${R_C}^{1/3}$, on transforme P en P'. Et puis si on fait ${R_B}^{1/3}$, après, ben, on ramène P' en P. Donc on a bien le point fixe. Alors maintenant, on commence à contrôler les choses. On commence par contrôler les choses parce qu'on a 3 symboles, R_A, R_B, R_C, et on contrôle les sommets du triangle de Morley grâce à ces 3 choses, d'accord ?. Mais on est bien loin d'avoir fini et quand on est dans cette situation-là, maintenant, qu'est-ce qu'on voit ? Eh bien, avec un peu de réflexion, on s'aperçoit que les deux lemmes que je vous ai expliqués, les deux lemmes que je vous ai expliqués, en fait, ce sont des lemmes vraiment géométriques, c'est-à-dire ce sont des lemmes qui vont être encore vrais en géométrie non-euclidienne.

Qu'est-ce que c'est que la géométrie non-euclidienne ? Ca peut vous paraître très compliqué, mais en fait, en général, si un résultat est vrai en géométrie non-euclidienne, il va être vrai pour la géométrie sphérique. Qu'est-ce que c'est que la géométrie sphérique, eh bien, c'est la géométrie de la Terre, si vous voulez, mais rendue parfaite, une sphère parfaite, et dans laquelle les droites sont les grands cercles. Alors, la conjecture qu'on peut faire à ce moment-là, ben, on peut se dire «ben, peut-être que le théorème de Morley est vrai pour la géométrie sphérique.»Alors, c'est pareil, on va faire appel à nos aires visuelles cette fois, et ça va être plus difficile, parce que maintenant, on ne peut plus prendre une droite, je veux dire on ne peut plus dessiner sur une feuille de papier, il faut vous montrer une figure qui est plus complexe. Donc voilà ce qu'on fait, on essaye, on fait comme tout-à-l'heure, on regarde, Ah, ça a quand-même l'air d'être vrai, hein ? !Vous voyez ? J'ai pris un triangle extrêmement particulier, un type de triangle extrêmement particulier, j'ai pris un triangle qui avait un sommet au pôle Nord et dont la base était sur l'équateur. C'est un triangle très particulier parce qu'il a 2 angles droits, cet angle-là est droit, cet angle-là est droit et la somme des angles évidemment ne vaut pas π. Donc vous voyez, on essaye, on essaye, on regarde, on regarde, ben, ça a l'air quand-même tout à fait vrai, hein, je veux dire, c'est vraiment extrêmement étonnant, vraiment extrêmement étonnant, donc on fait appel à nos aires visuelles, etc., on essaye, et puis là, alors là, on peut poser la question à l'ordinateur.

Donc là, on va... on se pose vraiment la question «est-ce que c'est vrai ?Est-ce que c'est vrai ?», on parle à l'ordinateur, on parle à l'ordinateur, Gérard en parlera de manière beaucoup plus précise que moi, on communique avec l'ordinateur, ce n'est pas très difficile pour la géométrie sphérique, c'est très

très simple, à vrai dire, la géométrie sphérique est même plus simple que la géométrie ordinaire, donc on parle à l'ordinateur, on lui pose la question, et au bout d'un moment, l'ordinateur nous dit «non, c'est pas vrai !». Incroyable ! L'ordinateur calcule la différence entre la longueur du côté qui est là, puisque le triangle est isocèle par définition, donc ces deux longueurs sont égales, mais cette longueur n'est pas a priori la même. Si elle était la même, ce serait un triangle équilatère, équilatère, ça veut dire qu'il y a les 3 côtés qui ont la même longueur, donc en fait, on regarde et incroyable ! Voilà la courbe de toutes, toutes les différences. Au départ, cette différence, c'est presque 0, mais vous voyez, c'est 0 à 4 décimales près. Donc ça veut dire que si on se fiait à notre vue, on aurait cru que le théorème était vrai, d'accord ?, en fait, il n'est pas vrai. Il n'est pas vrai, c'est ce qu'on appelle un contre-exemple, on a fait une conjecture, on a un contre-exemple à cette conjecture, et maintenant qu'est-ce qui se produit ? Du fait qu'on a un contre-exemple à la conjecture, ça nous oblige à changer complètement de stratégie pour la démonstration. Pourquoi ?

Parce que si la conjecture avait été vraie, si le théorème avait été vrai en géométrie non-euclidienne, la preuve aurait été entièrement géométrique. Le fait que le théorème soit faux en géométrie non-euclidienne nous dit qu'il va maintenant y avoir un changement de décor total et ce changement de décor total, ça va être le passage à l'algèbre. L'algèbre est née d'un... comment dire ? est née d'une hérésie. L'algèbre est née d'une hérésie il y a très très longtemps, longtemps avant Jésus-Christ, les hérétiques ont fait la chose suivante : ils ont rajouté des longueurs avec des surfaces... et puis des surfaces avec des volumes. C'est complètement fou ! Vous voyez quand au départ, je vous parlais de ce petit triangle de l'élève, quand on écrit la règle de Pythagore, je vous disais «le carré d'un côté est égal à la somme des carrés...», ça, les dimensions sont préservées, parce qu'on rajoute entre elles des surfaces, on rajoute entre elles des carrées, mais il y a un mathématicien très ancien, très ancien, qui a eu l'idée de poser un problème, je crois que c'était chez les Babyloniens, dans lequel il posait une relation entre la surface et la longueur, c'est incroyable, donc, à ce moment-là, l'algèbre est née. Donc elle est née de cette hérésie, qui était de rajouter entre elles des quantités qui n'ont absolument pas la même dimension, que jamais un physicien ne ferait bien-sûr, hein, qui est d'ajouter des longueurs, des surfaces et desvolumes. Et alors donc, maintenant donc, voilà la démonstration. Que dit la démonstration ? Elle dit que maintenant le théorème de Morley n'a rien à voir avec un énoncé géométrique pour la géométrie non-euclidienne, il a à voir avec un énoncé d'algèbre, un énoncé d'algèbre qui est tellement explicite que l'on peut le donner à faire à un ordinateur. Quand, si vous voulez, une différence fondamentale, entre le théorème de Morley au départ et l'énoncé qui est ici, peut importe l'énoncé, j'ai dit que je ne voulais pas me perdre dans les détails techniques, etc., quelle est la différence fondamentale ? La différence fondamentale, c'est que quand on est devant un problème géométrique, on peut sécher, on peut sécher indéfiniment. Quand on est devant un problème d'algèbre comme celui-là, non seulement on n'a pas le droit de sécher parce qu'on doit faire le calcul, mais on peut déléguer le problème à l'ordinateur, c'est ce qu'on appelle le calcul formel, et ce calcul formel est tellement puissant si vous voulez, qu'en fait, il peut faire des calculs infiniment plus compliqués que celui-là, je me souviens d'avoir une fois, il y a très longtemps, au début des années 2000, délégué un calcul à l'ordinateur qui a pris toute une nuit, je voulais démontrer qu'un certain produit était associatif, et bon ben, le lendemain matin, l'ordinateur avait fait le calcul, donc c'est absolument phénoménal la puissance qu'il y a pour faire des calculs extrêmement compliqués. Donc, lorsqu'on a fait ça, si vous voulez, on peut se dire : «Bon, d'accord, on a donné une démonstration du théorème de Morley, donc si vous voulez, on est arrivé. Le lemme est arrivé sur la lune, d'accord ? Le lemme est arrivé sur la lune, d'accord ?. C'était le troisième lemme».

Mais... maintenant, quelle est la différence ? Il y a une différence qui est absolument cruciale, la différence qui est cruciale, c'est le pouvoir génératif du langage mathématique. Parce que maintenant, une fois qu'on a formulé le résultat sous la forme du lemme, le dernier, le dernier lemme, qui est purement algébrique, eh bien, le théorème de Morley a un sens sur n'importe quel corps... Bien sûr, je ne vous ai pas dit qu'il y avait un secret derrière le lemme que j'ai donné ici, qui était que ce lemme, on l'applique à un corps, ce qu'on appelle un corps qui est le corps des nombres complexes. Le corps des nombres complexes, c'est un miracle, c'est le fait qu'on peut, vous avez l'habitude des nombres rationnels, par exemple, que vous pouvez ajouter, multiplier, etc.. On a l'habitude des nombres réels, eh bien, il y a une extension des nombres réels, qui est merveilleuse, et qui fait qu'il suffit en fait de rajouter une racine d'une équation qui est l'équation $x^2 + 1 = 0$ pour qu'on puisse résoudre toutes les autres équations. C'est ce qu'on appelle le corps des nombres complexes, et ce corps des nombres complexes, bon, on l'apprenait en... je crois qu'on l'apprenait en seconde, moi, je l'avais appris en seconde, en physique, pour faire de l'électromagnétisme, et en fait, ce qui est extraordinaire dans le corps des complexes, c'est qu'un triangle équilatère est caractérisé par la propriété que 3 points forment les sommets d'un triangle équilatère si et seulement si $a+jb+j^2c = 0$

où j est une racine cubique de l'unité. Alors maintenant, ce qui est merveilleux, c'est qu'on a un théorème de Morley pour n'importe quel corps qui contient une racine cubique de l'unité. Alors, ces corps abondent, par exemple, vous pouvez prendre les entiers modulo 7, les entiers modulo 13 ou les entiers modulo 31, ce sont des corps, c'est ce qu'on appelle des corps de Galois, et ils ont tous une racine cubique de l'unité, donc il y a tous, pour eux, un théorème de Morley que jamais, on aurait pu imaginer, si on n'avait pas eu ce cheminement, à travers la géométrie et l'algèbre, qui nous a conduit ici. D'accord ?. Donc, voilà où on en est, voilà où on en est. Euh alors maintenant, oui, bien sûr, il faut que je vous dise, oui, quand-même, qu'il y a, dans le langage mathématique, un usage constant des mots du langage ordinaire. Euh, on utilise, dans le langage mathématique, des mots du langage ordinaire, et il y a une phrase assez provocante, qui est faite à travers les mots du langage ordinaire, et qui s'appelle «désintégration des mesures atomiques sur les espaces nucléaires». Alors, si vous voulez, cette phrase est d'autant plus ironique que l'inventeur de la dénomination d'espace nucléaire, d'abord, elle est ironique parce qu'un mathématicien qui connaît le sens de ces mots vous dira «c'est une trivialité.». Alors trivialité, c'est usité, c'est un espèce de jargon mathématique, qui est pour quelque chose qui, boh, qui est vrai, mais qui est sans intérêt, d'accord ? Donc... Mais ce qui est vraiment ironique dans cette phrase que je vous ai donnée, c'est que l'inventeur, l'inventeur de la notion d'espace nucléaire est un mathématicien formidable, très connu, Alexandre Grothendieck, mais qui a passé une majeure partie de sa vie à être un militant anti-nucléaire. (rires) Donc, alors, il est... il y a toujours, il avait un don absolument extraordinaire pour trouver la bonne terminologie. Alors, donc, j'en viens maintenant au Lycos, donc, euh, je ne vais pas paraphraser ce que dit Hans Freudenthal, son livre est extrêmement précis, etc., il a écrit une introduction que je vous recommande de lire, dans laquelle il fait des réflexions sur le langage mathématique et sur le langage en général et il explique un point, qui est un point délicat, qui est un point qui n'est pas du tout évident, qui est que en mathématique, on utilise des variables, bon je vous ai parlé de x tout à l'heure, et c'est un peu la même chose lorsqu'on parle du langage courant. Mais, en mathématique, les variables ont un sens précis, et en plus, par exemple, il y a une notion d'objet générique, c'est-à-dire en mathématiques, on peut parler par exemple d'un triangle générique, etc., il y a ce qu'on appelle un point générique, lorsqu'on parle d'un ensemble mathématique. Et alors, ce qui est vraiment étonnant, c'est que si.... Donc... Hans Freudenthal discute en grand détail de ce qui se passe dans le langage ordinaire, et le fait que dans le langage ordinaire, bien sûr, il y a des variables : par exemple, on dit une porte, on dit une chèvre. Vous allez voir que je ne prends pas l'exemple de la chèvre au hasard.

Bon, mais alors bien sûr, si on se posait la question, ce serait extrêmement difficile de décrire, euh, une porte générique, ou de décrire une chèvre générique. Seul un artiste génial y est arrivé pour la chèvre, et je suppose que vous connaissez l'œuvre en question, hein, c'est ce qu'on appelle, c'est la chèvre de Picasso, et elle a cette propriété, cette chèvre, cette incarnation de la chèvre a cette propriété extraordinaire, comment dire, qu'elle abstrait les propriétés de la chèvre, de manière concrète, par une œuvre artisitique. Alors, bien sûr, en mathématiques, tout ça, ça a un sens précis, ça a un sens beaucoup plus précis, et euh, bon... pour en revenir à la communication avec une intelligence extraterrestre, on a essayé, on a essayé, on a essayé de communiquer avec une possible intelligence extraterrestre, en envoyant la sonde, par exemple, en envoyant la sonde Pioneer dans l'espace, et sur cette sonde, on a donné un certain nombre de renseignements, ben, par exemple, on a donné le Soleil, enfin, on a donné la position des planètes, etc., etc., mais, bon, est-ce que... est-ce que dans ce qu'on a donné dans cette sonde, on a donné aux aliens la possibilité de nous répondre ? Je prétends qu'il y a une autre manière de faire, ç'aurait été de leur envoyer un petit triangle de Morley (éclats de rires), d'accord ?... Et imaginez qu'ils nous répondent comme ça... Ben voilà, là, on saurait que... non seulement, ils nous ont compris, mais que ce sont des gens intelligents, etc., etc. Alors en fait, bon, en fait, ce moyen de communication dont je vous parle n'est pas très pratique parce que ça veut dire qu'il aurait fallu qu'ils reçoivent la sonde en tant qu'objet physique, et qu'ils nous la renvoient en tant qu'objet physique. C'est pas comme ça qu'on communique dans l'Univers. On sait bien que l'Univers est écrit en langage mathématique, mais de quelle manière l'Univers communique-t-il avec nous, en langage mathématique ? Alors là, vous allez être vraiment surpris, parce que la manière dont il communique avec nous, on va voir, c'est... vous savez, on a beaucoup cherché... on a beaucoup cherché à... comment dire... à étiqueter, étiqueter les objets, etc. Et en cherchant à étiqueter les objets, on est tombé graduellement sur la bonne idée. Et la bonne idée de l'étiquetage des objets, c'est ce qu'on appelle les codes-barres. Ce que je vais vous expliquer maintenant, c'est que l'Univers communique avec nous par des codes-barres. Et qu'en plus, ces codes-barres, ce sont des objets mathématiques. Et je vais vous raconter ça, je ne sais pas combien de temps il me reste, bon, mais je vais... Et il faut que je vous parle des topos aussi. Donc... je vais vous raconter ça. Pourquoi ? Parce que ce qui est incroyable, c'est comment ça a été découvert. D'abord, ça a été découvert en physique. En physique, il y a un opticien allemand, qui s'appelle Fraunhofer et qui a eu l'idée absolument géniale, de regarder la lumière du soleil, l'arc-en-ciel qui nous vient du soleil quand on fait passer la lumière du soleil à travers un prisme, de la regarder avec un microscope. Et il s'est aperçu qu'il y avait des raies noires. Il y avait un certain nombre de raies noires. Alors au début, il a dû penser que son objectif était sale, etc. Puis, bon... Et finalement, au cours de son existence, il a trouvé 500 raies noires. Ensuite, il y a eu des physiciens, je crois que c'étaient Bunsen et... qui ont réussi en chauffant des corps comme le sodium à obtenir des raies qui cette fois étaient des raies brillantes, et pas des raies noires, sur un fond noir, et qui correspondaient aux raies du spectre de Fraunhofer, qui venaient du soleil. Et ils se sont aperçus, si vous voulez, que chaque élément chimique, avait un code-barre. Donc chaque élément chimique, par exemple l'hydrogène, etc., avait un code-barre. Sauf que... il y avait un code-barre qu'ils n'arrivaient pas à trouver sur la Terre. Il y avait un code-barre qui manquait sur la Terre. Et alors, en bons physiciens, ils lui ont donné un nom, ils l'ont appelé l'hélium.

Ils ont dit «il y a un corps chimique, qui n'est pas présent sur la Terre, qui est dans l'héliosphèreet qui s'appelle l'hélium.». Miracle ! Il y a eu une éruption du Vésuve. On a fait la spectrographie des laves du Vésuve et on a trouvé l'hélium dedans. Donc ça, c'est extraordinaire ! Qu'est-ce que ça veut dire ? C'était la première étape. C'était la première étape des codes-barres dans la physique. La deuxième étape qui est absolument sidérante, c'est au niveau de la mécanique quantique, c'est Schrödinger, quand il a eu l'idée de son équation, il a eu l'idée si vous voulez, qu'il avait un opérateur et cet opérateur, en fait, c'est ce qu'on appelle des spectres bien sûr. Donc il est allé voir des mathématiciens et il leur a demandé «Qu'est-ce que c'est un spectre en mathématiques ?». Alors ses amis lui ont dit : «Eh bien, va voir Hermann Weyl, et il te dira tout de suite ce que c'est.». Et Schrödinger a dit : «Surtout pas, il calculerait le spectre avant moi.». Donc, ce qu'a fait Schrödinger qui était extraordinaire, c'est qu'il a donné le coup d'envoi au fait que tous ces spectres, tous ces codes-barres qui nous viennent de l'Univers, en fait, ils ont une raison d'être mathématique, en fait, ce sont des êtres mathématiques. Ce sont les spectres d'opérateurs dans un espace de Hilbert.

Et lorsqu'on les voit, ils semblent très compliqués, mais l'opérateur lui, est beaucoup plus simple. Et c'est l'opérateur qui nous donne la clef, par exemple, la clef qui permet de comprendre le tableau de Mendeleiev. Donc, en fait... l'Univers nous parle, il nous parle, mais il nous parle sous forme spectrale, il nous parle en nous envoyant des codes-barres, ces codes-barres sont décalés vers le rouge, c'est ça qui nous a permis de comprendre l'expansion de l'Univers, etc. Mais vous voyez le rôle phénoménal, là, de l'écriture. Là, je ne parle pas du langage mathématique, je parle de l'écriture. Donc, l'Univers nous envoie des renseignements sous forme d'écriture, et d'écriture spectrale. Alors maintenant, j'en viens à l'évolution du langage mathématique, d'accord ?. Donc le langage mathématique a évolué bien sûr. Il a évolué au cours des 50 dernières années, et il a évolué de manière qui sera assez difficile à faire passer dans l'enseignement. La raison pour laquelle je pense que ce sera assez difficile à passer dans l'enseignement, c'était ce qui s'était passé lorsque Lichnerowicz avait promulgué l'enseignement de la théorie des ensembles, dans les classes secondaires, même au collège. Et je me souviens d'un exercice que j'avais vu, je veux dire j'avais été témoin d'un exercice. L'exercice est le suivant : on prend 3 ensembles A, B, C. On trace des diagrammes de Venn, d'accord, (rires), et le sujet de l'exercice était : on suppose $A \cap B = C$ et le sujet de l'exercice, c'était «Hachurez l'ensemble vide.». Donc, il y avait un seul élève qui avait trouvé, et il a mis «J'ai pas pu, il est vide.». (rires). D'accord, donc, il est clair qu'on va avoir des problèmes pour les catégories, bon, les catégories, c'est déjà le niveau au-dessus de la théorie des ensembles. Mais comme je le disais dans mon introduction, les catégories ont permis, elles ont permis justement, grâce à leur souplesse par rapport à la théorie des ensembles d'inventer un langage, si vous voulez, de développer un langage, qui a été, euh, comment dire, qui a été formulé, euh, initié etc. par Alexandre Grothendieck et qui est la notion de topos.

Alors la notion de topos, c'est bien que je vous en donne simplement une idée. Et cette idée, c'est que, au lieu de vous concentrer sur un espace, comme l'espace de tout à l'heure, la sphère, ou un truc comme ça, au lieu que ce soit l'espace que je vous montre, qui est au-devant de la scène, l'espace va jouer un rôle complètement différent. L'espace va disparaître, va être derrière la scène, mais il va jouer le rôle d'un Deus ex machina, c'est-à-dire qu'en fait, on va faire de la théorie des ensembles comme on fait d'habitude, mais l'espace en question va servir de paramètre. C'est-à-dire que l'espace en question ne va jamais être au-devant de la scène, il va être derrière, et alors, ce dont on s'aperçoit lorsqu'on fait ça, c'est que toutes les propriétés de la théorie des ensembles, qui sont des propriétés ordinaires, par exemple la démonstration que je vous ai donnée du théorème de Morley, vont continuer à avoir lieu, pourvu que vous n'ayez jamais utilisé le raisonnement par l'absurde, pourvu que vous n'ayez jamais utilisé la règle du tiers exclus. Tous ces raisonnements-là vont continuer à marcher, c'est extraordinaire parce que ça vous donne des raisonnements qui vont marcher avec paramètre, qui vont marcher avec cet aléa, si vous voulez.

Le topos introduit un aléa, d'accord ?. Et alors maintenant, ce qui est incroyable, c'est que, de ce seul fait, la notion de vérité va devenir plus subtile. Et au lieu d'avoir seulement le vrai ou le faux, qui nous permettaient de raisonner par l'absurde, on va avoir une notion de vérité qui va être beaucoup plus nuancée, beaucoup plus subtile, que la notion ordinaire, on va continuer à travailler comme si on travaillait dans la théorie des ensembles, et ce qui me semble probable, c'est que graduellement, cette notion va nous permettre de formaliser des situations dans lesquelles de dire celui-là a raison, celui-là a tort est complètement naïf, vous voyez quand par exemple, vous voyez une discussion à la télévision ou un truc comme ça et où la notion de vérité va devenir beaucoup plus intéressante et beaucoup plus subtile, et adaptée à une situation donnée. Alors ça, ça a été fait par Grothendieck, donc, il y a la notion de vérité dans un topos, et il y a comme je vous le disais la possibilité d'avoir des nuances. Alors je terminerai en vous montrant une phrase, euh, pardon, un texte, une page de texte de langage mathématique, mais pour vous montrer la richesse, la variété du langage mathématique, dans toute sa splendeur, cette page de texte, c'est sans doute la dernière lettre que Grothendieck a écrite à un mathématicien et il est question de... il est question de paradis originel, d'algèbre topologique, de sempiternelle catégorie semi-simpliciale, de l'œil du géomètre, de faisceaux d'ensembles, d'avoir senti, etc., des topos catégoriques, etc. Donc vous voyez l'immense richesse du langage mathématique, et à quel point, justement, la portée philosophique de ce langage est quelque chose qui est souvent ignoré, mais qui est d'une puissance incomparable. Voilà, donc, je vais terminer là-dessus, merci.

Grand entretien avec le mathématicien Alain Connes

Nicolas Martin : On retrouve souvent chez les grands scientifiques ce point commun, cette ligne de fuite ou cette échappée belle vers le monde des arts.

Poète, peintre, musicien ou romancier, en l'occurrence pour Alain Connes, médaille Fields et médaille d'or du CNRS, mathématicien à l'origine de la géométrie non commutative, une branche des mathématiques qui a pour ambition d'embrasser la GUT, la Grand Unified Theory, la théorie du tout qui réconcilierait la relativité générale et la mécanique quantique. Romancier, donc, musicien aussi, mais avant tout et pour toujours, chercheur obsessionnel.

Alain Connes est notre grand invité pour l'heure qui vient. Bienvenue dans la méthode scientifique.

Bonjour Alain Connes.

Alain Connes : Bonjour.

Nicolas Martin : Mille merci d'avoir accepté notre invitation, alors je vais faire un rapide mot de présentation sommaire que je vous laisserai le soin de compléter pour nos auditeurs qui ne vous connaissent pas encore.

Vous êtes donc mathématicien dans ce paradis pour chercheurs qu'est l'IHÉS, l'Institut des Hautes Études Scientifiques à Bures sur Yvette.

Alain Connes : Je suis d'abord au Collège de France, ne l'oublions pas, le Collège de France.

Nicolas Martin : J'y viens, également Professeur émérite au Collège de France, titulaire de la chaire Analyse et géométrie, membre de l'Académie des Sciences française, mais d'autres académies des sciences, notamment l'Académie des sciences, la National Academy of Sciences aux Etats-Unis, mais aussi au Danemark, en Norvège. Vous avez obtenu la médaille Fields qui est, je le rappelle, la plus grande distinction mathématique en 1982 pour vos travaux sur les algèbres d'opérateurs.

---

interviewé par Nicolas Martin le 17.5.2018 dans le cadre de l'émission de radio La méthode scientifique sur France Culture
https://www.franceculture.fr/emissions/la-methode-scientifique/la-methode-scientifique-du-jeudi-17-mai-2018

On peut dire que vous avez en quelque sorte révolutionné l'algèbre en fondant la géométrie non commutative, vous nous en reparlerez et le CNRS vous a décerné sa médaille d'or en 2004 pour la résolution des problèmes mathématiques soulevés par la physique quantique et la relativité. Et vous venez de publier votre deuxième roman après *"Le théâtre quantique"*, *"Le Spectre de l'Atacama"*, coécrit avec votre épouse Danye Chéreau et votre ancien directeur de thèse Jacques Dixmier. C'est aux éditions Odile Jacob. Que faut-il ajouter Alain Connes à cette description ?

Alain Connes : Disons que si vous voulez, effectivement, c'est un parcours scientifique qu'on peut regarder maintenant avec du recul. Et je commencerai par dire si vous voulez que chaque mathématicien est un cas particulier. Donc, je veux dire il n'y a pas de généralité à faire et en fait, le parcours que j'ai suivi, j'ai mis beaucoup de temps pour trouver ma voie, c'est-à-dire, au départ, si vous voulez, j'avais commencé par faire de la logique avec l'analyse non standard, avec Gustave Choquet. J'avais fait un peu de théorie des nombres aussi, et c'est finalement avec Jacques Dixmier que j'ai trouvé ma voie.

Et donc, en fait, le parcours commence avec lui, avec les algèbres d'opérateurs et en fait, avec, si vous voulez, ce que von Neumann avait compris à partir des découvertes de la mécanique quantique, c'est von Neumann, qui avait formalisé la mécanique quantique et donc le formalisme qu'il avait mis au point, si vous voulez, n'a pas changé depuis, on peut dire que ce cadre qu'il a créé, le cadre de l'espace de Hilbert, des vecteurs dans l'espace de Hilbert, des états, etc., c'est quelque chose qui n'a jamais été remis en question depuis les années 1930. Mais il a été beaucoup plus loin, avec un collaborateur qui s'appelle Murray, et en gros, si vous voulez von Neumann s'est posé la question de savoir quand est ce qu'on pouvait définir un sous-système d'un système quantique. C'est-à-dire que quand on prend un système quantique, normalement, il implique tous les opérateurs dans l'espace de Hilbert. Bon, ça, c'est un peu technique, mais von Neumann s'était posé la question de savoir quand est-ce qu'on a un sous-système ? Et au départ, on penserait que simplement quand on a un sous-système, l'Espace de Hilbert se factorise en produit de deux sous-systèmes, mais von Neumann avait réfléchi de manière beaucoup plus profonde, en cherchant à comprendre au niveau algébrique, donc, on revient à l'algèbre, au niveau algébrique, en quoi se manifestait cette factorisation. Et avec Murray, ils ont eu une surprise extraordinaire, C'est-à-dire qu'ils ont trouvé qu'au-delà des factorisations très simples de l'espace de Hilbert en produit tensoriel, comme on appelle cela en mathématiques, il y avait des factorisations algébriques, ce qui a donné la notion de facteur, c'est-à-dire que dans le langage des algèbres d'opérateurs, il y a une notion essentielle qu'il faut arriver à comprendre dès le départ comme étant issue d'un problème essentiel de mécanique quantique, qui est de savoir quand est-ce qu'on peut caractériser un sous-système.

Et alors ? La merveille qui s'est produite, c'est la suivante, c'est que von Neumann a créé ses facteurs. Dieudonné les a appelés algèbre de von Neumann, puisque elles étaient dues à von Neumann, Dixmier a travaillé énormément dessus. Et quand je suis arrivé, j'ai eu la chance d'arriver à un bon moment. C'était à un moment ou un mathématicien japonais qui s'appelle Tomita avait, peut être 5 ou 6 ans avant, trouvé une théorie très, très intéressante. Et j'ai eu la chance de découvrir qu'en fait, l'évolution dans le temps qui était associée à chaque état, normalement, dans une algèbre, après avoir fait des calculs très, très, très compliqués pendant pendant des mois et des mois, j'ai fini par découvrir que cette évolution dans le temps, elle était unique, elle était en fait indépendante de l'état modulo, ce que l'on appelle les automorphismes intérieurs, c'est quelque-chose d'invisible. Donc, en fait, j'ai compris à ce moment-là que, si vous voulez, ces facteurs de von Neumann lorsqu'ils étaient d'un type assez exotique qu'on appelle le type III, ils engendraient leur propre temps. Et du fait qu'ils engendrent leur propre temps, ça a créé quantités d'invariants qui ont permis de débloquer complètement effectivement la classification de ces facteurs. Ces facteurs apparaissaient comme quelque chose d'intraitable avant, et dans ma thèse, sous Jacques Dixmier, en fait, j'ai montré comment on pouvait, si vous voulez, ramener ces facteurs à des choses beaucoup plus simples grâce à cette évolution dans le temps et comment ils avaient, si vous voulez, toutes sortes d'invariants, comme les périodes, etc., etc.

Nicolas Martin : C'est la non commutativité.

Alain Connes : Non, ce qu'il faut retenir, à un niveau abstrait, au niveau conceptuel, ce qu'il faut retenir, c'est que la non commutativité avait été découverte par un physicien, par Heisenberg. Donc, ça, c'était une découverte, presque, comment dire... presque à partir de l'expérience, c'est à dire que Heisenberg s'était basé sur les lois de la spectroscopie. C'est-à-dire qu'on observe des spectres. Ces spectres ont des propriétés très particulières et Heisenberg avait compris, à partir de ce qu'on appelle le principe de composition de Ritz-Rydberg, qu'en fait, si vous voulez l'algèbre qui était sous-jacente à la mécanique quantique, il a compris ça en 1925 et c'est une découverte fondamentale, était une algèbre non-commutative. Je ne rappelle pas l'anecdote, bien sûr, qui était qu'il était sur l'île d'Helligoland, qu'il était seul. Il pouvait enfin travailler tranquille parce qu'il n'avait plus de cours à donner, parce qu'on l'avait envoyé là, parce qu'il avait le rhume des foins. Il habitait chez une vieille dame, il pouvait travailler tant qu'il voulait. Il faisait des calculs, des calculs très compliqués. Et puis, une nuit, à 4 heures du matin, il a compris.

Nicolas Martin : Eurêka ! Ça existe, donc !

Alain Connes : Ça existe.

Et il a eu devant ses yeux, ça, il le dit, un paysage absolument merveilleux, qui était presque effrayant de nouveauté. C'était le paysage de la mécanique quantique et c'était le paysage du non commutatif. Ce qu'avait compris Heisenberg, c'est que quand on travaille avec un système microscopique, un tout petit système, on n'a plus le droit de permuter les lettres quand on fait des calculs en physique, vous savez, quand on écrit $e = mc^2$, on pourrait écrire $e = c^2$ fois m, ce serait kif kif, ce serait pareil. Bon.

Nicolas Martin : Ça, c'est commutatif.

Alain Connes : Ça, c'est commutatif. Mais ce qu'a compris Heisenberg, c'est que quand on travaille justement, par exemple, avec la position et le momemt, bon, c'est la vitesse multipliée par la masse, d'une particule microscopique, à ce moment-là, il faut faire attention, exactement comme nous faisons attention lorsque nous écrivons. Lorsque nous écrivons, évidemment, on n'a pas le droit de permuter les lettres, puisque si on les permute, ça fait une anagramme, on peut obtenir n'importe quoi à partir de quelque chose. Le premier livre qu'on a écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, aussi chez Odile Jacob...

Nicolas Martin : *Le théâtre quantique...*

Alain Connes : Oui, *Le théâtre quantique*, on cite des anagrammes, donc, je veux dire, par exemple *L'Horloge des anges ici-bas* et *Le boson scalaire de Higgs*. On voit qu'en permutant les lettres, on peut changer le sens de manière complète.

Nicolas Martin : C'est le bonheur de notre collègue Etienne Klein.

Alain Connes : Absolument, voilà. Étienne Klein est un grand spécialiste des anagrammes.

Nicolas Martin : Alain Connes, ça fait Nicolas Anne, vous voyez, c'est à peu près mon niveau en mathématiques.

Alain Connes : Non, mais une fois, j'avais reçu un e-mail de quelqu'un. Je ne comprenais absolument pas ce qu'il voulait dire. Je croyais qu'il était devenu fou, mais il y avait l'anagramme de mon nom cinq fois. Bon, ce qui est facile à trouver, je veux dire... Donc, pour en revenir à Heisenberg, si vous voulez, il a eu cette découverte extraordinaire, qui est que quand on travaille avec un système microscopique, ce qu'on appelle les observables, les variables naturelles du système ne commutent plus entre elles. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que quand on prend ce qu'on appelle en physique l'espace des ases du système, c'est un espace qui ne correspond plus à la description que Descartes faisait et qui a été à la source de toute la géométrie algébrique, ce qu'on appelle la géométrie algébrique, c'est à dire d'un côté, il y a la géométrie, de l'autre côté, il y a les coordonnées de l'espace comme Descartes le faisait, mais ces coordonnées, elles commutent d'habitude.

La découverte d'Heisenberg, c'est que quand on prend l'espace des phases de la physique, on ne peut plus supposer que les coordonnées commutent. Et ce qui est à la racine de la géométrie non commutative, c'est exactement cela. C'est-à-dire qu'il y a des espaces qui sont en fait des espaces naturels, ce ne sont pas des espaces pathologiques ou quoi que ce soit.

Il y a des espaces naturels dans lesquels, justement, les coordonnées ne commutent plus. Alors en fait, si vous voulez, ce qui a rendu la théorie intéressante, ce qui a rendu la théorie vraiment intéressante, parce que généraliser la géométrie algébrique aux cas où les coordonnées ne commutent plus, ça paraît une tâche fastidieuse, et qui ne réserve pas de grandes surprises. Mais ce qui moi m'a motivé, si vous voulez, pour développer la géométrie non commutative, c'est précisément le travail que j'avais fait dans ma thèse sous la direction de Jacques Dixmier, et qui avait montré qu'un espace non commutatif, c'est-à-dire une algèbre non commutative, engendre son propre temps. Et alors ça, si vous voulez, c'est tellement nouveau par rapport à la géométrie ordinaire... Qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que la géométrie ordinaire, commutative, elle est statique, elle bouge pas, alors que la géométrie non commutative, il y a automatiquement un temps qui se dégage. Et ce temps va permettre de faire des choses qu'on n'aurait aucune idée de faire autrement. En particulier, il permet de faire la thermodynamique d'un espace non commutatif. Il permet par exemple d'avoir un espace non commutatif, et de le refroidir. Donc ça, c'est tout à fait inattendu, si vous voulez, c'est quelque chose qui est complètement nouveau.

Et c'est ça, bien sûr, qui m'a motivé pendant des années et des années, pendant pratiquement tout mon trajet scientifique, à explorer ces espaces, à explorer la géométrie pour ces espaces qui sont complètement nouveaux.

Nicolas Martin : Et cette notion de temps, d'ailleurs, que vous avez explorée aussi avec Carlo Rovelli, que nous recevions ici même, il y a peu de temps. On va remettre le lien sur le fil Twitter de l'émission. J'aimerais interroger, Alain Connes, quelque chose que je fais souvent avec les grands scientifiques qui se succèdent à ce micro, c'est la question de la vocation. On vous décrit en ce début de carrière que vous venez de nous raconter brillamment et cette anecdote, que vous avez fini par nous raconter, d'Heisenberg, finalement, malgré avoir dit l'inverse. On vous décrit comme un jeune mathématicien au talent exceptionnel. Quel est le sentiment... Quelle est la conception que vous avez justement de cette vocation, de cet attrait pour les mathématiques ? A quel moment ça naît ? Comment ça germe ? Est-ce qu'il y a une vocation ou est-ce qu'il n'y a pas une vocation, est-ce que c'est un accident de parcours ?

Alain Connes : Bon, je pense que c'est quelque chose qui naît assez lentement, c'est-à-dire que, si vous voulez dans mes études, effectivement, assez vite, j'ai passé beaucoup plus de temps à essayer de développer mes propres idées, à essayer de me créer mon propre terrain que d'être scolaire et de suivre les cours, etc. Donc, ça s'est produit en fait très tôt, ça s'est produit très tôt et je me souviens, par exemple *(petit rire)*. Je me souviens que quand j'étais enfant, je crois que c'était en seconde ou en première : j'avais eu un prof de math et il avait dit dans la classe qu'il n'y avait pas de formule qui donnait le nombre de nombres premiers plus petits que n.

Alors évidemment, ce n'est pas vrai, je veux dire. Je pense que ce qu'il avait en tête, c'est qu'il y a pas de formule simple ; en fait, d'ailleurs, il existe une formule simple, mais elle n'est pas très, très utile. Je peux vous la donner, comme ça on verra.

Nicolas Martin : Donnez-la nous.

Alain Connes : Donc ce n'est pas une formule pour $\pi(n)$, le nombre de nombres premiers plus petits que n. C'est une formule pour $n - 2\pi(n) - 2$. Mais enfin bon, peu importe. Et puis, c'est vrai seulement pour n plus grand que 13. D'accord ? Mais n'empêche, c'est très simple. C'est la partie entière de la somme de 1 à n de cosinus $\pi\Gamma(k)$ sur k. D'accord, on ne peut pas dire que c'est très compliqué. D'accord, donc, moi, le lendemain, j'étais revenu, j'étais revenu et j'avais donné à mon prof une formule qui était bien plus compliquée que celle là. Mais à partir de ce moment-là, j'avais franchi un pas qui est un pas essentiel pour le jeune mathématicien et ce pas essentiel, c'est de ne croire qu'en soi-même, c'est-à-dire de ne pas donner du crédit à l'autorité. Et ça, c'est extrêmement important. Et je pense que les mathématiques sont un sujet dans lequel c'est possible. Ce serait beaucoup plus difficile en chimie, en histoire, etc. Parce que là, la connaissance joue un rôle absolument essentiel...

Nicolas Martin : L'observation ?

Alain Connes : Pas seulement, mais l'accumulation des connaissances, alors qu'en mathématiques, on peut très bien se trouver face à face à un problème. Le problème est très simple à poser et a priori, il n'y a pas de raison pour que si on trouve une solution, elle ne soit pas juste. Donc, les mathématiques sont très particulières en ce sens-là, en ce sens où il n'y a pas, si vous voulez a priori, une espèce de bourrelet de savoir, de connaissances qui empêchent un jeune qui commence d'arriver à comprendre quelque chose que personne d'autre n'a compris. Ça, c'est extrêmement important.

Nicolas Martin : Ni Dieu ni maître en mathématiques.

Alain Connes : Oui, d'une certaine manière. Je vais dire, et en fait, une des conditions essentielles dans le parcours d'un mathématicien, c'est d'arriver à se remettre soi-même en question, c'est-à-dire si vous voulez, si, à partir du moment où on croit qu'on est plus fort que les autres, etc., là, c'est le début du déclin. Je crois qu'il est absolument essentiel de jamais penser que, justement, on a acquis suffisamment de connaissances, etc., ou je pense que ça, c'est essentiel, ou que la voie que l'on suit est forcément la bonne.

Je pense que ça, c'est un des sujets essentiels de notre livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier.

Donc, dans *Le spectre d'Atacama*, on décrit le parcours d'un mathématicien qui s'appelle Armand, Armand Lafforêt. Et on met en évidence justement cette qualité, cette propriété essentielle qu'est le doute. Pourquoi ? Parce que rien ne dit que la voie dans laquelle on est engagé quand on veut résoudre un problème, soit la bonne. Il faut constamment se remettre en question. Il faut constamment se poser la question de savoir si, bien sûr, si on arrive au bout, tant mieux.

Mais quand le problème est très difficile et le problème dont on parle dans le livre est un problème extrêmement difficile, dans ces cas-là, effectivement, il n'y a pas d'autre issue que de douter constamment et d'être capable de se remettre en question.

Nicolas Martin : Sur justement ce rapport au travail, sur cet acharnement à résoudre les problèmes, vous vous êtes attaqué à la conjecture de Riemann, à l'hypothèse de Riemann qui est le huitième des 23 problèmes mathématiques pour le 20$^{\text{ème}}$ siècle de Hilbert, qui n'a, sauf preuve du contraire, et je parle sous votre contrôle pour le moment toujours pas été résolu. Vous parlez, Alain Connes, à ce propos-là et sur votre travail en général, de l'obsession du mathématicien, il y a quelque chose d'obsessionnel dans ce travail ?

Alain Connes : Oui, en fait, je me suis intéressé à ce problème complètement par hasard. Ça, il faut bien le savoir.

Nicolas Martin :

C'est-à-dire ?

Alain Connes : C'est-à-dire que comme c'est un des grands problèmes, mon principe de départ, c'était le contraire, c'est-à-dire que c'est toujours de rester marginal, de rester un petit peu en embuscade et de ne jamais m'intéresser à un problème comme celui-là. Sauf que ce qui est arrivé, c'était en 1996, et j'ai été invité à une conférence qui était pour le 70ème anniversaire de Atle Selberg.

Alors Atle Selberg est un très, très grand mathématicien norvégien qui, lui, a travaillé énormément sur l'hypothèse de Riemann et a trouvé des choses formidables.

Et à l'occasion de cette rencontre qui avait lieu à Seattle, en 96, il y a eu un jour... Bon, j'ai fait ma conférence parce que j'avais trouvé avec un collaborateur, avec Jean-Benoît Bost, on avait trouvé un système de mécanique quantique qui était relié à la fonction zêta de Riemann, mais il apparaissait comme étant relié de manière périphérique, c'est-à-dire la fonction zêta apparaissait, comme ce qu'on appelle la fonction de partition, mais c'était périphérique. Or, ce qui est arrivé, c'est que j'ai donné ma conférence. Et puis, à la fin de ma conférence, Atle Selberg est venu me voir et il m'a dit "It is not so clear that what you do will be related to the Riemann hypothesis."

Nicolas Martin : Il n'est pas très évident que ce que vous faites est relié à l'hypothèse de Riemann ?

Alain Connes : Exactement. Alors après, il y a eu, on a eu une rencontre, etc. Puis quand je suis rentré, j'étais vraiment pensif, pendant une semaine. À l'époque, il n'y avait pas de mail. Je ne regardais pas mes mails. Je pouvais être complètement déconnecté. Je suis resté dans le décalage horaire pendant environ 8 jours. Et puis, au bout de 8 jours, je me suis rendu compte qu'en fait, le système qu'on avait défini avec Jean-Benoît Bost donnait exactement l'espace que des gens avaient cherché à propos de ça.

Donc bon, alors j'ai dit "donnait "l"'espace". Rien ne dit que ce soit encore le bon.

Il n'empêche que ce que ça montrait tout de suite, ça montrait qu'une formule qui est essentielle dans cette théorie-là qu'on appelle la formule explicite de Riemann-Weil, elle apparaissait complètement naturellement à partir de la géométrie qu'on avait définie. Du coup, si vous voulez, j'ai écrit une note aux Comptes-Rendus. Et puis, de fil en aiguille, j'ai été pris dans cette espèce de... comment dire ? dans cette espèce de situation dans laquelle on ne contrôle plus, parce que c'est vrai que si vous voulez, dès que quelqu'un s'intéresse à ce problème, en gros, je rigole hein, mais en gros, si vous voulez, les autres mathématiciens souhaitent qu'il se casse la gueule et surtout, qu'il ne le résolve pas, et pour une bonne raison.

Nicolas Martin : Décidément, le milieu mathématique est encore plus anarchique qu'on ne l'imaginait avant de commencer cette émission.

Alain Connes : En fait, c'est plus compliqué que ça parce qu'en fait, comment dire, c'est très intéressant la sociologie du milieu mathématique. Mais cette hypothèse, l'hypothèse de Riemann, il faut comprendre en fait que sans que cela soit évident, elle est derrière un nombre incalculable de développements très fructueux dans les mathématiques du 20$^{\text{ème}}$ siècle. Ça a commencé par la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr. Ça a continué avec tout ce qu'a fait André Weil et puis, bien sûr, Hasse, Artin, etc. sur la géométrie en caractéristique finie, ce qu'a fait Deligne, ce qu'a fait Grothendieck. Donc, si vous voulez, il y a une énorme influence de cette conjecture sur le développement des mathématiques.

Et en tout cas, ce qui, moi, m'attristerait terriblement, c'est si elle était résolue de manière anecdotique.

Et en fait, j'ai récemment, par exemple, j'ai gagné de l'argent par un journal de théorie des nombres qui reçoit assez souvent des articles qui prétendent démontrer cette hypothèse. En fait, ils me l'envoient et ils me payent quand je trouve l'erreur.

Pourquoi ? Parce que donc, vous voyez, je veux dire. C'est très, très compliqué.

C'est une situation extrêmement compliquée, extrêmement intéressante, extrêmement intéressante, parce qu'en fait, ce qui est probable, c'est qu'elle ne soit démontrée que quand le paysage qui l'entoure sera entièrement dévoilé. C'est un peu comme un sommet de montagne. Mais avant qu'on comprenne vraiment ce qui est derrière, apparemment, il n'y a pas de manière de couper, si vous voulez, il n'y a pas de raccourci et s'il y en avait un, ce serait un peu catastrophique parce que ça voudrait dire que le magnifique paysage que l'on doit découvrir à propos de cette conjecture, eh bien, il n'aurait pas été dévoilé.

Nicolas Martin : Et à 16h22, Nous poursuivons notre entretien avec Alain Connes, qui vient de publier un roman, son deuxième, *Le Spectre d'Atacama*, coécrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, puisqu'on parlait de la vocation dans votre carrière mathématique, Alain Connes, d'où vous vient cette volonté, cette envie d'écriture romanesque, de fiction ?

Alain Connes : Ah alors ça, c'est une envie de liberté, si vous voulez, en fait. C'est à dire qu'on en a beaucoup discuté ensemble, les trois auteurs. Mais le travail mathématique est un travail dans lequel, bien sûr, l'imagination joue un rôle, non négligeable, c'est évident. Mais cette imagination est terriblement corsetée. C'est-à-dire qu'il y a une réalité mathématique. J'utilise beaucoup l'ordinateur, énormément. Et cette réalité mathématique, elle est indéniable. C'est-à-dire que si on a une idée d'une formule, etc., on peut essayer de la vérifier, et si ça marche, ça marche et si ça ne marche pas, ça ne marche pas.

Donc, on a un rôle de l'imagination. Bien sûr, on a un rôle surtout, je dirais, de la création d'images mentales, c'est-à-dire que quand je dis imagination, c'est beaucoup plus, le fait qu'en cherchant un problème, même si on n'arrive pas à le résoudre, en fait, quand on n'arrive pas à le résoudre, c'est mieux parce que ça veut dire que c'est un problème qui nous permet de nous améliorer nous-mêmes, à ce moment-là, on crée des images mentales.

Quand vous voyez quelqu'un dans le métro, qui lit une partition de musique, si vous n'êtes pas musicien, ça ne vous dit rien. Si vous voyez un mathématicien qui lit des maths, ça ne vous dit rien non plus. Et par contre, un mathématicien, ça va lui parler tout de suite. Ça va lui parler tout de suite parce qu'il a des images mentales. Et ces images mentales, elles se réveillent dès qu'il voit les formules correspondantes.

Donc ça, c'est extrêmement important. Malheureusement, c'est très dur. C'est très, très difficile, c'est-à-dire que bon, on peut avoir une idée. Et puis, au bout d'un moment, quand on essaye d'écrire une démonstration, non, ça, il y a un truc qui colle pas, etc. donc si vous voulez, on se heurte à une réalité qui est extrêmement résistante. Par contre, dans l'écriture romanesque, qui est ce plaisir qu'on a eu tous les trois, ces deux fois, mais surtout la deuxième, parce qu'on a passé énormément de temps à écrire ce deuxième livre, dans cette écriture romanesque, là, justement, l'imagination peut se déployer. Et en fait, ce qui me frappe quand je regarde ce livre, c'est, surtout avec les développements actuels, ce qui me frappe, c'est l'infinie liberté dont jouit le héros, qui est Armand.

Nicolas Martin : Dans lequel on a du mal à ne pas vous reconnaître, Alain Connes.

Alain Connes : Oui...

Nicolas Martin : Il est mathématicien, il travaille à l'IHES...

Alain Connes : Oui, mais en fait, c'est vrai, il y a quelques ingrédients. Bien sûr, c'est vrai, Mais en fait, non, non, non, non. En fait, c'est un personnage de roman et c'est un personnage de roman qui jouit d'une liberté qui, malheureusement, sera de plus en plus difficile à avoir. Par exemple, bon, il va au Chili. Après, il décide de prendre un bateau, il va dans l'île des États, etc. Et alors, on se dit bien que maintenant, à l'heure actuelle, il aurait eu un compte Facebook, les gens se seraient aperçus qu'il ne répond plus, qu'il n'est plus là. On serait parti à sa recherche, etc. Donc cette notion de liberté fondamentale, cette magnifique liberté, elle est présente dans le livre. Elle montre, si vous voulez, à quel point elle est essentielle à la maturation d'une idée, etc. Justement, quand le mathématicien est obsédé par une idée.

Mais, ce qui me fait peur, c'est à quel point elle risque de disparaître. Vous savez, je raconte toujours cette anecdote, qui m'avait tellement frappé, qui était au moment d'une visite inopinée du président des Etats-Unis à l'Institut de Princeton et le directeur de l'Institut avait fait visiter les bureaux puisque bon, il voulait montrer... À un moment-donné, ils avaient frappé au bureau d'un mathématicien et ils étaient rentrés dans le bureau. Ils avaient trouvé le mathématicien allongé sur sa table, en train de dormir. *(rire d'AC).*

Donc voilà, alors que maintenant, ils seraient rentrés, qu'est-ce qu'ils auraient vu ? Ils auraient vu le mathématicien, devant son ordinateur, en train de répondre à 36 sollicitations, en général complètement sans intérêt. Il aurait dû, je sais pas, écrire un rapport ou faire etc. Mais si vous voulez, cette notion de ne rien faire, cette notion de laisser son esprit complètement en roue libre et capable, justement, à un moment donné, de vous réveiller et de vous dire voilà, là, il y a quelque chose, etc., eh bien, cette notion elle est, malheureusement, très, très menacée, par la technologie, par le fait que nous sommes de plus en plus enrégimentés, de plus en plus corsetés, de plus en plus labélisés.

Donc, je vais dire, la lecture de ce livre, je pense, donne un plaisir dans ce sens-là, c'est-à-dire on voit cet état pur en train d'être menacé, en train de disparaître, malheureusement.

Nicolas Martin : On reviendra... parce que vous parlez, effectivement, dans ce livre *Le Spectre d'Atacama* de l'intelligence artificielle sur laquelle vous n'avez pas un regard très clément, va-t-on dire. Mais avant cela, peut être, un mot, il y a plein de choses qui me viennent à l'esprit, mais peut-être, pour la suite de notre entretien et pour les auditeurs, un mot sur ce que raconte *Le Spectre d'Atacama*, trois personnages, vous l'avez dit, Armand, un mathématicien, Charlotte, une physicienne, et Ali, un informaticien, que se passe-t-il ? Ce sont les mêmes personnages que dans votre premier roman, par ailleurs.

Alain Connes : Bien sûr, ce sont les mêmes personnages. En fait, ce que raconte le roman, c'est un spectre, qui est reçu par l'Observatoire d'Alma...

Nicolas Martin : Alors ce n'est pas un fantôme, c'est un spectre...

Alain Connes : Ce n'est pas un fantôme ; un spectre, vous savez, c'est quelque chose qui a un sens à la fois physique et mathématique. La première manière dans les spectres sont apparus. C'est ce qu'on appelle des spectres d'absorption. Et c'est Fraunhofer, un physicien qui était opticien plutôt allemand, qui a eu cette idée géniale qui était de regarder le spectre du soleil qui avait été par exemple divulgué par Newton. C'est-à-dire on fait passer les rayons du soleil à travers un prisme et on obtient bien sûr les couleurs de l'arc en ciel.

Mais il avait eu cette idée extraordinaire de regarder ce spectre, par exemple, avec un microscope, et il s'était aperçu qu'il y avait des raies noires. Alors bien sûr, au départ, on peut penser les raies noires, c'est l'objectif qui est sale ou un truc comme ça. En fait, ce n'était pas le cas. Ces raies noires, il en avait répertorié environ 500 et c'est le premier spectre dont on a eu la trace physique. Et c'est ce qu'on appelle un spectre d'absorption.

Qu'est-ce que cela signifie ? Ça signifie si vous voulez que ces raies noires, en fait, elles viennent de la signature de certains corps chimiques qui sont contenus dans la couronne solaire, ça veut dire que la lumière qui vient du soleil, elle est absorbée par ces corps chimiques. Et comme ils ont une signature, ces corps chimiques, elle permet de savoir quelle est la composition, justement, de la couronne solaire. Alors après, on s'est aperçu qu'il n'y avait pas seulement des spectres d'absorption, mais qu'il y avait aussi des spectres d'émission.

Par exemple, quand on prend du sodium, qu'on le chauffe et on fait passer la lumière qui sort du sodium à travers un prisme. On obtient cette fois des raies brillantes sur un fond noir et ces raies brillantes sur un fond noir correspondaient exactement à certaines des raies noires, sur le fond lumineux, dans le spectre du soleil.

Et alors il y avait quelque chose de formidable aussi qui s'est produit.

C'est que parmi les spectres qu'on a pu reconnaître, il y en avait un complètement mystérieux, qui ne correspondait pas à un corps chimique sur la Terre. Et les physiciens et les chimistes ont eu cette idée formidable de dire "Oh ! C'est un corps chimique qu'on ne connaît pas." Et ils l'ont appelé l'hélium comme le Soleil, bien sûr. Alors, la merveille des merveilles, c'est qu'il y a eu une éruption du Vésuve, je ne sais plus en quelle année et qu'on a pu observer dans la lave du Vésuve exactement le spectre de l'hélium. Donc, la boucle était bouclée. Ça, ce sont les spectres de la physique. Au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens et les physiciens ont compris comment calculer ces spectres de la physique, à partir des mathématiques, et à partir d'une notion de spectre qui est issue des mathématiques et qui est centrale dans le formalisme de la mécanique quantique de von Neumann.

Donc, le spectre d'un opérateur, ça existe, c'est sa variabilité, c'est son espace vital, si vous voulez. Et en fait, alors le point de départ du livre, c'est Armand, qui est mathématicien, qui est un peu obsédé par un problème, etc. Et puis, un jour, il reçoit un message de Rodrigo, qui est un ami, qui est un astronome à l'observatoire d'Alma et qui lui dit “Viens me voir, viens me voir, il y a quelque chose d'extrêmement mystérieux, au Chili, dans le désert d'Atacama”. Et finalement Armand, bien que son ami ne soit plus disponible parce qu'il a eu un AVC, finalement, il récupère le spectre, alors il récupère un spectre très, très bizarre, très bizarre. Et puis après, il va s'embarquer avec ce spectre dans toutes sortes d'aventures qui sont une espèce de fuite par rapport au comment dire, au brouhaha du monde moderne. Il essaye d'échapper au brouhaha du monde moderne pour essayer de se concentrer, de comprendre ce que c'est que ce spectre.

Alors, il va aller d'aventure en aventure. Comme ça, il va... Si vous voulez, son voyage physique est une métaphore de son voyage intellectuel, bien sûr. D'accord ?

Et alors après, ce qui est absolument incroyable, c'est qu'il va retrouver au fil de ses aventures, un autre des personnages du premier livre, qui est Charlotte et Charlotte, avait eu elle-aussi une expérience. Elle, elle avait vécu vraiment dans sa chair, si vous voulez, Charlotte, physicienne, qui est physicienne au CERN et dans le premier livre, elle avait vécu une expérience dans sa propre chair. Et c'est une expérience qui paraissait folle dans le premier livre, je pense que beaucoup de gens qui ont lu le premier livre considéraient que c'était une expérience tout à fait folle...

Nicolas Martin : *Le théâtre quantique*, publié chez Odile Jacob.

Alain Connes : Et alors, en fait, cette expérience, on a compris ce qui était derrière, dans le deuxième livre, et on a, comment dire, on a expliqué ce qui lui était arrivé parce qu'en fait, c'est d'ailleurs, c'est très amusant parce qu'Armand, lui, il l'avait fuie, et quand il apprend l'expérience dont Charlotte est rescapée...

Nicolas Martin : Une expérience de vie quantique

Alain Connes : Une expérience de vie quantique, quand il apprend cette nouvelle, en fait, elle est juxtaposée avec un article du Monde sur une représentation de *La Belle au bois dormant*. Et ce qui est derrière, parce qu'il y a beaucoup de choses cachées dans le livre, il faut le lire à plusieurs reprises, il y a énormément de choses qu'il faut comprendre. Ce qu'il faut comprendre, c'est que l'expérience de Charlotte, c'était exactement l'expérience de *La Belle au bois dormant*.

C'est-à-dire ? Elle avait été transpercée par une aiguille et elle a été réveillée par un Prince charmant, en l'occurrence, le Prince charmant, c'est Florimont. C'est un ordinateur.

Et on apprend dans le livre qu'alors que dans le premier livre, on disait "elle est ressuscitée". Elle est morte puisqu'elle a été transpercé dans le CERN, dans un des du CERN. Son cerveau a été entièrement pris par les ordinateurs, etc. Et puis, elle est ressuscitée par l'ordinateur. Donc, on ne comprenait pas. En fait, dans le deuxième livre, on comprend qu'elle n'est jamais morte parce que la mort est la mort cérébrale. Et quand son cerveau a été récupéré par l'ordinateur, alors, on pourrait se demander "mais pourquoi est-ce que l'ordinateur a voulu la ressusciter ?". En fait, c'est elle-même qui s'est ressuscitée. Et c'est elle-même qui s'est ressuscitée, en se rajoutant quelque chose, elle s'est rajouté un petit plus dans le cerveau. Et dans le deuxième livre, justement, ce qui est absolument étonnant, c'est qu'elle s'est rajouté quelque chose dans le cerveau. Alors ça lui permet de fonctionner beaucoup mieux quand elle est à proximité de Florimont, ce n'est pas au hasard. C'est le nom de l'ordinateur qui ressuscite, dans le ballet, c'est Florimont qui joue ce rôle-là.

Et donc, en fait, ce qui se produit, c'est que comme elle est, en fait, elle est un peu trans-humaine, c'est-à-dire qu'elle s'est rajouté quelque chose dans le cerveau, qui fait que quand elle est proche de l'ordinateur, elle fonctionne mieux. Alors, ce qui est très étonnant, c'est que ça lui permet de décanuler, comme on dit en mathématiques, c'est-à-dire de comprendre un autre spectre, qui est aussi envoyé en alternance par l'Observatoire d'Alma. Mais c'est Armand qui trouve la signification du premier spectre.

Nicolas Martin : Ne nous dévoilez pas tout parce que... il y a plein d'aventures, effectivement, à lire sur différents niveaux, et puis, il y a quelque chose aussi de très important dans ce roman dont il faudra que vous nous expliquiez la couverture aussi, parce qu'elle est assez surprenante, et cet autre élément, c'est la place de la musique, et notamment de cette musique.

Extrait du Quatuor pour la fin du temps de Messiaen

Nicolas Martin : Voilà, c'est un extrait du *Quatuor pour la fin du temps* d'Olivier Messiaen. Pourquoi, Alain Connes, en quelques mots, parce qu'on va entendre votre co-auteur, Jacques Dixmier, à ce propos, pourquoi l'importance d'Olivier Messiaen ?

Alain Connes : Alors pourquoi Olivier Messiaen en particulier ? C'est qu'en fait, si vous voulez, le temps, comme je le disais, a joué un rôle permanent dans mon évolution, dans mon parcours de mathématicien, et à propos de zêta, donc la fonction zêta de Riemann, alors que la plupart des autres chercheurs sur le problème, cherchent les zéros de zêta, c'est à dire le spectre, comme un spectre d'énergie ou un spectre de fréquences, je me suis aperçu que dans mon approche, ça apparaît comme un spectre de temps, un spectre de longueurs.

Et alors, quand on regarde ce qui correspond à zêta, mais qui a déjà été compris par le travail... par André Weil, si vous voulez, c'est un cas analogue, mais plus simple. Eh bien, dans ce cas-là, on obtient des temps, exactement comme dans le cas de zêta. Et ces temps vérifient une propriété extrêmement particulière comme temps d'attaque dans une mélodie et cette propriété extrêmement particulière est une propriété qui avait été mise en évidence par Messiaen, sous le nom de rythmes non-rétrogradables, et ça revient à une palindromie. Et cette propriété, en fait, est une propriété essentielle de la fonction zêta correspondante.

Donc, j'ai pensé que c'était une opportunité extraordinaire de faire le lien entre, justement, les zéros de fonction zêta, pour le cas analogue à celui d'André Weil avec Messiaen.

Nicolas Martin : N'en dites pas trop puisque nous allons entendre justement votre co-auteur et ex-directeur de thèse à ce propos sur le lien entre mathématiques et musique, puisque vous êtes allée rencontrer Jacques Dixmier, Céline Loozen, bonjour.

Céline Loozen : Oui, bonjour Nicolas, bonjour Alain Connes, bonjour a tous.

Je suis allée voir votre ancien directeur de thèse, Jacques Dixmier, pour comprendre un peu le lien entre les mathématiques et la musique, car dans l'écriture de votre roman, vous avez puisé des idées auprès de Messiaen, qui vous a inspiré sur la question du rythme et du temps. Et vous avez découvert une relation directe entre les concepts développés par Messiaen et les mathématiques. Cela vous a alors donné l'idée de composer vous-même de la musique, à partir des nombres premiers pour créer ce qu'on appelle des rythmes non-rétrogradables.

Jacques Dixmier : Les aspects de la musique dont il est question ici sont relativement élémentaires. On a été inspirés spécialement par le *Traité* de Messiaen, *Traité de musique et d'ornithologie*, je crois bien. Et comme il était beaucoup question de spectre dans le début de l'histoire, c'est lié, dans l'histoire, c'est lié à des observations astronomiques, puis c'est lié à des ondes de tremblements de terre. Enfin, les ondes, les valeurs propres interviennent souvent. Alors c'était pas tellement étonnant que la musique intervienne puisque c'est une question de fréquences, quand même, la hauteur d'un son, ça veut dire la fréquence de la vibration de l'air.

Céline Loosen : Quel est le rapport entre les nombres premiers et la composition arithmétique musicale, qui est mis en évidence à travers un des morceaux d'Olivier Messiaen.

Jacques Dixmier : Alors ça, c'est à la fin du livre, effectivement, où on utilise les nombres premiers pour fabriquer des rythmes. Pour trouver certains rythmes, on fait appel alors à une théorie mathématique qui elle est extrêmement élaborée. Ça s'appelle la théorie des courbes algébriques sur les corps finis et à l'action de l'automorphisme de Frobenius *(J.D. rit.)* C'est lié à ça. Les diagrammes qu'on trouve vers la fin, avec les différents rythmes, sont liés à ce problème.

Céline Loosen : Et on retrouve l'idée du spectre qui, elle, est omniprésente à travers l'histoire.

Jacques Dixmier : Oui, l'idée de spectre intervient dans le livre, à beaucoup d'aspects. Ce n'est pas étonnant d'ailleurs, vus les travaux d'Alain Connes. Pour lui, le spectre d'un opérateur, c'est quelque chose de fondamental. Mais alors, ce qui nous a amusés, c'est que ça puisse intervenir dans une histoire et pas dans un mémoire...

Céline Loosen : Notamment, il est question de l'espace, espace à une gamme musicale. Et qu'est-ce qu'on retrouve dans la musique de Messiaen qui est cité tout au long de l'ouvrage ?

Jacques Dixmier : Eh bien, il parle de rythmes.

Céline Loosen : Mais rythmes non-rétrogradables. Qu'est-ce que ça veut dire ?

Jacques Dixmier : Ça veut dire qu'on peut les retourner dans le temps et qu'ils sont identiques à eux-mêmes. Ce sont des rythmes, donc non-rétrogradables, ça veut dire un rapport assez particulier au temps qui sont obtenus par la méthode des courbes sur les corps finis qui sont dans le bouquin. Il y a des rythmes non-rétrogradables. Vous pouvez trouver les dessins. Voilà, là, par exemple, la droite représente le temps et les petites barre verticales donnent les temps d'attaque des notes.

Le fait que ça soit non-rétrogradable, vous pouvez le voir très bien. Par exemple, prenez le rythme qui est là et si vous allez dans les deux sens, regardez. Vous avez deux, deux notes rapprochées... ici aussi. Là, il s'agit donc des rythmes, pas des hauteurs. Vous voyez que, si vous le lisez à l'envers...

Céline Loosen : C'est comme un palindrome ?

Jacques Dixmier : Oui, c'est aussi le terme qu'il emploie. Mais là, c'est plus net, regardez. Ça commence ici ou là. Et puis, vous avez deux notes très rapprochées, deux notes très rapprochées, etc. Donc vous pouvez le lire à l'envers.

Céline Loosen : Il y a une forme de symétrie.

Jacques Dixmier : Voilà, d'ailleurs un mathématicien parlerait plutôt de symétrie. D'ailleurs, quand on parle d'automorphisme de Frobenius des courbes sur les corps finis, on parle de la symétrie de son spectre. Oui, mais alors, donc vous voyez les nombres qui sont là, ce sont les nombres premiers. Enfin, ceux-là sont compris entre 43 et 83. Et en particulier, donc, ils donnent lieu... C'est ça le point de vue du bouquin. On explique comment à chaque nombre premier, on peut associer un rythme. C'est ça.

Céline Loosen : Et quel est le rapport avec l'espace physique ?

Jacques Dixmier : En un sens, il y en a aucun. Sauf qu'on parle de spectre dans les deux cas. Dans l'espace physique, il y a des... Eh bien, par exemple, vous avez entendu parler des ondes gravitationnelles, qu'on vient de mettre en évidence et expérimentalement. Eh bien, comme toutes les ondes, elles ont des longueurs d'ondes, et des fréquences. Donc, ça démarre tout juste. Donc, on sait encore presque rien, mais on mesurera des vibrations de l'univers entier. On arrivera à faire ça d'ici quelques années. Il y aura sûrement là des spectres d'opérateurs qu'on pourra analyser mathématiquement. On vérifiera expérimentalement et ça sera l'analogue à l'échelle de l'univers, des vibrations d'un tambour, des vibrations, dans l'histoire, du désert d'Atacama, lorsqu'il y a un tremblement de terre, des notes de la guitare, tout ça ressort d'un schéma assez général.

Retour à l'interview initial.

Nicolas Martin : Voilà Jacques Dixmier, co-auteur avec vous, Alain Connes, du *Spectre d'Atacama*. Un mot sur cette analyse, cette interprétation en tout cas de votre usage de la musique dans le roman ?

Alain Connes : Oui, alors disons qu'effectivement, il y a deux aspects. D'abord, si vous voulez, lorsqu'on regarde le cas analogue de la fonction zêta, mais qui avait été résolu, lui, par André Weil, comme l'explique Jacques Dixmier, ce que ça va donner ? Ça va donner des rythmes, ça va donner des temps d'attaque, mais qui ont cette propriété particulière de palindromie, de symétrie et que Messiaen appelle rythmes non-rétrogradables. Mais qu'est-ce qu'il a en tête ? Il a en tête que si on les rétrograde, on obtiendra le même. Donc, ça ne donnera rien de nouveau. Donc c'est ça l'idée.

Alors, en fait, donc là, ce sont des rythmes. Mais j'ai été amené à composer, pour chaque nombre premier, des hauteurs qui ensuite seraient jouées par ces rythmes-là.

C'est ça qu'on va entendre. Et pour composer ces hauteurs, je me suis attelé à la tâche d'associer à chaque premier une mélodie, mais de manière purement mathématique.

C'est ça qu'on va écouter.

Nicolas Martin : C'est ça qu'on va écouter. On peut rappeler, bien sûr, à nos auditeurs qui n'ont vraiment pas la fibre mathématique, qu'un nombre premier'est un nombre qui n'est divisible que par lui même et par 1.

Voilà.

Courte écoute musicale.

Nicolas Martin : Qu'est-ce qu'on vient d'entendre, Alain Connes ?

Alain Connes : Alors, ce qu'on vient d'entendre, c'est très étonnant, c'est qu'on vient d'entendre une mélodie qui est différente pour chacun des nombres premiers entre 7 et 67 et comment elle a été construite, cette mélodie, elle a été construite de manière purement mathématique, c'est-à-dire que ce qu'on a fait : on a pris le spectre de la guitare. Quand vous regardez les frettes sur une guitare, en fait, ces frettes, elles ne sont pas du tout espacées de manière égale. Et quand on regarde ce que cela signifie mathématiquement, ce sont les puissances d'un nombre et ce nombre... donc elles sont espacées exactement comme les puissances d'un nombre. C'est q puissance n, disons. Et ce nombre, c'est la racine douzième de deux, mais c'est pratiquement aussi la racine dix-neuvième de trois.

Et c'est ce qui est à l'origine de la musique. Bon, alors, en fait, ce que l'on a fait pour définir cette mélodie associée à chacun des nombres premiers entre 7 et 67, c'est de regarder le nombre premier, de faire son développement en ce qu'on appelle une fraction continue, mais en prenant, par rapport à ces puissances de q, c'est à dire en essayant de l'écrire comme une puissance de q et à ce moment-là, on obtient automatiquement une mélodie, qui est palindromique ici. Et la manière dont on l'a entendue là, on l'a entendue de telle sorte que donc, chaque fois qu'il y avait un nombre premier, il y avait une mélodie correspondante. Elle était différente pour chacun des nombres premiers puisqu'on sait que leur développement en fractions continues sont différents.

Et maintenant, on va entendre jouer cette mélodie pour chaque nombre premier qui était jouée de manière égale, on va l'entendre jouer par un rythme qui est un rythme à la Messiaen, mais qui lui est associé à une fonction de zêta, comme l'expliquait Jacques Dixmier, qui est associée à une courbe. Donc, si vous voulez la différence fondamentale, ça va être que la fonction zêta va vous donner une manière de jouer, qui va être différente, au niveau rythme, au niveau des attaques des notes. Mais sinon, la mélodie sera exactement la même.

(Nouvelle écoute musicale.

Voilà, donc si vous voulez, ce qu'on a entendu, on a bien vu que là, y'avait, ta ta tata *(des accélérations, des notes très courtes)*, donc la manière de jouer est complètement différente. Et alors, ce qui est assez extraordinaire, c'est qu'on a fait les calculs pour 6 courbes différentes, et on s'aperçoit que chaque courbe, donc, elle a, comment dire, sa personnalité et elle joue d'une manière... mais d'une manière qui est cohérente. Donc c'est une espèce d'interprète. Donc ce qu'on dit là, c'est qu'on arrive à percevoir, par l'ouïe, par l'audition, on arrive à percevoir par l'ouïe, par l'audition, on arrive à percevoir quelque chose qui, normalement, est très, très difficile à comprendre, qui est justement, bon, ces valeurs propres du Frobenius qui font cette analogue de la fonction zêta de Riemann, mais qui sont perçues cette fois de manière rythmique, qui sont perçues comme des temps, d'accord, donc ça c'est un... Où ça intervient dans le livre ? Ça intervient de manière cruciale dans le livre parce que, en gros, un des messages du livre, c'est que s'il y a manière de communiquer avec des extraterrestres, avec une intelligence extraterrestre, les mathématiques sont un outil extraordinaire pour cela. Et en fait, donc, il y a là, l'Observatoire d'Alma a reçu deux spectres qui sont envoyés en alternance. C'est ce que l'on apprend au bout d'un moment dans le livre et le fait que l'on reçoive ces deux spectres et que l'on ait compris, grâce à Charlotte pour le premier spectre, grâce à Armand pour le second, ce que signifient ces deux spectres, eh bien, il y a une révélation, c'est forcément, ça nous vient d'êtres intelligents. Alors d'êtres intelligents, en quel sens ? intelligents, en quel sens ?

Là, c'est le summum de l'intelligence. C'est quelque chose qui a été trouvé par Bernard Riemann, qui était un mathématicien du 19$^{\text{ème}}$ siècle. Et c'est sans doute le summum de l'intelligence. C'est avoir compris que ce qui régit les nombres premiers, c'est de la musique. Ce qui régit les nombres premiers, ce sont ce qu'on appelle justement ces zéros de la fonction zêta. C'est eux qui régissent l'aléa qui est dans les nombres premiers et la conjecture de Riemann dont on parlait tout à l'heure, justement, elle est extrêmement signifiante pour la raison suivante. C'est que ce qu'elle dit, en gros, c'est que dans le spectre correspondant qui est *le Spectre d'Atacama*, qui est la couverture du livre. Dans ce spectre, ce que dit la conjecture de Riemann, c'est qu'il n'y aura pas de, il n'y aura pas, ce sera toujours des raies extrêmement précises, il n'y aura pas ce qu'on appelle de résonances, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas d'endroit où, au lieu d'avoir un temps d'attaque qui est précis, il y a un temps d'attaque qui est diffus.

C'est ce que dit la conjecture. Ce qu'elle dit sur les nombres premiers, c'est qu'en fait, bien qu'ils aient l'air complètement aléatoires, ils sont gouvernés par un aléa, mais un aléa qui est parfaitement contrôlé, si vous voulez, et qui est parfaitement... Oui ?

Nicolas Martin : J'aimerais, parce qu'il nous reste juste peu de temps, une petite minute, juste un mot, tout de même, Alain Connes, pour conclure, sur cette tentation que j'ai envie d'appeler la tentation holistique : vous êtes mathématicien, romancier, musicien, la volonté de comprendre, d'intégrer ce langage mathématique comme langage universel, qu'en pensez vous ?

Alain Connes : Si vous voulez, voilà, ce que je pense, c'est la chose suivante : c'est que l'une des grandes trouvailles de l'esprit humain, c'est de comprendre, bon. L'esprit humain, au 19ème siècle, je parlais de Bernard Riemann, mais, parlons de Galois : Galois a été capable, sans avoir d'ordinateur, sans avoir de moyens de calcul, etc. de comprendre comment complètement capturer les relations rationnelles entre les racines d'une équation, en lui associant une autre équation et en résolvant celle-ci de manière tautologique, pratiquement. Mais il disait à l'époque : "Sautons à pieds joints sur les calculs." J'ai eu à faire, à l'Académie, un exposé sur Galois pour le deux-centième anniversaire de sa naissance, et j'ai montré, puisque maintenant on peut faire les calculs avec l'ordinateur, j'ai montré pour une équation du cinquième degré très simple, ce que donneraient les calculs, dans ce cas-là : on voit bien que Galois, ça lui était absolument impossible. Il n'empêche, il avait compris parfaitement, conceptuellement, tout ce qui était derrière. Et le message du livre, un message qui est très, très important, c'est que justement, on a tendance maintenant de nos jours, à se laisser aller à la tentation du faire sans comprendre, par opposition au comprendre sans faire de Galois et par opposition à la création des concepts qui est l'apanage des mathématiques.

Nicolas Martin : Ce sera le mot de la fin, Alain Connes, puisqu'il est 16h52... Un autre livre que nous vous conseillons : *Le Spectre d'Atacama*, d'Alain Connes, qui a été notre invité, co-écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, c'est aux éditions Odile Jacob, merci beaucoup, Alain Connes, d'avoir accepté notre invitation et d'avoir été avec nous tout au long de cette heure.

Alain Connes à propos des mathématiques

Alain Connes
Géométrie non-commutative
Médaillé Fields
Professeur de Mathématique, Collège de France, Institut des Hautes Études Scientifiques, et Université de l'État de l'Ohio

Je crois que les mathématiques sont un moyen pour l'esprit humain de créer des concepts. De multiples façons, les mathématiques jouent un rôle que la philosophie aurait pu jouer dans la création de concepts qui peuvent être utilisés dans le monde réel. Cela prend du temps pour que les concepts évoluent et soient utilisés dans le monde réel, mais la réelle fabrique, ce sont les mathématiques. Ces concepts ont à voir avec la forme et les choses abstraites entre autres, et ils sont plus subtils et divers que peuvent l'être les nombres. C'est vraisemblablement quelque chose que le grand public ne réalise pas. Les mathématiciens utilisent des nombres seulement lorsqu'ils en ont besoin. On pourrait dire que l'idée d'énergie provient de la physique, mais en fait, elle trouve son origine dans les mathématiques. Les mathématiques sont le langage ultime dans lequel les idées abstraites sont distillées et deviennent très précises, et elles peuvent alors être utilisées dans différents domaines. En même temps, les mathématiques peuvent être très dures parce qu'elles résistent. La réalité est coriace ; vous ne pouvez pas faire ce que vous voulez. C'est effrayant. On ne devrait pas être effrayé. Il y a une jolie citation de Alexander Grothendieck qui dit, "Être effrayé par le fait de commettre une erreur, c'est la même chose qu'être effrayé par la vérité."

J'ai une anecdote au sujet de l'enfant d'un de mes amis qui montre l'essence des mathématiques très clairement. A l'âge de 5 ans, il était sur la plage avec son père. Il avait été assez malade vers 3 ans et son père était toujours inquiet pour sa santé. Pendant une heure, l'enfant était resté tranquillement assis sur la plage en ayant l'air pâle. Le père était angoissé. Alors l'enfant est venu voir son père et lui a dit, "Papa, il n'y a pas de plus grand nombre." Le père était étonné. Il n'était pas mathématicien, il a demandé à l'enfant, "Comment le sais-tu ?". L'enfant a donné une preuve. On entend beaucoup d'inepties à propos d'enfants apprenant à compter sur leurs doigts. Ici vous avez un petit enfant de cinq ans qui a trouvé, de lui-même, un fait mathématique véritable et il l'a trouvé dans son cerveau, non pas dans un livre. Il a découvert cela par pure réflexion et il a trouvé une preuve. C'est ça l'essence des mathématiques. Bien sûr, il y a une tradition. Il y a plein de livres, et les choses que nous apprenons ne s'évaporent pas parce qu'elles ont une démonstration. D'un autre côté, les mathématiques, c'est quelque chose avec quoi vous pouvez être directement en contact sans outil intermédiaire. C'est la caractéristique la plus remarquable des mathématiques. Vous pouvez être complètement livré à vous-même et vous pouvez toujours penser aux mathématiques. Vous ne ferez pas forcément des mathématiques qui seront importantes parce que pour faire ça, vous devez avoir lui les dernières avancées. Je ne suis pas en train de dire que vous devriez travailler tout seul dans votre coin. Vous n'iriez nulle part si vous faisiez cela. Mais ce que je suis en train de dire, c'est que quand vous débutez, pour vraiment devenir un mathématicien, la clef est de réaliser qu'à un certain moment, vous devez arrêter de lire des livres. Vous devez penser par vous-même. Vous devez devenir votre propre autorité. Il n'y a pas d'autorité à laquelle vous deviez vous référer. À un

Extrait de *Mathematicians : an outer view of an inner world*, Mariana Cook, 2009, Princeton University Press.

moment donné, vous devez réaliser que le fait qu'une chose soit ou pas écrite dans un livre n'a pas d'importance. Ce qui a de l'importance, c'est la question de savoir si vous avez une preuve et si vous êtes sûr de cette preuve. Le reste n'a pas d'importance. Cela peut arriver pour le petit enfant très tôt.

En ce qui concerne mon propre travail, ma thèse, vous avez le point de vue cartésien, qui est celui de la géométrie ordinaire. Là vous avez des coordonnées, etc. Mais il y a des espaces qui sont plus compliqués parce que ce sont des espaces dans lesquels vous ne faites pas que regarder les points d'ensembles, mais vous regardez aussi les relations entre les points. Ces nouveaux ensembles, ces ensembles avec des relations, peuvent être décrits par des algèbres, mais ces algèbres sont non-commutatives. Cela a été d'abord trouvé par des physiciens et cela peut s'expliquer extrêmement simplement. Quand vous écrivez un mot sur un bout de papier, vous devez faire attention à l'ordre des lettres. Un ami à moi m'a envoyé un email un jour et pendant quelques instants, je n'ai pas pu en comprendre le sens. Cela m'a pris un peu de temps de réaliser que c'étaient mes nom et prénom qui étaient écrits, mais leurs lettres n'étaient pas dans l'ordre habituel. Quand on fait du calcul ordinaire sur les nombres ou bien de l'algèbre ordinaire, comme on l'appelle, on peut permuter les lettres. L'ordre des lettres n'a pas d'importance. si vous écrivez 3×5, c'est la même chose que 5×3. En physique, on a découvert que ce n'est pas le cas quand on observe des systèmes microscopiques. Vous devez faire attention. Ce que j'ai trouvé dans ma thèse, c'est que lorsque vous faites attention à l'ordre, le temps émerge. Le temps émerge de cette non-commutativité, du fait que vous fassiez attention à l'ordre des lettres. Cela m'a amené à mon travail sur la classification des facteurs. Après avoir travaillé là-dessus pendant dix ans, j'ai développé complètement une nouvelle géométrie appelée "géométrie non-commutative", dans laquelle on affine toutes les idées géométriques habituelles et on les applique aux nouveaux espaces. Ces espaces ont des propriétés surprenantes qui engendrent leur propre temps. Non seulement, elles engendrent leur propre temps, mais elles ont des caractéristiques qui vous permettent de les refroidir ou de les réchauffer. Vous pouvez faire de la thermodynamique avec elles. Il y a une partie complètement nouvelle de la géométrie et de l'algèbre qui est reliée à ces nouveaux espaces, appelée géométrie non-commutative, et sur laquelle j'ai travaillé quasiment toute ma vie.

Les mathématiques
et la pensée en mouvement

Alain Connes [1]

Le but de mon exposé, c'est de vous faire sentir deux choses : la première, c'est que je vais vous raconter un certain nombre d'histoires, sur des mathématiciens, et la deuxième, c'est de vous faire comprendre que les mathématiques sont une fabrique de concepts, mais de concepts absolument fondamentaux et de concepts qui ont trait, si vous voulez, à la vie, et qui ne sont pas du tout confinés a des calculs avec des nombres, ou des choses comme ça ; on a trop souvent l'impression que le mathématicien est quelqu'un qui fait des calculs ; bien sûr, ça lui arrive de faire des calculs, mais ce que je vais essayer de vous faire comprendre, justement, dans cet exposé, c'est à quel point justement, la technique mathématique débouche de temps en temps sur des concepts fondamentaux, sur des idées fondamentales, et ce sont des idées qu'on peut expliquer simplement et qui ont trait à la vie, c'est-à-dire si vous voulez, elles sont aussi importantes, je pense, pour des gens qui font des sciences humaines que pour des gens qui vont faire des sciences dures. Voilà, donc, il y aura une galerie de portraits. On va commencer par Galois.

Et si vous voulez, Galois, c'est le prototype du mathématicien qui a eu une vie absolument incroyable : il est né en 1811, et il avait 17 ans lorsqu'il a fait ses choses les plus importantes. Et ce qui s'est produit donc, il y a eu une succession d'incompréhensions, en fait. Si vous voulez, en 1829, Abel meurt. Et en gros, c'est Galois qui reprend le flambeau des idées d'Abel. Mais en fait, je me suis bien renseigné avec des spécialistes d'Abel. Abel était venu à Paris, mais il est absolument impossible qu'il ait rencontré Galois : Galois était trop jeune quand Abel est venu à Paris ; j'avais toujours imaginé qu'ils s'étaient rencontrés dans un café parisien, qu'ils avaient discuté tous les deux. Apparemment, ce n'est pas possible. Donc quand il avait 17 ans, Cauchy qui était un académicien, avait déjà fait en 1829, deux exposés sur les travaux de Galois, à l'Académie, au mois de mai et au mois de juin. Ca, c'était donc

1. Conférence du CPES (Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures), PSL (Paris Sciences et Lettres), le 12 novembre 2015.
Transcription de la conférence par Denise Vella-Chemla (31.1.2019).

en 1829. Et au mois de juillet 1829, le père de Galois se suicide parce qu'il avait été la victime d'une campagne de calomnie, qui avait été faite contre lui, et en plus, Galois échoue pour la deuxième fois à l'école polytechnique. Donc c'était la deuxième fois qu'il se présentait à l'école polytechnique. A l'époque, l'école polytechnique était au top des grandes écoles, donc c'est la deuxième fois qu'il échoue. C'est là qu'il y a eu la scène apparemment où il a balancé le chiffon à la tête de l'examinateur de mathématiques, parce que l'examinateur ne comprenait pas les explications de Galois sur le logarithme.

Mais heureusement, Galois est reçu à l'école normale. Et en janvier 1830, il y a une lettre de Cauchy à l'Académie qui dit qu'il va parler sur Galois. Ce serait donc pour la troisième fois, et puis finalement Cauchy renonce, et je pense, enfin on pense, et les historiens pensent, si vous voulez, qu'il s'était mis d'accord avec Galois parce qu'il y avait un Grand Prix de l'Académie qui devait être donné en 1830 et Cauchy avait convaincu Galois de réécrire son article, de réécrire ses articles et de se présenter pour ce grand prix. Alors là, ce qui s'est passé, c'était absolument dramatique parce que l'académicien qui devait rapporter sur l'article de Galois, c'était Joseph Fourier. C'est un très très grand mathématicien et Fourier apparemment, il était en haut de ses escaliers chez lui, il s'est pris les pieds dans sa robe de chambre et il a dégringolé l'escalier, il est mort. Donc, gros problème, gros problème, et si vous voulez, il y a eu un tel désordre à ce moment-là, que le manuscrit de Galois a été perdu. Alors, non seulement Galois n'a pas eu le prix, qu'il aurait peut-être mérité, le prix a été donné à Jacobi et Abel, bien sûr deux mathématiciens immenses. Jacobi était un mathématicien allemand, Abel était mort, il était mort en 1829, le prix a été donné à Abel à titre posthume.

Mais si vous voulez, Galois ne pouvait pas se plaindre de ne pas avoir eu son grand prix ; par contre, il pouvait se plaindre, à l'époque, il n'y avait pas de photocopieuse. Donc il avait écrit son manuscrit ; à l'époque, vous écriviez le manuscrit et puis c'était fini. Il l'avait donné à l'Académie mais manuscrit perdu. Donc il s'était plaint à plusieurs reprises à l'Académie, mais manuscrit perdu. Et donc en 1830, le grand prix a été donné en juin 1830 et en juillet 1830, c'est les Trois Glorieuses. C'est Les Trois Glorieuses, et Galois a été à l'école normale et là, il râlait parce que, à l'école normale, les élèves étaient confinés, ils ne pouvaient pas aller sur les barricades. Par contre, les élèves de l'école polytechnique, eux, ils pouvaient, donc alors là, Galois a commencé à vraiment se révolter. C'est très très bizarre, si vous voulez, bon, il avait à peine 18 ans. Donc il a commencé à se révolter et il s'est révolté contre le directeur de l'école normale. Et après l'été, donc, il a commencé à militer plus ou moins, et de fil en aiguille, il a réussi à se faire renvoyer de l'école Normale. Donc, il a été renvoyé de l'école Normale en janvier 1831, et il y a quelque chose d'incroyablement ironique, qui est que Galois était à la rue, si vous voulez, il n'avait plus de salaire parce qu'à l'époque, à l'époque et c'est encore le cas maintenant, les élèves de l'école Normale recevaient un petit salaire. Donc il était à la rue et alors pour gagner un peu d'argent, il avait créé un cours d'algèbre, cours d'algèbre qui réunissait un certain nombre de gens qui venaient l'écouter parce que c'était un magnifique mathématicien malgré son très jeune âge. Et l'ironie totale, c'est que son cours d'algèbre, il le donnait dans la rue qui maintenant, c'est une rue attenante à la Sorbonne, qui s'appelle la rue Victor Cousin. Pourquoi est-ce que c'est ironique ? C'est ironique parce que la personne qui a signé le renvoi de l'école Normale de Galois s'appelle Victor Cousin. Alors il y a quelques années, pour les 200 ans de la naissance de Galois, j'ai eu à donner l'exposé à l'Académie des Sciences sur Galois. Et à ce moment-là, j'ai voulu que tout le monde se mettent d'accord pour rebaptiser la rue Victor Cousin en rue Galois. Bon, ça n'a pas été possible, mais il faudrait quand même, c'est incroyable.

Donc voilà ce qui s'est passé. Alors après, donc, il faut bien dire que Galois, il est mort à 20 ans. Et les deux dernières années de sa vie, il n'a pas beaucoup fait de maths. C'est incroyable, c'est absolument incroyable. Et ce qui s'est produit, c'est qu'une fois qu'il a été renvoyé de l'école normale, il y avait quand même un autre académicien qui lui voulait du bien, il s'appelait Poisson. Et en mathématiques, il y a une formule bien connue qu'on appelle la formule de Poisson. Et si vous voulez, Poisson l'avait convaincu de réécrire son manuscrit et de le présenter à l'Académie. Donc Galois s'était exécuté. Il avait réécrit son manuscrit. Il avait travaillé, etc. Et entre temps, bien sûr, après Les Trois Glorieuses, tout le monde commençait à être extrêmement déçu par le nouveau pouvoir. Et Galois faisait partie de ces gens-là. Donc la première chose qu'il a faite, c'est pas très, pas très malin, enfin bon. Il était dans un banquet qui fêtait la libération d'opposants au pouvoir. Et alors, il était dans ce banquet, et il avait levé son verre à Louis-Philippe. Alors, tous les gens se disaient "il est complètement fou !" : il était dans un banquet contre Louis-Philippe et il levait son verre à Louis-Philippe. Et dans la main, il avait un couteau. D'abord, les gens n'avaient pas compris pourquoi il levait son verre à Louis-Philippe ; secundo, il y avait un espion qui était là et qui avait vu qu'il avait un couteau à la main. Il avait été arrêté, ça c'était au mois de mai 1831, il avait été arrêté, et il avait été jugé assez vite. Il avait été jugé par un jury populaire. Mais comme il avait été jugé par un jury populaire, les gens avaient vu qu'il était un peu bizarre, bon, enfin, je veux dire, il ne se défendait pas, en gros, il disait... Alors ils l'avaient acquitté. Je crois qu'il avait été acquitté en juin 1831. Et un mois après, il a reçu le rapport de Poisson sur son article. Alors là, catastrophe parce que Poisson disait que c'était sûrement une très très belle théorie, mais qu'il n'y avait pas assez de détails dans les démonstrations, etc. Donc il ne pouvait pas accepter l'article. Et Galois, quand il a reçu ce rapport, il a écrit à la main, dans la marge du rapport, il a écrit "Oh, chérubins !". Ca veut dire qu'il voyait que les gens ne comprenaient rien à ce qu'il faisait. A ce moment-là, il a un peu dérapé, c'est-à-dire que là, il s'est fait arrêter. Ca, c'était le 4 juillet qu'il a reçu le rapport de Poisson, il a été arrêté le 14 juillet à la tête d'une manifestation contre Louis-Philippe. Et là, il a été mis en prison pour de bon ; il a été mis dans une prison qui s'appelle Sainte-Pélagie ; et bon, il y a beaucoup d'entre vous sans doute, qui imaginent que s'ils étaient en prison, ils pourraient au moins réfléchir tranquilles avec des bouquins ; en fait, c'était pas du tout comme ça, parce que Galois, il était au milieu des condamnés et c'était absolument terrible parce que les autres condamnés l'obligeaient à boire de la liqueur très forte, etc. ; je veux dire que c'était absolument orthogonal à son... à ce qu'il faisait et en fait là, il a rencontré Nerval. Nerval l'a rencontré alors qu'il était en prison.

Et alors, c'est terrible, c'est terrible, parce que si vous voulez, Galois est resté en prison jusqu'au mois de mars de l'année d'après, 1832. Il n'avait pas 20 ans, toujours, euh, si, il avait 20 ans. Et en mars 1832, la raison pour laquelle il a été libéré, c'est qu'il y avait le choléra à Paris. Et qu'ils vidaient les prisons pour pas qu'il y ait trop de dégâts. Donc il a été mis dans une maison de santé et dans cette maison de santé, il est plus ou moins tombé amoureux d'une fille qui était là, sans se rendre compte qu'elle était déjà avec quelqu'un d'autre.

Et bon, tout ça a fini par un duel, d'accord. Et alors là, c'est pareil, si vous voulez, je suppose que chacun d'entre vous imagine que s'il était en devoir de se battre en duel, il aurait plus d'habileté que l'adversaire, donc ça irait quoi, il s'en sortirait. Malheureusement, le duel dans lequel Galois a été pris, il a essayé de s'en sortir avant. Il a essayé de dire que... Mais malheureusement, c'était un duel absolument terrible, c'était comme la roulette russe, c'était un duel dans lequel il y avait deux revolvers dont l'un seulement des deux était chargé. Et il fallait qu'ils se les mettent sur le ventre. Donc il a eu, bien sûr, une balle dans le ventre. A l'époque, et même maintenant, c'était mortel, et les autres l'ont laissé sur place.

Il a été retrouvé par un paysan sur place, qui l'a emmené à l'hôpital et il est mort le jours après. Bon. Et il a laissé une liasse de papiers, c'est ce qu'il dit, c'est ce qu'il dit dans ses trucs, donc c'était... Alors il y a des gens qui vous feront croire qu'il a trouvé tous ses résultats la veille de son duel. C'est absolument pas vrai, je veux dire, évidemment, il avait continué à réfléchir et c'était au point... il avait dû tellement se forcer à continuer à faire des maths pendant qu'il était dans des circonstances abominables, que des gens qui l'ont vu à sa sortie de prison disaient qu'il avait l'air d'avoir 50 ans alors qu'il avait 20 ans. D'accord, donc c'est vous dire un peu la passion qui l'habitait, et c'est un miracle, finalement, c'est un miracle qu'on ait eu ses travaux.

C'est un miracle absolu qu'on ait eu ses travaux. Donc ça, c'est ce qu'il écrivait et qu'il a laissé dans sa lettre-testament. C'est sa lettre-testament qu'il avait laissée à son frère, et à son ami, il avait un ami aussi.

Et ce qui s'est produit, donc, c'est que 10 ans ont passé. Et par un hasard extraordinaire, Liouville, qui était un contemporain de Galois, qui avait simplement deux ans de plus que Galois, a retrouvé les papiers de Galois. Et il a compris que c'étaient des choses absolument géniales. Et il en a parlé à l'Académie. Donc si vous voulez, 10 ans après la mort de Galois, c'est Liouville que voilà. Bon là, évidemment, il est beaucoup plus vieux mais c'était un contemporain de Galois, c'était quelqu'un qui était né en 1809, donc deux ans avant Galois. Et donc, Liouville a compris l'extraordinaire force des travaux de Galois si vous voulez.

Alors il a écrit ça, mais ça, je vous le montre écrit correctement, donc c'est comme ça.

Il en a parlé à l'Académie. Et puis, graduellement, les travaux de Galois ont été compris. Et alors ce que je vais faire, je ne veux pas vous embêter avec des mathématiques trop compliquées, je vais simplement vous donner l'essence de la théorie de Galois. Je vais vous donner l'essence en vous donnant un exemple. Ce que dit Galois dans sa lettre-testament, c'est quelque-chose d'incroyablement visionnaire, si vous voulez, ce qu'il dit, c'est :

"Tu sais mon cher Auguste, (il avait un ami qui s'appelait Auguste) *que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelques temps ont étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté."*

Donc Galois a découvert cette théorie de l'ambiguïté. Et dans cette lettre, à la fin de sa vie, il dit que non seulement, il l'a appliquée à des équations polynomiales. Mais en fait, il l'a appliquée à la théorie des fonctions transcendantes. Personne ne sait ce qu'il avait exactement en tête. Ca, personne ne peut dire que l'on sait, maintenant, ce que Galois avait en tête.

Par contre, on sait très bien ce qu'il avait en tête pour les équations polynomiales.

Et donc, pour les équations polynomiales, je vais vous expliquer ce qu'est la théorie de l'ambiguïté. Donc ce que Galois a compris, si vous voulez, c'est quelque-chose d'assez extraordinaire, c'est que lorsque vous vous donnez une équation algébrique, par exemple, je vous ai donné une équation donc, on sait la résoudre. Vous savez que maintenant, je veux dire avec l'ordinateur, vous pouvez contrôler tout ça, vous pouvez tracer le graphe d'une fonction, vous pouvez résoudre une équation polynomiale, et tout ça. Mais l'ordinateur ne vous donnera jamais les zéros qu'avec une certaine précision, il ne vous donnera jamais les racines qu'avec une certaine précision.

Alors, ce que dit la théorie de Galois, elle dit quelque chose d'extraordinaire : elle dit que quand vous prenez une équation comme celle-là, qui est irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la factoriser en un produit de 2 facteurs avec des coefficients rationnels par exemple. Donc lorsqu'une équation est irréductible, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui opère sur les racines, ici sur les 5 racines, et qui fait qu'on ne peut pas, si vous voulez, isoler une racine. C'est-à-dire qu'il y a une ambiguïté entre les racines ; ce groupe, il fait tourner les racines. Et toute relation qui est vérifiée entre les racines, toute relation rationnelle qui est vérifiée entre les racines, par exemple, avec l'ordinateur, vous pouvez voir que cette relation, elle est presque vérifiée, le fait que $E = 4C^2 + 2D^2$, vous pouvez vérifier ça. En fait, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui permute ces racines, c'est-à-dire qu'elles peuvent bouger de l'une à l'autre. Et de telle sorte que si une relation comme ça a lieu, elle aura lieu pour les racines permutées. Et ce que dit la théorie de Galois, c'est que par ce groupe, vous pouvez transformer n'importe quelle racine en n'importe quelle autre. Alors ce que dit Galois après, en fait ce que je vous dis en particulier ici, c'est que c'est impossible d'avoir cette relation. Pourquoi est-ce impossible d'avoir cette relation ? Parce que si vous avez cette relation, vous voyez bien que les 5 racines, elles sont réelles. Ca, c'est pas du tout difficile à démontrer. Donc vous avez bien 5 racines qui sont réelles. Mais supposez que vous ayez une relation comme celle que j'ai écrite : $E = 4C^2 + 2D^2$. Eh bien à ce moment-là, comme E peut devenir n'importe laquelle des autres racines, C et D seront d'autres racines aussi. Et vous voyez bien que toutes les racines devraient être positives, puisque ce sont des sommes de carrés. Et donc ce n'est pas possible. Ce n'est pas possible. Donc, c'est extraordinaire !

Ca vous dit que sans calculer et sans se salir les mains, ni quoi que ce soit, on sait que cette relation n'est pas possible. C'est-à-dire qu'avec l'ordinateur, l'ordinateur va vous dire “Mais elle est vraie, elle est vraie !”. Il va le dire avec des décimales et tout ça. Non ! Galois dit “c'est pas possible, cette relation n'est pas vraie !”. Et elle n'est pas vraie par la pensée pure, c'est extraordinaire ! C'est quelque-chose d'extraordinaire ! Parce qu'il a compris que derrière une équation, il n'y a pas seulement la valeur numérique des racines. Non. Il y a les relations entre les racines qui peuvent exister, Et ce que fait la théorie de Galois, c'est de déceler exactement toutes les relations entre les racines. Et elles sont décelées par un groupe. Alors, ne croyez pas les gens qui vous diront que c'est Galois qui a inventé la théorie des groupes. Non, les gens comme Lagrange, etc., savaient ce que c'étaient que les groupes avant lui. Mais Galois est le premier mathématicien *moderne*. C'est-à-dire que c'est le premier mathématicien qui a eu cette fulgurance, si vous voulez, qui fait que certaines choses comme ça sont vraies sans qu'on ait à calculer ou quoi que ce soit, d'accord. On a une théorie abstraite, c'est une théorie de l'ambiguïté et résoudre une équation, c'est graduellement diminuer l'ambiguïté qu'il y a, pour que finalement, sur l'équation, on puisse affirmer telle racine, et telle racine, etc. D'accord. Donc c'est ça, la théorie de l'ambiguïté. Et ici, en l'occurrence, on peut calculer ce qu'est le groupe de Galois. Donc le groupe de Galois, vous voyez les 5 racines, elles sont indiquées ici. Le groupe de Galois, il va les permuter. Et puis, mais il les permute si vous voulez de manière transitive, c'est-à-dire que si on itère ces permutations, si par exemple, je prends la racine qui est en-haut au milieu, elle va aller sur la première ; et après, si je regarde où va la première, elle va sur la dernière ; après, si je regarde la dernière, elle va sur l'avant-dernière ; si je regarde l'avant-dernière, elle va sur la seconde. Donc vous voyez que vous avez fait tout le tour d'accord.

Donc bon, et ça, c'est toujours vrai, c'est-à-dire que quelle que soit l'équation que vous preniez, Galois vous dit que si elle était réductible, il y a un groupe qui permute les racines. Alors il y a beaucoup de mathématiciens qui croient connaître la théorie de Galois, parce qu'ils disent que Galois a réussi à démontrer qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. Mais en fait Galois, à 17 ans, avait bien mieux que ça, il avait... un théorème...

Je vais vous effrayer mais ne vous inquiétez pas, on va passer à un autre sujet tout de suite. Donc ce que Galois démontre, c'est que si on prend une équation qu'il appelle primitive. C'est une certaine définition technique, pour qu'elle soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer les racines par un corps fini. C'est Galois qui a inventé les corps finis. C'est assez amusant parce que les Français sont pudiques, parce que les Anglo-Saxons appellent ces corps finis les *Galois fields*. Si on traduit en français, ça se traduit par corps de Galois. Mais en France, on n'utilise pas cette terminologie : on parle de corps fini. Et alors le théorème de Galois, qu'il avait quand il avait 17 ans, c'est que pour qu'une équation primitive soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer ses racines par un corps fini, de telle sorte que le groupe de Galois, alors là, tenez-vous bien, accrochez-vous, soit contenu dans le produit semi-direct du groupe affine du corps fini par le Frobenius, par les puissances du Frobenius. D'accord, d'accord, ok, bon.

(rires)

Et alors quand j'ai préparé mon exposé pour l'Académie, justement, je me suis aperçu qu'en fait, Galois connaissait un nombre incalculable de choses et qu'il connaissait par exemple, maintenant ce qu'on appelle la théorie de Sylow, qui est une théorie qui a été mise au point peut-être 50 ans après la mort de Galois. Donc c'est vous dire un peu à quel point il avait réussi à voir si loin. Et à la fin de mon exposé, je vous montrerai un texte de Grothendieck et c'est un texte qui est fondamental parce que ça s'applique merveilleusement au cas de Galois d'accord, et c'est un texte sur la créativité, sur la découverte et sur le fait que la vraie créativité, elle demande justement si vous voulez de retourner à cet esprit de l'enfant qui est à la fois libre, mais aussi qui n'accepte pas si vous voulez le poids des connaissances qu'on met sur lui. Donc on y reviendra à ça, d'accord.

Alors maintenant, j'en viens à un autre sujet, parce que je ne veux pas négliger la physique. Et à un autre sujet qui me tient à cœur aussi énormément et qui est celui, si vous voulez, d'un autre grand découvreur, dans le XX$^{\text{ème}}$ siècle, si vous voulez, c'est la découverte de la mécanique quantique. Maintenant, on va passer à Heisenberg et à la mécanique quantique. Donc on fait une pause si vous voulez. Ce que j'ai essayé de faire, c'est de choisir des sujets qui vous montrent, chacun, une nouvelle notion qui a été découverte, soit en faisant de la recherche mathématique, soit en faisant une recherche sur la nature, sur la physique. Mais chacune de ces notions est une notion qui a un sens, qui a un sens absolument fondamental.

Donc, l'histoire d'Heisenberg, elle est en fait reliée à un lieu, et ce lieu, c'est une île qui en allemand s'appelle Helgoland ; en français, on traduit Heligoland. C'est une île des pays nordiques. Et c'est une île qui a une particularité, je ne sais plus si cette particularité est encore vraie de nos jours ; en tout cas, elle avait une particularité dans les années 1925, qui était qu'elle n'avait pas de pollen. Il n'y avait pas d'arbres, il n'y avait pas de sources de pollen. Alors, quel est le lien avec Heisenberg ? Le lien, c'est que Heisenberg était un étudiant en physique, enfin, un étudiant, il avait déjà de la bouteille... Il était à Göttingen, je pense. Et à un moment donné, c'était au mois de mai, il a été pris d'une allergie terrible, le rhume des foins si vous voulez. Donc il avait la tête enflée, enfin tout ça quoi, et donc à l'époque, le seul remède, on ne donnait pas d'anti-histaminiques, le seul remède, c'était de l'envoyer à Heligoland. Donc il a été envoyé sur cette île. On lui a dit "il faut arrêter de faire vos cours, etc." et on vous envoie sur cette île. Et il est arrivé sur cette île. Il était logé par une vieille dame dans une maison, peut-être une des baraques qui sont là-haut, là. Et puis à l'époque, il cherchait... *(petit bruit circonspect interrogatif).* A l'époque, il cherchait...

Il essayait de ... A l'époque, la mécanique quantique était à un stade préhistorique, c'est-à-dire qu'on avait décidé ce qu'on appelle certains principes, qui permettaient de calculer des énergies et tout ça, mais je veux dire que ce n'était absolument pas une vraie théorie. Et Heisenberg réfléchissait sur un problème. En gros, son problème, ça prendrait trop de temps de l'expliquer, si vous voulez, l'idée, en gros, à l'époque, on concevait l'atome comme un petit système solaire. Mais ça ne marchait pas. Parce que ce qui se passe dans un système comme le système solaire, c'est que, par exemple si l'électron tournait autour du noyau, il émet de l'énergie, et donc en fait, son orbite devrait se ratatiner sur le noyau. Et ça, c'est pas ce qui se passe en réalité. Donc il y avait des choses comme ça qui ne collaient pas du tout. Et donc, Heisenberg a réfléchi là-dessus. Il est parti des résultats expérimentaux, ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg. Et puis bon, il avait ce calcul qu'il voulait faire et quand il était sur cette île, il a commencé à faire ce calcul. Il y avait des choses qu'il ne comprenait pas, tout ça. Et puis un matin, à 4h du matin, tout a marché ! Il a eu cette révélation extraordinaire ! Et au lieu d'aller se coucher, il est allé grimper sur un des pics rocheux *(rires)* qui sont au bord de l'île. Il s'est installé en haut, et il a attendu le lever du soleil. Et dans ses mémoires, il décrit de manière extraordinaire si vous voulez, cette illumination qu'il a eue et il dit vraiment, et c'est vrai, qu'il a eu tout d'un coup devant les yeux un immense paysage qui s'est dévoilé à ses yeux, mais c'était un paysage intellectuel, bien sûr ; ce paysage, c'était l'essence de la découverte qu'il a faite, si vous voulez, c'est quelque-chose d'incroyable ! Il a découvert que quand on fait des calculs, voilà Heisenberg, et on y reviendra à ça. Ce qu'il a découvert, c'est que vous voyez, quand vous faites de la physique, bon par exemple, vous écrivez $e = mc^2$ ou des trucs comme ça. Vous pourriez écrire $e = c^2$ fois m, c'est du kif-kif, ce sont des nombres. Bon, eh bien, je veux dire, ça ne change rien. Ce qu'Heisenberg a trouvé, c'est quelque-chose d'incroyable. Heisenberg a trouvé que si vous essayez de manipuler la position et le moment, on parle de la vitesse, mais il faut parler du moment : le moment, c'est le produit de la vitesse par la masse, d'accord ? Donc, si vous essayez de manipuler à la fois la position et le moment, au niveau microscopique d'un tout petit truc, d'un atome ou d'un truc comme ça, eh bien, vous pourrez toujours faire tout ce que vous voulez, vous n'arriverez jamais à mettre en défaut ce qu'on appelle le principe d'incertitude d'Heisenberg, d'accord, qui est que $\Delta x \Delta p$... Δx, c'est l'incertitude sur la position, Δp, c'est l'incertitude sur le moment. Eh bien ça, c'est toujours plus grand ou égal à $\hbar/2$, qu'est-ce que c'est que $\hbar$, c'est la constante que Planck avait introduite au début du siècle, pour expliquer certains phénomènes physiques.

Alors là, il faut que je vous raconte une petite histoire, à propos du principe d'incertitude parce que bon, *(chuchotant)* je crois qu'il y a un bouquin d'ailleurs là-dessus, qui est pas mal, d'ailleurs... Mais en fait, sur le principe d'incertitude, si vous voulez vraiment ressentir en quoi ce principe a troublé les gens, il y a une histoire qu'il faut que je vous raconte. C'est que bien sûr, Einstein n'y croyait pas. Pourtant, Einstein est à l'origine de la théorie quantique, je veux dire, c'est Einstein qui a eu l'idée que le photon avait des niveaux d'énergie qui étaient quantiques. Donc Einstein n'y croyait pas. Donc Einstein avait imaginé un dispositif.

A l'époque donc, Heisenberg a trouvé son principe d'incertitude vers la fin des années 1920. A cette époque-là, il y avait ce qu'on appelait les congrès Solvay ; c'étaient des réunions de physiciens, en petit nombre, et bien sûr, ils discutaient entre eux.

Donc il y a eu un congrès Solvay, je crois que c'était en 1830, ou quelque-chose comme ça. Et donc Einstein avait imaginé la chose suivante ; il avait imaginé pour mettre en défaut le principe d'incertitude, mais pas sur la position et le moment, mais sur $\Delta t \Delta E$; c'est à dire que...*(soupir, soupir)*... le temps, c'est la variable duale de l'énergie, de même que la position est la variable duale du moment. Et le principe d'incertitude vous donne quelque chose de semblable pour $\Delta t \Delta E$. Quelque-chose comme $\hbar$ ou $\hbar/2$, ça dépend des unités. Donc Einstein ne croyait pas à ça. Et Einstein avait imaginé... Bien sûr, il faisait toujours la même chose, c'est-à-dire que quand il ne croyait pas à quelque chose, il imaginait une expérience de pensée. Une expérience de pensée, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que je vais vous faire un dessin très grossier : mais en fait, on peut très bien imaginer que cette expérience soit rendue de plus en plus précise. D'accord ? Donc le dessin très grossier, c'était le suivant : *(dessinant le dispositif au tableau)* là, on va mettre un petit ressort, et puis ici, on va mettre une boîte. Et puis on va mettre comme un coucou quoi. Et puis avec, il y aura l'heure ici, d'accord ?

C'était ça son système, et puis là, il y a une espèce de truc. Et puis, là, il y a des... Voilà le système.

Alors quelle était l'idée d'Einstein ? L'idée d'Einstein, c'est que Δt, eh bien, on va le contrôler puisqu'on à l'heure ici, d'accord. Donc ça, c'est le t donc. Et ΔE maintenant ? Donc, qu'est-ce que ça veut dire, qu'est-ce que j'ai dit ici *(montrant un endroit du dessin)* ? Ca veut dire qu'il y aura un moment donné où le coucou va faire “Touc !”. Il va émettre un photon. Et on saura à quelle heure il l'a émis puisqu'il y a ce truc qui marque l'heure, d'accord. Donc Δt, *(bruit pour exprimer qu'on ne sait pas quoi...)*. Alors maintenant ΔE. Eh bien le photon, ça, Einstein, il le sait, le photon, il pèse $h\nu$, où ν c'est la fréquence du photon. Donc ça, c'est e si vous voulez, c'est l'énergie. Donc quand le photon sort, ce truc-là, il devient un petit peu plus léger... *(voyant qu'il semble peut-être avoir un peu perdu la compréhension de son auditoire)* Est-ce que vous connaissez l'histoire du camion qui transportait des trous, non ? Vous ne la connaissez pas ? Il était en montagne, d'accord, puis à un moment donné, le chauffeur, il s'est senti plus lourd, il a reculé, il est tombé dans le trou, d'accord.

(rires).

Bon, je reprends, d'accord ? Donc, ici, une fois que le photon a été émis, d'accord, ce truc-là devient un petit peu plus léger, donc ça va, si vous voulez, l'aiguille, elle va monter un petit peu, et en regardant de combien elle est montée, on va connaître ΔE donc en fait, Einstein disait “bah on va connaître ΔE, on va connaître Δt, avec une précision aussi grande que l'on veut. Donc on aura pas le principe d'incertitude”. Alors il a dit ça. Et ça a fait terriblement peur à Bohr qui était en train de discuter avec eux, parce que Bohr croyait bien sûr au principe d'incertitude, ça lui a fait terriblement peur parce que... Quelle était la raison pour laquelle il avait peur ? La raison pour laquelle il avait peur, c'est que quand vous faites les calculs avec ce système, proposé par Einstein, ce qui va intervenir, c'est la constante de gravitation parce que vous voyez, l'horloge, quand elle monte un peu, elle est dans le champ gravitationnel, donc quand vous allez chercher de combien l'énergie a diminué, vous allez faire intervenir la constante de gravitation, donc évidemment, la constante de gravitation, elle rentre absolument pas dans le $\hbar$ de Planck etc. La théorie de Planck, elle est complètement disjointe de la gravitation. Donc Bohr se disait, c'est foutu !

Donc, il y a une photo extraordinaire, sur laquelle on voit Einstein sortir très fièrement de la salle de congrès Solvay et on voit Bohr qui le suit un peu comme un petit chien, et qui est, bon... Et alors ce qui s'est passé, c'est que ce n'est pas la fin d'histoire. La fin de l'histoire est absolument merveilleuse, parce que ce qui s'est passé, c'est que Bohr est rentré à son hôtel. Evidemment, il n'a pas dormi, il n'a pas dormi de la nuit parce que bon, je veux dire... Il n'a pas dormi de la nuit, et il a trouvé la réponse... Et la réponse est fantastique. La réponse est absolument fantastique, parce que, si vous voulez, bon, ça paraissait impossible, impossible ! Pourquoi ? Parce que, comme je le disais, il y aura la constante de gravitation quand vous allez faire le calcul et ça, c'est impossible que ça marche ! C'est impossible qu'on retrouve le $\hbar$. D'où il sort ? Ce qu'a trouvé Bohr pendant la nuit, il a trouvé que le même Einstein, en fait, il avait pondu la relativité générale. *(Alain Connes écrit les formules à la craie au tableau)*. A l'époque ! Ca, vous savez, maintenant, cette année, au mois de novembre, il va y avoir un tas de célébrations de la découverte de la relativité générale par Einstein. Ca fait exactement 100 ans. C'est pour ça qu'il va y avoir toutes ces célébrations. Donc ça fait exactement 100 ans. Et c'était donc une dizaine d'années, ou même plus, une quinzaine d'années avant l'histoire en question. Qu'est-ce que ça à voir avec le truc ?

Ce que ça a à voir avec le truc, c'est la chose suivante : c'est que ce que dit la relativité générale, elle dit que le passage du temps, si vous écrivez la métrique, vous avez ce qu'on appelle la métrique de Minkowski, en fait, qui est dûe à Poincaré, donc de l'espace-temps si vous voulez. Lorsque ça, c'est l'espace-temps de la relativité restreinte, et si vous regardez la métrique de l'espace-temps de la relativité générale, en première approximation, ce qui se passe, c'est que la métrique ne change pas pour les coordonnées usuelles : on est dans un espace euclidien. Par contre, elle change pour le passage du temps, et la manière dont elle change, c'est que le coefficient dt^2 est multiplié par 1+ deux fois le potentiel Newtonien $V(x, y, z)$.

Vous inquiètez pas, c'est pas... bon. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que le temps passe différemment selon l'altitude, ok ? Mais l'horloge, elle a changé d'altitude un petit peu *(Eclats de rires)*. Donc son temps a passé différemment. Vous faites le calcul et vous retrouvez le principe d'incertitude d'Heisenberg. C'est incroyable ! Ca veut dire que Bohr, si Einstein n'avait pas découvert la relativité générale *(Eclats de rires)* une quinzaine d'années avant, il aurait eu raison, d'accord ?... Personne n'aurait cru que le principe d'incertitude était valable. Mais, à cause de la relativité générale, que lui-même avait inventée, il a été battu, il a été mis en défaut. Donc le lendemain matin, Bohr est rentré, triomphant, je veux dire, c'est extraordinaire ! C'est vraiment extraordinaire, mais si vous voulez, tout ça, c'est pour essayer de vous faire sentir le fait qu'aucune de ces notions n'a été acceptée au début. Pas du tout ! Absolument pas. Il y a toujours une résistance absolument terrible, à des choses qui sont nouvelles comme ça... Et alors, ce qui est incroyable dans le quantique, ce qui est ahurissant dans le quantique, si vous voulez, et ça je pense que ce n'est pas vraiment passé dans les connaissances. Oui, alors, bon. J'en parlerai après de ça, j'en parlerai après. J'y reviendrai. Ce qui est incroyable dans le quantique, si vous voulez, c'est le fait que, et ça, ça vient du principe d'incertitude d'Heisenberg, c'est que, contrairement à la physique classique, quand vous faites une expérience dans le quantique, vous ne pouvez pas reproduire l'expérience. C'est quelque-chose de fondamental. Quand j'essayais de vous dire, si vous voulez, que j'allais vous expliquer des concepts ou des notions... Ce sont des notions qui font une telle cassure avec la vision classique, si vous voulez, que c'est énorme comme différence. Qu'est-ce que je veux dire par là ? Ce que je veux dire par là, c'est que si vous faites une expérience de nature quantique, par exemple vous envoyez un photon, et ce photon, il va passer par une toute petite fente qui est à peu près de la taille de sa longueur d'onde. Et après, vous allez le recevoir sur une cible. Eh bien, le fait que vous receviez le photon à un endroit x donné, cette expérience-là n'est pas reproductible. C'est-à-dire que vous pourrez refaire l'expérience avec autant de précision, donner les mêmes conditions initiales, etc., le résultat final ne sera pas le même. C'est incroyable, ça ! Et il ne sera pas le même à cause du principe d'incertitude de Heisenberg.

Alors, vous pouvez me dire “Bon bah d'accord bah bon moi, je m'en fiche, il y a un peu d'aléa, quoi ! Un aléa microscopique, je m'en fiche !”. Mais non ! Maintenant, ce qui se produit, c'est que le fait qu'il y ait cette incertitude fondamentale, si vous voulez, eh bien, ça a été utilisé pour produire des nombres aléatoires. C'est-à-dire qu'il y a des Suisses qui ont fabriqué un appareil qui marche, maintenant c'est avec une lampe LED, vous savez les petites lampes LED là, comme ça. Alors ces petites lampes envoient des photons sur une cible, voilà. On regarde à quel endroit le photon arrive, il arrive sur l'un des carreaux de la cible. Et à partir de là, on fabrique un nombre et comme c'est un phénomène quantique, c'est-à-dire que c'est un phénomène qui n'est pas reproductible, ça produit des nombres aléatoires, qui sont tellement aléatoires que, même si un attaquant voulait reproduire la même chose, ça veut dire s'il connaissait toutes les données sur le système, il n'arriverait pas à reproduire le même nombre. Alors qu'avec un ordinateur, si vous fabriquez des nombres aléatoires, si l'attaquant connaît votre système de fabrication, il arrivera à les reproduire, les nombres aléatoires, d'accord ? Donc c'est phénoménal, c'est phénoménal ! Alors, de là, si vous voulez de cette vérité extraordinaire, en fait, sort une idée, qu'on a commencé à exploiter et cette idée, c'est la suivante : vous voyez, nous, nous sommes habitués en physique a attribuer tout variabilité au passage du temps, c'est-à-dire que bon... Moi, je me souviens une fois mon prof, j'avais un prof, je ne sais plus si c'était en maths sup. Il m'a dit de passer au tableau, alors j'y passe.

Il m'interroge. Et puis, il me fait ça *(geste d'une courbe dessinée en l'air)* - Ouhouh ?! *(rires)*. Moi, je regarde comme ça... Il me dit "Monsieur Connes, quelle est la variable ?". Alors, moi, je faisais de la cinématique. Je réfléchis... Et puis au bout d'un moment, je lui réponds : "c'est le temps !". C'était la bonne réponse ! Vous voyez, normalement, il y a un tas de choses qui sont variables. Et toute la physique est écrite en notant d/dt de quelque-chose égale quelque-chose d'autre... Toute la physique est écrite en fonction du temps. Et en fait, si on réfléchit suffisamment, au niveau conceptuel, on s'aperçoit en fait, que la mécanique quantique occasionne immédiatement des paradoxes, des paradoxes très très violents, très très forts, si vous voulez, et qui viennent précisément du fait qu'on attribue la variabilité au passage du temps.

Et il y a une idée fondamentale qui a du mal à passer, mais qu'on a essayé de vulgariser etc., et cette idée c'est en fait que la vraie variabilité, c'est la variabilité quantique et que le temps en fait, émerge de cette variabilité-là. Ca veut dire que le temps n'est qu'un phénomène secondaire, n'est qu'un phénomène émergent, qui résulte de la variabilité quantique, mais qui n'est pas du tout fondamental d'accord.

Alors pour essayer de faire passer cette idée, en fait, je ne vais pas vous donner tous les détails, on a écrit un livre, donc, avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a écrit un livre ensemble, qui s'appelle Le Théâtre quantique. Et dans ce livre, vous verrez une introduction à cette idée-là, qui est, on l'espère, compréhensible quoique un peu cryptique évidemment, c'est-à-dire qu'on ne donne pas tous les détails etc. Mais l'idée vient d'un autre mathématicien tout à fait extraordinaire Von Neumann.

Cest-à-dire après la découverte de Heiseberg, si vous voulez, après la grande découverte de Heisenberg, bien sûr, les mathématiciens ont formalisé ce que Heisenberg avait trouvé. Ca a pris du temps. Ce que Heiseberg avait trouvé, donc je vous le rappelle, c'était que vous ne pouvez pas permuter les lettres, les variables comme $e = mc^2$, vous ne pouvez pas écrire $e = c^2m$. On ne peut pas faire ça, d'accord ? Alors il y a des gens qui vous diront "Ouh la la la la ! Qu'est-ce que ça va être compliqué tout ça !". Mais en fait, non, revenons à Heisenberg.

Vous voyez ces deux phrases, donc ça, c'est une anagramme qui a été trouvée par Jacques Perry-Salkow, qui est tout à fait extraordinaire et qui a été la naissance du bouquin que je vous ai montré. Mais que signifie une anagramme ? Elle signifie que si j'avais le droit de permuter les lettres, j'obtiendrai le même résultat : pas terrible ! *(rires) a2bcd...* Donc vous voyez, dans le commutatif, ça vous donne le même résultat. Mais bien sûr, nous sommes tous habitués à faire attention à l'ordre des lettres... Bien sûr, c'est le langage ! Le langage est fait pour ça. Et la découverte d'Heisenberg peut se dire incroyablement simplement : elle peut se dire en disant que Heisenberg, il a trouvé qu'il fallait faire attention à l'ordre des lettres, quand on fait des calculs avec les variables microscopiques, c'est merveilleux ! C'est quelque chose d'absolument merveilleux, d'accord ! Bon alors Von Neumann a élaboré là-dessus, il a trouvé qu'il fallait un formalisme mathématique qui s'appelle le formalisme des espaces de Hilbert, c'est un truc assez compliqué.

Alors, vous savez, dans mon introduction, j'ai dit que j'allais parler des algèbres de Von Neumann, d'accord. Alors justement là j'en parle, d'accord. Je ne vous donne pas trop de détails, bien sûr, pas trop de détails sur les types et tout ça. Mais maintenant, je vais vous parler d'un autre mathématicien, et qui a été le point de départ, vraiment de mon travail, de ma thèse, etc., et qui est l'outil qui a permis d'avoir, l'outil essentiel qui permet de donner un sens à cette idée que le temps, le passage du temps émerge à partir de l'aléa du quantique. Alors, la raison pour laquelle je vous montre sa photo, c'est que malheureusement il est mort, le 9 octobre, à l'âge de 91 ans ; sa photo a été prise quand il était venu à Bures-sur-Yvette il y a exactement 30 ans. Il a passé un an à Bures-sur-Yvette il y a 30 ans, et pourquoi c'est un personnage absolument extraordinaire ? C'est un personnage extraordinaire parce que par exemple, il était dans l'armée au moment de la guerre entre le Japon et les Etats-Unis, mais il était devenu sourd à l'âge de 2 ans. Donc il y a eu un moment donné où tous ses coréligionnaires couraient aux abris, quand il y avait un bombardement. Tomita ne bougeait pas, et quand ses coorélionnaires revenaient le voir, ils lui disaient "mais tu es fou ?...". Ils le secouaient, et il leur disait "Quel bombardement ?". C'était à ce point-là, il était connu comme ça. Et alors il y a eu un épisode où le gradé qui les commandait a dit que lui ne serait pas de l'expédition qu'ils allaient faire parce que, comme il était sourd, ça posait plutôt un problème. Donc il est resté et tous les autres sont morts. Et apparemment, mais ça j'en suis moins sûr, apparemment, il était le suivant sur la liste des kamikazes au moment où la guerre s'est arrêtée.

Ensuite, il a eu un prof, il faut dire que peu après la guerre donc, quand il était à l'université, au lieu de faire des cours, enfin au lieu d'aller écouter les cours, les étudiants allaient planter des pommes de terre tellement il y avait la famine. Ils allaient planter des pommes-de-terre tout près de l'université. Donc il avait un prof. Il avait un prof pour faire sa thèse, son prof s'appelait Ono, et son prof, la première fois donc Tomita va voir son prof, parce qu'il voulait faire une thèse ; son prof prend un gros gros bouquin, je n'en ai pas amené avec moi. Le prof lui donne un livre, oh ! plus que ça, deux fois ça facile, d'accord, il le donne à Tomita et il lui dit "Lisez ce bouquin et revenez me voir quand vous aurez tout compris". Alors ça va, comme ça. Alors pendant 2 ans, ils ne se voient pas. Et puis au bout de 2 ans, par hasard, Tomita rencontre son prof dans les couloirs de l'université. Son prof se souvenait quand même : "alors ce bouquin, ça avance ?". Et Tomita lui répond "je l'ai perdu au bout d'une semaine..." *(rires)* C'était un type absolument génial. Il racontait des histoires qui étaient absolument géniales. Il a fait une découverte absolument géniale. Seulement, comme il était sourd, si vous voulez, c'était très très très difficile de communiquer avec lui. C'était vraiment très très difficile, la plupart du temps, il coupait son appareil. *(rires)*. Moi, ça a été le point de départ de mes travaux si vous voulez. Le départ de mes travaux, ça a été le fait que donc Tomita et puis après Takesaki, qui avait repris les travaux de Tomita, avait trouvé que bon, sur une algèbre de Von Neumann, comme Von Neumann les avait définies, il y avait une évolution mais qui dépendait d'un état. Et alors, ce que j'ai démontré dans ma thèse, c'est qu'en fait, elle ne dépendait pas d'un état et qu'il suffisait d'avoir la non-commutativité, c'est-à-dire qu'il suffisait d'avoir une algèbre, de faire des calculs dans lesquels vous faites attention à l'ordre des termes, pour qu'il y ait une évolution dans le temps, donc pour qu'il y ait un temps qui passe. Bon alors après, il y a eu un tas de conséquences de ça, bien entendu. Et en fait, l'essentiel de mes travaux a été si vous voulez de développer la géométrie pour des espaces qui contrairement aux espaces de Descartes, parce que Descartes si vous voulez, avait réussi à comprendre qu'il y avait une dualité entre la géométrie et l'algèbre car Descartes avait compris qu'on pouvait encoder un espace géométrique par des coordonnées et puis faire des calculs algébriques au lieu de faire des calculs géométriques. Un exemple le plus simple possible : si vous voulez démontrer que les 3 médianes d'un triangle se coupent. Eh bien, il y a plusieurs manières de faire, mais la manière la plus simple, c'est de faire le calcul du barycentre. Vous prenez les coordonnées puis vous calculez le tiers de la somme des coordonnées. Quel est l'avantage de la démonstration algébrique sur la démonstration géométrique ? Vous pouvez bien sûr faire une démonstration géométrique du fait que les 3 médianes d'un triangle se rencontrent. Mais supposez que je vous demande de le démontrer en dimension n ? *(rires)*. Alors que la démonstration algébrique, elle est évidente, vous faites $1/n$ fois la somme des coordonnées et puis c'est tout, ça vous donne le point d'intersection et puis c'est terminé. Donc vous voyez la puissance de ce va-et-vient, entre d'un côté la géométrie, et de l'autre côté l'algèbre. Alors ce qu'a découvert Heisenberg, c'est qu'il y avait des espaces incroyablement naturels dans lesquels justement, les coordonnées ne commutent pas. Et ces espaces correspondent aux observables sur un système microscopique.

Et donc moi, l'essentiel de mes travaux, ça a été de développer la géométrie, pour de tels espaces.

Alors comme le temps est encore assez court, au lieu de vous parler de mes travaux, je vais vous parler d'un autre mathématicien absolument extraordinaire, qui s'appelle Alexandre Grothendieck, et qui est mort il y a un an, et la raison pour laquelle je vais vous en parler, ce n'est pas parce que je veux vous décrire la théorie des topos, parce que ça, c'est une merveilleuse théorie mais ça ne passerait pas, je n'ai pas envie d'en parler. Après peut-être... Mais c'est surtout pour vous expliquer, pour vous montrer ce que Grothendieck dit sur la créativité et sur ce besoin absolument nécessaire de retrouver, lorsqu'on est devant un problème très très difficile, son âme d'enfant et cette espèce de, justement, d'ouverture, de sensibilité, etc. qui est en fait trop souvent complètement gommée, complètement effacée par le poids des connaissances. Donc voilà ce que dit Grothendieck, je vais le lire avec vous, et puis on s'arrêtera là. Donc voilà Grothendieck quand il était jeune. Il a eu, lui aussi, une vie extrêmement tumultueuse.

Donc voilà ce qu'il écrit. Il écrit :

Dans notre connaissance des choses de l'univers, qu'elles soient mathématiques ou autres, le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'innocence.

C'est l'innocence originelle, que nous avons tous reçue en partage à notre naissance, et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, de nos peurs les plus secrètes. Elle seule, (donc cette innocence) *unit l'humilité* (bien sûr, la recherche est une école d'humilité, l'école quotidienne de l'humilité) *l'humilité et la hardiesse qui nous font pénétrer au cœur des choses et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous, et de nous en imprégner.* (Ca, c'est la première chose qu'il dit. Ensuite il dit :) *Ce pouvoir-là,* (Ca, c'est très très important, maintenant.) *Ce pouvoir-là n'est nullement le privilège de dons extraordinaires.*

Vous voyez, lorsque parfois on assiste à des expositions, sur les mathématiques, vous avez l'impression que ouh ! Ce sont des extraterrestres ces gens-là, non il ne faut pas du tout avoir cette peur, absolument pas. Il arrive au contraire trop souvent que les gens trop intelligents aient une réaction immédiate et que cette réaction immédiate en fait, soit fausse. C'est-à-dire ils vous disent "ça va pas marcher pour telle et telle raison...". En fait, s'ils avaient réfléchi plus, il se seraient aperçus que ça marche, d'accord. Donc ce que dit Grothendieck, c'est que donc :

Ce pouvoir là mais nullement le privilège de dons extraordinaires, d'une puissance cérébrale, disons hors du commun, pour assimiler et pour manier avec dextérité et avec aisance, une masse impressionnante de faits, d'idées et de techniques connues. Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui, comme moi, n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure...

Là, il est vraiment ironique, ironique, j'aime pas dire le plus grand parce que le plus grand, qu'est-ce que ça veut dire..., on ne peut pas comparer des choses différentes, mais il a eu une influence phénoménale sur les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Une influence phénoménale. Donc l'entendre lui, dire ça... c'est rassurant, disons ! *Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui comme moi n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure. Ce ne sont pas ces dons-là, pourtant, ni l'ambition même la plus ardente* (l'ambition ne suffit en rien) *l'ambition, servie par une volonté sans faille, qui font franchir ces cercles invisibles et impérieux qui enferment notre univers. Seule l'innocence les franchit, sans le savoir, ni sans s'en soucier, à l'instant où nous nous retrouvons seuls à l'écoute des choses, intensément absorbés dans un jeu d'enfant.*

Donc ce qu'il explique, c'est qu'il n'y a rien de plus fructueux que de se saisir d'une question et d'y réfléchir, mais de cette manière-là, d'une manière complètement indépendante du poids de la science, etc. d'accord. Bien sûr, bon, pour arriver au problème, il faut connaître un certain nombre de choses mais après, il faut y réfléchir comme ça. Et donc il continue en disant :

La découverte est le privilège de l'enfant. C'est du petit enfant que je veux parler, l'enfant qui n'a pas peur encore de se tromper, d'avoir l'air idiot, de ne pas faire sérieux...

Par exemple, tout à l'heure, il y aura des questions donc d'accord, attention à ça, il ne faudra pas avoir peur. Il y a même un proverbe chinois qui dit : "si je pose une question, j'ai l'air idiot pendant 5 secondes ; si je ne la pose pas, j'ai l'air idiot tout le reste de ma vie.". Donc voilà ce qu'il dit, donc, de ne pas faire sérieux, de ne pas faire comme tout le monde. Et c'est vrai quand-même qu'il y a une attitude typiquement française assez caractéristique dans une assemblée : on a peur de poser la question, sauf quand on connaît la réponse *(rires)*.

Il n'a pas peur non plus que les choses qu'il regarde aient le mauvais goût d'être différentes de ce qu'il attend d'elles, de ce qu'elles devraient être, ou plutôt de ce qu'il est bien entendu qu'elles sont, c'est-à-dire, ce que la majorité des gens vont lui avoir dit qu'elles seraient ; il ignore les consensus muets et sans faille, qui font partie de l'air que nous respirons, celui de tous les gens sensés et bien connus comme tels. Dieu sait s'il y en a eu, des gens sensés et bien connus comme tels, depuis la nuit des âges ; nos esprits sont saturés d'un savoir hétéroclite, enchevêtrement de peurs et de paresses, de fringales et d'interdits, d'informations à tout-venant et d'explications pousse-boutons...

Un exemple typique, c'est ce qu'on appelle l'effet papillon, le nombre de gens qui ont ressassé ça sans savoir que c'était une idiotie, c'est quelque-chose de considérable. Mais je veux dire, ça a perduré, ça a perduré longtemps d'accord. Alors je continue donc.

...espace clos où viennent s'entasser informations, fringales et peurs, sans que jamais s'y engouffre le vent du large, exception faite d'un savoir-faire de routine. Il semblerait que le rôle principal de ce savoir est d'évacuer une per-

ception vivante, une prise de connaissance des choses de ce monde.

C'est ça qui compte, c'est cette perception vivante. Par exemple, pour aimer les mathématiques, il faut en faire, bien sûr. Et peu importe le problème que vous regardez, mais ce qui est important, c'est que vous en fassiez, c'est pas que vous preniez comme... Si quelqu'un vous dit un théorème, par exemple, si vous voulez, il faut pas trop avoir la démonstration. Il faut la chercher par vous-même, même si vous ne la trouvez pas. Vous allez gagner. Pourquoi ? Parce que si vous la cherchez, par vous-même, quand on vous la dira, même si vous ne la trouvez pas, et bien vous direz "mais c'est bien sûr, c'était ça, et c'était ça !". Si vous ne la cherchez pas et si on vous la donne, ça rentre par une oreille et ça sort par l'autre, et puis vous aurez oublié au bout d'une demi-heure. Donc, c'est très très important d'**en faire**, d'accord. Donc donc... *Son effet est surtout celui d'une inertie immense.* Il parle du poids de ce savoir en commun, souvent écrasant.

Le petit enfant découvre le monde comme il respire. Le flux et le reflux de sa respiration lui font accueillir le monde en son être délicat et le font se projeter dans le monde qui l'accueille. L'adulte aussi découvre, en ces rares instants où il a oublié ses peurs et son savoir, quand il regarde les choses ou lui-même avec des yeux grand ouverts, avides de connaître, avec des yeux neufs, des yeux d'enfant.

J'espère que vous ressentez le plus important dans ce que j'ai dit. C'est que ça ne s'applique pas du tout qu'aux mathématiques ; c'est-à-dire que vous vouliez faire des sciences humaines, que vous vouliez faire de la linguistique, que vous vouliez faire quelque chose que ce soit, même peut-être de l'art, si vous voulez, c'est crucial que vous ayez compris le message. Et que vous ayez compris que, en particulier les mathématiques, elles ont une portée bien bien plus grande que de calculer avec des nombres, de calculer avec des chiffres, etc. C'est pas du tout ça, c'est une espèce de version de la philosophie qui est beaucoup plus dure parce qu'effectivement, pour arriver à un concept nouveau comme le concept de topos de Grothendieck, il a fallu des années et des années de réflexion... Mais ça donne des outils de pensée absolument fondamentaux. Et j'ai pas le temps d'en parler, mais le concept de topos, c'est un concept qui vous montre que la notion de vérité, quand on dit par exemple de manière courante de quelque chose que c'est vrai ou que c'est faux, eh bien, quand on regarde dans un topos, c'est un univers qui est différent de l'univers, eh bien une chose peut être partiellement vraie partiellement fausse, elle peut être vraie pour un certain point de vue, elle peut être fausse pour un autre point de vue, etc. Donc ça donne un outil de pensée qui est incroyablement adapté en fait à la vie, à la politique, à 36 choses, mais qui n'est pas encore passé dans le domaine commun. C'est une notion qui est encore une notion dans le domaine mathématique, qui n'est pas encore passée dans le domaine commun. Et on y gagnerait énormément si vous voulez à, justement, à ce que toutes ces choses merveilleuses qui ont été découvertes, deviennent maintenant, fassent partie du domaine commun. Donc mon laïus allait dans ce sens-là d'accord, d'essayer de vous faire voir, de manière un peu surréaliste si vous voulez, qu'il existe ces choses magnifiques mais que bon bien sûr, il faut faire un effort pour les apprendre et un effort pour les connaître. Voilà.

Séance de questions à l'orateur

- Merci beaucoup. Questions. Peut-être, donc, on fait ce qu'on a dit. Si vous avez des questions, des précisions sur ce qui a été dit, donc, questions qu'il ne faut pas avoir peur de poser, moi, j'en ai quelques-unes, mais je suis sûr que vous en avez aussi...

- Vous avez parlé de l'effet papillon... Et que ça n'existait pas.

- Je n'ai pas dit que ça n'existait pas. Mais j'ai dit que c'était une vaste fumisterie. Parce que ce que je veux dire, c'est comme si on disait qu'il y a un papillon qui va voler, puis l'avion qui suit un autre avion ne va pas décoller ; il y a un effet d'amortissement qui est colossal. Bien sûr qu'on peut faire un système mathématique qui dépend de peu de variables et qui est tel que, quand on fait bouger un petit peu une variable, ça va changer les résultats. Mais de là à faire croire qu'un petit papillon qui vole à un endroit, il va créer, je ne sais pas moi, un ouragan à un autre endroit, c'est ridicule... Bon on peut rappeler d'où ça vient, ça vient du fait qu'il y a des équations différentielles en mathématiques, qui sont telles que si on change un tout petit peu les conditions initiales, ça change le résultat de manière considérable, de manière exponentiellement plus grande. Ca, c'est vrai. Mais c'est vrai dans un modèle particulier. C'est vrai dans un modèle, dans lequel il n'y a pas d'amortissement, comme il se produit dans la nature. Dans la nature, heureusement, il se produit des amortissements, parce que sinon, dans la nature, on regarderait les papillons un peu partout, et puis on aurait la trouille *(rires)*. Heureusement que c'est comme ça. Mais c'est du bon sens, c'est du bon sens. Mais on a vu peut-être je ne sais pas combien de politiques ou des gens qui répétaient l'effet papillon sans rien comprendre, puisque s'ils avaient compris quoi que ce soit, ils se se seraient aperçus que c'était, hein, bon... C'est un exemple typique de gens qui répètent les choses sans les comprendre, simplement parce qu'ils se disent : "Ah ouais, c'est quelqu'un de puissant qui l'a dit, donc ça doit être vrai, quoi !"

- Merci.

- C'était une question sur le fait que vous aviez dit que souvent, les physiciens exprimaient tout en fonction du temps, et qu'on considérait souvent que c'était la variable...

- fondamentale.

- et vous disiez qu'en fait, il se trouve que la véritable variable, c'est la variable quantique, et je n'ai pas compris comment le temps découle de cette variable.

- Ca, c'est toute une histoire. En gros, c'est l'histoire de ma trajectoire. C'est-à-dire en fait ce qui se produit, mais c'est un peu expliqué dans le bouquin, mais c'est surtout bien expliqué dans un exposé que j'ai fait à l'IHES au mois de mai, et dont je pense qu'il doit être sur le site de l'IHES, il faut aller écouter cet exposé, je pourrais en dire deux mots. Mais bon, en gros, c'est que Von Neumann a créé les algèbres de Von Neumann comme étant des systèmes où on a une connaissance partielle de la réalité. Et avec le travail de Tomita, puis mes travaux pendant la thèse, on a compris que si on avait un système qui a une connaissance partielle de la réalité, à ce moment là, il y a un temps qui émerge. C'est-à-dire il y a une évolution dans le temps. Comme tout est quantique, et que la connaissance qu'on a de la réalité est effectivement partielle, c'est ça qui, avec les travaux que j'ai fait avec Carlo Rovelli, c'est ça qui devrait expliquer le passage du temps, c'est ce qu'on appelle le temps thermodynamique. Cette idée du temps thermodynamique, elle est bien expliquée dans notre bouquin à trois voix.

- Du coup, ma question rejoint un peu la question de Constantin tout à l'heure. Donc du coup, la constante fondamentale, il n'y en a plus maintenant, puisque finalement, tout repose sur une variabilité quantique ?

- Il y a une chose dont je n'ai pas parlé mais j'avais des transparents dessus donc je peux les montrer effectivement. C'est important, c'est important, c'est cette idée de variables. Parce que finalement, on revient à l'idée de variables. Qu'est-ce que c'est qu'une variable, vous voyez ? Nous, ce qu'on nous apprend en classe, ce que c'est qu'une variable réelle... Une variable réelle, c'est une application qui va d'un ensemble X dans les réels. C'est comme ça qu'on nous dit ce qu'est une variable réelle. Or si on regarde cette définition d'une variable réelle, on s'aperçoit en fait, avec un petit raisonnement, on s'aperçoit qu'on ne peut pas avoir coexistence de ce qu'on appelle des variables continues, des variables qui prennent par exemple un intervalle de valeurs, et des variables discrètes, qui prennent des valeurs discrètes. *(Il dessine un intervalle et des points au tableau).* Et la raison pour laquelle on ne peut pas avoir coexistence, c'est que si on prend une variable continue, l'ensemble X doit au moins avoir la cardinalité du continu mais s'il a la cardinalité du continu, on ne peut pas avoir une variable discrète, parce qu'il y aura des points qui seront atteints trop de fois. On ne peut pas avoir ça. L'extraordinaire valeur du formalisme quantique, tel que Von Neumann l'a développé, c'est que dans le formalisme quantique, tout est résolu : c'est-à-dire que dans le formalisme quantique, en fait, une variable, c'est le spectre d'un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert, c'est un peu compliqué mais là, pour les opérateurs dans l'espace de Hilbert, on peut avoir des opérateurs qui ont un spectre discret et des opérateurs qui ont un spectre continu et qui coexistent. Et alors, ce qui est extraordinaire, c'est qu'en fait, ça rejoint exactement la pensée de Newton. C'est-à-dire que Newton, dans ses écrits, quand il essayait de définir ce que c'est qu'un infinitésimal par exemple, il a écrit exactement la bonne phrase, qui correspond au quantique. C'est-à-dire, il disait une variable est infinitésimale. D'abord il disait ce qu'était une variable. Or le formalisme quantique donne exactement la bonne réponse par rapport à Newton. Ca, c'est la première chose.

Et alors donc maintenant, ce qui se produit, c'est qu'une fois qu'on a ce formalisme, de ce que c'est qu'une variable, on s'aperçoit que bien sûr, les variables discrètes ne peuvent coexister avec les variables continues que par la non-commutativité, et on s'aperçoit que c'est cette non-commutativité qui crée le passage du temps, d'accord ? Donc en fait, le $\hbar$ existe toujours en fait, la constante de Planck est toujours présente, mais ce qui est extrêmement frappant, c'est qu'on ne doit pas considérer le temps comme étant une donnée fondamentale, mais comme une donnée émergente, et que si on avait une connaissance absolue de tout, le temps ne passerait pas. C'est incroyable de penser ça, d'accord, c'est-à-dire que la raison pour laquelle on a l'impression que le temps passe, etc., c'est parce qu'on a une connaissance partielle de l'univers, d'accord. C'est ça qui est formidable si vous voulez avec ce jeu de la physique. Dans le livre qu'on a écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, il faut que je vous dise que Danye Chéreau c'est mon épouse *(rires)*, ce qu'on fait, c'est qu'on a trouvé une phrase très frappante qu'on a utilisée pour exprimer l'idée que je viens de vous dire. On a dit "L'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". Vous savez, Einstein avait dit "Dieu ne joue pas aux dés" donc voilà la réponse. La réponse du héros du bouquin à cette boutade d'Einstein, c'est que "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". C'est-à-dire que c'est parce qu'il y a constamment ces petits trucs complètement aléatoires, pop ! pop ! pop ! qui se produisent, que le temps passe. La nature a une imagination phénoménale. Et c'est ce que donne l'instrument pour mesurer des nombres aléatoires, c'est incroyable, ça veut dire "il prend le pouls de la nature", pop ! Allez ça, c'est un nombre aléatoire, pop ! un autre... Vous pouvez toujours essayer de les reproduire. Bon eh bien ça, c'est incroyable, c'est la phrase qui le dit, c'est "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine".

- Pour essayer de mettre un petit peu ça au clair, du coup, si, admettons, bon, on peut toujours hypothétiser, si par exemple, justement, cette nature quantique était stable, si elle ne bougeait pas, le temps ne passerait pas ?...

- Eh bien, non, justement, elle n'arrête pas de bouger !

- Mais admettons qu'on imagine qu'elle ne bouge pas. Ca veut dire que le temps ne passerait pas ?...

- Ah oui ! Non, non, non, c'est pas ça ; si on la connaissait complètement, si on avait toute la connaissance, là le temps ne passerait pas. Le temps passe parce qu'on a une connaissance partielle, c'est la thermodynamique, d'accord. La thermodynamique, ça nous dit, la thermodynamique, par le génie de Boltzmann, il nous dit que l'entropie, par exemple, c'est la connaissance partielle des choses, d'accord. Donc le passage du temps est relié à ça, d'accord. Mais la nature n'arrête pas de bouger, hein, d'accord ? !... *(rires)*

- J'ai une question parce que vous dites que pour votre thèse, vous vous êtes inspiré de Tomita qui a montré donc la non-commutativité...

- Non, non, c'est pas ça. Bon oui oui, c'est un détail... ! *(rires francs)*

- Est-ce que vous pourriez juste expliquer ce qu'on appelle les types ?

- Ah oui, les types ! ! Bien sûr, bien sûr, tout à fait, ben les trois types... Alors, les trois types. Où est-ce qu'ils sont, les 3 types ? Le premier type, c'est lui... *(Il montre une photo, éclats de rires.)*

Les 3 types, donc : le type I, c'est un système quantique tel qu'en fait, l'espace de Hilbert du système quantique se casse en un produit tensoriel de deux espaces, c'est-à-dire que c'est vraiment le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, et c'était ce dont les gens avaient imaginé que ce serait toujours le cas. Ils imaginaient toujours que quand on prenait un sous-système d'un système quantique, on pourrait casser l'espace de Hilbert en un produit tensoriel de deux, de telle sorte que le premier système corresponde au premier espace de Hilbert, aux opérateurs dans le premier espace de Hilbert, et l'autre aux opérateurs dans le deuxième espace de Hilbert. Alors ce que Von Neumann et Murray ont découvert, c'est qu'en fait, il y avait deux autres types. C'est-à-dire qu'il y avait une manière d'avoir des sous-systèmes quantiques qui ne correspondait pas du tout à un scindage de l'espace de Hilbert en un produit tensoriel. Alors le premier type, il y avait les dimensions réelles. Et puis le type III qui restait, c'étaient les autres. Et avant Tomita, on n'avait aucun outil pour attaquer le type III, d'accord. Donc ce que Tomita a trouvé, c'est que dans le type III, il y avait ce groupe $\sigma_{t\phi}$ et puis ce que j'ai trouvé dans ma thèse, moi, après, c'était que le groupe qu'avait trouvé Tomita, en fait, il était unique modulo les intérieurs, c'est-à-dire qu'il définissait une vraie évolution, indépendante de toute autre chose. Donc ça, ça a donné quantité d'invariants, etc., ça a permis de tout débloquer. D'accord ! Donc mais c'est incroyable parce que Von Neumann avait défini ces sous-systèmes quantiques de manière complètement euh, comment dire, c'est dans les écrits de Von Neumann, de manière complètement abstraite. Et jamais on aurait pu penser à l'époque de Von Neumann que ça aurait été relié au temps, au passage du temps, je veux dire, c'est absolument incroyable. Ca veut dire la profondeur du quantique. Heisenberg a découvert que ça venait de la non-commutativité, Von Neumann l'a reformulé sous forme d'opérateurs dans l'espace de Hilbert, il s'est posé le problème des sous-systèmes, et de là sort le passage du temps, c'est fabuleux !

- Est-ce que vous pourriez nous expliquer pourquoi le principe de l'entropie résulte de la connaissance partielle qu'on a du monde ?

- Ca, c'est Boltzmann et le pauvre Boltzmann était tellement incompris à son époque qu'il a fini par se suicider. Il a eu une idée absolument... Il a fait graver sur sa tombe la formule qui est la suivante $S = k\ log\ n$. Ca, c'est gravé sur la tombe de Boltzmann. Il s'est suicidé près de Trieste. Cette formule, qu'est-ce qu'elle dit ? C'est une des formules les plus simples mais l'une des plus difficiles à comprendre. Qu'est-ce que c'est que l'entier n ? C'est le nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique.

Il faut que je vous raconte un peu l'histoire : l'histoire, c'est à la période où les gens avaient découvert la machine à vapeur, et puis il y avait les locomotives et tout ça, et donc ce que les gens avaient découvert, c'était qu'il y avait un moyen de transformer la chaleur en énergie, en mouvement, en tout ce qu'on veut quoi. Et c'est comme ça que le chemin de fer a commencé, etc. Et ils s'étaient posé la question de ce qu'on appelait le rendement des machines et tout ça. Et donc bien sûr, si vous voulez, il y avait des quantités de chaleur dq donc qui étaient entre deux systèmes etc. Mais on s'était aperçu assez vite que si on prenait deux chemins différents pour aller d'un point à un autre, d'un état à un autre, l'intégrale de $\int dq$ si vous voulez, c'était pas préservé, c'est-à-dire qu'on ne peut pas définir la quantité de chaleur d'un objet. Par contre, on s'est aperçu que si on divisait dq par ce qu'on appelle la température absolue, eh bien ça, cette quantité-là si vous voulez, elle était bien définie, c'est-à-dire que quel que soit le chemin qu'on prenait, entre un état et un autre, l'intégrale de ce truc-là donnait le même résultat. Et c'est ça qui avait permis de définir l'entropie.

Mais cette entropie, elle était définie pour des systèmes macroscopiques qui étaient donnés par la température, la pression, le volume, enfin je sais pas quoi, si vous voulez un certain nombre de quantités macroscopiques, il n'y avait aucune interprétation, aucune, et ça s'appelait l'entropie. Ca s'appelait l'entropie, S. Mais cette entropie, elle n'avait aucune signification philosophique puisque justement, c'est de ça dont on parle, d'accord ? Et l'incroyable génie de Boltzmann, ça a été cette formule $S = k \; log \; n. \; dq + ds = log \; n$, c'est-à-dire ce qu'a compris Boltzmann, c'est qu'à chaque fois qu'on prend un état macroscopique donc un volume donné etc., on peut avoir le même état macroscopique, à partir d'états microscopiques totalement différents. C'est-à-dire que l'exemple le plus simple, c'est de prendre des boules rouges et des boules blanches, et de les empiler dans un réservoir. Et vous avez par exemple 50 boules rouges et 50 boules blanches. Vous voyez bien que vous pouvez les empiler de 36 manières différentes, d'accord. Mais l'état macroscopique correspondant vous dira qu'il y a la moitié de boules rouges et la moitié de boules blanches et puis c'est tout. Le reste, vous vous en foutez. Eh bien, ce qu'a compris Boltzmann et qui est incroyable, c'est que l'entropie, qui était définie de manière complètement ad hoc par les gens qui faisait des systèmes de machines à vapeur et tout ça, eh bien en fait, c'était simplement le logarithme du nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique donné. Bien sûr, il fallait une constante devant. C'est ce qu'on appelle la constante de Boltzmann, c'est normal qu'elle porte son nom. Donc cette constante de Boltzmann, c'est pas la même chose que la constante de Planck, et elle est, bon, évidemment il faut que ça ait la dimension d'une entropie etc. etc. d'accord. Mais c'est la formule la plus incompréhensible, et la plus géniale qui soit, cette formule d'accord. Et elle est très difficile à comprendre. Ce qui est très difficile à comprendre, c'est que les lois de la physique, pas de la physique des particules, mais les lois de la physique ordinaire, sont invariantes quand on change t en $-t$. Et si vous voulez, ce qui est très difficile à comprendre, c'est qu'un des principes fondamentaux de la thermodynamique est que l'entropie s'accroît. Alors on dit : “Mais le temps, il va dans quel sens ?. Ca, ça a hanté les gens pendant des années et des années. Et Boltzmann, il avait compris un nombre incalculable de choses simplement à cause de cette idée. C'est un exemple merveilleux, de formule très simple, mais justement si vous voulez, ça, c'est aussi une chose très importante que je n'aurais pas voulu oublier de vous dire, qui est qu'il y a un certain nombre de notions mathématiques ou de notions de physique comme ça, qui ont une qualité extraordinaire, et cette qualité, c'est de mettre la pensée en mouvement. Cette formule c'est un exemple typique, vous regardez cette formule, vous essayez de la comprendre, voilà, votre pensée est en mouvement maintenant. Elle a un potentiel extraordinaire de mise en mouvement de la pensée. Parce que vous pouvez vous dire “Pourquoi ça augmente ?”. En gros, l'explication de

Boltzmann de la raison pour laquelle ça augmente, c'est que, en général, on va aller vers des états qui ont de plus en plus de réalisations microscopiques, c'est-à-dire qui sont de plus en plus probables. Et après, pour mettre ça sur des bases solides, c'est une autre histoire...

- Donc vous nous avez beaucoup parlé de la physique, et on sait qu'en ce moment la physique théorique, ça devient un peu un repaire de mathématiciens, par exemple avec la théorie des cordes, et du coup je me demandais si vous, en un sens, est-ce que vous pourriez vous considérer plutôt comme un physicien qui fait des mathématiques ?

- C'est une bonne question, j'avais des amis qui, connaissant mes opinions sur la théorie des cordes, disaient que j'étais un peu comme une machine où on met des sous, alors, mais si on met 1 euro, je vais parler pendant 10 minutes contre la théorie des cordes. Donc je vais vous épargner. Non, mais je vais vous citer une phrase de Hadamard. Il faut que je la trouve déjà *(rires)*. Attendez, il faut que je la trouve... Alors, je crois que je vais y arriver. Voilà, c'est une phrase sur le lien entre les mathématiques et la physique ; ce que dit Hadamard, pour caractériser la profondeur des concepts mathématiques qui viennent directement de la physique, il dit (je le dis en anglais donc, mais c'est très facile à traduire en français) :

...not this short lived novelty, which can too often only influence the mathematician left to his own devices, but this infinitely fecund novelty, which springs from the nature of things[2].

Donc voilà la réponse. La réponse, c'est qu'il n'y a pas d'un côté les mathématiques, et d'un autre côté la physique. C'est la même chose : on essaie tous de comprendre, d'accord. Et justement, il y a cette profondeur extraordinaire dans certains concepts mathématiques qui viennent directement de la physique. Comme Heisenberg. C'est inépuisable parce que c'est venu de quoi, c'est venu de l'expérience, c'est venu de la physique, c'est la nature qui nous parle, qui nous dit quelque chose d'accord. Ca, c'est inestimable ! Mais ce n'est pas le cas de la théorie des cordes, parce que la théorie des cordes,

2. ...non une brève nouveauté qui souvent influence le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais une nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses. in Jacques Hadamard, Préface à l'introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel de G. Juvet, Albert Blanchard, Paris, 1922

c'est une déviance qui elle, est venue à partir de mathématiques abstraites etc., et qui elle n'a pas de contact avec l'expérience.

- Il y a un autre mathématicien, qui s'appelle Carlo Rovelli *(précision d'Alain Connes : "C'est un physicien, lui, c'est un physicien" (rires))* et il dit que pour lui, la beauté de la physique, c'est une idée simple, qui nous ouvre sur un monde totalement nouveau et en même temps, ce monde, il est réel, il est correct. Et je me demandais pour vous, ce que vous pensiez vous de la beauté mathématique...

- Ca, c'est une bonne question *(soupir)*. Bon d'abord, il y a beaucoup de gens qui, et je pense que c'est vrai, qui vous diront que la notion de beauté est une notion très relative, c'est-à-dire que chacun a sa notion différente etc. bien sûr. Mais bon moi, j'avoue que pour moi, la beauté mathématique, c'est quand, après des calculs terribles, terriblement compliqués, on arrive à la même chose, on arrive au résultat, mais par une idée d'une simplicité incroyable, un peu comme l'œuf de Colomb d'accord. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique, pour moi, la beauté, c'est la simplicité d'une idée, mais en fait, d'une idée qui va... Bon par exemple, je ne sais pas... quand on parlait de Galois, je vais vous fournir un exemple de cette beauté. Que dit Galois ? Galois dit quand on prend une équation, on prend une équation polynomiale. Alors, la première chose qu'on va faire, on va trouver une fonction des racines, qui quand on permute les racines, va prendre... Bon, par exemple, on prend une équation de degré 5. Il faut que quand on permute les racines de manière arbitraire, cette fonction prenne 120 valeurs différentes (5! valeurs différentes). Alors comment est-ce qu'il fait, Galois, pour trouver une telle fonction ? C'est très simple : il dit "si j'appelle les racines A, B, C, D, E, d'accord, je prends A plus 1 000 000 de fois B + 1 trillion de fois C etc. Evidemment, quand je vais les permuter, ça va prendre que des valeurs différentes. Ca va prendre 120 valeurs différentes". C'est la première chose. Deuxième chose, que dit Galois ? Il dit "eh bien, maintenant, prenons pour équation l'équation qui a pour racines ces 120 racines. On prend cette équation et on la décompose en facteurs irréductibles. On peut exprimer les racines de l'équation de départ en fonction de ces facteurs irréductibles et on va obtenir, en prenant ces facteurs irréductibles, des permutations des racines de l'équation. Théorème, voilà la beauté mathématique. Théorème : Le groupe de permutations obtenu ne dépend d'aucun des choix qu'on a faits. C'est-à-dire que si, au lieu d'avoir pris A plus 1 000 000 de fois B etc., j'avais pris 1 000 001 ou n'importe quoi, j'aurais obtenu le même groupe. Ca, c'est la beauté mathématique, c'est quelque chose d'incroyablement beau. Pourquoi ? Parce que ça veut dire qu'on a donné une recette, qui avait l'air complètement arbitraire, et on est arrivé à un invariant, on est arrivé à un groupe, qui est une caractéristique de l'équation, qui va donner tous les résultats qu'on veut, et qui est d'une simplicité biblique, à la fin, c'est-à-dire la manière dont il est défini, c'est d'une simplicité biblique. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique. Mais c'est un exemple, hein, je veux dire, la définir abstraitement, si on en donnait une définition abstraite, c'est évident qu'on pourrait trouver un contre-exemple et qu'on pourrait trouver... Mais c'est... En fait, si vous cherchez des choses générales sur la beauté en mathématiques, sur des choses comme ça, lisez *Récoltes et Semailles* de Grothendieck. Parce que c'est... Grothendieck n'était pas seulement un mathématicien, en fait, c'était un littéraire, et c'était quelqu'un qui a été capable dans ses écrits, d'aller très très loin dans l'analyse de ce que sont les mathématiques, de ce que c'est que la beauté en mathématiques, etc. Donc il a écrit 1500 pages, ces 1500 pages, vous pouvez les trouver sur internet, d'accord. Et n'écoutez pas les gens qui vous diront qu'il est fou parce que ce n'est pas vrai, ce n'est pas vrai : c'était quelqu'un qui était merveilleusement intelligent, et qui a écrit merveilleusement en tant que littéraire. Il a un vocabulaire extraordinaire, etc. J'ai fait un exposé, au séminaire d'Antoine Compagnon, sur Grothendieck et Proust, en les comparant justement, et je pense qu'il est disponible cet exposé, peut-être sur le site du Collège de France ou sur mon site. Donc, parce que je veux dire, parce que c'est très frappant, c'est très frappant de voir que ce sont deux individus qui ont réussi une chose que peu de gens réussissent, aussi bien l'un que l'autre, qui est non seulement une œuvre, pour Grothendieck, mais aussi si vous voulez ce que dit Grothendieck, ce qu'il explique, c'est qu'en fait la... En fait, si on veut se réaliser bien sûr, bon, c'est bien de faire une vraie mais en fait la principale difficulté qu'on a, c'est de se comprendre soi-même, et pour se comprendre soi-même, ça paraît idiot *(rires)*, n'est-ce pas ? Et pour se comprendre soi-même, il faut en gros s'auto-analyser, c'est ce qu'a fait Grothendieck et d'une certaine manière, c'est ce qu'a fait Proust aussi dans son livre. Ce sont aussi des gens qui, à partir d'un moment donné, ont arrêté de vivre et ont passé le reste de leur vie à ré-analyser leur vie passée, d'accord, et à la comprendre, etc. Et dans les deux cas, c'est merveilleux, le résultat est merveilleux, d'accord. Donc la meilleure réponse je crois, c'est celle-là, c'est d'aller voir dans *Récoltes et Semailles*, et de le lire, pas de le feuilleter, il faut le lire vraiment, il faut le lire attentivement, vous voyez, comme les passages que je vous ai lus tout à l'heure.

- Merci de préciser : *Récoltes et Semailles*, c'est le livre que Grothendieck a écrit et auquel on a accès depuis peu de temps, finalement...

- Non, pas peu de temps, ça fait très longtemps qu'on y avait accès mais bon, il a écrit d'autres livres. C'est un personnage, tous ces personnages-là ont des vies extraordinaires. Grothendieck a eu une vie extraordinaire parce qu'en gros, en 1970, il a quitté l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (l'IHES) et il est redevenu, parce que c'était son tempérament fondamental je pense, un peu un paria si vous voulez. Et à partir de 1991, il s'est réfugié dans un village des Pyrénées. Et plus personne n'avait de nouvelle de lui, mais il continuait à travailler, il continuait à écrire. Et alors, il n'a pas seulement écrit *Récoltes et Semailles*, il a aussi écrit un autre texte magnifique, qui s'appelle *La clé des songes*. Et c'est un texte mystique, mais bon alors, je vais dire c'est pareil, je veux dire, c'est pareil... Mais c'est extrêmement intéressant, mais je pense que par exemple, pour des gens qui font de la littérature, ces textes-là ont une valeur infinie. Il y a des thèses à faire là-dessus, il y a 36 choses à faire, bien sûr...

- Alors moi j'avais vu quelque part sur internet je crois, je ne suis pas sûre de mes sources, qu'en fait vous pensiez que les mathématiques existaient sans les hommes en fait, que même ce n'étaient pas une invention faite par les hommes, et j'ai un peu de mal à comprendre ça en fait, parce que souvent, on voit les maths comme quelque chose de très abstrait qui n'existerait pas sans que les hommes les aient inventées, donc, pouvez-vous expliquer ça ?

- Bon, je peux vous donner la réponse. La réponse est très simple. Vous prenez, vous prenez la chimie. C'est un sujet que j'exécrais, moi, lorsque j'étais en maths sup et maths spé, donc vous avez tous ces trucs-là. Alors on a les corps composés puis on a les corps simples. Les corps simples, il y a le tableau périodique des éléments. Le tableau périodique des éléments, incroyable mais vrai, il y a le principe d'exclusion de Pauli, et une toute petite équation, qui vous le donne. Ca me suffit, moi. Pourquoi ? Parce qu'imaginons qu'il y ait un autre système planétaire etc. Si ce sont des êtres intelligents, ils vont comprendre la chimie, qu'il y a des corps simples, ce sera les mêmes, ils n'auront pas... je veux dire ils n'auront pas des corps chimiques, ils n'auront pas des corps simples différents des nôtres, donc ils vont comprendre les corps simples. Et puis, s'ils sont vraiment intelligents, ils vont essayer de trouver, bon, ils auront le tableau périodique des éléments. Ils vont essayer de trouver quelle est l'origine abstraite du tableau périodique des éléments. Ben, s'ils sont vraiment intelligents, ils trouveront la même chose, ils trouveront qu'il y a le principe d'exclusion de Pauli. Et puis, il y a cette petite équation... Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que, derrière l'apparente, comment dire, arbitraire du monde qui nous entoure, il y a des choses incroyablement simples qui le régissent, la chimie, l'itération puisque les arbres, tout ça, c'est régi par l'itération, et qu'en fait, il y a une manière de comprendre le monde, qui au lieu d'être un chaos, si vous voulez, est quelque chose de beaucoup plus structuré, et qui est structuré par les mathématiques. Et il n'y a aucune raison pour que, bien-sûr, les gens donnent le même nom aux concepts mathématiques qu'ils auront utilisés, mais c'est bien clair qu'ils utiliseront la... , s'ils sont des êtres différents et ils auront 1, 2, 3, 4, 5. Ils ne le diront pas de la même manière, mais ils utiliseront le langage mathématique, ce langage sera en correspondance avec le nôtre, comme le langage des chinois est en correspondance avec le nôtre.

Donc, c'est en ce sens-là, c'est en ce sens absolument fondamental, que je dis que les mathématiques pré-existent, pourquoi ? Parce que ce serait incroyablement prétentieux de dire que nous avons inventé les nombres entiers. Alors à ce moment-là, pourquoi la chimie aurait déjà utilisé ces choses-là pour exister ? Ca paraît complètement débile. Donc en fait, ce que je dis, c'est que, quand on a trouvé, quand Watson et Crick ont trouvé la structure en double hélice de l'ADN, ils ne l'ont pas *inventée*, personne ne va croire qu'ils l'ont *inventée* bien sûr, ils ont *découvert* ça. C'était une réalité, et cette réalité, elle pré-existait à eux. Eh bien, pour les mathématiques, c'est pareil, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que nous découvrons, un peu comme un explorateur va découvrir quelque chose. Cet explorateur, il a un libre-arbitre, il peut aller à tel endroit ou à tel autre endroit. C'est ce qui fait croire à des gens qu'en fait, c'est comme l'art. Mais non ! Ce n'est pas de l'art, c'est de l'exploration. Et c'est une exploration d'autant plus... comment dire ? réelle, que cette réalité, elle résiste. Si c'était de l'art, on pourrait faire dire n'importe quoi, et n'importe quoi. Ce n'est pas le cas. Ce n'est pas le cas. Il y a une résistance terrible... Et alors un exemple, un autre exemple typique, c'est que si par exemple, j'écris une équation etc., et puis bon, par exemple, Galois avait dit que les calculs qu'on devait faire pour suivre sa méthode étaient impossibles à faire et à son époque, c'était impossible à faire. Et pour montrer que c'était impossible à faire, quand j'ai donné mon exposé à l'Académie, j'ai expliqué aux gens la méthode de Galois et je leur ai demandé "est-ce que vous pouvez me donner une idée... ?", bon, parce que chaque racine s'exprime comme un polynome en fonction des racines de l'équation auxiliaire. Je leur ai demandé, je leur ai donné une équation comme celle que je vous ai donnée tout à l'heure je leur ai dit "est-ce que vous pouvez me donner l'ordre de grandeur du coefficient d'ordre 0 du polynome qui exprime la première racine ?"... 1 million sur 1 million, ou quelque chose comme ça. Non, la réponse, c'est un nombre à 500 chiffres sur un nombre à 500 chiffres ! L'ordinateur le fait maintenant, et l'ordinateur vérifie que Galois avait raison d'accord ! Alors dire que Galois l'a inventé, je veux dire, c'est un peu gros, quoi ! Non, non, non ! Non, non, non ! On *découvre*, on *découvre*, mais exactement comme il avait fallu le microscope électronique, pour découvrir la structure en double hélice de l'ADN, le mathématicien invente des outils conceptuels pour réussir à percevoir cette réalité. Mais il invente des outils conceptuels bien entendu. Mais c'est une réalité qui est là, elle résiste, elle est complètement tangible et elle régit la nature. Elle est plus fondamentale, pour moi, cette réalité-là est plus fondamentale que la nature qui nous entoure. Elle pré-existe à ça d'accord. Si vous voulez, ce serait même... je pense que ce ne serait pas juste de dire que la nature est seulement écrite dans le langage des mathématiques ; les mathématiques, c'est plus que ça, c'est plus que ça. La nature est consubstantielle des mathématiques. Nous, on ne s'en rend pas compte parce qu'on n'est pas suffisamment intelligent pour se rendre compte de l'explication qui est derrière tous ces phénomènes. Si on s'en rendait compte plus, on le saurait beaucoup mieux. Et c'est d'autant plus vrai avec le quantique. Je veux dire, le quantique, là, c'est flagrant. Le quantique, c'est une réalité qu'on ne perçoit que par les mathématiques, on ne la perçoit absolument pas autrement. C'est-à-dire que les gens qui font des expériences avec le quantique, en optique quantique, ils comprennent ce que c'est que l'espace de Hilbert, ils le touchent comme ça, d'accord, c'est incroyable, ça, ça, c'est vraiment incroyable !

- Merci.

- Vous êtes prêt à répondre encore à quelques questions ?

- Oui, ça va, ça va.

- Pour que l'on ait plus de facilités par exemple avec les notions abstraites, en mathématiques ou en physique, ou même avec les raisonnements, qu'est-ce que vous préconiseriez dans l'éducation et dans l'enseignement, à présent, dans l'école primaire ou même dans le secondaire ?

- Je vais répondre, d'abord pas dans l'école primaire, ni dans le secondaire, je réponds pour vous, parce que c'est le plus utile. Donc pour vous, ce que je préconise, c'est la chose suivante. Pour répondre à une question, même une question de calcul compliquée, vous laissez tout en plan, vous allez faire un tour à pied, d'accord. Et la question, vous la gardez dans la tête, d'accord, vous la gardez dans la tête, et vous réfléchissez. Evidemment, ça peut être différent selon les individus, mais pour moi, c'est le grand secret. C'est-à-dire un calcul, aussi compliqué soit-il, vous pouvez vous dire "Oh ! Jamais je vais y arriver si j'essaie comme ça !" Non ! Vous partez faire un tour à pied, et vous réfléchissez à la structure du truc, et après quand vous reviendrez, bon, vous verrez que ça améliore drôlement les choses.

Bon alors maintenant, dans le primaire, j'en sais rien, moi, tout ce que je peux vous dire, c'est ma propre expérience, parce que je n'en connais pas d'autre. Mais ma propre expérience, c'est quand j'étais gamin, quand j'avais 5 ans, mon père nous imposait de faire des calculs. On était dans le jardin avec lui, il était avec nous, et il nous faisait faire des opérations, et à l'époque, on faisait les quatre opérations, c'est-à-dire on faisait la division, à 5 ans, on faisait la multiplication, on n'avait pas attendu la sixième pour apprendre la division, et tout ça donc, on faisait ça. Et après une autre expérience qui m'est arrivée... Et moi, j'adorais ça, c'était sans doute aussi ma relation avec mon père, il me faisait à la fois peur, mais j'étais content de lui faire plaisir, enfin bon, je ne sais pas, donc je ne sais pas, je ne sais pas comment expliquer ça : je vais dire que je pense qu'il y avait une vertu extraordinaire au fait de faire des opérations comme ça, c'est-à-dire d'apprendre par cœur la table de multiplication et puis, on ne l'oubliait pas la table de multiplication, si on faisait des multiplications et des additions à longueur de journée, on ne l'oubliait pas, on la savait après. Et ça devenait un automatisme absolu. Donc il y avait ça, et moi, ça me plaisait énormément. Une autre histoire que j'ai, c'est qu'une fois, ça, je trouve ça absolument extraordinaire, une fois, j'ai rencontré un ami que je n'avais pas vu, on jouait au foot ensemble, dans le temps, et puis peut-être 8 ou 9 ans après, je prends le TGV pour aller à, je crois que c'était à Rennes ou un truc comme ça, et puis je vais à ma place de TGV et puis, je regardais mon numéro, et je vois quelqu'un à côté qui regardait son numéro et c'était mon copain. On a commencé à discuter etc. Et puis alors, la discussion habituelle, tu as des enfants, il commence à m'expliquer qu'il a un fils, et que son fils est bizarre. Il faut dire que mon copain est littéraire. J'ai dit "pourquoi ?". Bon tu sais, bon d'abord, il avait été malade quand il était petit et puis une fois, quand il avait 5 ans, on était ensemble, on était sur la plage et puis il avait l'air souffreteux ; moi j'étais inquiet, je veux dire pendant une heure, il était là, au lieu d'aller se baigner, il était un peu blanc et puis au bout d'une heure, il vient me voir, donc c'est mon copain qui raconte, il vient me voir, et il me dit : "papa il n'y a pas de plus grand nombre !". Je lui dis "Ecoute, ton fils, il est génial !" *(rires)*. Il me dit. "Ah oui, bien sûr !". Je lui ai demandé si son fils avait trouvé une démonstration et il avait trouvé une démonstration, qui n'est pas la démonstration usuelle, c'était pas rajouter 1, c'était multiplier par 2 ou quelque-chose comme ça, peu importe, il avait trouvé une démonstration. C'est incroyable, mais après, il me dit, "tu sais, il a eu des problèmes à l'école" *(francs éclats de rires)*. Alors, il m'a raconté ses problèmes à l'école. Alors ça, ça va répondre à votre question pour l'école primaire. C'est qu'à l'école primaire, donc on lui avait posé le problème suivant : c'était "une fleuriste a 120 fleurs, elle fait 4 bouquets de 17 fleurs, combien lui reste-t-il de fleurs ?", d'accord. Alors lui, il avait eu "zéro, n'a pas le sens des opérations". Il était pas con, il lui en reste 120 puisqu'elle ne les a pas données *(rires de tous)*. Quand il m'a eu raconté ça, j'ai dit "bah écoute ton fils, c'est un mathématicien". Et alors, on a organisé donc avec son père une rencontre au Tea Caddy à Paris, c'est un endroit charmant. Et son fils à l'époque avait 12 ans. Donc bon, les choses ont évolué, ça fait un certain moment, et maintenant, c'est un grand mathématicien qui est prof à Orsay. Alors incroyable, incroyable, incroyable ! Donc je crois que ce qui compte, c'est ce que dit Grothendieck, c'est de retourner dans cet état d'enfance et de se poser les bonnes questions, et puis de ne pas hésiter à être à contre-courant etc. Surtout je veux dire que le moment où on devient mathématicien, c'est le moment où on est capable de dire au prof qu'il a tort et pourquoi, ça veut dire être capable de résister à son autorité, pour dire qu'on a réfléchi, et qu'on n'est pas d'accord, et puis d'être sûr de soi, parce qu'on a réfléchi par soi-même, c'est hyper-important.

- Non en fait, j'ai une question, même si je pense que vous avez un peu répondu à cette question par vos propos, mais j'aimerais vraiment savoir pour vous quel est le but du travail d'un scientifique, enfin, si vous pensez que c'est plutôt d'augmenter, de faire avancer la connaissance fondamentale, ou de le rendre accessible à son public pour une éventuelle application.

- Il y a ces deux aspects, que l'on ne doit pas mélanger du tout, il y a ces deux aspects. Je pense que la vraie motivation, c'est de faire avancer la connaissance fondamentale. C'est-à-dire qu'en fait, la vraie motivation qui doit être justement indépendante de toute autorité, de tout désir de reconnaissance, etc., la vraie motivation, c'est d'essayer de comprendre, comprendre là où on est, là où on a atterri, d'accord, c'est ça, c'est tout simple à comprendre, c'est là où on est.

- Non mais sur cette question de la vulgarisation des savoirs et en particulier des savoirs mathématiques. A vous entendre, il y a un risque : l'effet papillon en est un. Moi j'allais dire ce que j'avais retenu, par exemple, de l'entropie, ce que les philosophes, ce que certains philosophes peuvent faire de l'entropie, il y a parfois effectivement un grand danger d'une espèce de ... et en même temps, vous semblez dire qu'il y a un besoin. Donc si on vous demandait en gros "comment faire pour éviter le danger et répondre au besoin", est-ce que vous seriez... ?

- Oui, oui, c'est une très bonne question. Il y a eu Sokal, il y a eu Deleuze. Il y a eu Lacan, je ne sais pas si vous savez, mais Lacan a dit dans un séminaire que le nombre $\sqrt{-1}$ est le symbole du sexe mâle, d'accord. C'est ce qu'on appelle le nombre imaginaire pur ! ! *(rires)*. Il fallait le faire quand-même, hein ? ! Et en plus, il a fait une fois un séminaire, où il avait un théorème d'accord, et son théorème, c'était que "Don Juan est compact". Quelqu'un lui avait dit la définition d'un espace compact en mathématiques. Donc ça, évidemment, c'est débile, d'accord, c'est absolument débile. Et qu'est-ce que c'est ? Ce sont des concepts mathématiques mal compris qui sont utilisés comme une autorité psychologique sur les autres, c'est-à-dire qu'ils sont utilisés parce que les gens ne comprendront pas et l'effet papillon en est un exemple flagrant, comme une autorité psychologique parce que les gens quand ils ne comprennent pas, ils sont en position d'infériorité, leur compréhension s'arrête, et si vous voulez, ils sont impressionnés etc. Donc, il y a cette manière terrible d'utiliser les mathématiques, qui est justement d'utiliser de grands mots, comme une espèce de pouvoir psychologique sur les foules. Alors ça, c'est à bannir à tout prix. Par contre, moi ce qui me désole si vous voulez, c'est que des concepts aussi beaux que le concept de topos de Grothendieck, ne soit pas plus connu par des gens qui en auraient besoin parce que comme je vous le dis, nous sommes tous maintenant victimes du scientisme qui consiste à croire qu'une chose est vraie ou fausse alors que dans la réalité, il y a des situations qui sont bien plus subtiles que ça, bien plus subtiles que ça et qui demandent un outil de pensée que la notion de topos donne et c'est une notion qui est délicate, qui est difficile, qui demande, pour la connaître, pour la comprendre, une connaissance mathématique. Donc ce que je dirai si vous voulez, c'est qu'il y a un magnifique boulevard qui est ouvert. Ce boulevard consiste à apprendre suffisamment de mathématiques pour après les utiliser de la bonne manière, dans d'autres domaines, mais il faut d'abord commencer par apprendre suffisamment de mathématiques, c'est ça le prix à payer, c'est absolument nécessaire d'accord.

- Moi c'était justement par rapport à la question de la vérité : à vous entendre, on a l'impression que vraiment les mathématiques, ça permettait d'atteindre cette vérité avec la physique quantique, et je voulais savoir, je crois que c'est Einstein qui disait que “le monde est un peu comme une horloge fermée”, on peut juste voir ce qui se passe, mais on ne peut jamais être sûr que ce qu'on trouvera, c'est vrai. Et qu'est-ce que vous en pensez de ça, de l'idée que peut-être que tout ce qu'on explique, ce sont des théories qui sont finalement fausses comme par exemple, Einstein, qui a tout remis en cause dans la physique... ?

- Il y a toujours effectivement la possibilité d'une théorie au-dessus, qui simplifiera ce qui est à l'étage avant etc. Mais on voit quand même qu'on progresse, de ce point de vue-là. Ce que j'essayais de faire passer justement, c'est l'extraordinaire subtilité, la richesse de la nature, de là où on est, quoi. Le fait qu'à chaque fois, on aura des surprises et on aura des surprises extraordinaires. Puisqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il y avait des physiciens qui disaient qu'on avait tout compris. Et justement, on était avant l'ère quantique, avant tout ça, avant la relativité générale. C'est vrai, parfaitement vrai, ce que vous dites. Mais, j'insisterai plus sur la merveilleuse imagination de la nature, quoi, je veux dire, on est sûrement très, très loin, il y a peut-être des civilisations, il y a sûrement des civilisations, dans d'autres planètes habitées, dans lesquelles les gens ont été beaucoup plus loin que nous. Ca, c'est bien possible et ils nous prendraient pour des primitifs. C'est bien possible, c'est tout à fait possible.

- Vous avez dit que les mathématiques n'étaient pas dans le domaine du connu, et globalement, les sciences. Mais est-ce que vous ne pensez pas que c'est parce que les mathématiciens, les physiciens et autres, ne participent pas assez au débat, par exemple, lors de la définition de programmes scolaires, on entend des philosophes, des historiens...

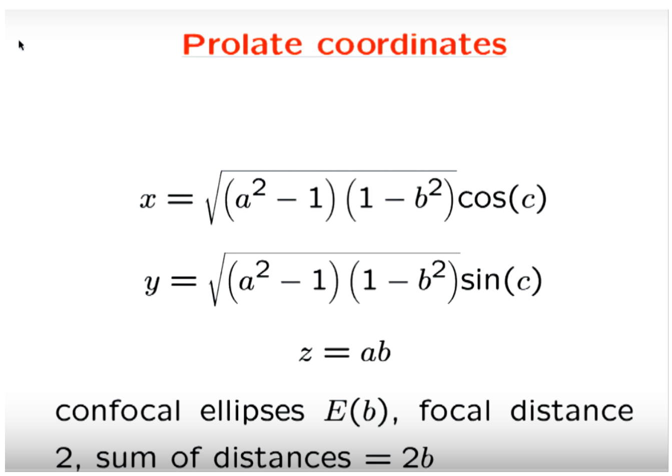
- Ca, c'est vrai, il y a du vrai là-dedans, il y a du vrai. Mais d'un autre côté, c'est pas tellement le problème. Je ne dirai pas que le problème vient du fait que ce n'est pas assez vulgarisé. Je pense que le problème vient plus de la lenteur de l'absorption par l'ensemble de la société de notions élaborées. Par exemple, je prends un exemple typique, qui pour moi est important. Vous voyez, au moment où l'imprimerie a été découverte, la notion de nombre a été transmissible. C'est-à-dire, il y a eu des bouquins, etc., etc. Maintenant, on en est au point où ce n'est plus le nombre qui est transmissible, mais c'est la notion de fonction, de graphe, etc. Et il y a un vocabulaire qui est passé dans le grand public, par exemple, quand on dit qu'on va inverser la courbe du chômage *(rires)*. Alors ça, ça fait intervenir l'annulation de la dérivée seconde. Si on nous disait "on va faire annuler la dérivée seconde...", il y aurait de quoi se marrer *(rires)*. Bon, enfin, vous voyez un peu le genre... Donc c'est sûr que, si vous voulez, il y a maintenant certaines notions mathématiques, dont la notion de fonction de croissance, de décroissance, de dérivée première, d'annulation de dérivée première, etc. qui sont passées dans le grand public, d'accord, mais il y a des notions beaucoup plus subtiles, comme la notion de topos, comme les notions qui viennent du quantique etc. qui ont plus de mal à passer dans le grand public. Comment les faire passer dans le grand public ? Sans doute par l'éducation, mais à ce moment-là, il faudrait qu'on soit beaucoup plus courageux, dans le système scolaire, c'est évident, c'est absolument évident. Il faudrait qu'on ne soit pas dans le renoncement actuel qui est lamentable. Je sais qu'à mon époque, bon je veux dire, qu'on n'arrêtait pas, moi, je n'arrêtais pas et mes copains n'arrêtaient pas, de faire des problèmes de géométrie. On rentrait chez nous, et on faisait des problèmes, et c'étaient pas du tout des problèmes faciles. Et maintenant, c'est fini ! Maintenant, on apprend des recettes, on apprend à appliquer des recettes ; bien sûr, c'est beaucoup plus facile pour un prof. Un jour, quand vous aurez des enfants, vous vous apercevrez d'une chose qui est absolument fondamentale, c'est que quand vous avez un petit enfant, vous avez le choix. Le petit enfant, il essaie de faire quelque chose, vous avez deux possibilités : la première possibilité, c'est de faire cette chose pour lui, vous croyez que vous l'aidez, en fait, vous ne l'aidez pas du tout, vous lui nuisez, en faisant ça ; la deuxième chose, c'est d'être patient, et d'attendre qu'il y arrive par lui-même. Et là, vous faites quelque chose de vraiment utile, d'accord. Donc bon, dans ce qu'on fait dans le système scolaire actuel, qui est d'apprendre des recettes toute faites pour résoudre des problèmes tout faits, ça consiste à faire les choses à la place de l'enfant. C'est exactement ça qu'on fait, c'est exactement ce truc-là. Alors que la vraie découverte du travail, la vraie découverte de l'école, elle doit se faire entre 11 et 12 ans. Et elle doit se faire en séchant devant des problèmes dont on ne nous donne pas la solution, mais dont on vous demande de la trouver, d'accord, où l'on vous demande de sécher. Et à partir du moment où à cet âge-là, on a compris ce qu'est le vrai travail, ça va, ça va, c'est OK. Et ça, ce n'est pas le cas dans le système scolaire actuel. Bien sûr, loin de là, terriblement. Bien sûr. Il y a Laurent Lafforgue qui a essayé, et de toutes ses forces, d'aller dans ce sens-là, bon, il y a dépensé énormément d'énergie ; dire qu'il y est arrivé, ce ne serait pas vrai, je vais dire, en tout cas, il y a des gens qui ont fait un effort colossal pour aller dans le bon sens, maintenant après, il y a une résistance terrible du système.

Prolate wave operator and infrared and ultraviolet for zeta

Alain Connes

Thank you so much for your invitation and for this occasion to participate to this great conference, which is a tribute to Christoph galensky who was a wonderful mathematician and physicist.

And what I want to explain is a quite surprising link between physics, when I talk about physics I mean I will talk about the prolate spheroid which is an ellipsoid but you consider it as a three-dimensional volume, I mean it's filled, and the zeros of the Riemann zeta function. And when we look at the zeros of the Riemann zeta function, when we plot them, what we find is of course a very strong similarity with what would be if you want the spectrum of a Dirac operator. And when you think about them spectrally, you find that there are two regimes which have to be understood if you want : there is the ultraviolet regime in which the counting function for the zeros of the Riemann zeta function is a very strange function ; it's given by a formula which is due to Riemann and which is this formula where you have, if you want, a term of the form E over 2 pi times log of E over 2 pi minus E over to Pi and then there is a logarithmic discrepancy which arises. So this is for the ultraviolet part. And for the infrared part, I mean, it's very surprising what you get because, I mean, like the first zero is around 14, and something and then okay, they behave in a very precise manner which has to be understood. And what we shall see is that both in the ultraviolet and the infrared, the prolate spheroid will play a crucial role.

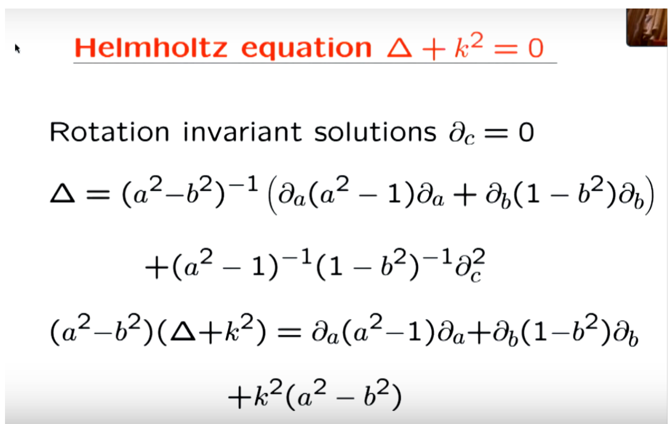


So I will talk about two joint papers very recent, one which was published in the Proceedings of the National Academy of Science with Henri Moscovici on the UV Prolate Spectrum and the second one which is in collaboration with Katia Consani and which considers this time the infrared behavior.

Okay so we shall see quite precise result, but somehow, let's start from the physics. Let's start from the prolate spheroid. So if you want, the Prolate spheroid is understood by means of a very specific system of coordinates which are called the prolate coordinates when you see them they look

Transcription de la vidéo derrière ce lien https://www.youtube-nocookie.com/embed/Yfu9$_fM - jzQ$, Denise Vella-Chemla, janvier 2023.

a little bit strange I mean there are these coordinates, a, b, c. c is an obvious coordinate because of the if you want the rotation invariance of the spheroid. But the other if you want the term which arises in front of the cosine and the sine for x and y looks rather strange. If you think a little bit, what you will find out is that in fact, this term is there because it describes a family of confocal ellipses so it looks like this : really what you have is there ; you have two foci ; you have one which is the point (zero, zero, one) and the other one which is the point (zero, zero, minus one) ; so they are both on the z-axis if you want, and the parameter b which was entering in the coordinates is in fact verifying that $2b$ is the sum of the distance into the foci. You know that an ellipse is defined by the fact that the sum of the distances to the two foci is constant and this constant is $2b$. So this is the role of the parameter b and the role of the parameter a is just an angular parameter. So what happens then is the following : what happens is that when you compute the Laplacian in this coordinates, the ordinal Laplacian okay, you find an expression which then will allow you to deal with the Helmholtz equation for the three-dimensional spheroid, the prolate spheroid (it's called prolate because it's elongated in the direction of the symmetry axis).



Okay so I mean when you look at the Laplacian, it has this form, okay, and if you look at rotation invariant solutions (things simplified a bit because you have the differential with respect to the variable c, the angular variable c which is zero), and then, what you get when you write down the Helmholtz equation, you find that there is what is called the separation of variables ; namely the equation splits if you want as a sum of two terms, one which only involves the variable a, and the other which only involves the variable b. And when you look a little bit more closely, what you find out is that in fact to solve the Helmholtz equation, what do you have to do ? You have to solve both the angular equation and the radial equation. So as equations, as differential equations, they are the same, but the variables that you use as variables a and b and the variable a is between -1 and 1. This is if you want the angular part. And the variable b is larger than one, it goes to infinity, and this is the radial part. Now for the solutions what the solutions will look like, the product of two functions one function which only depends on a and one function which only depends on b so $\phi(a)$, $\psi(b)$ but they have to be eigenvectors if you want for the same eigenvalue for the differential equation. And it is because they will be for the same eigenvalue if you want that the terms will cancel off and they will give you a solution of the Helmholtz equation.

Separation of variables

Angular equation = Radial equation, but the variables have domain $[-1, 1]$ for the angular part and $[1, \infty)$ for the radial part. Solution $\phi(a)\psi(b)$ with same eigenvalue and $\psi = 0$ on boundary.

Moreover of course, since you want to have Dirichlet boundary condition you have to have that $\psi(b)$ is 0.

So what happens, in fact, can be stated like this if you want is that there is an operator, there is a second order a differential operator which spits out from this Laplacian and which has the following form modulo easy rescaling which is a change of variables, the operator, the way we shall consider it, is this operator W_λ which depends on the parameter λ ; λ is related to K by a very simple equation k equals 2 Pi Lambda square, and the operator W_λ looks like this : it's a differentiation times lambda square minus x square times differentiation plus an additional term which is 2 pi Lambda x square okay.

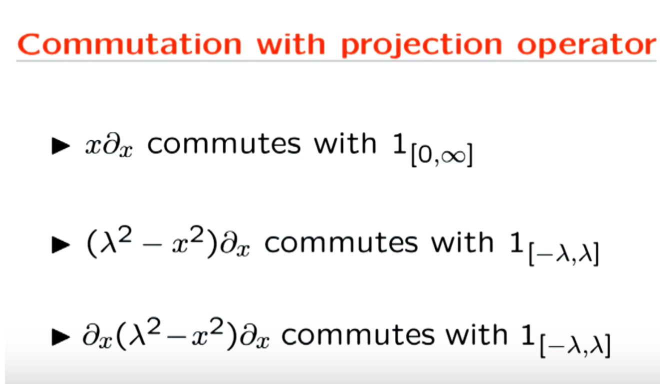
Prolate spheroidal operator

The second order operator $\mathbf{w}_\lambda$ appears from separation of variables in the Laplacian Δ for the prolate spheroid :

$$\mathbf{w}_\lambda := -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$$

$$(k = 2\pi\lambda^2)$$

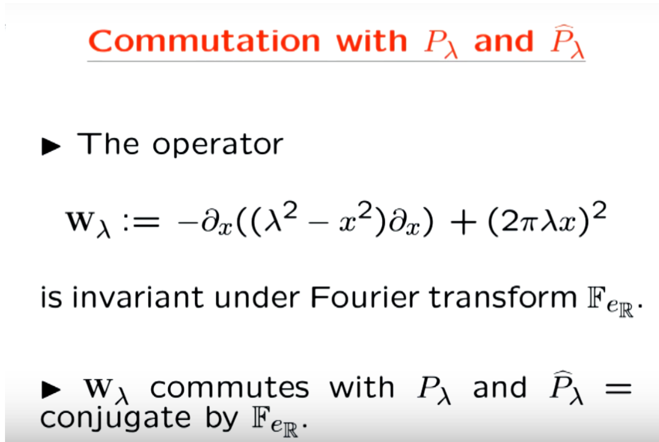
Now, this operator was used in a quite remarkable way by Slepian and his collaborators, who were working in Bell Labs and I will come back to their motivation later when we shall deal with the infrared problem. But somehow their essential discovery which is described in several papers so their essential discovery is the following : it is that in fact this differential operator commutes with what is called the truncated Fourier transform. And to understand this fact, I mean it's a little bit surprising because what you have to understand somehow is that these differential operators one I was showing before the W_λ in fact commutes with a projection operator. So this looks very strange because you know the projection operator on the interval [minus Lambda, Lambda], it's a function which is discontinuous I mean it takes a value 1 between minus Lambda and Lambda and takes the value of 0 elsewhere so I mean at first it looks very strange that the differential operator could commute with such a function, but if you think a little bit, you'll find out that in fact, it's not so surprising because the simplest case to consider would be only the operator xd by dx and to understand that it commutes with the projection on functions which have support on the positive integers.



Now why is this obvious ?

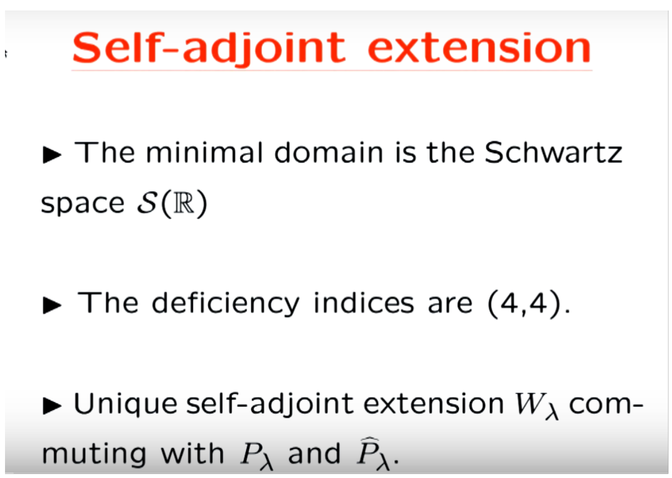
It's obvious because, if you want, the operator xd by dx generates the semi-group of the group actually of scaling operators, the group which replaces a function f of x by f of lambda x and so, I mean obviously you know, for lambda positive of course. So obviously it preserves the functions which have support in zero, infinity and it commutes with this projection.

So in fact, what happens is that the first piece of the operator which is d by dx lambda square minus x square times d by dx commutes with this projection on minus lambda, lambda and of course, the next term which was 2 pi lambda square times x square commutes of course with the multiplication by a function. So what happens is that not only this operator commutes with P_λ but in fact direct computation shows you that it commutes with Fourier transform, that's not difficult to see I mean, there is a piece of the operator which is the harmonic oscillator, which commutes with Fourier transform. So it commutes with Fourier transform, and because it commutes with Fourier transform *and* with the projection P_λ, it also commutes with the Fourier transform of P_λ. Namely, if you want, it commutes with the operator $\widehat{P_\lambda}$, which is obtained by conjugating P_λ by the Fourier transform. So that's what Slepian and his collaborators discovered, and I mean in the 90s when I got quite interested if you want in the zeroes of zeta, what I had found, I had used this projection P_λ and $\widehat{P_\lambda}$ to make a cutoff. And in fact, in my class in 98, I had been addressing the problem of treating the operator W_λ which normally is only treated in the interval minus lambda, lambda where it is self-adjoint as easily seen, to treat it on the full real line.

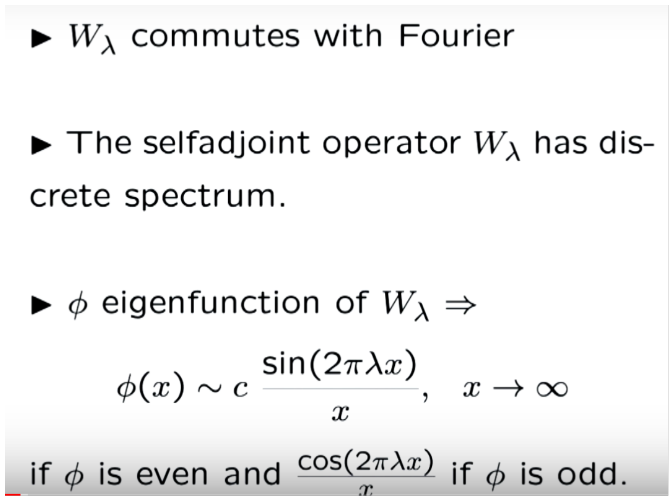


And when one treats it on the full real line... So what I had found at that time, I mean 98, was that if you take for the minimal domain of this operator the Schwartz space of Schwartz functions which have rapid decay as well as all their derivatives, then you find out that the operator is symmetric of course, but it's not self-adjoint, and in fact it has deficiency indices in the sense of von Neumann, which are both equal to four. And it has in fact a unique self-adjoint extension W_λ which is requested to commute with the projection P_λ and $\widehat{P_\lambda}$. That's where I stopped in 98, and that's where we started, two years ago with Henri Moscovici, we started our collaboration. And we did something which I had not dared to do many years ago in 98, mainly we really looked at the operator W_λ spectrally.

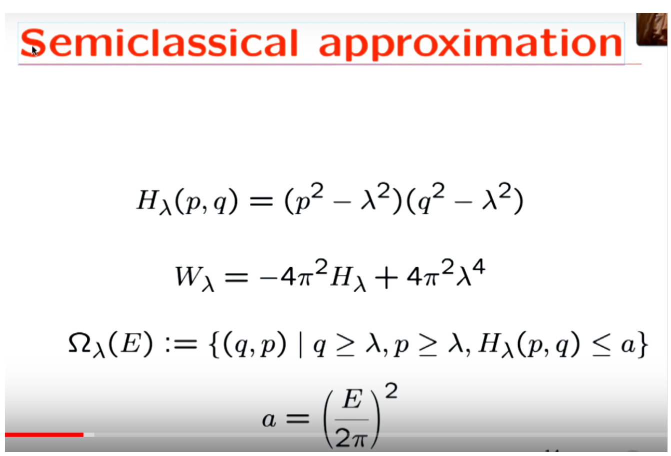
And what I will explain now is that if you want when you look at this operator W_λ spectrally, what you find out ? Well, of course, you find that it commutes with Fourier but this is this is sort of almost built in but to our great surprise with Henri, what we found is that the self-adjoint operator W_λ, on the full line now, not in the interval minus lambda, Lambda has a discrete spectrum.



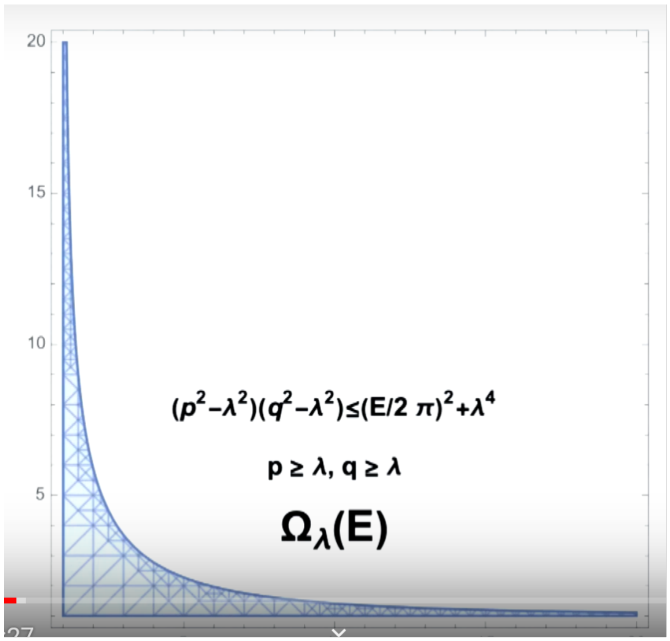
And what I will explain later is that this discrete spectrum will fit perfectly the ultraviolet behavior of zeroes of zeta. And what happens is that apparently nobody had looked at this spectrum, because this spectrum turns out to have both a positive part, and a negative part. And the reason why people were only interested in the positive part of the spectrum is that they wanted to fit with the separation of variables and they wanted to fit with the spectrum, which was corresponding to the finite interval and which is positive by construction. So nobody looked at the negative piece of the spectrum, and as we shall see, I mean, very roughly, the positive spectrum will correspond to the trivial zeroes of zeta and the negative spectrum will correspond now to the non trivial zeroes and to the ultraviolet behaviour of zeroes, it doesn't give exactly positions of zeroes but it gives the ultraviolet behaviour.



So I mean to find the self-adjoint extension, one has to give a boundary condition at infinity, and the boundary condition at infinity is in fact the request, if you want, that when you look at the even part of the spectrum, so the even function, which is the one we shall restrict to, then the function has to behave like a sine, it has to have this oscillatory behaviour of having many zeros of course, as you approach infinity, and to be equivalent to sine two pi lambda x over x when x goes to infinity. In the odd case, you have to replace the sine by a cosine.



Okay. So if you want to understand the spectrum of this operator as a physicist instead, it's very natural to look at the semi-classical approximation, and to express the operator W_λ in terms of an Hamiltonian, which you write classically because, okay, at this point, you don't care about non-commutativity of p and q ; so what you write is that W_λ is in fact expressed as minus 4 pi square times H_λ where H_λ is written above, it's p square minus lambda square times q square minus omega square, plus a constant which is not important. And then, when you want to look at the behavior of the spectrum, you have to compute an area and by computing this area, if you want, the area which is bounded by the value of H_λ, by computing this area, in fact, you will be able to estimate the number of eigenvalues of the operator. And when you do that, okay, you find this picture :



So you find a picture where, if you want, the thing which looks like an hyperbola is defined by the way in p square minus lambda square times q square minus lambda square equals E over to pi square plus lambda four, okay, and plus, we have these two conditions that p is larger than lambda and q is larger than lambda ; this is because of the positivity of the operator. Okay so that's what you have, and you make the computation

The area $\sigma(E)$ of $\Omega_\lambda(E)$ is given, with $a = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2$, by the convergent integral

$$I_\lambda(a) = \int_\lambda^\infty \left(\frac{\sqrt{a + \lambda^2 x^2 - \lambda^4}}{\sqrt{x^2 - \lambda^2}} - \lambda \right) dx$$

$$\sigma(E) \sim \frac{E}{2\pi} \left(\log\left(\frac{E}{2\pi}\right) - 1 + \log(4) - 2\log(\lambda) \right) + \lambda^2 + o(1)$$

of the area okay I solved a difficult computation so you get an integral from lambda to infinity of a certain square root and so on, and what you find is that this integral in fact is given by elliptic integrals not elliptic functions, but elliptic integrals, in the sense of Legendre. And then, when you expand them with the correct idea I mean the idea that the operator in question will not be the Dirac operator but that it will be like the Laplacian, so you deal with a square of the Dirac operator, so you deal with that, and then, you find amazingly that the formula that you get for the number of eigenvalues begins to resemble extremely strongly the Riemann formula. It's E over 2 Pi times log of E over 2 Pi minus a term of order one which you would like to be minus one, so you would have to fit the lambda, so that it's minus one, and then plus lambda square plus a little o(1).

Okay. On the other hand, one knows that when making a semi-classical approximation, one has to be quite aware that it will give you a first idea but that you have to work much more in order to really give an estimate, and one can see that you know it couldn't really be completely right this way because you don't get the term in capital O of log E.

So in fact one has to push the analysis much further

In fact one has

$$I_\lambda(a) = \lambda^2 I_1(a\lambda^{-4})$$

and in terms of elliptic integrals

$$I_1(a) = aK(1-a) - E(1-a) + 1$$

$$\sim \frac{1}{2}\sqrt{a}(\log(a) - 2 + 2\log(4)) + 1 + o(1)$$

and okay so this is easy

Liouville transform

$$V(f)(y) := \Lambda^{1/2} f(\Lambda\cosh(y))\sinh(y)^{1/2}$$

The operator V is a unitary isomorphism $V : L^2([\Lambda,\infty) \to L^2([0,\infty))$ which conjugates the operator W with the operator

$$S(\phi)(y) := \partial_y^2\phi(y) - Q(y)\phi(y)$$

$$Q(y) = -(2\pi\Lambda^2)^2\cosh(y)^2 - \frac{1}{4}\left(\coth^2(y) - 2\right)$$

So what one has to do, first of all, one has to do a Liouville transform to transform the operator, this prolate operator into if you want the usual Sturm-Liouville form and when you do that, okay, you get a potential, you get a potential which is very tricky because it's neither positive nor negative. You get this strange potential $Q(y)$ and then

Hamiltonian $H = p^2 + Q(q)$

(i) The Hamiltonian $H = -S$ is in the limit circle case at ∞.
(ii) The Hamiltonian H is in the limit circle case at 0.
Case $\Lambda = \sqrt{2}$ we get for the function $h = -Q$

$$h(y) = 16\pi^2 \cosh^2(y) + \frac{1}{4}\left(\coth^2(y) - 2\right)$$

M. Nursultanov, G. Rozenblum, *Eigenvalue asymptotics for the Sturm-Liouville operator with potential having a strong local negative singularity*. Opuscula Mathematica 37(1) :109

you have to apply so you have this hamiltonian now which is you know of strength p square because you're putting it in this form, okay, and it has this potential, and then one has to apply quite tricky estimates on the eigenvalue asymptotics from the Sturm-Liouville operator. Well, for the potential which had, if you want, a singularity.
So I mean these estimates exist, you do the calculations, and when you do the calculation, what you obtain,

Eigenvalue asymptotics for the Sturm-Liouville operator... 113

$h(p(\mu)) = \mu$, are

$$N(H,(0,\lambda)) = \pi^{-1}\int_0^\infty [(\lambda + h(x))^{\frac{1}{2}} - h(x)^{\frac{1}{2}}]dx + O(1),\ \lambda > 0, \tag{1.4}$$

$$N(H,(-\mu,0)) = \pi^{-1}\int_0^{p(\mu)} h(x)^{\frac{1}{2}}dx + \pi^{-1}\int_{p(\mu)}^\infty [h(x)^{\frac{1}{2}} - (h(x)-\mu)^{\frac{1}{2}}]dx + O(1). \tag{1.5}$$

so there are formulas if you want for each variable, available to compute this number of eigenvalues. And when you do that,

Formula for $N(a)$

$$N(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left((a + h(y))^{1/2} - h(y)^{1/2}\right) dy$$

At the level of the Dirac operator one has $a = (E/2)^2$

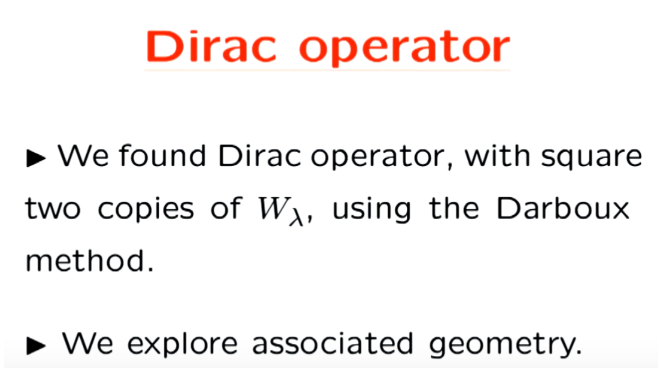
$$N_D(E) = \frac{E}{2\pi}\log\frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi} + O(\log(E))$$

The logarithmic term is $-\frac{1}{2\pi}\log E$. The numerical value of the coefficient is 0.159155 which is of the same order as the constant involved in the estimate of Trudgian for Zeta

$$|N_\zeta(E) - \left(\frac{E}{2\pi}\log\frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi}\right)| \leq 0.112\log(E) + O(\log\log E)$$

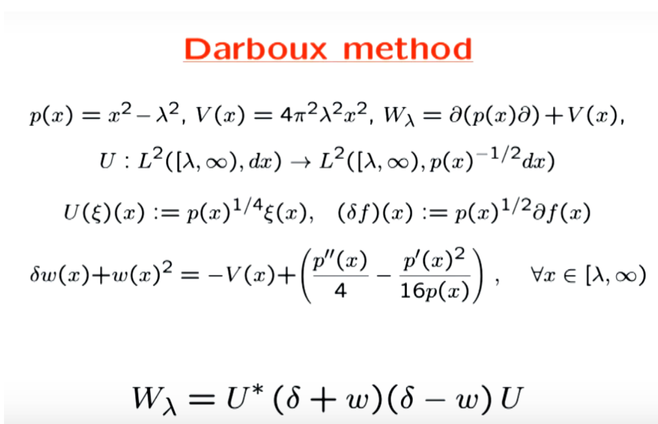
what you find now is much more complicated integrals. However, the amazing fact is that you find the correct E over 2 Pi log E over 2 Pi minus E over to Pi but you find that there is an additional term in Big O of log E as you would expect. And when you compute it you find that the relative term is in fact -1 over 2 pi times log E. And when you look at the numerical value of this coefficient you find that it is of the same order as a constant which is the one in the Riemann zeta function for the difference between the Riemann formula and something of ???[1].

So there is this very tantalizing fact and then of course, you know, this is not enough because I was taking the Laplacian



so we had to find the Dirac operator, we had to find the kind of square root, if you want, the kind of Dirac squareroot of this prolate spheroidal operator. And then, we wanted to explore the associated geometry.

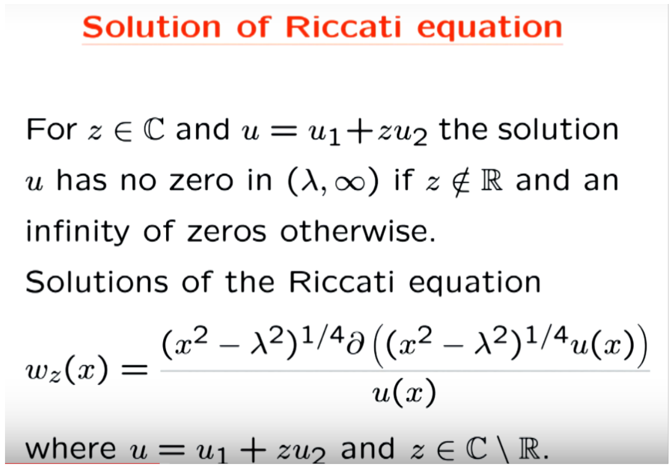
So, how did we find the Dirac operator of the square root, if you want, of this prolate spheroidal operator. Well, we did it using the Darboux method.



The Darboux method is a very general method which is quite old and which allows you when you have a second order operator to write it not as a square but as a product of something of the form the operator of order one plus W and the operator of order one, the same operator of order one minus W. So one can do that, but in order to do that, you have to solve a Ricatti equation. So we have to find a solution of a non-linear equation which is delta W plus W square equals a certain

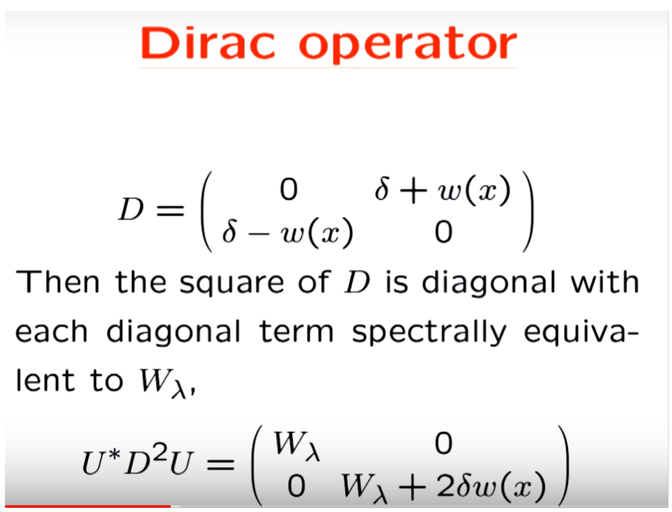
[1] $o(1)$?

function of the potential which is given which is given to you from the start. And this can be done in our case, because what one has to do, one has to find solution of the prolate operator which don't vanish.



Now of course as I showed you I mean the ordinary solutions vanish but when you combine two independent solutions with complex coefficients, then you find out that it vanishes nowhere.

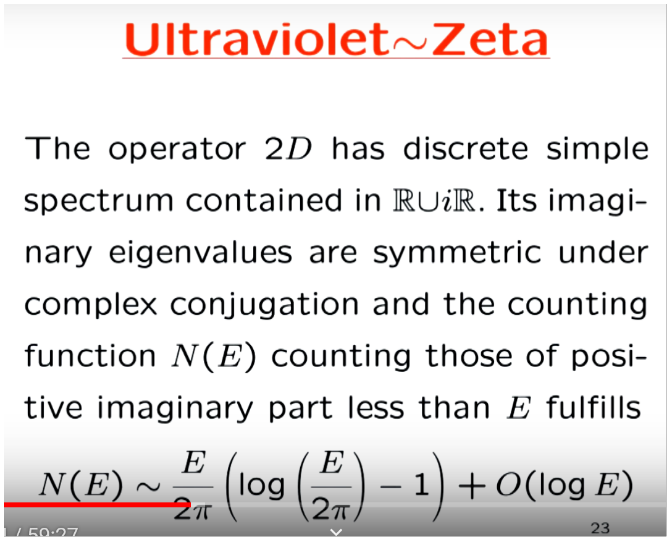
So when it vanishes nowhere, what you can do is solve the Ricatti equation by a kind of logarithmic derivative which I have written as this $w_z(x)$ and for each complex number which is not in the reals, you find a solution of the Ricatti equation you find the corresponding Dirac operator.



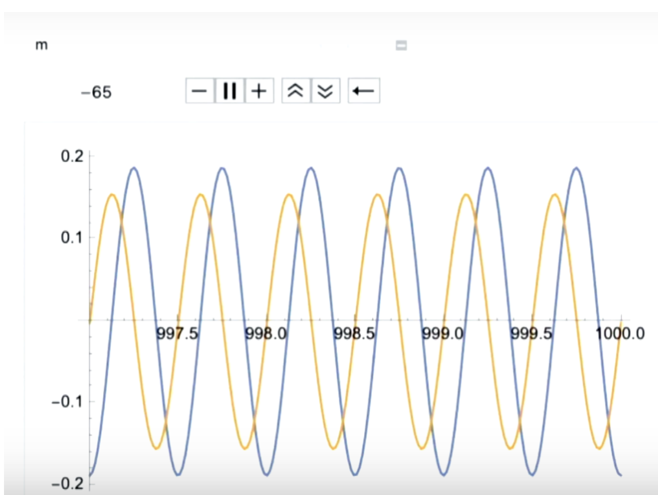
And all these Dirac operators are isospectral which means that you don't care which one you choose as far as the spectrum is concerned. So I mean, this is what we found, we found the Dirac operator, when you square it, it's of course a two by two matrix because it's acting something like spinors, okay, so it's a two by two matrix and when you square it, you find two copies of the prolate operator, namely first the prolate operator itself and then something which is isospectral to the prolate operator, okay (which it differs by a pair of prolate operators).

So that's what we found, and then if you want, by the previous computations because of course this Dirac operator having the square which is two copies of the prolate operator, you can compute its spectrum you can compute the number of eigenvalues and then we find, for that one, we find exactly the correct estimate for the number of eigenvalues.

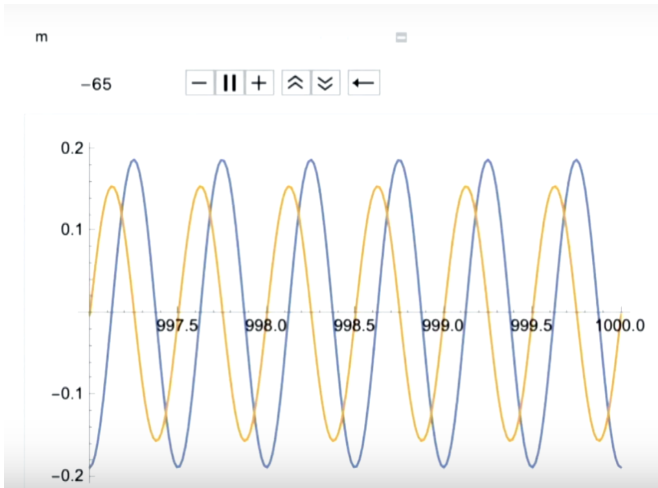
And I will show you very shortly how you do concrete computations and you compare with zeroes of zeta.

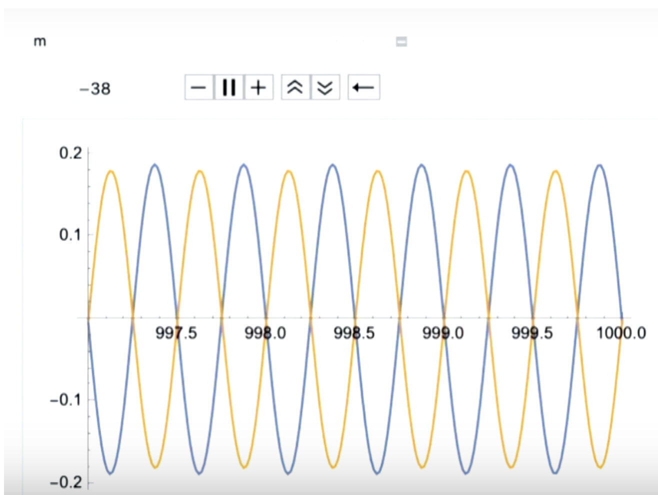


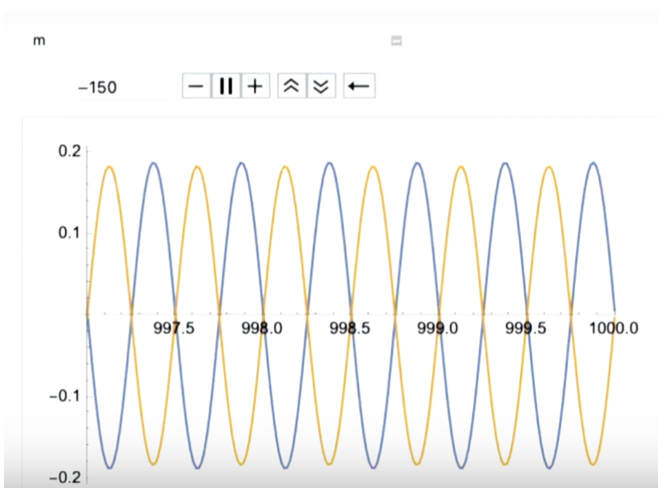
But how is this done okay ? This is done by, if you want, computing the negative eigenvalues of the prolate operator, and to compute these eigenvalues what you do is if you want, you expand the solution which satisfies a boundary condition at lambda, and you expand the solution for the eigenvalue which is minus 65 and you expand the solution which satisfies the boundary condition at infinity. And you try to match them, of course here they don't match, but when you move if you want the value minus 65, when you keep going, okay, you can see for instance at -38, they match except that there is a change of sign but of course this is not seen because you can always multiply one by minus one, so this is an eigenvalue minus 38 for the W_λ and the fact that they have opposite signs tells you that the function will be its opposite when you Fourier transform.



Now for the value minus 93, you can see that there is exact coincidence and this time, the function will be its own Fourier transform. So you keep going like that keep going like that, so this is minus 1 hundred 50, the next one, and what you see with the computer is that when you move the eigenvalue like around minus 150, the two sinusoids, if you want, the two oscillating pieces, they move with respect to each other. So after a while they coincide or they are strictly opposite to each other.







The first approximate negative eigenvalues of W are

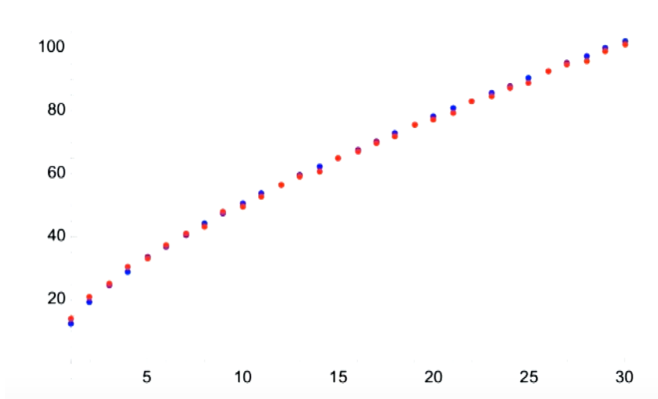
$-39, -94, -152, -211, -279, -342, -416, -489, -561, -639, -718, -800, -887, -971,$

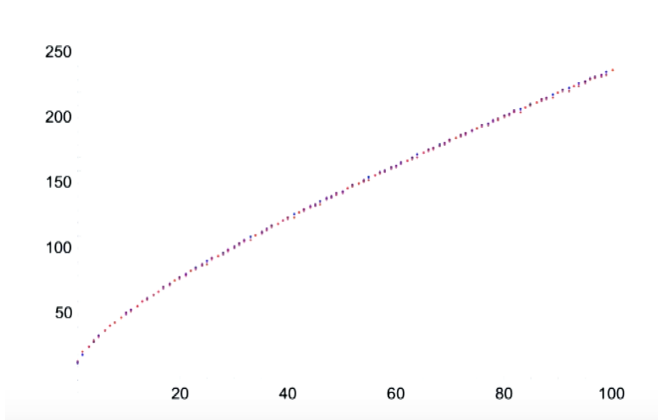
$-1058, -1148, -1242, -1337, -1433, -1528, -1627, -1728, -1834, -1940, -2044, -2155,$
$-2262, -2375, -2491, -2606, -2723, -2842, -2964, -3084, -3205, -3330, -3461, -3586,$
$-3716, -3845, -3977, -4112, -4245, -4381, -4523, -4662, -4803, -4943, -5088, -5232,$
$-5382, -5527, -5677, -5823, -5977, -6129, -6287, -6440, -6600, -6753, -6915, -7075,$
$-7240, -7402, -7562, -7730, -7902, -8064, -8237, -8408, -8581, -8748, -8924, -9100,$
$-9278, -9456, -9638, -9816, -10000, -10179, -10363, -10549, -10734, -10923, -11114,$
$-11299, -11491, -11681, -11876, -12066, -12267, -12459, -12660, -12860, -13059,$
$-13254, -13464, -13660, -13865, -14069, -14279, -14484, -14694, -14900, -15113,$
$-15326, -15543, -15753, -15967$

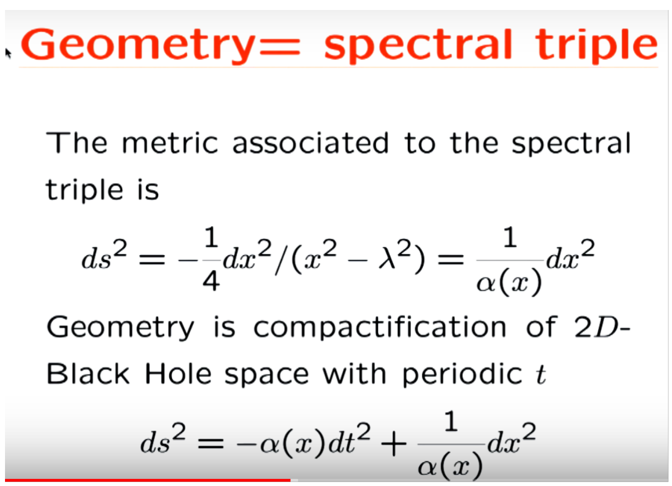
The comparison of $2\sqrt{-z}$ with the zeros of zeta then gives

$$\begin{pmatrix}
102.098 & 101.318 \\
104.365 & 103.726 \\
106.621 & 105.447 \\
108.885 & 107.169 \\
111.068 & 111.03 \\
113.225 & 111.875 \\
115.412 & 114.32 \\
117.661 & 116.227 \\
119.766 & 118.791 \\
121.918 & 121.37 \\
124.016 & 122.947 \\
126.127 & 124.257 \\
128.25 & 127.517 \\
130.307 & 129.579 \\
132.378 & 131.088 \\
134.507 & 133.498 \\
136.558 & 134.757 \\
138.607 & 138.116 \\
140.613 & 139.736 \\
142.66 & 141.124 \\
144.665 & 143.112 \\
146.724 & 146.001 \\
148.688 & 147.423 \\
150.692 & 150.054 \\
152.617 & 150.925 \\
154.622 & 153.025 \\
156.576 & 156.113 \\
158.581 & 157.598 \\
160.499 & 158.85 \\
162.481 & 161.189
\end{pmatrix}$$

So you compute like this the first approximate negative eigenvalues of W so you plot them, okay this is a lot of work, and now, okay, you pass to the corresponding Dirac operator and you compare it with the zeros of zeta. So you see, the first one is 12.49 instead of 14, yeah, and you keep going like that okay so you compare them, you compare them, and each time, the n-th one is very close to the n-th zero, it's not, you know, that time, changing the elements, no, the n is the same, okay, so keep going quite far, and when you plot them, so this is a plot where if you want the red spot represent the zeros of zeta and the blue spots that presents what we get spectrally and when you see only one spot it means that it's hiding so, it means, you know, that they really are pretty close to each other.







So we kept going up to the 60s first eigenvalues, up to the 100s eigenvalues and so on. And of course, so this really says that this self-adjoint operator, W_λ, because I mean remember okay I mean you know it's an extremely tantalizing hint that there should be an operator that will actually exactly deal with them. The next step of course would be to deal with the other part I mean with precise values and infrared part of the spectrum. But before I do that, what is very quite important in non-commutative geometry is that geometry is given spectrally. When you speak about a geometry, you can define it by means of the Dirac operator, what replaces the Dirac operator, and what replaces of course the functions, and so on, so here, it's not so difficult to find which functions are and, I mean because they are like you know functions on this half line and to look at the metric

: the metric is obtained from the symbol of the Dirac operator and here, the metric that you find is given by a dx square, there is one force over x square minus lambda square. But what is quite amazing is that when you look at the spectrum as I said before, so there are negative eigenvalues for the Laplacian but there are also positive eigenvalues. So this means that when you pass to the Dirac operator, it will have purely imaginary eigenvalues like for the zeroes of zeta, but it will also have real eigenvalues. And what we checked, with Henri, is that you know the these real eigenvalues, they have exactly the same behavior as a trivial zeroes of zeta. But the fact that you have both things, namely the negative and the positive eigenvalues tells you that you are not dealing with a Riemanian problem, you are dealing with a Lorentz problem, I mean with a Minkowski-type metric. And so, I mean we used in order to have a first idea of the geometry which is behind it, we used to view it, simply, as a compactification of a two-dimensional Lorentzian geometry. And okay it turns out that, you know, there is a way to do that, where you make the variable t-periodic, and this corresponds to a black hole in two dimensions.

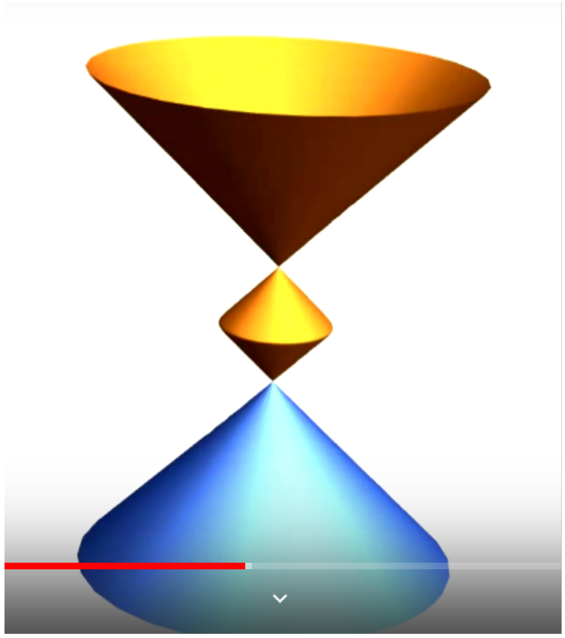
which after changing coordinates to $v = t - t(x)$ with

$$t(x) = \frac{1}{8\lambda} \log\left((\lambda + x)/(x - \lambda)\right)$$

becomes smooth (black hole trick)

$$ds^2 = 4\left(x^2 - \lambda^2\right) dv^2 - 2dvdx$$

Okay and I mean, you can do the usual trick, which is to see that the metric of the black hole is in fact smooth. So you can really rewrite the metric by a suitable change of variables to make it smooth. And I mean there is, if you want, a way to embed this in Minkowski-three space, and when you embed in Minkowski-3-space, what is quite interesting is that in order to construct the embedding, you have to use again elliptic integrals. And it will give you this picture



so if you want the the part which is above which is looking like a cone and corresponds to the interesting piece of the prolate operator. The part which is in between corresponds to what happens on the interval, and the part which is below, okay, is of course the symmetric of the upper part. And when you look at the geodesics, they have the usual stuff the suspected.

Un topo sur les topos
Alain Connes

Résumé : Alain Connes présente la démarche intellectuelle qui a mené Alexandre Grothendieck, à partir d'une "emmerdante" rédaction qu'il devait faire pour Bourbaki sur l'algèbre homologique, à découvrir et mettre au point la notion de topos et il essaie d'expliquer en quel sens cette notion a une portée considérable grâce en particulier aux nuances qu'elle introduit entre le vrai et le faux (organisateur du séminaire : Frédéric Jaëck (ENS), transcription : Denise Vella-Chemla)

Donc j'espère que je resterai dans l'esprit du séminaire et je pense que l'esprit du séminaire, c'est Grothendieck, avant tout. Donc ce que je vais faire, c'est essayer de m'effacer le plus possible devant Grothendieck et essayer d'expliquer justement, comme je le disais dans mon abstract, le parcours qui l'a amené aux topos, et surtout, je vais essayer de vous donner une métaphore éclairante pour ce que c'est qu'un topos, et vous expliquer ce qu'il y a d'extraordinaire dans cette découverte, au sens, surtout pour les philosophes, au sens où ça introduit des nuances considérables dans la notion de vérité. J'essaierai d'expliquer cela par un exemple, parce que rien de tel qu'un bon exemple pour expliquer. Il y aura l'un de mes slides qui s'appelle "à deux pas de la vérité" et je vais vraiment vous donner un exemple d'un topos qui permet de dire qu'on est par exemple à 10 pas de la vérité, ou qu'on est à 15 pas de la vérité, etc. Donc écoutez bien. Je vous ferai entendre Grothendieck, la voix de Grothendieck, parce que Grothendieck a fait 100 heures de conférences à Buffalo en 1973, et dans ces 100 heures de conférence, il y a des choses qui nous intéressent. Bien sûr, je ne vous le ferai pas écouter longtemps mais je le ferai écouter à un moment-donné, où il explique ce que c'est qu'un faisceau à des gens qui ne connaissent pas du tout. Et il explique comment il va faire son cours sur les topos. On verra, il y aura aussi un intermède encore plus marrant à un moment-donné, on n'entendra pas la voix de Grothendieck mais on entendra la voix d'Yves Montand. Vous verrez, enfin, vous entendrez tout ça.

Donc la première image que je vous montre, c'est une image que je dois à Charles Alunni qui m'a envoyé un email un jour en me disant qu'il aurait bien voulu avoir la deuxième thèse de Grothendieck. Mais à l'époque, quand on faisait une thèse, quand j'ai fait ma thèse par exemple, il y avait toujours une deuxième thèse. Cette deuxième thèse n'était pas écrite. C'était une deuxième thèse qu'on devait défendre devant le jury. Et on avait un sujet qui nous était donné. Ce qui est assez extraordinaire, c'est que dans le cas de Grothendieck, il a fait sa thèse sur les espaces nucléaires, sur les espaces vectoriels topologiques et sur les espaces nucléaires, et il a fait une contribution fondamentale à l'analyse fonctionnelle et ce qui est extraordinaire, c'est qu'on peut penser que ce qui a fait bifurquer Grothendieck, et qui éventuellement l'a amené à l'idée du topos, à cette idée merveilleuse, c'est sa deuxième thèse. Pourquoi ? Parce que la deuxième thèse de Grothendieck, c'est écrit dans ce texte, elle est sur la théorie des faisceaux.

Et alors sur cette page, si vous êtes perspicace, vous allez trouver qu'il y a une erreur, ce qui montre qu'on n'est jamais à l'abri des erreurs. Parce qu'il y a un des examinateurs, si vous regardez bien, qui s'appelle *Georges* Choquet *(rires)* Alors j'ai cherché, pour dire peut-être que je me suis trompé, il y a 3 examinateurs, il y a Henri Cartan, il y a Laurent Schwartz et puis il y a *Georges* Choquet. Alors j'ai cherché sur wikipedia pour voir s'il n'y avait pas un mathématicien qui s'appelait Georges Choquet. En fait, non, il y a un ecclésiastique qui s'appelait Georges Choquet et qui est mort pendant la deuxième guerre mondiale. Donc il n'y a pas de problème, c'est bien une erreur, et c'est bien Gustave Choquet qui était l'examinateur de Grothendieck. Donc sa thèse il l'a passée en 53.

Et déjà en 55, il s'intéressait bien sûr aux faisceaux, qui était une découverte merveilleuse de Leray. Et donc là, j'ai commencé par quelques échanges de lettres entre Serre et Grothendieck parce que finalement, c'est dans ces échanges de lettres que l'on voit apparaître ce qu'on appelle l'article qui est tellement fameux qu'on l'appelle Le Tohoku cet article. Cet article est paru dans un journal qui s'appelle le Tohoku Maths Journal mais l'article est tellement fameux qu'en fait, on l'appelle Tohoku.

Donc voilà ce que dit Grothendieck ; il dit :

"Mon Cher Serre,
Merci pour les divers papiers que généreusement tu m'as envoyés, ainsi que pour ta lettre. Rien de neuf de mon côté."

Conférence d'Alain Connes, le 7 novembre 2017, dans le cadre du séminaire "Lectures grothendieckiennes" de l'ENS, visionnable ici http://savoirs.ens.fr/expose.php?id=3257.

Alors ça, ça justifie ce que j'ai écrit quand j'ai annoncé mon laïus :

"J'ai fini mon emmerdante rédaction d'algèbre homologique."

Alors on va voir très graduellement quelle est la philosophie que Grothendieck utilise tout le temps quand il travaille, c'est-à-dire qu'il n'hésite jamais devant une tâche que n'importe quel mathématicien normal considérerait comme étant sans intérêt, rébarbative, n'allant rien lui rapporter. Donc il continue :

"... que j'ai envoyée à Delsarthe qui manquait de la rédaction pour la dactylo."

Il dit :

"Je l'ai proposée à Tannaka pour le Tohoku."

Le Tohoku, c'est le Tohoku Maths Journal.

"Il paraît que les articles-fleuve ne les rebutent pas."

Alors il est vrai que Grothendieck, en général, quand il écrit, le minimum, c'est au moins 100 pages. Ensuite, il parle de Weil. Je vais vous épargner ce qu'il en dit parce qu'il dit :

"J'ai lu au moins les énoncés des livres de Weil sur les variétés abéliennes dans l'espoir qu'on a arrangé depuis les démonstrations vraiment décourageantes chez Weil, son langage me dégoûte."...

En plus ! *(Rires)* Je passe... Il dit :

"Je passe mon temps soit à apprendre, soit à rédiger les variétés. C'est amusant mais long bien sûr, mais il n'est pas question de recherche avant d'avoir avalé une montagne de choses nouvelles."

Alors ensuite, très important, c'est sans doute la chose la plus importante dans cet échange, il dit à un moment-donné :

"Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules..."

(il faut dire qu'à l'époque, il y avait le livre de Cartan-Eilenberg qui était en gestation, Serre l'appelle le Cartan-Sammy - parce que c'est Sammy Eilenberg - et dans ce livre, il y avait bien-sûr les foncteurs dérivés mais c'était toujours appliqué à des catégories de modules. C'est-à-dire qu'on prenait la catégorie des modules sur un anneau non nécessairement commutatif et toute l'algèbre homologique était développée comme ça. Mais évidemment, elle était très analogue dans sa formulation avec ce qui se passait pour la cohomologie à coefficients dans un faisceau. Donc ce que dit Grothendieck, c'est :

"Je me suis aperçu qu'en formulant la théorie des foncteurs dérivés pour des catégories plus générales que les modules, on obtient à peu de frais la cohomologie des espaces à coefficients dans un faisceau."

Il faut savoir qu'à l'époque, quand on prenait la cohomologie à coefficients dans un faisceau, c'était toujours la cohomologie de Čech. C'est à dire qu'on prenait des recouvrements de l'espace topologique, et puis on fabriquait un complexe ou un bi-complexe avec ces recouvrements et on définissait la cohomologie comme ça. Voilà.

Donc voilà ce qu'il dit, et ce point-là, dans sa correspondance, c'est un point absolument essentiel. Alors ensuite, il continue, et donc ça, c'est une lettre du 4 juin 1955, donc on est 2 ans après sa thèse, donc :

"Ci-joint le résultat de mes premières cogitations en forme, sur les fondements d'algèbre homologique."

Donc après, je ne vous détaille pas le reste puisque c'est sur des suites spectrales, etc. Mais disons que là, Grothendieck explique qu'il s'était planté sur l'existence de suffisamment de faisceaux projectifs mais à ce moment-là, il a démontré qu'il y avait suffisamment de faisceaux injectifs, et ça lui a permis de définir les foncteurs dérivés et ça lui a permis de définir, si vous voulez, la cohomologie à coefficients dans un faisceau sans hypothèse sur l'espace topologique. Si on a de bonnes hypothèses sur l'espace topologique, à ce moment-là, ça coïncide avec la cohomologie de Čech. Mais ça n'est pas vrai en général. Alors voilà la réponse de Serre. Donc là, il y avait autre chose dans la correspondance, il y avait autre chose qui était ce qu'on appelle l'Im_1, c'est à dire le foncteur pour les limites projectives, comment ça commute avec la cohomologie. Mais ce qu'il faut lire, c'est le deuxième paragraphe.

"Le fait que la cohomologie d'un faisceau soit un cas particulier des foncteurs dérivés, au moins dans le cas para-compact..."

(parce que dans le cas para-compact, ça coïncide avec la cohomologie de Čech, donc celle qui est définie à partir des recouvrements)

"...n'est pas dans Cartan-Sammy."

(Cartan-Sammy, c'est Cartan-Eilenberg)

"Cartan en avait conscience."

Donc, Cartan avait conscience du fait que, quand ils avaient développé avec Eilenberg toute la théorie cohomologique sur les modules, il avait conscience bien-sûr de l'analogie avec le cas de la cohomologie des faisceaux, mais bon, ils n'avaient pas voulu s'embarrasser pour le faire dans leur livre, et Cartan en avait conscience et avait dit à Buchsbaum de s'en occuper. Donc c'est Buchsbaum en fait qui, indépendamment de Grothendieck, a aussi défini les catégories abéliennes. Il avait commencé à le développer mais il ne s'était pas occupé de la cohomologie.

"Mais il ne me semble pas que celui-ci l'ait fait. Donc l'intérêt de ceci serait de voir quelles sont au juste les propriétés des faisceaux fins qu'il faut utiliser. Ainsi on pourrait peut-être se rendre compte si oui ou non..."

(c'est Serre qui parle, bien sûr)

"... il y a suffisamment de faisceaux fins dans le cas non-séparé.".

Alors le cas non-séparé est extrêmement important bien sûr pour la géométrie algébrique et c'était à un moment où justement, Serre développait la géométrie algébrique à partir de la théorie des faisceaux de Leray en prenant au départ la topologie de Zariski et la topologie de Zariski, elle n'est pas séparée. Je veux dire, donc, on a exactement ce problème-là. Donc cet échange est extrêmement important, c'est un échange qui date de l'année 55. Et l'article de Grothendieck donc, il est marqué *Reçu* 1er *mars 1957*, donc c'est cet article *"Sur quelques points d'algèbre homologique"* qui est vraiment l'ancêtre, on peut vraiment placer, si vous voulez, l'origine des topos dans cet article.

La raison pour laquelle on peut placer l'origine des topos dans cet article, c'est que dans cet article, d'abord, bien sûr, il introduit ce que sont les catégories abéliennes. Donc ça, c'est extrêmement important, avec toutes leurs propriétés, etc. Il développe l'algèbre homologique dans le cadre des catégories abéliennes. Donc ça, c'est ce qu'il fait. Mais, ce qui est beaucoup plus important, c'est qu'il prend deux types d'exemples, dans son article, de catégories abéliennes. Le premier exemple de catégorie abélienne qu'il prend, c'est la catégorie abélienne des modules sur un anneau. Ca, ça appartient à Cartan-Eilenberg. Là-dessus, il n'y a pas de problème, mais il prend aussi l'exemple des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique, bien entendu ; là encore, pas de surprise puisque c'était pour unifier les 2 qu'il avait fait son travail de généralisation. Mais ce qui est absolument crucial, c'est qu'il avait un autre exemple en tête, un troisième exemple en tête, et c'est ce qu'il appelait les catégories de diagrammes. C'est-à-dire, ce qu'il faisait, c'était qu'il avait l'idée que si vous prenez des diagrammes de groupes abéliens, mais quels que soient les diagrammes que vous regardiez, eh bien, ça, ça forme encore une catégorie abélienne. Eh bien, en fait, si on pense juste, on s'aperçoit qu'il avait là les deux piliers de la notion de topos. C'est-à-dire qu'il avait la notion d'espace topologique, qui donne la notion de faisceaux de groupes abéliens, etc., et il avait aussi la notion de catégories de diagrammes et on verra que ces catégories-là, elles donnent naissance à un topos. Et ces topos ont un rôle absolument fondamental qu'on va utiliser tout le temps, tout le temps, tout le temps.

Alors, il y a une chose qui est à remarquer : il définit ce que c'est qu'une catégorie abélienne. Donc ce que dit Grothendieck, c'est qu'une catégorie abélienne, c'est une catégorie additive. Alors je vais vous expliquer en deux mots l'erreur qu'on a sur la catégorie additive qui satisfait aux deux axiomes supplémentaires suivants : alors, il y a le fait qu'un morphisme doit avoir un noyau et un co-noyau, ça, c'est une notion abstraite, si vous ne la connaissez pas, bon, ça prendrait un certain temps, c'est un peu une gymnastique, et la deuxième condition, c'est le fait d'être un morphisme exact. C'est-à-dire le fait que si vous divisez par le noyau et si vous regardez par rapport à ce qu'on appelle l'image en la définissant par rapport au co-noyau, eh bien, à ce moment-là, vous avez un isomorphisme entre le quotient par le noyau et l'image. Et ça, c'est extrêmement important, ce n'est pas vrai pour des applications dans des espaces topologiques par exemple, si vous prenez un espace de Hilbert et si vous prenez les applications linéaires continues dans l'espace de Hilbert, ça ne vérifie pas ces deux conditions. Ça n'est pas une catégorie abélienne et la raison, c'est que vous pouvez avoir un morphisme qui a une image, mais il est dense dans son image et son image n'est pas fermée et à ce moment-là, la deuxième condition AB2 n'aura pas lieu.

Alors il y a une erreur que Grothendieck reproduit quand il définit les catégories additives dans son article et qui est la chose suivante : c'est qu'en général, les gens définissent une catégorie additive en disant “une catégorie additive, c'est une catégorie où on rajoute une structure supplémentaire qui est la structure de groupe additif sur les morphismes.” Eh bien, c'est une hérésie. Je vais vous expliquer pourquoi : parce qu'en fait, ça n'est pas du tout une structure supplémentaire. Et il y a un exercice dans MacLane que je vous ai noté là qui montre que c'est une hérésie. Quelle est cette hérésie ? L'hérésie est que quand vous prenez une catégorie comme une catégorie abélienne, elle a des produits et des co-produits. Ca, c'est une chose très simple. Et elle a un objet qui est à la fois initial et final, c'est l'objet 0 ; dans les groupes abéliens, c'est le groupe qui est réduit à 0. D'accord ? C'est un objet initial parce que vous avez une seule flèche qui va de 0 vers n'importe quel groupe abélien, et c'est un objet final parce que vous avez une seule flèche qui va d'un groupe abélien vers 0. Tout s'envoie vers 0. Donc il y a un objet qui est à la fois initial et final. Eh bien, si vous avez ça, vous pouvez dire, quand la catégorie est abélienne. Comment ?

Eh bien, parce que ce qui se produit, vous avez une flèche complètement canonique, complètement naturelle, qui va du coproduit de deux objets vers le produit de deux objets. Parce qu'en utilisant le 0, vous pouvez envoyer la moitié sur 0 et l'autre moitié sur 0 et à ce moment-là, vous avez une flèche qui est complètement naturelle. Si vous demandez si cette flèche est un isomorphisme, vous avez fait la moitié du parcours. Parce que comme cela est expliqué dans ce texte de MacLane, à ce moment-là, vous avez une addition pour les morphismes. Simplement en utilisant le fait que cette flèche naturelle qui va du coproduit vers le produit est un isomorphisme. Vous avez une addition naturelle pour les morphismes et une fois que vous avez cette addition naturelle, vous pouvez prendre l'axiome supplémentaire qu'il y a un signe moins, si vous voulez, pour cette addition, bien sûr en général, vous n'aurez pas un signe moins, c'est ce qu'on appelle les catégories semi-additives, elles sont très intéressantes, mais une catégorie additive, vous demandez simplement qu'il y ait un inverse. Et alors, donc, ça n'est pas une structure supplémentaire. C'est une hérésie de croire qu'une catégorie additive est donnée par une catégorie + une structure supplémentaire. Ça n'est pas vrai. Donc c'est une erreur.

Alors, maintenant, je vais vous lire du Grothendieck, puisque le principe du séminaire est de s'effacer devant Grothendieck. Et même à un moment-donné, on va l'écouter. Et puis lorsqu'on aura lu et écouté suffisamment Grothendieck, là, je prendrai une métaphore, puis on verra un exemple. D'accord, donc soyez patients, je ne vais pas faire que lire ou vous faire écouter du Grothendieck, il faut être patient, mais écoutons-le quand-même. Voilà ce qu'il dit :

> *“Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amené à regarder les “espaces” et “variétés” en tous genres dans une lumière nouvelle. Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace...”*

Donc ce que dit Grothendieck, c'est que Leray avait envisagé un espace sous la forme des faisceaux sur cet espace, mais en fait, d'ailleurs, Leray ne considérait que les faisceaux de groupes abéliens. Et on va voir le changement que Grothendieck a apporté déjà même là.

> *“Ils ne touchaient pas, pourtant, à la notion même d'espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement, avec des yeux nouveaux, ces traditionnels “espaces”, déjà familiers à tous. Or, il*

s'est avéré que cette notion d'espace est inadéquate pour rendre compte des "invariants topologiques" les plus essentiels qui expriment la "forme" des variétés algébriques "abstraites" (comme celles auxquelles s'appliquent les conjectures de Weil), voire celle des "schémas" généraux..."

Alors là, c'est le moment où je vais vous faire entendre Grothendieck. Pourquoi, parce qu'on va entendre Grothendieck qui définit ce que c'est qu'un faisceau. Donc, je pense que c'est important que vous l'écoutiez, d'accord, parce que vous ne savez pas forcément ce que c'est qu'un faisceau, on va écouter Grothendieck en parler, d'accord, et une fois qu'on aura écouté Grothendieck en parler, on reviendra à nos moutons. C'est le début de ses conférences à Buffalo.

"Depuis des années, les topoi sont essentiellement des objets de la topologie générale. Je veux dire qu'un topos peut être considéré comme l'objet d'étude principal de la topologie. Et donc, les topoi sont la généralisation de la topologie générale classique. Je vais considérer... Disons que leur étude nécessite une certaine familiarité avec la manipulation des espaces topologiques, des cartes, des homomorphismes, etc., et d'autre part une familiarité avec le langage des catégories... Plus tard, nous parlerons d'exponentiations et je donnerai des exemples. Mais pour comprendre... ce que signifie le terme topos, il faudrait une certaine familiarité avec le langage des faisceaux sur un espace topologique. Je pense que ces notions ne sont pas très familières à tout le monde, donc je pense que je donnerai plutôt quelques notions d'introduction sur les faisceaux sur un espace topologique. Je veux supposer que l'on sait tout à ce sujet. Je passerai en revue une "faisceau-machinerie" standard... J'espère que si certaines explications ne sont pas claires, ou si certains commentaires viennent, vous m'interromprez librement pour poser des questions, pour signaler des erreurs ou pour faire tout type de commentaires. Ce serait bien si, au fur et à mesure, il y avait une sorte de participation du public, je suis sûr qu'un certain nombre d'entre vous ont quelques notions sur les topoi... Vous pourrez faire des suggestions et commentaires.

Je commence donc par une sorte d'étude formelle des faisceaux sur un espace topologique. Soit X un espace topologique, et considérons l'ensemble $O(X)$, il dépend de X, de tous les sous-ensembles ouverts de X. La topologie de X est définie en fonction des familles de sous-ensembles ouverts de X qui est un sous-ensemble des $Parties(X)$. Je rappelle l'axiome de la topologie qui est que $O(X)$ doit être stable par des unions arbitraires et par des intersections finies. Donc $O(X)$ en particulier est un ensemble ordonné par inclusion et tout cela définit une catégorie par abus de langage. Si U et V sont des éléments de $O(X)$, sont des ensembles ouverts sur X, l'ensemble des homomorphismes de U vers V sera soit l'ensemble vide si U n'est pas contenu dans V et peut être réduit à l'inclusion de U dans V, si U est contenu dans V ; c'est la définition du vide et de la composition des flèches ... Il doit y avoir au plus une flèche d'un objet à un autre. Donc, cette construction d'une catégorie en termes d'ensembles ouverts est logique pour tout ouvert que ce soit. Donc, la catégorie qui se comporte comme ... flèches du graphe de toutes les relations ... Maintenant, définissons d'abord les pré-faisceaux : un pré-faisceau sur X, disons f, est par définition un foncteur qui va de la catégorie $O(X)$ dans la catégorie des ensembles, quand je dis un pré-faisceau, je veux dire un pré-faisceau d'ensembles, plus tard, nous verrons d'autres types de pré-faisceaux. Mais ça devrait être un foncteur contravariant ... C'est un foncteur qui va de la catégorie opposée à $O(x)$ à la catégorie des ensembles, rappelons donc ce que cela signifie pour un foncteur : tout d'abord, cela signifie pour les objets de $O(X)$, pour chaque ensemble ouvert, $U(X)$, nous associons un objet fU de la catégorie des ..., (Remarque d'Alain Connes : ce qui est très important, c'est qu'il parle de faisceaux d'ensembles, et Leray parlait de faisceaux de groupes abéliens.) *C'est une flèche entre des catégories, cela signifie que pour chaque carte d'inclusion de U dans V deux ensembles ouverts, nous associons une carte de fV dans fU ..., cette carte sera appelée la carte de restriction, correspondant aux pré-faisceaux, et les axiomes sont les axiomes évidents de la transitivité, c'est-à-dire que si nous avons V qui est contenu dans un autre ensemble ouvert W, alors nous aurons une carte de restriction de fV à fW mais aussi de fW à fV et nous voulons que la restriction de fW à fU... soit la composition ici et d'ailleurs nous voulons que dans le cas où nous prenons l'identité, la flèche d'identité de U dans U, on veut que la carte correspondante fU qui passe à fU soit l'identité... comme des cartes de foncteurs ... Donc un pré-faisceau sur f n'est qu'un foncteur contravariant de la catégorie $O(X)$ vers les ensembles. Et la catégorie des pré-faisceaux sur X, appelons-la $PreFaisceaux(X)$, est définie comme étant la catégorie de tous les foncteurs de $\dot{O}$ aux ensembles. Ainsi, les pré-faisceaux peuvent être considérés comme des objets d'une catégorie, la catégorie des pré-faisceaux, dans la catégorie des foncteurs. Alors qu'est-ce qu'un homomorphisme d'un pré-faisceau f vers un autre g, par définition des homomorphismes de foncteurs. Prenons f un tel homomorphisme. Par définition, f consiste en une connexion de cartes de fU vers gU, nous appelons cette carte $f(U)$ pour chaque objet U de la catégorie de tous les sous-ensembles ouverts de X, et ces cartes d'ensembles seront compatibles avec les cartes de restriction, ce qui signifie que chaque fois que U est contenu dans un ensemble ouvert V, alors* *nous avons aussi fV qui va dans gV par f de V et nous avons les cartes de restriction ici, de fV à fU et de gV vers gU et il faut que que le carré commute. Voilà donc un homomophisme de pré-faisceaux, c'est juste un homomorphisme de foncteurs, et ils se composent de manière évidente, leur composition est vers l'extérieur et vers l'intérieur (?). Il y a un homomorphisme de pré-faisceaux ... cela signifie pour chaque U, un homomorphisme de gU en hU, la composante de g et f est définie comme associant à chaque U la composition des homomorphismes ici. Très bien, donc c'est juste un non-sens général[1] sur les foncteurs, sur les catégories. Jusqu'à présent, nous n'avons pas utilisé le fait que $O(X)$ était la catégorie des sous-ensembles ouverts de X, nous venons d'utiliser le fait que c'est un ensemble ordonné, mais on va l'utiliser maintenant pour définir la notion de pré-faisceau sur X qui rappelle les faisceaux sur X, nous devons introduire un autre axiome sur les pré-faisceaux qui se transforme en faisceaux. Maintenant, traditionnellement les axiomes sur les préé-faisceaux sont séparés en deux : vous dites d'abord que les pré-faisceaux sont des séparateurs si l'axiome suivant est vrai : pour chaque ensemble ouvert U sur X et pour chaque recouvrement de U par des sous-ensembles ouverts U_i dont l'union est U, peut être défini en termes d'ensembles ordonnés ; c'est juste le supremum des U_i et, en termes de ... Soit la cartographie de fU, dans chacun des fU, une carte de restriction, et donc, nous obtenons une cartographie de f dans le produit des fU est et on n'a que deux ensembles, séparés par chacun de ces choix ici, cette application est injective.*

Maintenant, disons ceci d'une autre manière : si f est un pré-faisceau sur X, f de U, les éléments des ensembles s'accordent aux sections de f sur U. Quand nous donnerons des exemples, nous verrons d'où vient cet accord des sections. Très bien, et, la carte ici, je l'ai déjà dit contenue dans V, la carte donnée de fV en fU sera appelée la carte de restriction ... qui signifie que les sections de ... est appelée la restriction de ... à U et à l'axiome pour qu'un faisceau soit séparé signifie qu'à chaque fois qu'il existe une union de sous-ensembles ouverts $U_i(X)$, dont l'union est U, il y a une section des pré-faisceaux sur U connue sous le nom de ces restrictions sur les U_i. La première condition serait restreinte en ... mais en termes géométriques, cela signifie simplement que ... la flèche est une injection, cela signifie qu'une section de f sur U peut être identifiée pour le système de sections de f sur ces U_i est stable alors la deuxième question qui se pose est de voir si nous pouvons identifier ici les sous-ensembles que nous obtenons comme images de fU qui sont les systèmes de sections de f sur U qui proviennent de sections globales f sur U. Prenons maintenant un système de sections disons Φ_i dans fU_i pour chaque i, pour chaque index, ici l'axiome nécessaire pour ce système de Φ provienne de sections globales est le suivante : quand vous avez deux indices i et j, la restriction de Φ_i à $U_i \cap U_j$ pourrait être égale à Φ_j... "

Voilà, je m'arrête ici, notre patience est sans doute épuisée. Mais, je vais dire qu'une des raisons pour lesquelles je vous ai fait entendre Grothendieck est assez compliquée : il faut qu'on s'habitue à cette incroyable patience qu'il a d'expliquer tous les détails, de rentrer, d'aller jusqu'au bout de tous les détails. Et ça, on le verra, je veux dire, c'est une qualité absolument essentielle dans sa démarche. Donc je continue à lire ce qu'il disait sur le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray. Grothendieck continue, il dit :

> *"Pour les "épousailles" attendues, "du nombre et de la grandeur", c'était comme un lit décidément étriqué, où l'un seulement des futurs conjoints (à savoir, l'épousée) pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais les deux à la fois ! "*

Donc là, il avait en tête effectivement toutes sortes de développements qui étaient de nature combinatoire, qui étaient reliés à la théorie des nombres, par opposition à ce qui se passait en topologie mais bon, bien sûr, il y avait le travail de Serre sur l'utilisation de la topologie de Zariski.

> *"C'est le point de vue des faisceaux qui a été le guide silencieux et sûr, la clef efficace (et nullement secrète), me menant sans atermoiements ni détours vers la chambre nuptiale au vaste lit conjugal. Un lit si vaste en effet (telle une vaste et paisible rivière très profonde. . .), que*
> *"tous les chevaux du roi*
> *y pourraient boire ensemble..." "*

On y reviendra à ça.

> *"comme nous le dit un vieil air"*

1. ?

(que je vous ferai entendre tout à l'heure)

"comme nous le dit un vieil air que sûrement tu as dû chanter toi aussi, ou au moins entendre chanter. Et celui qui a été le premier à le chanter a mieux senti la beauté secrète et la force paisible du topos, qu'aucun de mes savants élèves et amis d'antan..." (rires)

Bon, il y a bien sûr dans cette phrase, le fait que nous connaissons, sans doute, beaucoup d'entre nous, qui est que le premier à dévoiler un certain paysage mathématique en a une appréhension qui est incomparable (c'est ce qui est arrivé à Galois par exemple) par rapport aux autres mathématiciens qui viennent après lui et le comprennent. Ca, c'est une chose très frappante, il dit quelque chose de plus méchant, de beaucoup plus méchant.

"La clef a été la même, tant dans l'approche initiale et provisoire (via la notion très commode, mais non intrinsèque du "site")" (dont je vous parlerai, bien sûr)

"...que dans celle du topos. C'est l'idée du topos que je voudrais essayer à présent de décrire.".

Donc laissons parler Grothendieck bien sûr.

"Considérons l'ensemble formé de tous les faisceaux sur un espace (topologique)"

Alors, à l'intention du mathématicien, à vrai dire, il s'agit ici des faisceaux d'ensembles, ça, c'est absolument fondamental, c'est un pas énorme, qu'il ait remplacé les faisceaux de groupes abéliens, qui étaient intéressants, on pensait que c'étaient les seuls intéressants, puisque ce sont les seuls qui vont donner une cohomologie, etc. Non ! Il a eu l'idée, qui paraît complètement naïve, de remplacer les faisceaux de groupes abéliens par des faisceaux d'ensembles, et on va voir la portée que ça donne.

"Je crois d'ailleurs".

(et c'est ce qu'il dit)

"être le premier à avoir travaillé systématiquement avec les faisceaux d'ensembles à partir de 1955. Quel est l'avantage de travailler avec les faisceaux d'ensembles, on va le voir, c'est que quand vous travaillez avec les faisceaux d'ensembles, vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe dans ce truc-là, vous pouvez définir ce que c'est qu'une algèbre dans ce truc-là, parce que ce que vous faites, c'est que vous travaillez comme si vous travailliez dans les ensembles mais il y a une variabilité. C'est-à-dire qu'il y a quelque-chose qui bouge, mais sinon, vous faites exactement comme si vous travailliez dans les ensembles, habituels. Donc vous pouvez définir ce que c'est qu'un groupe. Alors, si vous cherchez ce que c'est qu'un groupe abélien dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles, eh bien, vous trouvez les faisceaux de groupes abéliens. Donc on retombe sur ses pieds."

Ensuite ce que dit Grothendieck :

"Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, "à vue de nez"; à savoir, une structure dite de "catégorie"."

Alors bien sûr, nous, on a été éduqués, du moins à mon époque, avec la théorie des ensembles. En fait, c'était sans doute une erreur. La vraie manière de penser, c'est la théorie des catégories. Donc, il pense à cette espèce de théorie qu'il a devant les yeux comme une catégorie.

"(Que le lecteur non mathématicien ne se trouble pas, de ne pas connaître le sens technique de ce terme. Il n'en aura nul besoin pour la suite.)"

C'est-à-dire que ce qu'il faut que le lecteur non-mathématicien pense, simplement, c'est qu'il a un analogue, maintenant, de la théorie des ensembles, dans cette nouvelle catégorie, dans cette catégorie des faisceaux d'ensembles. Il y a quelque chose qui ressemble à la théorie des ensembles, et on va voir que cette métaphore va très loin.

"C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace

envisagé), qui sera dorénavant considérée comme "incarnant" ce qui est le plus essentiel à l'espace."

Alors on verra une métaphore, que je développerai plus loin, mais je peux déjà en dévoiler une partie. Si vous voulez, d'habitude, quand on parle d'un espace, je vais vous la montrer tout de suite parce que je ne veux pas attendre, pour cette métaphore. Voilà, la métaphore est la suivante : avant Grothendieck, on avait l'habitude, quand on étudiait un espace, je ne sais pas moi, une courbe, ou n'importe quoi, on mettait l'espace... sur la scène. Et puis, on le regardait, on l'étudiait, comme un ensemble muni d'une structure, etc. Eh bien, ce que fait Grothendieck, c'est... non ! L'espace n'est pas sur la scène, l'espace, il est dans les coulisses. Sur la scène, il y a les acteurs habituels de la théorie des ensembles : les groupes abéliens, les algèbres, etc. Mais, l'espace en question, il est dans les coulisses, comme un espèce de *Deus ex machina* qui introduit une variabilité dans les personnages qui sont sur la scène. C'est-à-dire que maintenant les personnages qui sont sur la scène, ils vont dépendre d'un aléa. Cet aléa, il est gouverné par le topos. Et quand on a un topos de Grothendieck, il y a aussi les constantes, c'est-à-dire qu'il y a aussi les ensembles qui ne dépendent pas de l'aléa. Et la cohomologie, elle se définit en comparant les deux.

Donc c'est absolument fondamental que vous essayiez progressivement d'acquérir une image mentale, même si vous n'êtes pas mathématicien, pour comprendre que l'espace qui est donné par le topos, il va apparaître derrière, il est dans les coulisses, il n'est pas sur le devant de la scène, ça n'est pas lui qu'on étudie ; on étudie la théorie des ensembles, mais il y a ce bon Dieu de topos, qui est caché et qui fait tout varier, qui introduit une variabilité là-dedans, d'accord. Donc alors, c'est ce que dit Grothendieck d'une autre manière : *"ce qu'il considère comme cet ensemble ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente"*, il y pense comme à une catégorie, cette catégorie de faisceaux d'ensembles. Alors ensuite que dit-il ? *"Que c'est une chose licite d'oublier l'espace et de ne considérer que la catégorie des faisceaux d'ensembles."*

Pourquoi est-ce que c'est une chose licite ? C'est une chose licite parce qu'on n'a pas perdu l'espace en cours de route. On retrouve les points de l'espace. Alors, comment est-ce qu'on retrouve les points de l'espace dans la métaphore que je vous ai donnée ? Parce que lui dit *"c'est un simple exercice de le vérifier : une fois qu'on a posé la question."*. Bon. Effectivement, vous pouvez vous amuser, en pensant en termes classiques, si vous avez les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ordinaire, comment est-ce que vous allez retrouver l'espace lui-même, c'est-à-dire les points de l'espace ? Vous pouvez vous poser cette question. Alors en fait, dans la métaphore que je vous ai donnée, les points de l'espace, c'est quand vous prenez un instant donné, un temps figé. Quand vous prenez un temps qui est figé, eh bien, à ce moment-là, il n'y a plus de variabilité, et vous avez la théorie des ensembles ordinaire. C'est ce qu'on appelle abstraitement dans la théorie des topos un point d'un topos, c'est-à-dire que c'est ainsi qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va de la théorie des ensembles ordinaire vers le topos considéré. Mais ça revient exactement à figer les choses à un instant donné.

Lui dit *"de vérifier est un simple exercice."*. En fait, ce n'est pas toujours vrai ; comme il dit *"(à l'intention du mathématicien) A strictement parler ceci n'est vrai que pour des espaces dits "sobres" "*. Il faut quand-même qu'il y ait un minimum de séparation dans l'espace. Et il y a un exemple extrêmement intéressant, que je vous invite à faire, parce qu'il faut toujours... on ne fait pas des maths en écoutant, on fait des maths en faisant des exercices. Donc il y a l'exercice déjà sur les catégories abéliennes de tout à l'heure. Et voilà un autre exercice maintenant. C'est que vous prenez une courbe avec sa topologie de Zariski. Ou vous prenez plutôt une surface avec sa topologie de Zariski. Et vous calculez les points du topos correspondant, c'est-à-dire de la topologie des faisceaux pour la topologie de Zariski. Eh bien, vous allez vous apercevoir qu'il y a plus de points, parce que l'espace en question, il n'était pas sobre, et vous allez obtenir exactement les points du schéma correspondant. Donc je vais dire, déjà, dans cet exemple-là, on voit le potentiel absolument incroyable de cette manière de penser. Il dit :

"...nous pouvons désormais "oublier" l'espace initial, pour ne plus retenir et ne nous servir que de la "catégorie" associée, laquelle sera considérée comme l'incarnation la plus adéquate de la "structure topologique" (ou "spatiale") qu'il s'agit d'exprimer."

Alors ce qu'il explique après, c'est :

"Comme si souvent en mathématique, nous avons réussi ici (grâce à l'idée cruciale de "faisceau", ou de "mètre cohomologique") à exprimer une certaine notion, (celle d'"espace"), en termes d'une autre (celle de "catégorie")."

Donc on a remplacé, toujours en suivant la métaphore, l'espace par cette catégorie, qui est une catégorie d'ensembles, ce sont des ensembles.

"A chaque fois, la découverte d'une telle traduction d'une notion (exprimant un certain type de situations) en termes d'une autre (correspondant à un autre type de situations), enrichit notre compréhension."

Bien entendu.

"et de l'une et de l'autre notion, par la confluence inattendue des intuitions spécifiques qui se rapportent soit à l'une, soit à l'autre."

"Ainsi, une situation de nature "topologique" (incarnée par un espace donné) se trouve ici traduite par une situation de nature "algébrique" (incarnée par une "catégorie") ; ou, si on veut, le "continu" incarné par l'espace, se trouve "traduit" ou "exprimé" par la structure de catégorie, de nature "algébrique" (et jusque là perçue comme étant de nature essentiellement "discontinue" ou "discrète")."

On dénie, a priori, à une catégorie le droit de représenter quelque-chose de continu. Or c'est le cas ici. C'est le cas parce qu'on retrouve les points et on retrouve la topologie des points, simplement à partir de la catégorie, qui *ressemble* à la catégorie des ensembles.

"Mais ici, il y a plus. La première de ces notions, celle d'espace, nous était apparue comme une notion en quelque sorte "maximale" - une notion si générale déjà, qu'on imagine mal comment en trouver encore une extension qui reste "raisonnable". Par contre, il se trouve que de l'autre côté du miroir, ces "catégories" " (donc les catégories que l'on obtient comme catégories de faisceaux d'ensembles) *"sur lesquels on tombe, en partant d'espaces topologiques, sont de nature très particulière."*

"Le "miroir" dont il est question ici, comme dans Alice au pays des merveilles, est celui qui donne comme "image" d'un espace, placé devant lui, la "catégorie" associée."

Donc cette catégorie, c'est la catégorie de la scène derrière laquelle est le topos.

"Elles jouissent en effet d'un ensemble de propriétés fortement typées, (on ne va pas en parler tout de suite) qui les font s'apparenter à des sortes de "pastiches" de la plus simple imaginable d'entre elles." Quelle est la plus simple d'entre elles ? C'est la théorie des ensembles. Donc les catégories que vous obtenez comme ça, à partir d'un topos, sont des pastiches de la théorie des ensembles. C'est ce que dit Grothendieck.

"Ceci dit, un "espace nouveau style" (ou topos), généralisant les espaces topologiques traditionnels, sera décrit tout simplement comme une "catégorie" qui, sans provenir forcément d'un espace ordinaire, possède néanmoins toutes ces bonnes propriétés." Donc on les appelle topos, alors il va le dire d'ailleurs, attendez, il faut que je le trouve...

"Le nom "topos" a été choisi (en association avec celui de "topologie", ou "topologique") pour suggérer qu'il s'agit de "l'objet par excellence" auquel s'applique l'intuition topologique. Par le riche nuage d'images mentales que ce nom suscite, il faut le considérer comme étant plus ou moins l'équivalent du terme "espace" (topologique), avec simplement une insistance plus grande sur la spécificité "topologique" de la notion. Ainsi..." Bon, il parle des espaces vectoriels, etc. Donc je reviens en arrière.

*"Voici donc l'idée nouvelle. Son apparition peut être vue comme une conséquence de cette observation, quasiment enfantine à vrai dire, que ce qui compte vraiment dans un espace topologique, ce ne sont nullement ses "points" ou ses sous-ensembles de points, et les relations de proximité etc. entre ceux-ci, mais que ce sont les faisceaux sur cet espace, et la catégorie qu'ils forment. Je n'ai fait, en somme, que mener vers sa conséquence ultime l'idée initiale de Leray - et ceci fait, **franchir le pas**. Comme l'idée même des faisceaux (due à Leray), ou celle des schémas, comme toute "grande idée" qui vient bousculer une vision invétérée des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère de naturel, d' "évidence", par sa simplicité."*

En fait, on sait quand on fait des maths, quand on est sur la bonne voie, quand quelqu'un vous dit *"Oh, ce n'est que ça !". (rires)*

Voilà ce que dit Grothendieck, donc :

"...par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent : "Oh, ce n'est que ça !", d'un ton mi-déçu, mi-envieux ; avec en plus, peut-être, ce sous entendu du "farfelu", du "pas sérieux", qu'on réserve souvent à tout ce qui déroute par un excès de simplicité imprévue. A ce qui vient nous rappeler, peut-être, les jours depuis longtemps enfouis et reniés de notre enfance..."

Donc là, il revient à la notion de schéma :

"Elle constitue un vaste élargissement de la notion de "variété algébrique", et à ce titre elle a renouvelé de fond en comble la géométrie algébrique léguée par mes devanciers. Celle de topos constitue une extension insoupçonnée, pour mieux dire, une métamorphose de la notion d'espace."

Si vous voulez, ce qui est absolument extraordinaire, au départ, même, dans la notion de topos, c'est la manière dont l'espace est appréhendé. Comme je le disais, il n'est plus appréhendé par les points, il est appréhendé par l'aléa qu'il introduit : il introduit un aléa dans la théorie des ensembles ; il introduit une variabilité dans la théorie des ensembles. Et ça, c'est extraordinaire.

"Par là, elle porte la promesse d'un renouvellement semblable de la topologie, et au delà de celle-ci, de la géométrie. Dès à présent d'ailleurs, elle a joué un rôle crucial dans l'essor de la géométrie nouvelle."

Ca, c'est pour la cohomologie l-adique, ou pour la cohomologie cristalline.

"Comme sa sœur aînée (et quasi-jumelle)[2], elle possède les deux caractères complémentaires essentiels pour toute généralisation fertile, que voici."

Primo, il ne faut pas que cette notion soit trop vaste, je passe assez vite là-dessus ; il parle des topos, on en a parlé ; il faut que "les constructions géométriques les plus essentielles" s'appliquent bien entendu, qu'elles "puissent se transposer de façon plus ou moins évidente." Il ne faut pas qu'elle soit trop générale, il ne faut pas que la notion que vous preniez soit, par exemple, la notion générale de catégorie. Si c'était la notion générale de catégorie, on n'irait pas loin. Donc il faut qu'elle ait cette propriété.

Il explique : *"Parmi ces "constructions", il y a notamment celle de tous les "invariants topologiques" familiers."*

Il explique très bien : *"Pour ces derniers, j'avais fait tout ce qu'il fallait dans l'article déjà cité de "Tohoku" (1955)."*

Donc l'origine, vous voyez, elle vient de là. Comme je le disais tout à l'heure, dans l'article de Tohoku, il y avait à la fois les faisceaux sur un espace topologique et il y avait aussi, et c'était extrêmement important, les catégories de diagrammes, il parlait des catégories de diagrammes et on va voir qu'elles jouent un rôle absolument essentiel, de la même manière. Donc il parle des associations mentales, et de notions moins techniques, bien sûr.

"Secundo, la nouvelle notion est en même temps assez vaste pour englober une foule de situations qui, jusque là, n'étaient pas considérées comme donnant lieu à des intuitions de nature "topologico-géométrique" - aux intuitions, justement, qu'on avait réservées par le passé aux seuls espaces topologiques ordinaires."

Comme on le verra dans un exemple que je vous donnerai dans relativement peu de temps, comme on le verra, ce qui se produit dans la métaphore dont je vous parlais, ce qui va se produire, c'est que comme il y a cet aléa, comme il y a cette variabilité dans la théorie des ensembles, on ne peut plus appliquer le principe du tiers-exclus. Par contre, l'intuitionnisme marche. Et donc, ce que ça va engendrer, cette nuance, c'est pour ça que je veux vous y amener pas à pas, on est lent, mais il faut que nous soyons lents, donc je vous montrerai un exemple, comme je l'ai dit au début, dans lequel la notion de vérité associée au topos sera beaucoup plus subtile que la notion de vérité ordinaire, et j'aurai un transparent, sur lequel il y aura marqué "à deux pas de la vérité" et je vous donnerai un topos dans lequel on sera "à 10 pas de la vérité", "à 15 pas de la vérité", "à 20 pas de la vérité", etc. On prendra un exemple parce que tant qu'on n'a pas

2. la théorie des schémas

pris un exemple, tant qu'on parle abstraitement, on ne sait pas trop ce qu'on fait. Donc on se dirige vers là.

"La chose cruciale ici, dans l'optique des conjectures de Weil, c'est que la nouvelle notion est assez vaste en effet, pour nous permettre d'associer à tout "schéma" un tel "espace généralisé" ou "topos" (appelé le "topos étale" au schéma envisagé). Certains "invariants cohomologiques" de ce topos (tout ce qu'il y a de "bébêtes"!) semblaient alors avoir une bonne chance de fournir "ce dont on avait besoin" "

Il continue et on se relaxe un peu avant de venir aux exemples et aux choses vraiment cruciales.

"C'est dans ces pages que je suis en train d'écrire que, pour la première fois dans ma vie de mathématicien, je prends le loisir d'évoquer (ne serait-ce qu'à moi-même) l'ensemble des maître-thèmes et des grandes idées directrices dans mon œuvre mathématique. Cela m'amène à mieux apprécier la place et la portée de chacun de ces thèmes, et des "points de vue" qu'ils incarnent, dans la grande vision géométrique qui les unit et dont ils sont issus. C'est par ce travail que sont apparues en pleine lumière les deux idées novatrices névralgiques dans le premier et puissant essor de la géométrie nouvelle : l'idée des schémas, et celle des topos."

Et là, il insiste :

"C'est la deuxième de ces idées, celle des topos, qui à présent m'apparaît comme la plus profonde des deux. Si d'aventure, vers la fin des années cinquante..."

Donc Grothendieck a introduit les topos dans une période un peu dépressive qu'il avait eue après la mort de sa mère en 1957, il a introduit les topos en 58. Donc on sera, l'année qui vient, au 60ème anniversaire de la naissance des topos.

"Si d'aventure, vers la fin des années cinquante, je n'avais pas retroussé mes manches, pour développer obstinément jour après jour,"

Ca, c'est Grothendieck : "Obstinément, jour après jour..."

"tout au long de douze longues années, un "outil schématique" d'une délicatesse et d'une puissance parfaites - il me semblerait quasiment impensable pourtant que dans les dix ou vingt ans déjà qui ont suivi, d'autres que moi auraient pu à la longue s'empêcher d'introduire à la fin des fins (fut-ce à leur corps défendant) la notion qui visiblement s'imposait, et de dresser tant bien que mal tout au moins quelques vétustes baraquements en "préfab", à défaut des spacieuses et confortables demeures[3] *que j'ai eu à cœur d'assembler pierre par pierre et de monter de mes mains."*

Là, il parle des schémas.

"Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique, au cours des trois décennies écoulées, qui aurait pu avoir cette naïveté, ou cette innocence, de faire (à ma place) cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine des topos (ou ne serait-ce que celle des "sites"). Et, à supposer même cette idée-là déjà gracieusement fournie, et avec elle la timide promesse qu'elle semblait receler..."

Vous savez, quelqu'un vous dirait : "Je vais faire ça...". "Bonne chance !", vous diriez ! D'accord... *(rires*[4]

"...je ne vois personne d'autre, que ce soit parmi mes amis d'antan ou parmi mes élèves, qui aurait eu le souffle, et surtout la foi, pour mener à terme cette humble idée (si dérisoire en apparence...)"

Qu'est-ce que c'est que de s'évertuer sur les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique ?...

"...(si dérisoire en apparence alors que le but semblait infiniment lointain...) : depuis ses premiers débuts balbutiants, jusqu'à la pleine maturité de la "maîtrise de la cohomologie étale", en quoi elle a fini par s'incarner entre mes mains, au cours des années qui ont suivi."

3. adresse de l'orateur au public : "là, il parle des schémas"
4. pour souligner l'ironie de l'euphémisme du Bonne chance par rapport à l'ampleur de la tâche que cela représente.)

Bon après, il parle de détails, enfin, de choses qui sont importantes pour le mathématicien, mais il parle de la cohomologie étale et c'est à ce propos, comme il le dit :

"C'est inspiré par ce propos que j'avais découvert la notion de site en 1958." Donc, il a découvert la notion de site en 1958, et c'est cette notion, bien sûr, et le formalisme cohomologique, qui ont été développés plus tard.

Il dit :

"Quand je parle de "souffle" et de "foi"," (ça, c'est toujours pour le mathématicien), *"il s'agit là des qualités de nature "non-techniques" "*

Grothendieck a écrit quelque-part dans Récoltes et Semailles qu'il n'était pas rapide, qu'il était entouré de gens beaucoup plus rapides que lui, mais bon, c'est un exemple qui montre à quel point, il ne faut pas se décourager, quand on n'est pas rapide, bon quand on parle avec des gens dont on s'aperçoit qu'ils comprennent dix fois plus vite que vous, il ne faut pas se décourager. Par contre, ce qui est absolument crucial, c'est d'être persévérant, et d'avoir la foi dans une idée.

C'est-à-dire si vous avez une idée, il faut d'abord que vous vous l'appropriez, que vous la fassiez vôtre. Et une fois qu'elle est vôtre, il faut la protéger ;au départ, il faut la protéger comme un tout petit enfant qui vient de naître. Il ne faut pas trop la montrer, pas trop, etc. *(petits rires)* Et puis après... Pas tellement parce que quelqu'un peut vous la prendre mais parce qu'il faut que vous la testiez, on va en parler plus tard, il faut que vous la testiez, il faut que vous vous habituiez à elle, en privé.

"A un autre niveau, je pourrais y ajouter aussi ce que j'appellerais le "flair cohomologique", c'est-à-dire le genre de flair qui s'était développé en moi pour l'édification des théories cohomologiques."

Après, il râle un peu contre ses élèves, mais ça, on en a l'habitude avec Grothendieck.

On va faire une petite pause : on ne va pas s'arrêter mais je vais vous faire écouter Yves Montand *(rires)*.

"Oui, la rivière est profonde, et vastes et paisibles sont les eaux de mon enfance, dans un royaume que j'ai cru quitter il y a longtemps. Tous les chevaux du roi y pourraient boire ensemble à l'aise et tout leur saoul, sans les épuiser ! Elles viennent des glaciers, ardentes comme ces neiges lointaines, et elles ont la douceur de la glaise des plaines. Je viens de parler d'un de ces chevaux, qu'un enfant avait amené boire et qui a bu son content, longuement. Et j'en ai vu un autre venant boire un moment, sur les traces du même gamin si ça se trouve - mais là ça n'a pas traîné. Quelqu'un a dû le chasser. Et c'est tout, autant dire."

On écoute la chanson Aux marches du Palais, *chantée par Yves Montant, qui raconte l'histoire de la jeune-fille qui a tant d'amoureux qu'elle ne sait lequel prendre et qui a choisi son petit cordonnier.*

Voilà, on revient aux choses sérieuses.

Alors, il continue, il dit :

"Je vois pourtant des troupeaux innombrables de chevaux assoiffés qui errent dans la plaine - et pas plus tard que ce matin même leurs hennissements m'ont tiré du lit, à une heure indue, moi qui vais sur mes soixante ans et qui aime la tranquillité. Il n'y a rien eu à faire, il a fallu que je me lève. Ça me fait peine de les voir, à l'état de rosses efflanquées, alors que la bonne eau pourtant ne manque pas, ni les verts pâturages. Mais on dirait qu'un sortilège malveillant a été jeté sur cette contrée que j'avais connue accueillante, et condamné l'accès à ces eaux généreuses. Ou peut-être est-ce un coup monté par les maquignons du pays, pour faire tomber les prix qui sait ? Ou c'est un pays peut-être où il n'y a plus d'enfants pour mener boire les chevaux, et où les chevaux ont soif, faute d'un gamin qui retrouve le chemin qui mène à la rivière..."

Alors, avec Pierre Cartier et Olivia Caramello, on a organisé un colloque, il y a de ça deux ans, à l'IHES, justement pour raviver l'idée des topos, mais vraiment des topos de Grothendieck, et le colloque a été remarquable, ça s'est très très bien passé.

Alors qu'est-ce qu'un topos de Grothendieck ? Donc maintenant on revient aux mathématiques. Donc il y a trois manières de les définir : c'est sans doute la première manière qui est la plus simple. Alors, comme Grothendieck l'expliquait quand il fait son cours, la chose importante, au départ, c'étaient des pré-faisceaux, c'est-à-dire c'étaient des foncteurs contravariants qui allaient de la catégorie des ouverts, mais c'est une catégorie extrêmement simple, hein. Je veux dire c'est une catégorie pour laquelle entre deux objets, il y a au plus un morphisme donc c'est vraiment quelque-chose d'extrêmement simple. Donc on regardait les foncteurs contravariants qui allaient de cette catégorie vers les ensembles. Alors maintenant, on enlève toutes les conditions sur cette catégorie, sauf que ça doit être une petite catégorie. Qu'est-ce que ça veut dire une petite catégorie ? Ça veut dire que les objets forment un ensemble. Et puis les morphismes aussi bien entendu. Donc on regarde une petite catégorie et on regarde tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles. On oublie le fait qu'on avait les ouverts et qu'on avait une catégorie extrêmement particulière en regardant les ouverts. D'accord, on prend n'importe laquelle. Et alors maintenant, ce qu'on demande, bien sûr, on ne va pas prendre tous les foncteurs contravariants, puisqu'on sait bien, et Grothendieck l'expliquait dans ce qu'on a écouté, qu'on ne va pas prendre tous les pré-faisceaux. Parmi ces pré-faisceaux, on va en sélectionner qu'on va appeler des faisceaux. Quelle est la propriété importante de cette sélection ? Il y a deux choses qui sont très importantes dans cette sélection : la première, c'est qu'on ne va pas changer les morphismes ; la première chose qui est fondamentale, c'est que quand vous prenez un morphisme d'un faisceau vers un autre faisceau, en fait, vous pouvez oublier que ce sont des faisceaux. C'est un morphisme de pré-faisceaux, d'accord. Donc en fait, quand on va sélectionner la sous-catégorie de la catégorie des pré-faisceaux, on va prendre une sous-catégorie pleine. Sous-catégorie pleine, ça veut dire qu'on ne va pas changer la notion de morphisme. D'accord, c'est crucial, ça, si vous écoutez Grothendieck plus loin, il en parle et il dit bien que c'est crucial. Donc première chose. Deuxième chose, qui est extrêmement importante, c'est qu'il y a un moyen, lorsque vous avez un pré-faisceau de le faisceautiser, de le transformer en un faisceau. Donc ça veut dire que les faisceaux sont des pré-faisceaux particuliers, mais il y a une espèce de projection qui vous permet de remplacer un pré-faisceau par un faisceau. Alors quelle est la manière de le dire qui est correcte : c'est que le foncteur qui inclut la catégorie des faisceaux dans la catégorie des pré-faisceaux, bon d'abord il est plein, il est fidèle, parce qu'on n'oublie rien, mais surtout, il a un adjoint à gauche, qui est la faisceautisation, et par miracle, cette action à gauche, il est exact à gauche, ce qui n'est normalement jamais le cas pour un adjoint à gauche. Normalement, un adjoint à gauche, on sait que dans tous les cas, il va préserver ce qui s'appelle les colimites, mais c'est très rare qu'il préserve les limites. Eh bien, là, ça préserve les limites. Donc c'est ça la condition. Donc si vous voulez une définition courte de ce que c'est qu'un topos, c'est ça.

Alors maintenant ce qu'on va voir, et puis on va voir ce que c'est qu'un site, il y a une autre manière de le dire qui est plus précise : c'est qu'en fait, on sait que toute faisceautisation, comme celle dont je vous parlais, en fait, elle provient de ce qu'on appelle une topologie de Grothendieck sur la petite catégorie dont on est parti. Alors on va voir ce que c'est. Et puis en fait, il y a une troisième définition de ce que c'est qu'un topos. Mais alors ça, c'est vraiment une définition, comment dire, très abstraite mais c'est une définition qui énonce des propriétés qui sont vraies pour la théorie des ensembles, d'accord. Et on demande que le topos les vérifie aussi. Alors ça, ça a engendré une autre théorie des topos, qu'on appelle la théorie des topos élémentaires, qui ne sont pas des topos de Grothendieck en général. Mais alors, qu'est-ce qu'il manque à un topos élémentaire, donc un topos qui vérifie des propriétés naïves de théorie des ensembles, pour être un topos de Grothendieck ? Ce qui lui manque, ce sont les constantes. C'est-à-dire que tout à l'heure, dans la métaphore, je vous disais qu'on a des ensembles variables, qui dépendent d'un aléa. Eh bien, quand on a un topos de Grothendieck, il y a ce qu'on appelle un morphisme géométrique, qui va du topos vers le topos des ensembles, et ça permet de parler des constantes. Or parler des constantes, lorsqu'on fait de la cohomologie par exemple, c'est absolument essentiel. Parce que ce sont les constantes qui permettent par exemple de définir les sections globales d'un faisceau, etc., etc. Donc c'est pas du tout innocent, et il y a une différence très grande entre un topos de Grothendieck et ce qu'on appelle un topos élémentaire qui rassemblerait des propriétés élémentaires de la théorie des ensembles.

Alors les exemples. Bon alors parmi les exemples, il y a bien sûr l'exemple des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. C'est le premier exemple. Le deuxième exemple, j'en ai déjà parlé, ce sont les faisceaux pour la topologie de Zariski, donc c'est un cas particulier des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. Mais comme je le disais, l'intérêt, c'est que quand on cherche les points, pour ce topos-là, on trouve les bons points du schéma, d'accord. Et enfin, il y a un troisième exemple, qui est ce que Grothendieck a introduit en 58 pour avoir la cohomologie étale, c'est-à-dire qu'on part d'un schéma, et il y a un topos qui est associé au schéma, mais ça n'est plus un topos qui provient d'une topologie sur le schéma. Donc c'est quelque-chose qui est au-dessus et qui, bon, bien sûr, là, c'est déjà un topos au sens original, qui est en dehors des espaces topologiques.

Donc je reviens à Grothendieck, il dit :

"Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas - mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques. Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas."

Il y a une espèce de malédiction sur les topos. Il y a une malédiction qui règne, on y reviendra peut-être si on a le temps. Alors voilà la métaphore. Donc la métaphore dont je vous parlais tout à l'heure. Il faut absolument que vous ayez une image mentale de ce que c'est qu'un topos. Donc on avait l'habitude, comme je le disais, de mettre l'espace à étudier sur le devant de la scène. Ce que fait Grothendieck, c'est de lui faire jouer ce rôle de Deus ex machina, qui n'est pas présent, qui reste dans les coulisses. Mais ce qui est important, c'est de savoir que, quand vous avez un topos, vous pouvez faire toutes les manipulations, vous pouvez parler de groupes abéliens, vous pouvez parler d'algèbres, etc., et si vous travaillez avec un topos provenant d'un espace topologique, ça vous donnerait les faisceaux de groupes abéliens, ou les faisceaux d'algèbres, etc., c'est formidable, c'est formidable d'avoir cette liberté de manœuvre. Bon, alors, lorsqu'on travaille dans un topos, tout se passe comme si on manipulait des ensembles ordinaires. Donc c'est ça qu'il faut savoir. En fait, dès qu'on fait des fibrés vous savez sur un espace, on prend l'habitude de penser à un fibré comme à un espace vectoriel variable. Mais là, la variabilité, c'est la **bonne** notion de variabilité, parce que ça paramétrise les ensembles. Sauf que l'on ne peut plus appliquer la règle du tiers-exlus. Donc ce qui apparaît, c'est qu'on ne peut plus, pour une proposition dire la proposition p est vraie, ou la proposition *non p* est vraie, on n'a plus le tiers-exclus. Alors on va très vite voir un exemple concret d'un topos pour lequel cette notion de vérité devient plus subtile que le simple vrai ou faux que nous utilisons familièrement. Par exemple, si vous regardez la télévision, et vous regardez une discussion politique à la télévision ; eh bien, nous avons l'habitude de dire "celui-là a raison et celui-là a tort". Eh bien, je prétends qu'on n'a pas l'outil conceptuel qu'il faut pour juger. Et je vais vous donner des exemples. Je vais vous montrer à quel point la notion de vérité est une notion beaucoup plus subtile et à quel point l'idée du topos permet de la formaliser. Donc on va faire marcher ça sur un exemple. Pour faire marcher ça, on va introduire des topos qui sont autres que les topos qui viennent d'un espace topologique et qui ont une nature extrêmement simple : ce sont les topos qui consistent à prendre une petite catégorie et à prendre simplement la catégorie de tous les foncteurs contravariants vers les ensembles. Donc là, on ne fait pas de distinction entre faisceaux et pré-faisceaux. On prend tous les pré-faisceaux. On dit que ce sont tous des faisceaux. Donc à une petite catégorie, on va associer un topos qui est son espèce de dual, qui est tous les foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, et on va s'amuser avec ça.

Alors en 91, Grothendieck était encore parfaitement en contact avec certains mathématiciens, et voilà ce qu'il écrivait, c'est dans une lettre à Thomasson, il dit :

"D'autre part pour moi, le paradis originel pour l'algèbre topologique n'est nullement la catégorie simpliciale..." donc, je ne sais pas si on aura le temps d'en parler, mais il parle des topos.

"En effet, les topos ayant comme catégories des faisceaux d'ensembles les $\hat{C}$, avec C une petite catégorie, sont de loin les plus simples des topos connus." Et c'est pour l'avoir senti qu'il insiste tant sur ces topos catégoriques dans SGA4. Donc si vous regardez SGA4, vous verrez qu'il y a deux exemples fondamentaux de topos ; bien sûr, il y a le topos étale, et puis il y a les topos qui sont duaux d'une catégorie. D'accord. Alors on va s'amuser avec ça.

Alors quelle est la notion de vérité dans un topos ? *(rires)* En quel sens la notion de vérité est-elle différente dans un topos ? Alors, en quel sens d'abord, est-ce qu'on est capable, dans les ensembles, de définir le vrai et le faux ? Alors, comment va-t-on définir le vrai et le faux dans la théorie des ensembles ? On va s'intéresser à essayer de classifier les sous-ensembles d'un ensemble, d'accord. Vous voyez, si vous travaillez avec les ensembles ordinaires, et si je vous dis “j’ai un foncteur qui, si vous me donnez un ensemble, lui associe tous ses sous-ensembles.”. C’est un foncteur parce que si vous avez une application qui va de X dans Y, vous pouvez rappeler en arrière les sous-ensembles de Y, donc c’est un foncteur. Alors maintenant, la question, c’est “est-ce que ce foncteur est représentable ?”. C’est une notion mathématique, d’accord, et alors dans les ensembles, il est représentable à cause d’une notion que nous, nous connaissons très très bien : c’est qu’à un sous-ensemble, on associe ce qu’on appelle sa fonction caractéristique. C’est-à-dire quand on a un sous-ensemble d’un ensemble, on définit une fonction : cette fonction, elle vaut 1 si on est dans le sous-ensemble, et elle vaut 0 si on n’est pas dans le sous-ensemble. Alors cette fonction, il se fait qu’elle a une propriété assez miraculeuse : c’est qu’elle classifie, c’est-à-dire qu’elle représente ce foncteur. Dans le cas des ensembles, il y a un objet privilégié Ω qui est l’objet qui est formé de l’ensemble $\{0, 1\}$, l’ensemble à deux points, et quand vous regardez tous les sous-ensembles d’un ensemble, ça revient à regarder toutes les applications de cet ensemble vers l’ensemble $\{0, 1\}$. Puisque quand vous avez une application qui va vers l’ensemble $\{0, 1\}$, le sous-ensemble, il est défini par le sous-ensemble sur lequel elle prend la valeur 1. Mais là où elle ne prend pas la valeur 1, eh bien, elle prend forcément la valeur 0. Eh bien, si on réfléchit suffisamment, en logique, en pensant dans le langage des topos, on s’aperçoit que c’est ce simple fait qu’il n’y avait que 0 et 1 dans les ensembles qui permet d’avoir le principe du tiers-exclus.

Donc maintenant on va s’amuser avec un topos qui est un tout petit peu plus compliqué. On va prendre... alors, c’est ce que j’appelle “à deux pas de la vérité”. Alors, qu’est-ce qu’on va prendre comme topos ? On va prendre la catégorie C qui n’a qu’un seul objet, et qui a pour morphisme les puissances d’un seul morphisme. C’est-à-dire que je choisis un seul morphisme qui va de cet objet dans lui-même et je l’élève à des puissances, d’accord, T^n. Alors qu’est-ce que ça veut dire, un objet de la catégorie des foncteurs contravariants de cette catégorie vers les ensembles ? Ça veut simplement dire un ensemble avec une application de X dans X. C’est tout. Pourquoi vous n’avez qu’un seul ensemble ? Parce que la catégorie n’avait qu’un objet. Donc vous n’avez qu’un ensemble. Et en fait, la catégorie, elle n’avait qu’un seul morphisme, bon, on l’élève à ses puissances, mais, je veux dire... il suffit de le connaître, il suffit de connaître son image. Qu’est-ce que c’est que son image ? C’est une transformation T de X dans X. Quel est le topos ? Eh bien, ce sont les ensembles munis d’une transformation. Bon, eh bien, les ensembles munis d’une transformation, ça fait un topos. C’est une catégorie, d’accord. Comment est-ce une catégorie ? C’est une catégorie parce que si vous avez deux ensembles avec une transformation, vous avez les applications de X dans Y qui respectent la transformation. C’est à dire qu’ils vérifient que l’image $f(TX)$ de TX, c’est $Tf(x)$. Donc vous avez une catégorie, et cette catégorie, c’est un topos. Pourquoi c’est un topos ? Parce que c’est le dual d’une petite catégorie que je vous ai donnée.

Bon alors maintenant, on va chercher Ω, pour ça, donc on va chercher à classifier les sous-objets d’un objet. Alors, pourquoi est-ce embêtant, d’essayer de classifier les sous-objets d’un objet ? Eh bien, on va essayer avec $\Omega = \{0, 1\}$. On va essayer avec la fonction caractéristique, comme on faisait tout à l’heure. Après tout, si je prends un ensemble avec une application, si je prends un sous-objet, c’est un sous-ensemble qui est stable par l’application, d’accord. Donc si je prends mon X, je vais prendre un sous-ensemble Y qui était invariant, qui était invariant par l’application T. Bon. Très bien. Il est invariant par l’application T. Donc je vais associer la valeur 1 sur ce sous-ensemble, d’accord. Sur le sous-ensemble, je vais donner 1. Pourquoi est-ce que je ne peux pas donner la valeur 0, sur le complémentaire ? Eh bien, parce qu’il peut y avoir des points du complémentaire qui vont finir par atterrir dans l’ensemble en question. Je ne suis pas du tout assuré que le complémentaire va être invariant par T. Il peut très bien se produire qu’un point du complémentaire, au bout d’un moment, tac !, il va taper dans le sous-ensemble en question. C’est pas parce que le sous-ensemble en question est invariant que son complémentaire est invariant. Bien sûr que non ! La transformation, je n’ai pas pris une action de Z, j’ai pris une action de N. Alors comment on va faire ? C’est embêtant ! Ça veut dire que l’application qui allait vers 0 et 1, elle ne marche pas, elle ne marche pas. Bon ! Eh bien, il faut se creuser la tête un petit peu. Qu’est-ce qu’il faut faire ? Eh bien, quand je prends un x qui est dans X, il va exister un plus petit entier, un premier entier, tel que quand j’applique T, n fois, ça tape dans le sous-ensemble. D’accord. Donc je vais lui associer cet entier. Cet entier, il sera l’∞, bien sûr, si on n’arrive jamais dans le sous-ensemble.

Donc on voit qu’il faut remplacer l’ensemble $\{0, 1\}$ par l’ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$. Et comment va-t-on faire de cet ensemble un ensemble muni d’une transformation ? Eh bien, on s’aperçoit que si je regarde le h, c’est-à-dire le plus petit entier pour TX, eh bien, le plus petit entier pour TX, ça va être le plus petit entier pour X moins 1 sauf si ça devient négatif ; si ça devient négatif, ça ne marche pas ; donc je prends le *sup* avec 0. D’accord.

Donc vous voyez que pour ce topos, alors la notion de vérité qui avant était simplement 0 ou 1, maintenant, elle est donnée par l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$, avec la transformation qui remplace par $n - 1$. Alors qu'est-ce que ça veut dire ? Eh bien, ça veut dire qu'on a un exemple incroyablement simple d'un topos qui permet de dire "Ouais, ce que tu fais, ouais, je dirais, c'est à 10 pas de la vérité...". Moi, j'ai toujours dit que les gens qui font de la théorie des cordes, c'est à une infinité de pas de la vérité. *(rires)*

Donc vous voyez que cette notion, pour innocente qu'elle soit, pour bêbête qu'elle ait l'air, en fait, elle a un potentiel d'une richesse absolue. Et ce que je prétends, c'est que notre esprit, notre formation logique, est extrêmement primitive parce que nous avons l'habitude, lorsque nous écoutons une discussion politique de décréter "oui ou non", "telle personne a raison, telle personne a tort" et on est dans l'erreur en faisant cela et s'il y avait des philosophes, bon, je rêve hein, s'il y avait des philosophes connaissant les maths, et qui comprennent les topos de l'intérieur, et il y en a très peu, qui comprennent les topos de l'intérieur, ils seraient capables de donner des modèles, qui seraient utiles, pour beaucoup mieux apprécier ce genre de discussions, ce genre de situations, qui sont en fait beaucoup plus subtiles par rapport à la notion de vérité, que cette notion d'une inefficacité absolue, que nous utilisons tout le temps, et qui est "un tel a raison ou un tel a tort.". Donc, je voulais absolument vous donner cet exemple pour que vous le gardiez en tête, et que vous essayiez de construire d'autres exemples semblables ; il y a des exemples finis bien entendu, ne soyez pas effrayés par le fait qu'il y a des n qui vont de 0 à l'infini, en fait, vous pouvez très bien imaginer des constructions finies, d'accord. Les constructions finies, il y a une richesse combinatoire dans les topos qui fait que les constructions finies ont un potentiel extraordinaire.

Alors qu'est-ce qu'un crible ? Cet exemple va nous permettre de définir ce que c'est qu'un crible. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Je vous ai donné un exemple de crible. Le Ω en général, quand vous prenez le topos qui est donné par tous les foncteurs contravariants d'une petite catégorie vers les ensembles, eh bien, on construit le Ω et comment est construit le Ω ? Le Ω, il est construit à partir d'un crible. Alors qu'est-ce qu'un crible ? Eh bien, un crible sur un objet d'une catégorie, le Ω, va être construit à partir des objets de cette catégorie, rappelons-nous que la catégorie dont j'ai parlé tout à l'heure, elle n'avait qu'un seul objet. Donc pour le moment, on n'a rien. On a un seul objet. Alors, un crible sur un objet X, sur notre objet X, c'est la donnée d'une famille de morphismes $C(X)$ qui est contenue dans tous les morphismes dont l'image est X... enfin, ça va d'un ensemble Z vers X, dont le codomaine est X, et qui est stable par composition à droite.

Quels sont les cribles, dans l'exemple de tout à l'heure ? On avait un seul objet ; les morphismes qui allaient dans cet objet, c'étaient simplement les entiers, puisque c'étaient les puissances de T, il y avait $T^0, T^1, T^2, \ldots$. Qu'est-ce que c'est qu'un crible ? Eh bien, un crible, c'est un espèce d'idéal, c'est-à-dire que c'est une famille de morphismes qui est stable par composition à droite, par n'importe quel morphisme. Donc dans le cas de tout à l'heure, qu'est-ce que c'est que la composition à droite ? Ça rajoute à un entier, eh bien, ça lui rajoute n'importe quel entier. Ça revient à regarder tous les intervalles infinis d'un côté. Alors, parmi les intervalles infinis, vous avez quoi, vous avez 0, jusqu'à l'infini, ça, c'est ce qu'on appelle... enfin, c'est un crible qui doit être toujours présent ; c'est le crible qui est formé de tous les morphismes. Et puis ensuite, on avait tous les morphismes qui étaient à partir d'un certain entier n. Ca, c'était un crible, d'accord, et c'était quand on était à distance n. Et puis, il y a le crible où il n'y en a aucun, c'est l'ensemble vide, et ça, ça correspondait à l'infini tout à l'heure. Voilà.

Alors il se fait que donc en général, on peut définir le Ω, les valeurs de vérité, pour le dual d'une petite catégorie, et on le définit exactement à partir des cribles. Quand on calcule Ω donc, on construit cet objet, simplement comme toujours comme un foncteur contravariant d'un ensemble etc., mais on le construit à partir des cribles sur chacun des objets de la catégorie. Dans notre cas, il y avait un seul objet donc c'était très simple. C'était très très simple.

Alors moi j'ai été longtemps fasciné par l'idée que Grothendieck avait appelé crible et qu'il n'ignorait pas que ce nom avait déjà été utilisé par les mathématiciens, et qu'il y a par exemple un crible qui est bien connu et qui est le crible d'Eratosthène. Alors j'ai finalement trouvé la réponse, j'ai finalement trouvé pourquoi le crible d'Eratosthène est un crible, au sens de Grothendieck et ça, ça vient d'un travail en commun qu'on a fait avec Katia Consani et dans lequel la catégorie qu'on prend, elle est très semblable à celle de tout à l'heure, où il y avait une seule transformation, mais cette fois, elle est un peu plus compliquée quand-même, parce que, au lieu d'avoir (on a toujours un seul objet, comme avant), mais au lieu d'avoir les puissances d'un seul morphisme, on a une action des entiers multiplicatifs. C'est-à-dire que pour chaque entier, on a un morphisme, et quand on fait le produit de deux entiers, les morphismes se composent.

Alors c'est un exercice de démontrer que le crible d'Eratosthène est un crible de la manière suivante : c'est très amusant. Parce que... qu'est-ce que c'est que le crible d'Eratosthène ? Le crible d'Eratosthène, ça consiste à prendre le premier nombre non trivial. On va foutre en l'air 1, hein, on s'en fout de 1, d'accord. Donc on prend le premier nombre non trivial qui est 2. Et que fait le crible ? Le crible considère tous les multiples de 2, tous les nombres pairs, sauf 2. Et puis après, il reste des choses, bon. Il reste 3 par exemple, alors il prend tous les multiples de 3 sauf 3. Et puis il reste des choses, 4 on l'a déjà pris puisque... Donc il prend tous les multiples de 5 sauf 5. Eh bien, je prétends que si vous regardez les entiers comme les morphismes, les entiers multiplicatifs, comme les morphismes d'une catégorie qui n'a qu'un seul objet, et si vous regardez tout ce que je viens de vous dire, c'est-à-dire si vous regardez tous les entiers pairs sauf 2, tous les multiples de 3 sauf 3, etc., ça, ça fait un crible au sens que je vous ai donné tout à l'heure. Et ça vous montre à quel point la notion de vérité est subtile pour cette catégorie-là, parce que ça, je vous ai donné seulement **un** exemple de crible. Vérifier que c'est un crible, c'est trivial, c'est pas la question, c'est pas la difficulté.

Alors maintenant, une fois qu'on a la notion de crible, on va voir la notion de topologie de Grothendieck. Je ne pouvais pas faire un exposé sur les topos sans donner la définition d'une topologie de Grothendieck. Alors, moi, je vais vous dire le moment qui pour moi a été crucial dans l'appréciation de la notion de topos. Le moment qui a été crucial, c'est le suivant : c'est qu'avant, quand on me présentait un topos, on me présentait toujours un topos en me disant "je prends une catégorie, une petite catégorie, et je suppose qu'elle est stable par produit fibré." A ce moment-là, mon oreille se fermait et je pensais à autre chose, d'accord *(rires)*. Et la raison, c'est la suivante : c'est que, quand on dit ça, et qu'après on écrit ce que c'est qu'une base, etc., on a bien sûr en tête l'intuition topologique ; c'est-à-dire que quand on dit que la catégorie a des produits fibrés, on pense à deux ouverts qui ont une intersection. Et à partir de là, bon, on peut développer les choses. Et alors, ce qui pour moi a été crucial, c'est le moment où j'ai compris en fait que, déjà dans SGA4, Grothendieck avait défini les sites, et les produits fibrés sur les sites, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, *sans aucune hypothèse* sur la petite catégorie, on n'a absolument pas besoin de supposer *quoi que ce soit* sur la petite catégorie, et l'avantage énorme, c'est que lorsqu'on fait ça, on comprend mieux ce dont on parle. Vous savez, en mathématiques, il y a une chose qu'il faut comprendre, c'est que la principale difficulté quand on est devant un problème, c'est d'arriver à **penser juste**. Et penser juste, ça a l'air idiot, ça a l'air de... chercher à penser juste... mais une fois qu'on arrive à penser juste, les choses tombent comme des fruits mûrs, mais il faut savoir penser juste. Et ça n'est pas penser juste que de demander à la petite catégorie d'avoir des produits fibrés. Penser juste, c'est ce qu'il y a là, c'est-à-dire le crible maximal, le fait que quand vous avez un crible... Donc, qu'est-ce que c'est qu'une topologie de Grothendieck, c'est une collection de cribles, on donne pour chaque objet une collection de cribles, et on a des conditions de compatibilité. Mais quelle est l'intuition qu'il faut avoir derrière ? Peu importe le détail des axiomes. Quelle est la... Quand vous faites de la topologie, vous avez l'intuition des recouvrements ouverts. C'est une intuition qui est très délicate, je vais vous expliquer pourquoi elle est très délicate. Prenez par exemple l'intervalle $[0, 1]$. Et puis ne prenez dans l'intervalle $[0, 1]$ que les nombres rationnels. Ils sont denses, donc vous reconnaîtrez les ouverts, avec les nombres rationnels, puisque les ouverts, ce sont des réunions d'intervalles. Un intervalle, je le connais par son intersection avec les rationnels. D'accord ? Qu'est-ce qui va changer ? Pourquoi est-ce que si je prends le topos qui est donné par les rationnels avec ces ouverts-là, j'obtiens quelque-chose de différent que le topos qui est donné par l'intervalle $[0, 1]$ avec ses ouverts ordinaires ? Ils se ressemblent, ils ont l'air d'être les mêmes. Eh bien, si vous cherchez, vous allez trouver qu'en fait, il y a beaucoup plus de recouvrements ouverts pour les rationnels qu'il n'y en a pour les réels. Pour les rationnels, il y a des recouvrements ouverts qui sont là alors qu'ils ne sont pas là pour les réels. Voilà. Typiquement, c'est que si vous prenez une suite d'ouverts de plus en plus grands mais dont la limite est un nombre irrationnel, eh bien, cela, ça va apparaître comme un recouvrement au niveau rationnel mais ça ne sera pas un recouvrement au niveau réel. D'accord ? C'est-à-dire qu'au niveau réel, si vous prenez le complémentaire de ça, la réunion des deux, ça ne sera pas un recouvrement ouvert. Donc en fait, il y a beaucoup moins de recouvrements ouverts pour les réels qu'il n'y en a pour les rationnels. Quand on pense topologiquement, on pense comme ça. Quand on pense au niveau des topos, on pense différemment : comment on pense au niveau des topos ? On pense que les cribles, ça signifie des choses petites, ça signifie des objets petits. Passer au crible, ça revient à donner des objets qui sont petits. Et à ce moment-là, les axiomes, ils deviennent presque absolument évidents. Et qu'est-ce que ça signifie qu'un objet est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Qu'est-ce que ça signifie qu'un recouvrement est petit par rapport à un recouvrement ouvert ? Ça signifie qu'il passe à travers, ça signifie qu'il est contenu dans un des ouverts du recouvrement : il passe à travers un trou. Donc, c'est ça l'intuition qu'il faut avoir : l'intuition du crible, c'est que ce sont des choses qui sont petites, et qui passent à travers les trous. D'accord.

Alors ceci dit, maintenant, on a l'intuition d'une topologie de Grothendieck quand il y a une base, etc. ; je ne vais pas vous embêter avec ça. Alors il y a une notion essentielle dans les topos mais c'est pareil, je ne vais pas en parler trop longtemps : c'est la notion de point. Et surtout la notion de morphisme géométrique. Donc, les topos... Il se fait qu'une fois qu'on pense juste à propos des topos, les mêmes propriétés qui sont vraies pour les espaces topologiques continuent à avoir un sens, mais évidemment, elles sont beaucoup plus subtiles. Typiquement, ce qui se produit, et ça, j'ai copié une page de SGA4, c'est ce que c'est qu'un morphisme d'un topos dans un autre, ce qu'on appelle un morphisme géométrique.

Alors pour comprendre ce que c'est qu'un morphisme géométrique, c'est-à-dire un morphisme d'un topos dans un autre, il faut avoir une certaine familiarité avec les faisceaux sur un espace. Pourquoi ? Parce que lorsqu'on a une application continue d'un espace X vers un espace Y, si j'ai une application continue f qui va de X dans Y, eh bien, il se fait qu'il y a deux manières de relier les faisceaux sur X avec les faisceaux sur Y. Il y a deux manières de le faire. Et ces deux manières, il y en a une qui est tautologique, presque triviale, et qui consiste à prendre un faisceau sur X et à l'envoyer en avant vers un faisceau sur Y. Et ça, en quel sens c'est trivial ? C'est trivial parce qu'il vous suffit, quand vous prenez un ouvert sur Y, de prendre son image inverse et de regarder les sections du faisceau sur X sur cet ouvert, sur l'image inverse. Donc ça, ça fait un faisceau, il n'y a pas de problème. Donc cette définition, elle va de soi. Mais il y a une autre manière de relier les faisceaux de X et les faisceaux de Y qui va dans l'autre sens, c'est-à-dire qui envoie un faisceau sur Y vers un faisceau sur X, et celle-là, elle est beaucoup plus intéressante, elle est beaucoup moins triviale. Elle est visuellement évidente si on pense à un faisceau comme un espace étalé sur l'espace de base, et c'est en particulier le cas pour les faisceaux d'ensembles, mais, là où elle est extrêmement intéressante, c'est que cette application qui va dans l'autre sens, elle a une propriété merveilleuse, elle a une propriété totalement inattendue. D'abord, elle est adjointe à gauche de l'autre. Ca, ça se vérifie, ça n'est pas une grande chose, on aurait pu la définir comme ça. Donc elle est adjointe à gauche de l'autre, de celle qui allait en avant, très bien. Mais elle a une propriété merveilleuse, et cette propriété merveilleuse, c'est la propriété qu'elle est exacte à gauche, c'est-à-dire qu'elle commute avec les limites. Donc ça, c'est une propriété extrêmement puissante, extrêmement étonnante, et je pense que l'exemple qui est dû à Pierre, l'exemple le plus frappant de ça, il faut être frappé par un exemple, tant que vous n'êtes pas frappé par un exemple, vous ne comprendrez pas. L'exemple le plus frappant de ça, c'est ce qu'on appelle les ensembles simpliciaux, les complexes simpliciaux. Donc ce que vous faites, il y a une petite catégorie, donc un peu plus compliquée que celle de tout à l'heure, (intervention de Pierre Cartier) *dont Grothendieck ne veut pas*, repris par Alain Connes, dont Grothendieck ne veut pas, précisément. Je vais revenir à la page de Grothendieck parce qu'il n'en veut pas. C'est amusant d'ailleurs. Voilà.

C'est celle dont Grothendieck ne veut pas. C'est cette petite catégorie qu'on appelle Δ^{op}, c'est la catégorie semi-simpliciale, c'est quoi ? Ce sont les ensembles finis, totalement ordonnés, avec les applications non décroissantes. Cette catégorie, elle est très importante pour la raison suivante : en topologie, dans les années 40-50, s'est développée une notion, au départ, elle était formulée de manière un peu trop simple, qui était la notion de complexe simplicial. On prenait un espace et on le triangulait. Quand on prend l'espace ordinaire, on peut le trianguler, ou bien en dimension plus grande, etc. Quand on le triangule, on peut donner une donnée combinatoire qui encode la triangulation. Cette donnée combinatoire, on peut la formuler en regardant ce qu'on appelle le complexe simplicial mais de manière entièrement combinatoire, en prenant des simplexes, etc. Alors, il se fait que si on fait les choses comme ça, ça ne marche pas très bien du tout pour le produit. C'est-à-dire que comme le produit de deux simplexes n'est pas un simplexe, par exemple, le produit de deux intervalles, c'est un carré, ça n'est pas un simplexe, mais ça ne marche donc pas bien du tout pour le produit. Mais c'est parce qu'on n'a pas pensé juste. Et c'est parce qu'on n'a pas fait une chose qui paraît triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale. Et cette chose qui est triviale quand on la fait, mais qui en fait est fondamentale, c'est qu'il faut beaucoup mieux comprendre la réalisation géométrique de cet objet combinatoire, et cette réalisation géométrique de l'objet combinatoire, en fait, c'est un point d'un topos. Il se fait qu'à cette catégorie est associé un topos, le topos bêbête, le topos des foncteurs contravariants qi va de cette catégorie vers la catégorie des ensembles, et que, c'est un théorème qu'on peut démontrer facilement, les points de ce topos, dans un sens sur lequel on ne va pas s'éterniser, les points de ce topos, ce sont exactement les intervalles. C'est-à-dire ce sont exactement les ensembles totalement ordonnés qui ont un plus petit élément et un plus grand élément. Donc les points de ce topos sont donnés exactement comme ça. Et quand on a un point du topos, eh bien, le foncteur d'image inverse, qui va vers les ensembles, eh bien, ce foncteur, c'est le foncteur de réalisation géométrique si on prend pour l'espace totalement ordonné avec un plus petit élément et un plus grand élément, si on prend l'intervalle $[0, 1]$, ça donne exactement la réalisation géométrique du simplexe, du complexe simplicial.

Alors maintenant, merveille des merveilles : ce foncteur préserve les limites finies et donc, il préserve les produits. Et donc, quand on prend le produit bêbête de deux ensembles simpliciaux, c'est-à-dire de deux foncteurs contravariants de cette petite catégorie vers les ensembles, eh bien, quand on prend la réalisation géométrique, ça va donner le produit des réalisations géométriques. C'est un exercice immédiat de vérifier que c'est compatible avec la topologie. Ça ne présente pas de difficulté, la difficulté, elle est purement ensembliste. Et, Pierre, c'est toi qui as démontré ce théorème pour la première fois, non ? (Pierre Cartier répond "Milnor"). Oui, Milnor ou toi. Mais, ce qu'il faut bien voir, c'est que la notion de topos comprend cette chose-là. Elle comprend cette chose-là et elle la généralise à un point absolument incroyable, c'est-à-dire qu'un point d'un topos maintenant, va justement préserver non seulement les colimites arbitraires, mais va préserver les limites finies, donc va préserver les produits, etc.

Et c'est pourquoi quand on prend un point d'un topos, ça nous emmène vers la théorie des ensembles mais en respectant tout ce qu'on sait. C'est à dire que ça va transformer un groupe abélien dans le topos en un vrai groupe abélien ; ça va transformer toutes les notions élémentaires qu'on peut avoir en une vraie notion en théorie des ensembles. Alors, il y a un pas sur lequel je ne vais pas m'attarder du tout, mais qui est extrêmement important et dans lequel justement, il y a des travaux très très intéressants qui se font maintenant, qui est celui des topos classifiant. C'est-à-dire qu'exactement comme il y a un espace classifiant pour les fibrés, ou vectoriel, etc., il y a un topos classifiant pour des notions logiques. Et une des merveilles de ça, qui répond un peu à la question de Grothendieck quand il dit *"la sempiternelle catégorie Δ^{op}"*, c'est que le topos qui est associé, pas cette catégorie, mais le topos qui est associé à cette catégorie, c'est exactement le topos qui classifie les intervalles. C'est-à-dire que si on définit abstraitement ce que j'ai expliqué tout à l'heure, c'est-à-dire un intervalle, un ensemble totalement ordonné, mais il ne faut pas parler d'ensemble, dans une théorie arbitraire, eh bien, on s'aperçoit que cette notion a un topos classifiant et que ce topos classifiant, c'est exactement le dual de la catégorie Δ^{op}. Bon.

Alors on ne va pas rentrer dans les détails. Maintenant on va faire autre chose : je ne veux pas rentrer dans les détails techniques, je ne veux pas. On va revenir à Grothendieck, on va relire du Grothendieck et puis on terminera en lisant la fin de l'échange entre Grothendieck et Serre dans leur correspondance. Donc voilà ce que dit Grothendieck. Bon, c'est très important d'avoir parlé des topos, mais c'est encore plus important d'essayer d'avoir perçu la manière de travailler de Grothendieck, parce que c'est de ça dont nous avons besoin. Bon, bien sûr, on va peut-être utiliser les topos pour faire toutes sortes de choses, mais on a aussi besoin, terriblement, dans notre civilisation : quand on assiste maintenant à un laïus qui est fait en public, on s'aperçoit qu'il y a un tiers des gens qui ont leur ordinateur ouvert devant eux et qui font leurs emails, *(rires)*, ou qui font autre chose, ou téléphone portable. Mais c'est une catastrophe, parce que quand on lit Grothendieck et quand on s'imprègne de sa manière de penser, on s'aperçoit d'une chose, la chose qui frappe le plus, c'est le temps dont il disposait. On a l'impression qu'il disposait d'un temps infini, d'un temps infini, qu'il n'était pas constamment dérangé. Vous savez, maintenant, on parle de la génération Y, c'est-à-dire ce sont les gens qui font 3 choses à la fois. On croit qu'on gagne du temps, mais ça n'est pas vrai. On a un besoin maintenant fondamental, dans notre civilisation, de s'isoler, et de pouvoir penser lentement, et de prendre le temps de tout vérifier, pour être sûr des choses, pour le faire deux fois, pour le faire trois fois, etc. C'est pour ça que j'ai fait durer, quand Grothendieck parlait des faisceaux, ça durait, hein, *(rigolard)*, ça durait, mais c'est exprès que je l'ai fait, je l'ai fait à dessein, parce que je voulais que vous vous rendiez compte de cette lenteur fondamentale. C'est une lenteur qui, quand on la ressent au premier degré, est irritante. C'est la lenteur de la tortue et du lièvre *(rires)* Et c'est elle qui gagne. Donc voilà ce que dit Grothendieck :

"Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. J'y crois plus ou moins, à mon affirmation, ça dépend bien sûr du point où j'en suis dans la compréhension des choses que je suis en train de regarder. Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il la faire pour pouvoir s'en convaincre. Souvent, il suffisait de l'écrire.".

Une chose fondamentale que fait souvent Grothendieck, c'est qu'il est capable d'écrire une idée qui n'est pas encore mûre. Il est capable de se mettre à écrire, ça, c'est fantastique comme qualité.

"Souvent, il suffisait de l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la

charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque". Plus souvent encore, l'affirmation prise au pied de la lettre s'avère fausse, mais l'intuition qui, maladroitement encore, a essayé de s'exprimer à travers elle est juste, tout en restant floue."

Je m'arrête une seconde : quand il parle d'écrire, c'est encore une catastrophe l'ordinateur, parce qu'on écrit mieux, dans ce genre de situation lorsqu'on écrit sur du papier avec un crayon, parce que quand on écrit sur l'ordinateur, il faut que ça ait l'air parfait. On va se poser des question de LaTex, on va se poser des questions comme ça, mais c'est complètement ridicule, on n'en est pas là, on en est à un point où on a envie de laisser le crayon qui fait ce qu'il veut sur la feuille de papier. C'est très très important ça. Donc voilà ce qu'il dit :

"Cette intuition peu à peu va se décanter d'une gangue toute aussi informe d'abord d'idées fausses ou inadéquates, elle va sortir peu à peu des limbes de l'incompris qui ne demande qu'à être compris, de l'inconnu qui ne demande qu'à se laisser connaître, pour prendre une forme qui n'est qu'à elle, affiner et aviver ses contours, au fur et à mesure que les questions que je pose à ces choses devant moi se font plus précises ou plus pertinentes, pour les cerner de plus en plus près. Mais il arrive aussi que par cette démarche, les coups de sonde répétés convergent vers une certaine image de la situation,..."

Ca, ça veut dire qu'on est en train de se faire une image mentale.

"...sortant des brumes avec des traits assez marqués pour entraîner un début de conviction que cette image-là exprime bien la réalité - alors qu'il n'en est rien pourtant, quand cette image est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. Le travail, parfois laborieux ; qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse. à partir des premiers "décollages" constatés entre l'image obtenue et certains faits patents, ou entre cette image et d'autres qui avaient également notre confiance".

Il faut dire là, que c'est très bien, dans ces cas-là qu'il décrit, de prendre un peu de recul, de faire autre chose, et Grothendieck avait souvent, Cartier me disait souvent qu'il avait 100 fers au feu. Quand on voit que les choses ont tendance à déconner un petit peu, il vaut mieux prendre du champ, parce qu'en fait, on est viscéralement attaché aux idées qu'on avait, et on ne veut pas accepter qu'elles soient fausses.

"Ce travail est souvent marqué par une tension croissante, au fur et à mesure qu'on approche du noeud de la contradiction, qui de vague d'abord se fait de plus en plus criante - jusqu'au moment où enfin elle éclate, avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense, comme une libération. La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte, qu'il s'agisse d'un travail mathématique, ou d'un travail de découverte de soi. C'est un moment où notre connaissance de la chose sondée soudain se renouvelle."

Et voilà maintenant un des paragraphes les plus magnifiques que je connaisse :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mûs, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée.".

Si un jour, vous n'avez pas le moral ou tout ça, relisez cette phrase. C'est une espèce de talisman. Alors je vais terminer en... J'avais commencé par la discussion entre Serre et Grothendieck, au tout début, sur l'article de Tohoku de Grothendieck, et je vais terminer avec une note assez différente, d'une tonalité très différente, qui est justement la réaction de Serre quand il a reçu *Récoltes et Semailles*. Donc, bon, je ne sais pas si vous connaissez Serre, mais je veux dire, il n'a pas l'habitude de mâcher ses mots, et il n'aime pas trop les états d'âme en général et donc, je veux dire, c'est extrêmement intéressant que dans la correspondance entre Serre et Grothendieck, ils aient continué leurs échanges, au moment où Grothendieck s'était isolé délibérément du monde mathématique. Je veux dire, ce n'est pas le monde mathématique qui l'avait chassé, c'est Grothendieck qui s'est chassé lui-même, qui s'est isolé du monde mathématique, il a écrit ce texte ; tous les passages que je vous ai lus de Grothendieck sont dans *Récoltes et Semailles*, donc c'est un texte admirable, et il faut le lire avec un certain recul, bien entendu, parce qu'il y a des moments où, il dit des choses qui ne sont pas idéales, mais en tout cas, il s'exprime. Alors voilà ce que dit Serre après l'avoir reçu :

"Cher Grothendieck,
J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées." (rires)

Bon évidemment, il y a tellement de pages. Moi, je dois vous dire, d'ailleurs, que c'est un texte qu'il faut lire... il ne faut pas lire plus de 5 pages à la fois. Je me souviens d'avoir passé un été extraordinaire en lisant en parallèle *Récoltes et Semailles* et *A la recherche du temps perdu* de Proust. Et je veux dire, de la même manière. C'est-à-dire que, bien sûr, les gens qui cherchent des anecdotes croustillantes, ils vont le lire en sautant les pages, si vous faites ça, vous perdez tout. C'est exactement pareil avec Proust. Proust, on ne peut pas le lire en lisant plus de 5 pages à la fois, il faut les méditer, il faut les repenser, etc. Il faut se laisser pénétrer par une atmosphère qui est absolument extraordinaire. Donc voilà ce que dit Serre, il dit :

"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"." (rires)

C'est quand-même une sacrée question. Et alors après, ce qui est formidable, c'est que Serre a une réponse, et ce n'est pas du tout une réponse évidente. Non, non, mais c'est une lettre de Serre mais il continue sa lettre et il a une proposition pour expliquer pourquoi Grothendieck est parti. Alors voilà ce qu'il dit, il dit :

"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue, Tu étais tout simplement fatigué de l'énorme travail que tu avais entrepris."

Bon ça, tout le monde le comprendra. Je veux dire quand je parlais du temps, ça veut dire qu'il avait peu de temps pour faire autre chose. Donc je veux dire, c'est immense. Au début, je vous ai lu des passages dans lesquels il parlait de tout ce qu'il devait absorber, etc., bon je veux dire, c'est monstrueux comme quantité de travail.

"D'autant plus qu'il y avait aussi les SGA qui prenaient du retard, année après année. Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5 où les rédacteurs se perdaient dans des masses de diagrammes, dont ils étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes." (rires)

"et ces commutativités étaient essentielles pour la suite. C'est à cet état désastreux et non pas idyllique, tel qu'on le croirait à lire Récoltes et Semailles que se réfère ma phrase du séminaire Bourbaki, la version définitive du SGA5 qui devrait être plus convaincante que les exposés et polycopiés existant."

C'est du Serre craché.

"On aimerait avoir tes impressions sur tout ceci, même modifié par 15 ans d'enterrement pour employer tes termes, on reste sur sa faim."

Alors maintenant, il va aller à une explication beaucoup plus profonde :

"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

C'est ce dont je parlais tout à l'heure quand je parlais de penser juste. Et par exemple, il y a une anecdote, Cartier ne me contredira pas, qui est qu'une fois, en remontant de la cafétéria à l'IHES, il y a je crois que c'est Demazure qui pose une question à Grothendieck sur $SL(\mathbb{Z})$ ou sur... voilà. Et alors Grothendieck dit que ça n'est pas la bonne manière de formuler cette question et le résultat, ça a été SGA3, c'est-à-dire la théorie des groupes algébriques de Grothendieck *(rires)*. Voilà, donc, ce que fait

Grothendieck, c'est... il peut avoir une question précise, on peut lui formuler une question précise, mais il va dire "cette question n'est pas dans le bon cadre". Et il va développer une théorie générale de telle sorte que la question devienne naturelle. Et à partir du moment où la question est naturelle, et où on a pris la peine et le temps de penser juste, elle va tomber comme un fruit mûr. Donc c'est ce que dit Serre quand il dit :

"...mais où on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théorie générale."

Donc la question se dissout. Et dans *Récoltes et Semailles* d'ailleurs, Grothendieck a de très belles images, il parle d'une noix, et il dit qu'il y a deux manières de s'occuper de la noix : la première manière, c'est de prendre un marteau et de la casser, et la deuxième manière, c'est justement de la laisser s'assouplir dans de l'eau, etc., de telle sorte que finalement, elle s'ouvre d'elle-même.

"Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement, du moins pour les EVT[5] *et la géométrie algébrique."*

Alors voilà ce que dit Serre, et ça, c'est du sérieux. Il dit :

"C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres, où les structures en jeu sont loin d'être évidentes, ou plutôt, toutes les structures possibles sont en jeu."

Et je préfère terminer là-dessus. C'est-à-dire, c'est extrêmement frappant de voir ces deux manières de penser les mathématiques. La manière de Grothendieck, d'accord, qui est une manière qui consiste justement à essayer de penser juste, et à essayer de formuler, si un problème est donné, de le formuler de telle sorte qu'il tombe tout seul, d'explorer tous les coins, les moindres recoins. Dans sa demeure, la demeure dont il parle, il n'y a aucun coin qui est sale, qui n'est pas exploré, etc. Il veut que tout soit impecc. Et il ne peut penser que quand c'est comme ça. Et le prix à payer, c'est un travail colossal. Mais c'est un travail qui n'est pas vraiment difficile, au sens où, on développe les choses, etc., etc. A aucun moment donné, on n'est sur une falaise raide, et on risque de tomber, à aucun de ces moments-là. C'est un peu comme si vous connaissez IsraÃ«l, comme la manière dont les romains ont voulu attaquer Massada, je ne sais pas si vous connaissez. Bon, c'est quelque-chose de très frappant parce qu'ils ont remblayé de la terre, de la terre, de la terre, pour que ça arrive finalement au niveau... et ça leur a pris, je ne sais pas, je crois que c'est une dizaine d'années ou quelque-chose comme ça. *(le public donne son avis, 3 ou 4 ans).*

La méthode de Grothendieck, c'est ça. Et ce que l'on voit avec le recul, c'est tout ce qu'on peut en apprendre, de cette méthode. Tout ce que nous pouvons en apprendre... Par opposition à une autre méthode, que moi, j'aime beaucoup, qui consiste à, dans les couloirs de l'Ecole Normale, dans le temps, quand j'étais à l'Ecole, il y avait un copain qui m'avait posé un problème : il était au troisième étage et moi, j'étais au rez-de-chaussée, et puis j'étais parti en week-end, et puis j'avais passé tout mon week-end à essayer de résoudre... bon. C'est le problem solver, on vous donne un problème, et vous cherchez à le résoudre, eh bien, vous cherchez à le résoudre de la manière la plus efficace possible. Ce sont deux manières complètement orthogonales d'agir et en fait, Grothendieck a toute une discussion dans *Récoltes et Semailles* sur ces deux manières d'agir et il les distingue, bon, il les formule avec le yin et le yang. Bon, mais c'est très très important : il dit que la méthode qu'il a, elle est plus féminine, que l'autre, qui est une méthode masculine. Ca, c'est difficile de le dire exactement. Mais c'est très important, quand on fait des maths, de s'imprégner de cette idée, effectivement, qu'il y a ce besoin, et que souvent, on ne le croit pas. Par exemple, récemment, j'avais un collègue qui m'avait posé un problème à l'Académie que j'ai fini par résoudre, mais j'étais sidéré de voir que je l'ai résolu quand j'ai commencé à penser juste. Ça m'a sidéré ! Parce qu'on me dirait "mais tu veux résoudre un problème, mais pourquoi est-ce que tu te préoccupes de ça ?". Non, ça n'est pas vrai, c'est quelque-chose de fondamental, arriver à penser juste, c'est quelque-chose d'absolument fondamental. Jamais, ça ne sera inutile d'essayer de penser juste. Jamais ça ne sera inutile, d'accord.

Donc j'espère que je vous aurai donné envie de lire *Récoltes et Semailles* et puis surtout, de manipuler des topos les plus simples, et d'essayer de vous en servir, par rapport à notre logique, qui est bien pauvre, même dans des circonstances tout à fait extérieures aux mathématiques. Evidemment, ça demande du travail, ça demande un travail qui est très lent, etc. qui est celui de s'approprier la notion. Et c'est une notion qui est maudite, elle est maudite : avec Pierre, et puis surtout avec Laurent Lafforgue, par exemple, on a essayé pendant plusieurs années, de soutenir une mathématicienne très très brillante, qui est Olivia

5. Espaces vectoriels topologiques

Caramello, et on s'est heurté à l'hostilité, pour ne pas dire le mépris, du monde mathématique en général. Et on a pu expérimenter à cette occasion à quel point il y a une espèce de, je ne sais pas, de fatalité, sur la notion de topos, il y a quelque-chose qui irrite les gens, parce que sans doute, ils ressentent, c'est ce que dit Grothendieck, il le dit tellement bien, il le dit explicitement, il l'avait déjà ressenti à son époque, sans doute, ils ressentent qu'il y a quelque-chose, mais ils ne le comprennent pas vraiment. Et pour le comprendre vraiment, il faut en faire, bien sûr, mais il y aura un moment où la notion va vous appartenir et vous allez arriver à vous l'approprier. Et la meilleure manière, c'est cette métaphore, c'est le fait que l'espace n'est pas au-devant de la scène, il est derrière, c'est une espèce de Deus ex machina, et c'est lui qui fait tourner les ensembles, c'est lui qui introduit un aléa, un aléa dans les ensembles, dans la théorie des ensembles. De même qu'il y a un aléa dans les nombres premiers, que nous connaissons tous, et de même qu'il y a un aléa du quantique, donc voilà, il faut garder tout cela en tête, et je vais m'arrêter là.

Conférence d'Alain Connes "Espace et symétries : de Galois au monde quantique", séance publique de l'Académie des Sciences, Conférence dans le cadre des défis scientifiques du xix^e siècle - Le 21 mars 2006.[1]

Edouard Brézin : Mesdames, messieurs, chers consoeurs, chers confrères, la série des conférences Défis scientifiques du 21e siècle nous permet cet après-midi d'accueillir Alain Connes. Sa conférence avait été programmée l'an passé mais un jour où l'électricité manquait et donc, nous avons attendu quelques mois avant de l'entendre sur le sujet qu'il a choisi (avec de l'électricité) qui s'appelle espace et symétrie de Galois au monde quantique. Chers confrères, vous avez peut-être remarqué parmi nous de jeunes visages, je les vois à droite, là-bas.

C'est une classe de première du lycée français de San Francisco qui a souhaité profiter d'un voyage à Paris pour rencontrer des scientifiques. Donc, c'est pour eux que je préciserai que Alain Connes est un mathématicien algébriste et géomètre, qu'il est le fondateur, en particulier, de la géométrie non-commutative, que ses travaux lui ont valu la plus haute distinction des mathématiques qui s'appelle la médaille Fields en 1982 et que vous permettrez au physicien que je suis de dire combien je me réjouis que son inspiration soit souvent venue de la physique. Cette conférence est retransmise sur le site internet de l'Académie grâce à une collaboration avec le Centre de communication scientifique directe de l'IN2P3 à Lyon et à ce propos je voudrais vous lire un courrier électronique qui a été adressé à Madame Meier, la responsable de notre Direction d'information scientifique et de la communication, qu'elle a reçu ce message il y a quelques jours, et je trouve qu'il justifie les efforts que nous faisons et que fait le CCSD pour retransmettre les conférences.

L'interlocuteur de Madame Meier lui écrit je tiens à vous dire merci pour la vidéo-conférence du professeur Denis Duboule que je viens de suivre, votre académie est formidable pour permettre cette transmission ad libitum en particulier aux médecins retraité que je suis dans un petit village Vosgien, Romont 88700. Je suis âgé de 70 ans, vous me donnez de magnifiques moments d'enseignement rompant ma solitude. Voilà qui justifie nos efforts. Alain Connes, la parole est à toi.

Alain Connes : Ok, donc, c'est assez difficile en mathématiques, si vous voulez, c'est pratiquement impossible heureusement, de prédire ce qui va se passer parce que, si vous voulez, les mathématiques justement évoluent vraiment par surprise, c'est à dire qu'essayer de justement, même de formuler des problèmes etc., ce serait une erreur. Par contre, ce que je vais essayer de faire, c'est de montrer en particulier pour les jeunes du lycée de San Francisco à quel point c'est un domaine ouvert, et pour cela, j'ai choisi si vous voulez deux espaces, qui sont assez faciles à expliquer de manière naïve, qui sont beaucoup plus difficiles à comprendre de manière sophistiquée. Et malgré tous les progrès qu'on a fait au XXe siècle, on peut dire, si vous voulez, que ces espaces on ne les comprend toujours pas. Donc les espaces en question, c'est l'espace-temps qui est vraiment à l'origine si vous voulez de l'idée même de géométrie, d'un côté donc, et bien sûr relié à la physique, mais faire une séparation, si vous voulez arbitraire, entre les mathématiques et la physique serait une erreur. Et l'autre, ça peut vous surprendre si vous voulez, c'est l'ensemble des nombres premiers. Je commencerai par l'ensemble des nombres premiers parce que j'essaierai de vous convaincre, à quel point

[1]Cette vidéo n'étant plus visionnable sur le site de l'Académie des Sciences à cette page https://www.academie-sciences.fr/archivage$_site/video/vdefi$210306$.htm$, on la retrouve là https://webcast.in2p3.fr/player/4ee6119165828, et je l'ai stockée là : http://denise.vella.chemla.free.fr/alain-connes-et-galois.mp4.

justement, c'est la géométrie de cet espace qui reste encore mystérieuse. Donc heureusement en mathématiques, on a des tests très très simples pour savoir si on comprend ou pas. Et si on regarde l'ensemble des nombres premiers, donc bon, vous pouvez dire "je comprends" (j'espère que vous savez ce que c'est qu'un nombre premier, c'est un nombre qui n'est pas divisé par d'autres nombres que 1 et lui-même). Donc voilà la liste des premiers nombres premiers, là, qui sont là, et alors la quantité qui intéresse les mathématiciens, c'est une quantité qui va varier avec n, qui va croître avec n, on sait qu'elle tend vers l'infini depuis Euclide c'est le nombre de nombres premiers qui sont plus petits ou égaux à un entier n. Alors vous entendrez des gens vous dire "oui, alors ce qui va pas avec cette quantité, mon prof. me l'avait dit lorsque j'étais en seconde, il m'avait dit il n'y a pas de formule qui donne cette fonction en fonction de n. Alors ça c'est complètement faux, il y a une formule, elle est due à un mathématicien français qui s'appelle Laurent, ça date d'environ 1850, et vous pouvez l'utiliser sur l'ordinateur, et l'ordinateur il va utilise,r c'est une formule qui est valable pour n plus grand que 5. On suppose qu'on sait calculer jusqu'à 5 la fonction π de n d'accord ? Bon. Alors vous pouvez l'utiliser etc., par contre, c'est pas une formule qui va vous donner des informations sur le comportement à l'infini, si vous voulez, de cette fonction $\pi(n)$.

Alors ce comportement à l'infini de la fonction $\pi(n)$, la manière dont elle se comporte, il avait été deviné par Gauss qui l'avait rappelée à un astronome, Encke, lorsqu'on la lui avait demandée. Donc il l'avait devinée vers le début du XIXe siècle qu'en fait si vous voulez, cette fonction $\pi(x)$, d'accord, eh bien, elle était, en fait, très très bien approximée par ce qu'on appelle le logarithme intégral, donc le logarithme intégral, c'est intégral de 0 à x de du sur log de u

$$\mathrm{Li(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{log(u)}}.$$

Oh ! Si vous êtes mathématicien, vous pouvez avoir quelques frayeurs lorsque u vaut 1 dans l'intégrale, mais ça s'arrange bien. Et le terme que vous avez à droite, vous voyez, ce n'est absolument pas une série convergente puisque vous avez une factorielle qui est devant, mais c'est le prototype de ce qu'on appelle des séries asymptotiques, c'est à dire, ce sont des séries qui donnent des résultats numériquement extrêmement valables lorsqu'on s'arrête aux plus petits termes de la série typiquement.[2]
D'accord. Alors en fait, donc, je disais, on a des tests en mathématiques pour savoir si on comprend ou pas, et ces tests s'appellent des conjectures. Donc si vous voulez, il y a des problèmes centraux en mathématiques, il y a des problèmes qui sont là simplement pour être des espèces de bornes kilométriques, qui vous indiquent si vous comprenez ou pas. Ou vous en êtes dans votre compréhension. Et un des problèmes les plus centraux des mathématiques, ça ne va pas vous paraître central quand je l'énonce comme ça mais on va voir pourquoi il est central, c'est ce qu'on appelle la conjecture de Riemann. Et c'est une conjecture qui vous dit, si vous voulez, que lorsque vous écrivez cette formule, c'est à dire, on va voir au niveau du graphe, ce que ça donne, donc vous pouvez faire un graphe qui vous donne ce que vaut la fonction $\pi(x)$ avec l'ordinateur et ce que vaut la fonction logarithme intégral. Vous pouvez tracer ces deux graphes, et lorsque vous tracez ces deux graphes, la fonction $\pi(x)$ c'est une fonction en escalier parce que elle va croître de 1 chaque fois que vous passez à travers un nombre premier, d'accord, donc c'est cette fonction en escalier comme ça. Et la fonction logarithme intégral, c'est la fonction qui est parfaitement

[2] l'approximation écrite au tableau est : $\mathrm{Li}(x) \sim \sum (k-1)! \frac{x}{\log(x)^k}$.

régulière, c'est le graphe qui est parfaitement régulier qui est au-dessus, d'accord. Alors on peut s'amuser, bien sûr, à regarder la différence entre les deux, et c'est sur la différence entre les deux que porte cette fameuse conjecture de Riemann, qui vous dit qu'en fait la différence entre les deux elle est de l'ordre de la racine carrée de x, d'accord, donc on prend la racine carrée de x et on la multiplie par logarithme de x mais enfin en gros, ça vous dit que si vous voulez, c'est un ordre qui vient en fait du théorème de limite centrale de Gauss, justement, c'est à dire qui est entièrement probabiliste. Et d'ailleurs, je veux dire, au début, les gens avaient pensé que cette fonction serait toujours négative mais en fait on sait depuis Littlewood qu'elle change de signe une infinité de fois. Donc vous voyez, les apparences sont trompeuses, on pourrait croire que cette fonction va continuer à décroître indéfiniment. Mais par contre le nombre à partir duquel, et les nombres sur lesquels elle va croiser la droite réelle etc., on ne les connaît toujours pas donc on sait qu'elle va changer de signe une infinité de fois, mais on est dans ce genre de situation.

Donc alors, ce problème, donc si vous voulez, de l'estimation de la fonction $\pi(x)$, en fait, c'est un problème extrêmement intéressant parce qu'au lieu d'être un problème qui est formulé seulement sur la taille du reste, en fait, c'est un problème qui est une conjecture si vous voulez. En fait ce qu'on appelle hypothèse de Riemann, parce que Riemann faisait une hypothèse, et c'était une hypothèse sur les zéros d'une certaine fonction. Cette fonction, elle remonte à Euler, et c'est une fonction qui vous dit **en un mot** ce que c'est qu'un nombre premier. Voyez la formule qui est ici, qui écrit une somme infinie avec l'exposant $-s$, des nombres entiers, comme un produit donc on écrit une somme comme un produit, eh bien cette formule, elle ne marche exactement que pour l'ensemble des nombres premiers. C'est à dire que cette formule elle équivaut à dire que tout nombre entier se décompose de manière unique en produit de puissance de nombres premiers, elle est exactement équivalente à ça. Alors il se fait, ça si vous voulez, ça a été démontré par plusieurs mathématiciens, mais Riemann en particulier, que cette fonction elle a un prolongement, ce qu'on appelle un prolongement analytique, c'est à dire que c'est pas seulement une fonction qui, a priori elle serait définie seulement pour s un nombre réel plus grand que 1 parce qu'à ce moment-là, la série converge ; en fait, elle est définie lorsque s est un nombre complexe, et pas seulement un nombre complexe de parties réelle plus grande que 1, il suffit que ce nombre complexe soit différent de 1. Et donc, elle définit en fait une fonction dans le plan complexe, et l'hypothèse de Riemann dit la chose suivante donc : il dit que les seuls zéros de cette fonction sont situés sur ce qu'on appelle la droite critique c'est à dire, voyez, dans le plan complexe, il y a le point 0, il y a le point 1, et puis à la droite verticale qui passe par le point $\frac{1}{2}$. Eh bien, alors, on peut calculer, les gens ont calculé des milliards de zéros, et pour le moment tous les zéros qu'ils ont calculés ont la propriété si vous voulez que leur partie réelle vaut $\frac{1}{2}$. Ce sont les zéros non triviaux bien sûr, d'accord, alors pourquoi est-ce que ça s'est relié au comportement des nombres premiers. Eh bien parce que Riemann a démontré dans son article en fait il a démontré une formule, qui est l'ancêtre de ce qu'on appelle les formules explicites. Donc la formule explicite de Riemann, c'est une formule qui va calculer cette fonction $\pi(x)$. C'est assez extraordinaire, si vous voulez, qu'il y ait une formule qui calcule cette fonction $\pi(x)$. Alors en fait, on peut simplifier un peu, Riemann introduit une fonction qui est un tout petit peu plus simple, mais à partir de laquelle vous pouvez facilement calculer la fonction $\pi(x)$ par la formule d'inversion de Möbius. Donc il y a une autre fonction qu'on appelle $\pi'(x)$ qui est un tout petit peu plus simple parce qu'on la régularise en rajoutant à $\pi(x)$ un demi de π de la racine de x plus un tiers de π de la racine cubique de... et ainsi de suite ; ça va s'arrêter au bout d'un moment, d'accord, parce que ça sera zéro au bout d'un moment. Donc en fait, ce que démontre Riemann, c'est qu'il y a un lien direct entre la fonction $\pi(x)$ ou plutôt cette petite variante de la fonction $\pi(x)$ et le logarithme intégral. Donc ce qu'il dit, si vous voulez, c'est que Gauss avait raison, le terme principal, c'est le logarithme intégral de x, mais à ce logarithme intégral de x, il faut rajouter une somme et c'est la somme sur les zéros qu'on a vus tout à l'heure. Alors vous voyez bien que selon ou non que les zéros vont être de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, on va avoir exactement la taille, le comportement à l'infini, du reste qui est ici. C'est à dire que ce qui serait embêtant, ce serait d'avoir dans l'image précédente, et ça, on ne sait toujours pas si c'est vrai ou pas, ce qui serait très embêtant si vous voulez c'est d'avoir non pas un point on sait qu'il y a une certaine symétrie qui se produit, et il pourrait que très très très très très très haut, si vous voulez, dans cette bande là au lieu d'avoir un zéro sur la droite partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, en fait on aurait un couple de zéros qui serait symétriques par rapport à cette droite. Si on avait un tel couple de zéros, eh bien à ce moment-là, on n'aurait pas du tout le comportement asymptotique avec le reste qui était en racine de x. Alors donc tout ça, c'est contenu dans un papier extrêmement court de Riemann, qui fait environ quatre-cinq pages, et dans lequel il commence si vous voulez par donner deux démonstrations différentes de ce qu'on appelle l'équation fonctionnelle de la fonction ζ.

Donc c'est un papier visionnaire, vraiment, et on peut dire si vous voulez qu'une grande partie, pas tous bien sûr mais qu'une grande partie des mathématiques du XXe siècle a été sans le dire orientée par cette conjecture de Riemann. Alors, il y a eu bien sûr des résultats, c'est à dire qu'en général, si vous voulez, donc, on peut bien sûr amoindrir considérablement l'énoncé, et on obtient à ce moment-là ce qu'on appelle le théorème des nombres premiers, qui a été démontré par Hadamard et de la Vallée-Poussin, donc au début du XXe siècle. Alors que dit ce théorème ? Eh bien, il dit qu'en fait, vous vous rappelez qu'il y avait cette formule asymptotique pour la fonction logarithme intégrale et que la formule asymptotique, elle commençait précisément par x sur log de x. Alors en fait, ça, c'est êmement intéressant parce que qu'est ce que ça vous dit ? Ça vous dit que si vous comptez le nombre de nombres premiers qui sont plus petits qu'un entier donné, vous prenez cet entier et vous le divisez par en gros son nombre de chiffres, vous voyez, le logarithme d'un nombre, c'est le nombre de chiffres de ce nombre, il faut le multiplier par deux virgule quelque chose etc.[3]. Mais donc, ça vous donne un énoncé extrêmement précis sur le comportement moyen de la fonction $\pi(x)$, ça vous dit que la probabilité que vous avez, si vous cherchez un nombre - je ne sais pas moi - de 15 chiffres par exemple, savoir si oui non il est premier, eh bien, c'est exactement l'inverse du nombre de chiffres, d'accord, avec un facteur correctif, comme je l'ai dit, puisqu'il faut prendre le logarithme à base e ce qu'on appelle logarithme népérien, et non pas le logarithme à base 10, qui serait le nombre de chiffres. Alors en fait, donc, ce théorème est dû à Hadamard et de la Vallée-Poussin, et si vous savez faire un petit exercice de faire une soustraction, vous verrez qu'au début des années 60, les gens pensaient que le fait qu'ils avaient démontré le théorème des nombres premiers les avait rendu immortels. Vous verrez que Hadamard a vécu 98 ans et de la Vallée-Poussin 96. Alors en fait, si vous voulez, la manière dont ils démontraient ce théorème, qui est le théorème des nombres premiers, il le démontrait grâce à la fonction ζ pour Hadamard, grâce à la fonction ζ de Riemann. Et on peut dire la démonstration, en fait, en un mot, c'est une démonstration d'une simplicité vraiment étonnante. En fait donc ce que démontre Hadamard, il démontre que la fonction ζ n'a pas de zéro, alors ce qu'on voudrait, c'est qu'elle n'ait pas de zéro en dehors de la droite critique que je vous ai montrée tout à l'heure, mais ce que démontre Hadamard, c'est que cette fonction, vous voyez, n'a pas de zéro sur la droite qui est ici, la droite

[3] La constante e

de partie réelle égale à 1, par symétrie, elle n'a pas non plus zéro sur la droite ou par la partie réelle est nulle, c'est à dire où le nombre est imaginaire pur. Et comment est-ce que Hadamard fait cette démonstration, comment est-ce qu'il fait cette démonstration, eh bien l'essentiel de la démonstration est contenu dans l'observation suivante : il démontre que si la fonction avait un zéro en un point de la forme $1 + is$, à ce moment-là, elle aurait un pôle, c'est-à-dire elle serait infinie, au point $1 + 2is$, d'accord. Et la démonstration, elle tient en une ligne, c'est ce que je disais tout à l'heure, c'est à dire en fait on voit assez facilement que si la fonction avait un zéro, en prenant son logarithme, tous les nombres premiers élevés à la puissance $-is$ se concentrerait sur le point -1, de manière probabiliste, et ça, ça implique immédiatement que lorsqu'on prend leur carré, ils se concentreraient sur le point 1, et ça ça implique immédiatement que la fonction ζ serait infinie, au point correspondant, donc c'est comme ça que Hadamard démontre le théorème des nombres premiers, et si vous voulez, en fait, bon, on sait que les termes successifs dans le développement asymptotique sont les bons, mais bien sûr, c'est extrêmement loin, de savoir, où sont situés les zéros.

Alors en fait devant un problème qui est très difficile il y a une technique, une stratégie, qui est complètement générale, qui ne s'applique pas à un problème particulier, mais qui s'applique en général. Donc lorsque les mathématiciens font face à un problème qui est très difficile, il y a une stratégie générale, qui est en plusieurs étapes : le premier pas de la stratégie consiste à généraliser le problème, d'accord. Donc on vous donne par exemple un problème de..., formulé en termes de chiffres, tout à fait concret : le fait que le problème soit formulé de manière concrète en général n'est pas un avantage du tout parce que le premier pas, c'est d'arriver à en comprendre, si vous voulez, la position conceptuelle. Donc pour ça, le premier pas consiste à le généraliser. Et une fois que le problème a été généralisé de manière suffisamment souple si vous voulez, le pas suivant, ça consiste à arriver à le spécialiser dans un cas qui est suffisamment simple pour qu'on puisse le résoudre. Donc on introduit, si vous voulez, une espèce de variabilité dans le problème. On a un problème qui est tout à fait spécifique, on commence par le généraliser, et ensuite on le spécialise à un cas qui est plus simple, mais qui est plus facile à comprendre et si possible on résout donc un cas simple de la généralisation. Et la troisième étape qui est absolument en général la plus difficile si vous voulez elle consiste à essayer de comprendre les idées qui gouvernent le cas plus simple, et à essayer de les transplanter, sans les faire périr, bien entendu, je veux dire. Cette idée de transplantation a été le mieux illustré je crois par Oka au niveau de la terminologie etc. Donc on prend une idée, et on essaie, si vous voulez, de la transplanter sans la détruire du cas le plus simple au cas le plus compliqué. Alors dans le cas de la fonction ζ, vous m'excuserez si je rentre dans des choses un peu techniques, mais je pense qu'il faut essayer de regarder avec une certaine distance, et on va voir donc si vous voulez, dans cet exemple, ce qu'ont fait les mathématiciens pendant le XXe siècle ; ensuite, on passera à l'espace-temps. Donc cette manière, si vous voulez, qu'on avait, de généraliser le problème dans le cas de la fonction ζ, donc, les mathématiciens se sont aperçus que le problème, donc formulé par Riemann si vous voulez, c'était un problème qui pouvait se formuler de manière très très simple, en termes de ce qu'on appelle le corps des nombres rationnels. Donc je suppose que vous avez tous appris les fractions, vous avez appris que qu'on pouvait les ajouter, qu'on pouvait les multiplier, qu'on pouvait les inverser si elles n'étaient pas nulles : c'est ça qu'on appelle un corps, d'accord. Et il se fait si vous voulez que le corps des nombres rationnels, donc, il engendre ce problème de la fonction ζ, mais ce corps des nombres rationnels, les propriétés particulières qui font qu'il engendre le problème de la fonction ζ, on a réussi à les abstraire et c'est ce qu'on appelle un corps global.

Alors ça, c'est pour la première étape. Donc on a compris dans la première étape, si vous voulez, que le problème formulé par Riemann se généralise de manière très, très simple en partant non pas seulement du corps des rationnels, mais d'un corps global. Alors parmi les corps globaux, il y a des corps qui sont encore plus compliqués que les rationnels, par exemple lorsque vous regardez ce qu'on appelle les nombres algébriques, c'est à dire vous regardez par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ou $\mathbb{Q}(i)$, etc. Et puis il y a des corps qui sont quand même relativement plus simples que le corps des rationnels, et c'est ce qu'on appelle les corps de fonctions sur une courbe. Alors, je vais vous expliquer ce que c'est. Et en fait, donc, si vous voulez, dans le troisième pas, donc ça, ce sera le deuxième pas, c'est arriver à spécialiser à un cas plus simple et le troisième pas, c'est qu'on verra que les idées qui marchent dans le cas plus simple, ce sont des idées géométriques, d'accord. Ce sont des idées géométriques essentielles. Alors quelles sont, donc, quand je parle de corps de fonctions, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que vous prenez des fonctions donc comme $f(x)$ si vous voulez, mais des fonctions rationnelles et ces fonctions rationnelles au lieu d'avoir, si vous voulez, des coefficients qui sont des nombres ordinaires, elles ont des coefficients qui sont dans ce qu'on appelle un corps fini. Alors les premiers corps finis ont été découverts par Gauss et ils sont êmement simples à expliquer. Donc un corps fini, le plus simple que vous connaissez, c'est les entiers modulo 2, vous voyez, si vous regardez un entier modulo 2, vous pouvez les encore les additionner, vous pouvez encore les multiplier, et puis si un entier modulo 2 n'est pas nul, eh bien, c'est le nombre 1, donc il est inversible. Alors ça, c'est un corps. On a aussi le corps des entiers modulo p lorsque p est un nombre premier, mais en fait, il y a un seul article de Galois qui a été publié de son vivant, il a été publié dans le Bulletin de la société mathématique, donc de son vivant, il a publié un article et dans cet article, il a en fait classifié, si vous voulez, ce qu'on appelle les corps finis. C'est à dire qu'on connaît exactement la liste de tous les corps qui ont un nombre fini d'éléments alors ces corps qui en ont un nombre fini d'éléments, on pourrait croire naïvement que ce sont seulement les corps des entiers modulo un nombre premier p, ça n'est pas vrai, et par exemple typiquement, et vous avez des gens qui ne connaissent pas bien, si vous voulez, et lorsque vous allez leur dire vous regardez le corps F_4, ils vont croire que c'est les entiers modulo 4 et vous voyez, si vous prenez les entiers modulo 4, ce n'est pas un corps, pourquoi ? Parce que si vous prenez le nombre 2, il n'est pas nul et si vous prenez 2×2, ça fait 4 donc ça vaut 0. Et ce n'est pas un corps parce que dans un corps, ça, ça ne peut pas se produire : si vous prenez deux éléments non nuls, comme chacun d'entre eux est inversible, leur produit ne peut pas être nul, d'accord.

Donc, il y a un corps non trivial que Galois a trouvé bien sûr et qui est obtenu en rajoutant au corps à deux éléments, qui lui est on ne peut plus simple, la racine cubique de l'unité. Donc vous rajoutez un nombre j et ce nombre il vérifie $j^3 = 1$. En fait, il vérifie $1 + j + j^2$ est égal à 0. Donc vous écrivez les relations etc. et ce que démontre Galois, dans son article, il démontre deux choses ; d'abord il démontre, ça c'est remarquable, si vous voulez, que si vous prenez une équation polynomiale quelconque à coefficient dans un corps F_q, elle se résout dans un corps F_{q^n} ; c'est à dire que pour chaque puissance d'un nombre premier, il y a un seul corps à isomorphisme prés ; on ne sait pas encore les construire de manière canonique c'est ça qui est absolument incroyable, je veux dire, il y a encore un problème sur ces corps-là, c'est qu'on ne sait pas les donner de manière explicite, on sait les donner de manière artificielle. Mais il n'y en a qu'un seul qui a la bonne cardinalité. Et en plus, donc, ce que fait Galois, c'est... : ce que fait Galois, je ne vais pas l'expliquer, je vais expliquer en un mot plutôt ce que c'est que le groupe de Galois donc Galois, si vous voulez, avait compris une théorie qu'il appelle la théorie de l'ambiguïté on y reviendra.

Et dans cette théorie, qui est la théorie de Galois, ce qu'il fait, c'est : il comprend que les nombres en général sont ambigus, c'est-à-dire que lorsqu'on définit un nombre, par exemple comme $\sqrt{2}$, d'accord, eh bien on crée une ambiguïté entre les deux possibilités, entre plus ou moins racine de 2[4], et Galois a compris, si vous voulez, que c'était la réduction de l'ambiguïté qui intervenait dans la résolution des équations de manière très naïve, et il a défini un groupe, qu'on appelle le groupe de Galois bon j'ai fait une conférence à la BNF au mois de juin, donc on pourrait passer une heure là-dessus, sur les écrits de Galois. Mais ce qui compte, si vous voulez, c'est que donc, il y a un groupe d'ambiguïté, chaque fois qu'on rajoute des nombres, et Galois a calculé le groupe d'ambiguïté du corps obtenu, en résolvant une équation sur le corps F_{q^n} et il a démontrait, en fait, que c'est un groupe, bien sûr, mais que c'est un groupe cyclique ; un groupe cyclique, si vous voulez, ça revient à avoir un seul générateur, qu'on va élever à des puissances, et en fait, il a donné le générateur, et c'est ce qu'on appelle maintenant le Frobenius ; en mathématiques, on donne à certains objets mathématiques le nom de certains mathématiciens ok, et ça s'appelle le Frobenius. Donc c'est l'élévation à la puissance, si vous voulez ce qui est très frappant, c'est que l'élévation à la puissance lorsqu'on travaille avec des nombres modulo p, eh bien, l'élévation à la puissance est additive, c'est à dire que la raison c'est la suivante : c'est que si vous prenez, par exemple, l'élévation à la puissance 2, dans le corps à deux éléments, là vous allez vous dire mais c'est pas possible, puisque quand j'élève au carré, c'est pas quelque chose tel que si j'élève $x + y$ au carré, ça va me donner $x^2 + y^2$. Mais vous savez quand même que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ et 2 est égal à 0. Donc ça marche bien, d'accord, et c'est ça, si vous voulez, cet automorphisme de Frobenius. Alors donc, si vous voulez, les mathématiciens ont compris que c'étaient ces corps globaux qui étaient le cadre naturel pour penser à ce problème de Riemann et Weil, André Weil, en 1942, a résolu le cas plus simple de ce problème de Riemann. Donc ce qu'a fait Weil, si vous voulez, c'est que... Les gens savaient comment définir l'analogue de la fonction ζ de Riemann. Cet analogue, ça lui ressemble beaucoup, vous voyez, c'est un produit, et au lieu d'avoir ici les nombres premiers, comme on avait pour la fonction ζ de Riemann, petit k, ça signifie le corps global, qui est le corps de fonctions ; on a quelque chose d'autre (bon, je ne veux pas rentrer dans les détails techniques) mais la liste des nombres premiers est remplacée par ces nombres-là, et sinon la formule est la même, c'est-à-dire qu'on prend 1 moins le nombre premier à la puissance $-s$, et on prend l'inverse de ça, d'accord. Bon, alors, peu importe après, il y a des petits détails, d'accord, il y a des petits détails de définitions, on va revenir sur ce que ceci signifie géométriquement. Mais ce que ce qu'a compris André Weil, il a compris que la géométrie, que l'on connaît bien si vous voulez sur le corps des complexes pouvait se transposer en une géométrie, dans laquelle on pouvait plus beaucoup plus difficilement faire des dessins, mais qui n'était plus une géométrie sur le corps des complexes, mais une géométrie sur... Qu'est-ce que c'est que la barre qui est ici donc F_q, ce serait le corps fini à q éléments, qu'est ce que c'est que le $\overline{F}_q$, c'est ce qu'on appelle une clôture algébrique du corps F_q, c'est à dire ce qu'on fait si vous voulez c'est qu'on rajoute toutes les solutions d'équations possibles alors comme Galois l'avait montré, ça revient à prendre les corps F_{q^n}, on les ordonne, on obtient un corps qui est algébriquement clos, et ce corps qui est algébriquement clos, ce qui est remarquable dans le travail de Weil, si vous voulez, c'est qu'en fait, on peut transposer les idées géométriques à partir du corps des complexes, vers ce corps-là. Donc en fait, Weil si vous voulez, résout complètement le problème dans le cas de ce qu'on appelle un corps global de caractéristique

[4] $\pm\sqrt{2}$.

positive où la caractéristique est non nulle, il démontre qu'on a l'analogue exact de l'hypothèse de Riemann, qui fait que lorsqu'on écrit la fonction sous cette forme-là, bon il y a un polynôme qui apparaît, eh bien, ce que démontre Weil donc, c'est que ce polynôme, dont on sait qu'il a des zéros dans les nombres complexes, eh bien, les modules de ces zéros sont exactement là où ils doivent être, c'est à dire que le $q^{\frac{1}{2}}$ qui est ici, vous voyez, le $\frac{1}{2}$ qui est ici correspond, dans la bande verticale qu'on avait, à la partie réelle de s égale $\frac{1}{2}$. Alors au niveau géométrique, c'est très difficile de voir ce qui se passe, au niveau géométrique. Parce qu'au niveau géométrique, vous ne traitez presque toujours que de problèmes finis, donc en gros, si vous voulez les images que vous avez sont toujours des images finies, vous voyez donc l'image qui est ici c'est un nombre fini de points. Et en gros, si vous voulez, dans l'image mentale qu'il faut avoir, c'est que bien qu'on traite qu'un nombre fini de points, ici on a l'infinité des nombres de places, mais au-dessus de chaque place, on a un ensemble fini, qui est ce qu'on appelle l'orbite du Frobenius. Eh bien ce qu'il faut comprendre, c'est que des idées géométriques peuvent se transplanter à partir du cas complexe vers ce cas-là. Alors, vous voyez qu'on est déjà dans une situation plus compliquée que celle que j'avais donnée oùil y avait seulement ces trois étapes parce que, qu'a fait Weil, pour résoudre le cas plus simple, il a emprunté à une autre partie des mathématiques qui est la géométrie complexe, il a transplanté les idées de la géométrie complexe dans le cas des corps finis, et il a vu que ça marchait.

Donc maintenant, comment les choses ont-elles évolué au XXe siècle. De manière très bizarre, si vous voulez, on pourrait dire "bon eh bien maintenant, on a résolu le cas plus simple, revenons au problème initial et essayons de résoudre le problème initial". Et ce n'est pas ça qui s'est produit. Ce n'est pas ça qui s'est produit. Ce qui s'est produit, c'est que Weil a compris, si vous voulez, que tout le travail qu'il avait fait, comme c'était un travail qui portait sur des courbes sur un corps fini, et que la notion de courbe si vous voulez, c'est la notion de variété disons de dimension 1, c'est une notion particulière parce qu'il y a des variétés de dimensions arbitraires et bien Weil a formulé des conjectures. En fait, il a été aidé par la lecture de Gauss pour formuler ces conjectures. Il a formulé des conjectures, et ces conjectures, si vous voulez, elles consistaient non pas à revenir au problème initial, qui était le problème de Riemann, mais elles consistaient à passer du cas des courbes au cas des variétés. Alors ces conjectures ont occupé les mathématiciens pendant des années et des années et en fait ont été résolues donc par Deligne. Donc et le théorème est le suivant : je ne vais pas vous donner le détail de l'énoncé du théorème, peu importe, vous le voyez comme ça, il faut le voir de manière un peu surréaliste, ce qui compte, si vous voulez, c'est que ce qui marchait dans le cas des courbes continue à marcher dans le cas des variétés de dimension arbitraire. Donc c'est ça qu'il faut retenir, donc, si vous voulez, ce qui se produit, bon les notions sont plus difficiles à définir. Tout ça, on pourrait le définir de manière relativement simple en disant que ce que l'on fait, donc, c'est qu'on prend la courbe en question, et on compte le nombre de points de cette courbe lorsqu'on travaille avec le corps de base F_q etc. avec des extensions successives et on regarde comment ce nombre de points change avec n si vous voulez, l'exposant n.

Bon alors, ce qui est merveilleux, c'est que ce sont uniquement des notions géométriques, des notions de cohomologie, ce qu'on appelle la cohomologie étale, ℓ-adique, qui a été introduite par Grotendieck qui joue leur rôle et en fait, de manière assez remarquable si vous voulez, la démonstration de Deligne est complètement différente, elle est complètement orthogonale à la démonstration de Weil. La démonstration de Weil est encore une démonstration qui est assez proche de la géométrie ordinaire, et qui en gros, si vous voulez, ne fait jouer aucun rôle à la torsion alors que la démonstration de

Deligne est complètement différente.

Donc, alors, on en est donc au cran suivant si vous voulez, c'est-à-dire que je ne sais pas, je n'ai malheureusement pas fait un dessin de ça, j'aurais dû le faire, vous voyez, donc, il y avait ce cas formulé par Riemann. Ensuite il y a un cas particulier, qui a été résolu par Weil. Ce cas particulier l'a conduit à formuler des conjectures générales sur des variétés dimension quelconque, ok, donc vous voyez, on a déjà trois étapes, et quelle est la quatrième étape, eh bien la quatrième étape, c'est qu'en fait, cela a conduit à définir la fonction ζ, maintenant, pour des variétés sur le corps des rationnels, c'est-à-dire que si vous voulez, maintenant, et le cas de Riemann vient du cas où la variété, c'est un seul point, donc c'est vous dire à quel point ça a progressé depuis le problème de Riemann.

Donc on prend une variété sur $\mathbb{Q}$, si vous voulez, on prend un certain nombre d'équations qui sont définies à coefficients rationnels, ou à coefficients entiers, d'accord. Eh bien, lorsqu'on prend une variété sur $\mathbb{Q}$, il y a une merveilleuse définition, dont je ne veux pas non plus rentrer dans les détails, mais qui utilise le théorème de Lie et qui dit que, en général, si on prend une variété sur $\mathbb{Q}$, on peut la réduire modulo un nombre premier. Ce n'est pas toujours vrai. À ce moment-là, on dit qu'elle a une bonne réduction modulo p. Et lorsqu'elle a une bonne réduction modulo p, on obtient une variété sur le corps fini F_p, à p éléments. Et à ce moment-là, on a un polynôme qui lui est associé, de manière vraiment indirecte, hein, parce que ce polynôme, il est associé par le théorème de Deligne, à partir des conjectures de Weil.

Et qu'est-ce qu'on fait ? Eh bien, on prend ce polynôme en p^{-s}, on prend l'inverse de ces polynômes, on prend leur produit infini sur tous les p qui sont possibles, et on obtient une fonction ζ. Cette fonction ζ est encore incomplète. Elle est encore incomplète parce qu'on n'a pas rajouté les facteurs archimédiens, ni les facteurs à ce qu'on appelle les places qui sont ramifiées, d'accord.

Mais ça a été fait. Donc on sait définir une fonction ζ. Ce qui est remarquable dans cette définition, c'est qu'on s'aperçoit, si vous voulez, que cette définition doit être focalisée sur un entier m. C'est-à-dire que ce n'est pas vraiment la variété qui est intéressante, mais c'est sa partie qui est sa cohomologie de dimension m qui est intéressante.

Et on ne pourrait pas formuler de conjectures qui soient l'analogue de la conjecture de Riemann si on partait de l'ensemble de tous les m. C'est-à-dire que dans le cas précédent, dans le cas des corps finis, la fonction ζ d'André Weil, c'était un produit avec des exposants ± 1. C'est-à-dire que c'était comme une fraction rationnelle. Mais ce qui est évident, si vous voulez, si on regarde ce produit-là, c'est que dans le cas des variétés sur $\mathbb{Q}$, en général, les dénominateurs vont avoir une infinité de 0. Donc la fonction ne serait pas une fonction intéressante. En fait, on est obligé de se focaliser sur m donné.

Et en grande partie, il y a bien d'autres raisons à ça, si vous voulez. En fait, l'idée, une idée merveilleuse de Grothendieck, qui est l'idée des motifs, qui est en fait une généralisation de la théorie de Galois à la dimension plus grande, je n'ai pas le temps de rentrer dans les explications des causes, eh bien, c'est une théorie, si vous voulez, qui justement donne une existence pure à la partie d'une variété qui correspond à la cohomologie de dimension m, à partir d'opérations, si vous voulez, etc. Donc en fait, c'est ça qui s'est dégagé. Et alors, c'est assez effrayant, parce que si vous regardez le point de départ qu'on avait, donc le point de départ qu'on avait, c'était la conjecture de Riemann, quelque part.

Ensuite, on l'avait généralisé. Il y a un cas particulier de cette conjecture, donc généralisée, qui a été résolu par Weil. Ensuite, Weil l'a étendue à des variétés de dimensions plus grandes, sur les corps finis toujours.

Et enfin, donc, par, si vous voulez, par transposition, à partir du cas des corps finis jusqu'au cas du corps des rationnels, cette idée de fonction ζ a été étendue aux variétés algébriques. Donc maintenant, on se retrouve dans la situation suivante où au lieu d'avoir résolu le problème de départ, on se trouve devant un problème d'une portée, d'une ampleur considérable par rapport au problème que formulait Riemann. Mais on n'a pas encore de retombée directement sur le problème de Riemann.

Par contre, alors, il y a une retombée qui a été merveilleuse, qui est à travers le programme de Langlands, c'est-à-dire qu'à peu près à la même époque, les gens ont compris qu'en fait, la seule manière, enfin, une des manières qui était possible, en fait, c'est en grande partie grâce à Weil aussi, une manière de comprendre les propriétés de ces nouvelles fonctions ζ qui viennent des variétés algébriques, c'était de les relier à d'autres fonctions ζ qui avaient été découvertes par Hecke, dans la théorie de ce qu'on appelle les formes modulaires. Donc, quel était le produit de ça ? Le produit de ça, si vous voulez, c'est qu'il y a eu d'une part un pont entre une théorie qui était purement algébrique, et ce qu'on appelle la théorie automorphe, qui est la théorie des représentations de groupes adéliques, etc. Mais surtout, le point essentiel, c'est qu'en fait, un cas particulier de cette correspondance de Langlands, si vous voulez, entre le côté algébrique et le côté automorphe, a été démontré par Wiles, et en démontrant cela, en fait, ce qu'il a fait, c'est qu'il a montré qu'une courbe, une courbe elliptique qui est définie sur $\mathbb{Q}$, en fait, est modulaire.

Alors, qu'est-ce que ça veut dire, modulaire ? Ça veut dire que, justement, exactement comme on peut paramétrer le cercle par des fonctions cosinus et sinus, qui sont des fonctions transcendantes, eh bien, en fait, on va pouvoir paramétrer cette courbe par des formes modulaires, par des fonctions transcendantes, qui sont des fonctions modulaires. Alors, il y a une manière très précise de le dire, mais je ne vais pas rentrer dedans. Simplement, on sait bien qu'il y a une conséquence merveilleuse de ce résultat de Wiles, c'est que grâce aux travaux de Frey, Serre et Ribet, eh bien, on savait que s'il y avait une solution du problème de Fermat, s'il y avait une solution non-triviale, c'est-à-dire s'il y avait un triplet d'entiers qui vérifiait $a^n + b^n = c^n$, eh bien, on savait lui associer ce qu'on appelle une courbe elliptique, donc ça rentre exactement dans le cadre, qui était définie sur $\mathbb{Q}$. Et puis, on voit bien pourquoi on prend les nombres comme ça, parce que les trois racines, ce sera 0, a^n et $-b^n$. Et à ce moment-là, lorsqu'on regardera le produit des différences des racines, on voit bien qu'il va y avoir quelque chose de très intéressant qui va se produire.

Donc, ce qu'avaient démontré ces gens-là, en particulier, c'est qu'il était impossible qu'il existe une solution de Fermat, à condition qu'on sache que toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est modulaire. D'accord ? Et ça contredisait ça. Donc, vous voyez la démarche qui s'est produite.

La démarche qui s'est produite fait qu'on n'a pas résolu le problème initial. On n'a pas résolu le problème initial. On a bon espoir qu'il soit vrai, bien sûr, puisqu'on en a résolu un cas particulier qui est vrai.

On en a dévoilé, de manière absolument incontournable, la nature géométrique, c'est-à-dire que toutes les choses qui ont marché, étaient des choses qui étaient inspirées par la géométrie. D'accord ? Ce n'était pas du tout une géométrie simple. C'est la géométrie qui venait de la transposition de la géométrie sur le corps des complexes en une géométrie sur les corps finis et, bon, sur la clôture algébrique d'un corps fini.

D'accord ? Donc, ensuite, le problème a été étendu. Il a été étendu. On a simplement généralisé cette idée de fonction ζ.

On ne sait même pas si ces fonctions ζ ont une équation fonctionnelle. Enfin, on sait conjecturer leur équation fonctionnelle, mais on ne sait même pas démontrer l'équation fonctionnelle. Donc, c'est vous dire le niveau d'ignorance dans lequel on est, mais d'un autre côté, on sait que le paysage qu'on va découvrir est un paysage absolument merveilleux, puisqu'en en dévoilant une toute petite partie, qui est le cas des courbes elliptiques définies sur $\mathbb{Q}$, etc., eh bien, déjà, ça a permis de résoudre le problème de Fermat.

Donc, j'espère vous avoir montré, dans ce cas-là, dans le cas des nombres premiers, à quel point, justement, le parcours du mathématicien est un parcours qui est absolument imprévisible. On aurait pu dire, le mathématicien doit partir de la généralisation, démontrer le cas particulier, etc., puis après, on doit le forcer à utiliser la démonstration qu'il a faite pour le cas particulier pour résoudre le cas initial. Mais, bien sûr, ce serait une erreur.

Le parcours du mathématicien est un parcours qui est imprévisible. Et, bien sûr, on aurait bien tort de vouloir programmer une direction de recherche, ou quoi que ce soit. Alors, il y a une image, ici, que j'ai mise volontairement, qui est reliée aux formes modulaires.

Donc, cette image, en fait, elle est due à Klein. Mais la raison pour laquelle je l'ai mise, c'est que cette image, si on veut la comprendre, en fait, ce que vous voyez tracé ici, c'est un polygone dans une géométrie qui est la géométrie de Poincaré, qui est la géométrie non-euclidienne. Et, avant de passer à l'espace-temps, donc, je voudrais simplement mentionner cette géométrie non-euclidienne.

Donc, ça, on va faire un petit break, si vous voulez. Donc, la géométrie non-euclidienne, c'est un exemple formidable qui montre, si vous voulez, à quel point, justement, des réflexions a priori complètement abstraites de mathématiciens peuvent avoir des retombées fondamentales. La réflexion abstraite, c'était, si vous voulez, bon, comme vous le savez tous, l'axiome de l'unique parallèle passant par un point extérieur à une droite dans les axiomes d'Euclide.

Alors, en fait, beaucoup de mathématiciens y ont réfléchi, Legendre, etc. Ils ont démontré 36 équivalences entre, par exemple, la seule existence d'un triangle dont la somme des angles valait π suffisait à démontrer cet axiome, etc.

Et, en fait, donc, au XIXe siècle, on s'est aperçu qu'on pouvait construire des modèles de géométrie qui vérifiaient tous les axiomes d'Euclide, sauf celui-là, d'accord ? Alors, c'est ce qu'on appelle la géométrie non-euclidienne. Et le modèle que j'ai tracé ici, c'est ce qu'on appelle le modèle de Klein. C'est un modèle qui est particulièrement simple.

Ce que vous prenez, c'est vous limitez les points de la géométrie aux points qui sont à l'intérieur de l'ellipse, qui est décrite ici. Et vous décrétez que les points, donc, de l'espace, ce sont seulement les points qui sont à l'intérieur de l'ellipse. Vous décrétez que les droites de la géométrie, ce sont les portions de droites ordinaires qui contiennent les points intérieurs à l'ellipse.

Bon, alors, il faut aller un petit peu plus loin parce qu'il faut définir ce qu'on appelle la congruence des segments. Je ne vais pas vous expliquer ça, mais c'est très simple. Ça se fait en fonction du birapport des quatre points qui sont ici.

Mais en tous les cas, ce que vous pouvez vérifier à l'œil nu, c'est que si vous prenez une droite comme la droite D qui est ici, et si vous prenez un point qui est extérieur à cette droite comme le point I qui est ici, eh bien, il y a plusieurs droites qui passent par le point I et qui ne rencontrent pas la droite D. Donc, vous voyez bien que l'axiome de l'unique parallèle passant par un point extérieur à droite est violet, d'accord ? Par contre, tous les autres axiomes de la géométrie euclidienne sont vrais. Alors, après cette découverte de la géométrie non euclidienne, les mathématiciens se sont mis à réfléchir dans deux directions différentes. Il y a une direction qui venait en fait de Galois et qui a été la mieux poursuivie, si vous voulez, par Sofusli, et une autre direction qui vient, si vous voulez, beaucoup plus dans la direction de Gauss et de Jacobi.

Et c'est cette direction-là qui a eu un impact direct sur la physique. Alors, dans cette direction-là, ce qui se produit, c'est qu'on dit simplement que la géométrie est donnée en définissant le mètre, si vous voulez, c'est-à-dire en définissant un petit élément de longueur. Et ce petit élément de longueur, on peut le transporter partout.

Et quand on le transporte partout, on peut l'écrire en coordonnées locales, comme ça, et ça donne ce qu'on appelle les $g_{\mu\nu}$. Et alors, ce qui est important, c'est qu'on peut transplanter, c'est toujours pareil, si vous voulez, on peut transplanter des idées fondamentales de la géométrie ordinaire, comme l'idée de droite, dans ces géométries beaucoup plus générales. Et l'idée fondamentale qui joue un rôle le plus important, si vous voulez, dans la géométrie ordinaire, c'est l'idée de géodésique, ou l'idée de droite.

Cette idée de droite se traduit par une équation. Ce que signifient les indices ici, c'est la dérivée par rapport à $x\rho$, d'accord ? Donc ici, la dérivée par rapport à $x\nu$. Donc ce qu'on fait, c'est qu'on dérive, si vous voulez, ces $g_{\mu\nu}$, et puis on écrit une équation, qui est une équation où on écrit que la dérivée seconde est déterminée par une forme quadratique en fonction des dérivées premières.

C'est ce qui gouverne, si vous voulez, les droites, ce qui gouverne le mouvement géodésique. Alors, donc, j'en viens à l'espace-temps. Alors, j'espère qu'on va... Bon, on va prendre les choses de manière plus relaxe.

Alors, l'espace-temps, si vous voulez, je vais essayer d'abord de vous résumer, de vous résumer de manière très, très simple, la plus simple possible. Quel est, pour le mathématicien, ce que l'on sait sur l'espace-temps ? D'accord ? Je vais faire un transparent là-dessus. Alors, qu'est-ce que l'on sait, pour le mathématicien, sur l'espace-temps ? Bon.

Alors, on sait que, si vous voulez, l'espace-temps... D'abord, le mathématicien, il sait qu'il faut mentionner Poincaré. C'est très important. Alors, donc, on sait que l'espace-temps est gouverné par cette métrique, d'accord ? C'est l'espace de Minkowski.

On l'appelle l'espace de Minkowski. Et on sait que, dans l'espace courbe, eh bien, il y a ce qu'on appelle un potentiel gravitationnel qui va remplacer le potentiel newtonien, c'est-à-dire l'idée du potentiel newtonien qui gouverne, si vous voulez, le mouvement des corps, est remplacée par un potentiel qui est plus, beaucoup plus... Si vous voulez, qui a beaucoup plus d'indices, ce sont les $g_{\mu\nu}$, et qui donne l'élément de longueur. Alors, il y a un principe d'action qui remplace la loi de Poisson.

La loi de Poisson vous disait que le Laplacien du potentiel newtonien donnait la distribution de masse. Eh bien, Einstein a eu beaucoup de mal à trouver ce qui remplaçait ça. En fait, c'est gouverné par un principe d'action.

Et ce principe d'action, il est donné par ce qu'on appelle la courbure scalaire. Donc, il y a un invariant, si vous voulez, de la métrique, qui est donné par ce qu'on appelle la courbure scalaire, qu'on intègre. C'est ce qu'on appelle l'action d'Einstein-Hilbert.

Bon, là, il y a la constante gravitationnelle. Et qu'est-ce qu'on sait ? En gros, si vous voulez, pour résumer la physique que l'on comprend, eh bien, elle vous dit que l'action, qui va jouer un rôle après, eh bien, c'est la somme de deux termes. Elle a un terme qui vient purement de la métrique, c'est-à-dire qui vient du potentiel gravitationnel.

Et elle a un autre terme que je vais vous montrer tout à l'heure. Mais si je vous le montrais tout de suite, vous seriez effrayés. C'est ce qu'on appelle le modèle standard.

D'accord ? OK. Donc, on a cette combinaison des deux choses. Et enfin, si vous voulez, on a une recette qui est due à Feynman.

Donc, si vous voulez, là, vous avez un résumé. Et on a une recette qui est due à Feynman. Et que vous dit cette recette ? Eh bien, elle vous dit que si vous voulez passer au quantique, en fait, c'est incroyablement simple de passer au quantique.

Vous gardez vos champs classiques. Vous pensez tout en termes de champs. Il y a le champ gravitationnel, etc. D'accord ? Donc, vous pensez tout en termes de champs. Ce que vous dit Feynman, c'est qu'il n'y a plus de probabilités, mais il y a des choses qui sont plus fines que les probabilités, qui sont des espèces de racines carrées de probabilités et qui sont des nombres complexes. C'est ce qu'on appelle des amplitudes de probabilités.

Et ce sont ces choses-là qu'il faut rajouter, et non pas les probabilités. Et que vous dit Feynman ?

Eh bien, Feynman vous donne une recette pour savoir ce que c'est que l'amplitude de probabilités d'une configuration classique. Donc, vous prenez un champ classique.

Vous imaginez, je ne sais pas, la surface de la mer ou un truc comme ça. D'accord ? C'est un champ classique. Eh bien, ce champ classique, il a une action classique que vous calculez.

Vous la divisez par l'unité d'action, qui est ce qu'on appelle la constante de Planck. C'est le seul rôle du quantique qui intervient ici. Vous la multipliez par le nombre imaginaire pur, i, de carré moins 1 ($i^2 = -1$). D'accord ? Et vous prenez l'exponentielle de ça.

Donc, c'est ça la recette. Alors, c'est là que j'espère que la couleur va marcher, parce que j'avais quand même donné deux, trois transparents en couleur. D'accord ? Donc, qu'est-ce qu'on sait ? Je ne vais pas empiéter sur les plates-bandes des physiciens, mais c'est quand même extrêmement rassurant de savoir que la théorie d'Einstein, qui prédit l'existence de phénomènes tout à fait bizarres, si vous voulez, dans l'espace-temps au niveau macroscopique, comme l'existence des trous noirs, etc., eh bien, maintenant, est en grande partie vérifiée, bien qu'il y ait des problèmes extrêmement sérieux, ce qu'on appelle la matière noire, l'énergie noire, etc., qu'on ne sait pas encore vraiment expliquer.

Mais en tout cas, je veux dire, il y a des phénomènes macroscopiques, et puis il y a des vérifications merveilleuses de la théorie d'Einstein pour ce qu'on appelle les pulsars binaires, etc. Donc, ça, c'est un exemple d'une galaxie très lointaine dans laquelle on arrive à mesurer la vitesse de déplacement de gaz, etc., et on arrive à deviner, si vous voulez, la présence d'un trou noir. Évidemment, la présence d'un trou noir, un trou noir, à part ce qu'on appelle la radiation de Hawking, n'émet rien de spécial.

Donc, je veux dire, on n'arrive pas à l'observer directement. Alors, ça, c'est dans l'infiniment grand, si vous voulez, c'est dans les très, très grandes tailles. Alors, dans les tailles très, très petites, ce qui est satisfaisant, c'est que l'on saura bientôt, l'on saura bientôt... Ah, pardon.

Mais alors là, vous avez une image macroscopique, si vous voulez, du CERN, qui rentrera en fonctionnement sans doute à la fin de l'année 2007 et qui a un certain nombre de détecteurs, d'accord, que les gens construisent. Il y a un nombre incalculable d'ingénieurs qui construisent ça. Et en gros, si vous voulez, ce qui se passe ici, c'est le plus gros microscope, c'est le microscope le plus précis que l'on ait pour analyser la texture de l'espace-temps au niveau microscopique.

C'est-à-dire qu'en gros, si vous voulez, ce qui se produit, c'est ce qu'on appelle les énergies qui sont impliquées dans ces très grands accélérateurs. Là, ce sera de l'ordre du TeV ou d'une dizaine de TeV ou je ne sais pas, peut-être une centaine de TeV. En fait, elles correspondent, si on prend l'inverse de l'énergie, si on utilise les constantes usuelles pour faire le travail, ça correspond à des limites de la précision, si vous voulez, dans l'infiniment petit, donc de l'ordre, là, on aura quelque chose de l'ordre, je pense, de 10 puissance moins 18 centimètres, quelque chose comme ça. Bon. Alors maintenant, ce que je vais faire, si vous voulez, bon, ça, c'est bien gentil, etc.

Le problème, c'est que je vous ai dit tout à l'heure que les principes de la physique étaient très

très simples et je vous ai montré tout à l'heure un autre terme, d'accord, dans ce qu'on appelle le Lagrangien de la physique ou l'action de la physique, c'est-à-dire, il y avait le Lagrangien de Einstein-Hilbert, et il y avait le Lagrangien du modèle standard. Alors, les mauvaises nouvelles, c'est que si vous écrivez la formule, vous avez des gens qui ne peuvent pas vous dire que c'est simple, voilà la formule, d'accord. Donc, je ne vais pas vous faire le détail, mais vous pouvez toujours poser des questions sur la formule, d'accord.

Donc, voilà, si on écrit vraiment le Lagrangien du modèle standard, ça, c'est ce qu'on appelle, il y a les fantômes ici, etc. Il y a tous les termes du modèle standard. Donc, en fait, si vous voulez, le dialogue qui a eu lieu entre l'expérience en physique, d'accord, et la théorie, ce dialogue, au cours du XXe siècle, a produit ce terme additionnel, au-delà du terme d'Einstein-Hilbert, il a produit ce terme additionnel.

Et, bon, bien que ce terme additionnel, on puisse lui donner un tas de qualificatifs, on puisse dire, si vous voulez, là, vous avez les bosons de jauge, vous avez les gluons, etc. Là, vous avez le, bon, là, vous avez le, ce qu'on appelle le boson massif W, etc. Vous avez le boson intermédiaire Z, d'accord.

Là, vous avez le champ électromagnétique, etc. On peut dire, là, vous avez les champs de Higgs qui sont non physiques, vous avez le champ physique des Higgs, H, qui intervient, etc. Bon, tous les termes ont une signification, tous les termes ont une origine historique, si vous voulez, etc.

Mais, c'est quelque chose de fascinant pour le mathématicien. Pourquoi est-ce que c'est quelque chose de fascinant pour le mathématicien ? Parce que, si vous voulez, le mathématicien, lui, ce qu'il cherche, c'est la simplicité. Et, le fait qu'on dise, le lagrangien résume toute la physique que l'on sait, bien sûr, ça, ça parlera aux physiciens, parce que le physicien, il saura que chacun de ces termes-là a une histoire, etc. et va prédire quantité et quantité de phénomènes. Mais le mathématicien ne peut pas rester insensible à la complexité de cette formule. D'accord ? Alors, il y a une autre chose qui n'est pas évidente non plus, si vous voulez.

Il y a une autre chose qui n'est pas évidente non plus. C'est que, lorsque les physiciens ont fait leurs calculs et ont commencé à utiliser cette prescription de Feynman, lorsqu'ils ont utilisé cette prescription de Feynman, eh bien, ils se sont aperçus qu'il y avait un autre problème qui se produisait, c'est-à-dire qu'ils écrivaient l'action avec les champs classiques, etc., le champ qu'on a vu tout à l'heure, d'accord ? Et ils essayaient d'intégrer, bon, sur tous les champs avec ce qu'on appelle cette amplitude de probabilité. Ils ont commencé à faire les calculs et ils se sont aperçus, c'est Oppenheimer qui s'en est aperçu, en fait, dans les années 1930, en gros.

Eh bien, ils se sont aperçus qu'il y avait un phénomène, un phénomène vraiment très, très bizarre qui se produisait. Et pour vous expliquer ce phénomène, ce qu'on appelle la renormalisation, en fait, si vous voulez, c'est un phénomène qui avait déjà été observé par les physiciens vers 1830, donc au XIXe siècle. Et il avait été observé par Green, si vous voulez, qui faisait de l'hydrodynamique.

Donc, ce que les physiciens avaient observé, c'est la chose suivante, les mathématiciens aussi. En fait, à l'époque, ils n'étaient pas différents, c'était les mêmes personnes qui faisaient la physique et les mathématiques. Donc, en hydrodynamique, Green avait fait l'observation suivante.

C'est la suivante, si vous voulez, c'est que si vous prenez une balle de ping-pong et vous prenez un bain, avec une balle de ping-pong, d'accord, et vous mettez la balle de ping-pong sous l'eau, donc c'est le cas, là, vous voyez, d'accord. Et on vous demande de faire un calcul qui est le calcul de l'accélération initiale qu'aura la balle de ping-pong quand vous la lâchez. Alors, vous êtes dans le bain, donc vous vous dites, vous appliquez le principe d'Archimède.

Alors, que vous dit le principe d'Archimède ? Il vous dit que la balle de ping-pong va être soumise à une force verticale qui correspondra au poids de l'eau que contient la balle. D'accord, vous calculez le poids de l'eau que contient la balle. Bon.

Ensuite, vous calculez, vous appliquez la loi de Newton, ok, et qu'est-ce que vous trouvez ? C'est un petit calcul très simple. Vous trouvez 11,5 fois l'accélération de la pesanteur. Je ne sais pas si vous vous rendez compte, mais 11,5 fois l'accélération de la pesanteur, c'est quelque chose de colossal.

Pratiquement, c'est une accélération à laquelle le corps humain ne résiste pas, d'accord. Alors, maintenant, vous prenez la balle de ping-pong, vous la lâchez dans l'eau. Et qu'est-ce que vous regardez ? Elle va vraiment lentement.

D'accord. Et en gros, son accélération initiale est de l'ordre de 1,5 g. Alors, c'est Green qui a trouvé l'explication à ça. Et quelle est l'explication ? Eh bien, l'explication, c'est que, même lorsque le temps t est égal à zéro, si vous voulez, lorsque la balle est immergée dans l'eau, vous voyez bien que quand elle va bouger dans l'eau avec une certaine vitesse, peu importe, eh bien, l'eau va devoir se dérouler de manière tangentielle le long des bords de la balle de ping-pong.

Et donc, si vous regardez le champ des vecteurs, si vous voulez, de l'eau, c'est un champ de vecteurs qui va être dérangé par la présence de la balle. On peut calculer. C'est un calcul élémentaire, l'énergie cinétique correspondante, c'est ce qu'a fait Green. C'est un calcul complètement élémentaire. Ça prend trois lignes de calcul. D'accord. Ça utilise ce qu'on appelle une harmonique sphérique. Donc, Green a fait le calcul.

Et qu'est-ce qu'il a compris ? Eh bien, il a compris quelque chose qui est assez fabuleux, si vous voulez. C'est qu'en fait, la loi de Newton doit être modifiée. C'est quelque chose qui est tout à fait étonnant.

C'est que, lorsqu'on prend un corps comme une balle de ping-pong, etc., qui est plongé dans un liquide et qui est plongé dans un champ, eh bien, la loi de Newton n'a plus lieu avec ce qu'on appelle la masse nue du corps comme la balle de ping-pong. Donc, la balle de ping-pong, vous pouvez la prendre, vous pouvez la poser sur une balance et vous connaîtrez sa masse, m. D'accord. Eh bien, ce que vous dit le théorème de Green en hydronamique, c'est qu'en fait, ce n'est pas cette masse-là qui rentre dans la formule de Newton.

C'est une autre masse. Il l'a calculée pour un objet parfaitement sphérique et il s'est aperçu qu'en fait, c'était cette petite masse-là m plus la moitié de la masse de l'eau qui serait contenue dans la balle $\left(m+\frac{1}{2}M\right)$. D'accord.

C'est un calcul qui est complètement élémentaire. Et alors, vous voyez bien que si vous remplacez la masse m par m plus $\frac{1}{2}$ de la masse de l'eau qui est bien plus grande que la masse de la balle de ping-pong, eh bien, à ce moment-là, quand vous calculerez l'accélération initiale, elle ne sera jamais de toute façon plus grande que deux fois l'accélération de la pesanteur. Elle ne peut pas puisqu'il y a ce facteur $\frac{1}{2}$. Donc ça, c'est un phénomène ancien que les gens avaient compris. Alors, j'avais insisté pour avoir la couleur, je vais voir si vous voyez un petit peu mieux là. D'accord. Donc, je veux dire, ça, ce n'est pas n'importe quel... Je n'ai pas pris n'importe quel champ de vecteur.

C'est le champ de vecteur réel, ça, qui correspond exactement au flot de l'eau qui se déroule autour de la balle de ping-pong. Donc, en fait, si vous voulez, ce que les physiciens ont trouvé, donc à partir des travaux d'Oppenheimer, donc, ce qu'ils ont trouvé, si vous voulez, à partir de ces travaux-là... J'ai l'impression que je vais... Non, ça va. Donc, à partir des travaux d'Oppenheimer, ce qu'ont trouvé les physiciens, c'est qu'ils ont trouvé, en fait, si vous voulez, que le phénomène était exactement le même lorsqu'on regardait un électron, par exemple.

Lorsqu'on regardait un électron, il y avait, en fait, l'électron est plongé dans le champ électromagnétique et exactement le même phénomène qui se produit pour la balle de ping-pong se produit pour l'électron. C'est-à-dire que... Et maintenant, il y a une grosse différence. C'est que dans le cas de la balle de ping-pong, vous pouviez prendre la balle de ping-pong et la sortir de l'eau et la peser.

Par contre, l'électron, quoi que vous fassiez, il sera toujours dans le champ électromagnétique. Donc, si vous voulez, pour l'électron, il est absolument impossible de connaître la valeur m qui était importante de tout à l'heure, qui jouait un rôle important si vous voulez, dans le changement de tout à l'heure. Donc, si vous voulez, dans le cas de la balle de ping-pong, on avait le petit m et on avait, si vous voulez, ce changement qui passait de petit m à $m+\frac{1}{2}M$. Dans le cas de la balle de ping-pong, on pouvait mesurer m et on pouvait mesurer ça aussi.

Dans le cas de l'électron, on ne peut pas mesurer m, on peut seulement mesurer cette combinaison des deux. Alors, ça a pris un temps très très long quand même, aux physiciens, puisqu'Oppenheimer a trouvé ça environ en 1930, et ce n'est pas avant 1947, en particulier pour des raisons qui venaient de l'expérience, sur ce que l'on appelle la structure hyperfine, ou la structure fine même des spectres que, bon, je n'ai pas parlé de Bethe, etc., mais je veux dire un certain nombre de physiciens ont compris ce qui se passait. Et donc, là, il y a eu un développement qui s'est de plus en plus, d'une certaine manière, rapproché, on peut dire, de choses absolument essentielles, c'est-à-dire ce qu'ont fait les physiciens, ils ont commencé par faire des petits tours de passe-passe, c'est-à-dire qu'ils ont commencé par dire, bon, on ne peut pas observer la masse de l'électron, on ne peut pas observer sa charge, etc., et on va essayer de faire des calculs, en fermant un peu les yeux, là où il y a des problèmes, d'accord ? Et en essayant seulement de calculer des quantités physiquement observables. Mais grâce à Schwinger, Feynman et Dyson, etc., en fait, je ne veux pas rentrer dans les détails, bien sûr, mais ils ont graduellement développé une méthode algorithmique, si vous voulez, une méthode à partir de ce qu'on appelle les graphes de Feynman, ça c'est un exemple très simple de graphes de Feynman, donc, ils ont développé une méthode, pour se débarrasser des infinis.

Mais en gros, si vous voulez, ce qu'il se passe, c'est qu'on fait ce qu'on appelle un développement perturbatif, c'est une somme infinie, mais chacun des termes du développement est donné lui-même par une intégrale divergente. Donc c'est vraiment un problème très très sérieux, ce n'est pas le problème qui est qu'on a une somme infinie de choses qui elles-mêmes sont finies. Le problème, c'est qu'on a une somme infinie de choses qui sont chacune infinie.

Alors, les physiciens ont développé une méthode, et cette méthode, si vous voulez, a mis beaucoup de temps à se développer de manière, on peut dire rigoureuse, au sens où elle soit définie de manière univoque, et au sens où, pour l'appliquer, il ne faille pas aller voir X et Y et lui demander "est-ce que ce que je fais c'est correct,là ou est-ce que ce n'est pas correct ?" D'accord ? Donc ça, ça a pris énormément de temps, ça a pris beaucoup de temps et ça a été développé en particulier par Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann. Vous n'avez pas à comprendre les formules qui sont ici. Je veux dire, simplement, c'est pour vous montrer qu'il y a une méthode qui a été développée, et cette méthode, elle a été développée comme une méthode algorithmique. C'est-à-dire qu'on a donné une recette. En fait, il y avait, le travail de Bogoliubov et Parasiuk qui était incomplet. Hepp a introduit un tas de corrections, etc. Il a rendu les choses beaucoup plus rigoureuses et bon, Zimmermann a rajouté des formules combinatoires. Donc, en fait, on est arrivé graduellement, si vous voulez, à une recette. On peut dire c'est une recette qui permet de faire un calcul à partir de graphes.

D'accord ? Et on sait, bien sûr, que c'est quelque chose d'extrêmement intéressant parce que c'est précisément en faisant ces calculs de graphes que les physiciens trouvent un accord, par exemple, pour le moment anormal de l'électron, avec une précision qui est la même que l'épaisseur d'un cheveu sur la distance entre Paris et New York. Donc, on calcule le résultat à partir de ce type de formule. On calcule, donc, le moment anormal.

On le compare à l'expérience et on s'aperçoit, si vous voulez, que l'accord qu'il y a entre la théorie et l'expérience est de l'ordre de la précision de l'épaisseur d'un cheveu sur la distance entre Paris et New York. Alors, cette méthode, il faut le dire, si vous voulez, elle est parfaitement justifiée du point de vue de la physique. D'accord ? Le problème n'est pas là.

Mais pour le mathématicien, c'est quelque chose de fascinant, parce que le mathématicien, qu'est-ce qu'il voit ? Il voit une formule aussi compliquée que celle du modèle standard ou il voit une recette qui est donnée par des formules aussi compliquées que celle-là.

Alors, soit il dit "j'abandonne, la physique est trop compliquée pour moi". D'accord ? Soit il dit "peut-être n'est-il pas impossible que derrière ces recettes qui sont données par les physiciens, en fait, il y ait des maths vraiment intéressantes".

Et si vous voulez, la motivation que j'ai eue, toujours, la motivation que j'ai eue, toujours en travaillant dans ce domaine-là, c'est non pas de démontrer que ces calculs-là sont rigoureux. On sait bien qu'ils sont rigoureux puisqu'ils donnent la précision, d'accord ? Donc, ce n'est absolument pas qu'ils soient rigoureux, mais c'est de comprendre leur sens conceptuel. Alors, ça, ça a été fait dans un travail d'abord avec Dirk Kreimer, mais je vais aller très, très vite dessus.

Et en fait, si vous voulez, ce qu'on a compris, donc, si j'ai 5 minutes, ce qu'on a compris, c'est qu'en fait, si vous voulez, le procédé qui est utilisé par les physiciens, donc ce procédé récursif, qui s'appelle BPHZ, c'est-à-dire BPHZ, pour Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann, eh bien, en fait, il est identique à un procédé mathématique que les mathématiciens connaissaient depuis longtemps, qui était relié à ce qu'on appelle le problème de Riemann-Hilbert, qui était un des problèmes de Hilbert qu'il avait formulé au début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle, et qui est relié à ce qu'on appelle la décomposition de Birkhoff. Donc, en fait, il y a un groupe qui est présent derrière, et il y a un procédé mathématique qui est complètement clair.

Mais, en fait, les choses ont été beaucoup plus loin que ça. Ça, c'était il y a environ quatre ou cinq ans. Mais les choses ont été beaucoup plus loin que ça, et elles ont été beaucoup plus loin que ça, en partie grâce à l'intuition de Pierre Cartier.

Donc, je vais mettre, si vous voulez, un transparent qui est une citation de Pierre Cartier. Donc, Pierre Cartier disait la chose suivante. Il avait été frappé par l'analogie manifeste entre, d'une part, ce qu'on appelle le groupe de Grothendieck-Teichmüller, c'est un truc en mathématiques, et le groupe de renormalisation.

C'est-à-dire, en gros, si vous voulez, le groupe qui intervient dans ce que j'expliquais tout à l'heure, c'est ce que les physiciens appellent le groupe de renormalisation, sauf qu'il est localisé sur une théorie, de la théorie quantique des champs. Et donc, ce que disait Cartier :

> *"La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck-Teichmülluer d'une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie quantique des champs d'autre part, n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, et il disait une espèce de groupe de Galois cosmique !"*

Alors, quand j'ai lu cet énoncé de Cartier, moi ça me faisait rigoler, c'était au moment de l'anniversaire de l'IHÉS, environ en l'an 2000, et je pensais qu'il n'y avait pas de fondement à cette idée.

Et graduellement, c'est une idée qui a émergé, et qui est correcte, et en fait, si vous voulez, c'était ça mon thème de départ ; donc mon thème de départ, c'était cette merveilleuse théorie de Galois, que Galois, si vous voulez, avait développée, non seulement pour les équations algébriques, mais en fait, il avait été beaucoup plus loin. Et Galois, dans sa lettre-testament, écrivait à son ami Auguste Chevalier, il lui disait qu'en fait, ses idées sur ce qu'il appelait la théorie de l'ambiguïté allaient infiniment plus loin que seulement les équations algébriques, c'est-à-dire les équations dont vous devez trouver une solution, etc., et où il avait compris, si vous voulez, qu'il y avait un groupe de symétrie. En fait, ce que Galois avait compris, et dont on voit des réminiscences, si vous voulez, dans la théorie de Ramis, sur les équations différentielles, etc., c'est que même pour les fonctions transcendantes, en fait, il y avait ce principe de symétrie cachée qui fait qu'on peut dire, a priori, dans certaines équations, même pour des équations transcendantes, qu'en fait, on peut changer la valeur de certaines fonctions en d'autres valeurs, par exemple, ce qu'on appelle le recalibrage des exponentielless, où on remplace $\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ par $\lambda \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, sans changer la validité des équations.

Alors, donc, ça a pris beaucoup de temps, ça a pris beaucoup de temps, mais maintenant, on est dans une situation qui correspond exactement à ce dont Cartier avait rêvé. Et non seulement ça, mais si vous voulez, on peut définir ce qu'on appelle le groupe de Galois d'une théorie des champs. Et par exemple, le groupe de Galois d'une théorie des champs est trivial, si et seulement si la théorie est finie.

Donc ça, c'est un travail récent que j'ai fait en collaboration avec Matilde Marcolli. Donc, en fait, si vous voulez, on a une situation qui est idéale maintenant. On a trouvé le groupe de Galois de Cartier.

C'est un groupe qui est très, très compliqué. C'est un groupe qui n'est pas du tout... je me souviens, en 1978, j'étais allé à une conférence de physique et je leur avais demandé "qu'est-ce que c'est que le groupe de renormalisation ?". Et j'avais compris que c'était la droite réelle, le changement d'échelle.

Alors, j'étais retourné chez moi en me disant "ce n'est pas vraiment intéressant.". Mais, en fait, le groupe de renormalisation, qui est ce groupe de Galois cosmique, est un groupe extrêmement intéressant qui est composé, bien sûr, du groupe de changement d'échelle, mais qui contient une algèbre de Lie libre, avec un générateur dans chaque dimension, d'accord, et qui correspond à la théorie des nombres. Alors, c'est ce groupe de Galois cosmique que Cartier avait envisagé.

Ce groupe de Galois cosmique s'envoie sur le groupe associé à une théorie, qui est associé au graphe de Feynman, grâce à l'algèbre de Hopf, de Kreimer, etc. Et on avait fait, dans notre travail avec Kreimer, on avait montré que son groupe, que le groupe, si vous voulez, des graphes, agit par difféomorphisme formel sur les constantes de couplage. Mais si vous combinez les deux flèches qui sont là, c'est-à-dire la flèche qui va du groupe de Galois cosmique vers le groupe des graphes, et du groupe des graphes vers les difféomorphismes des constantes de couplage, eh bien, vous vous apercevez qu'en fait, il y a effectivement, exactement comme Cartier le suggérait, un groupe de Galois qui est un groupe de symétrie universelle, que Cartier a appelé cosmique, et qui agit sur les constantes des théories physiques.

Donc, en fait, non seulement on a ça, si vous voulez, qu'est-ce que ça dit ? Eh bien, ça dit que, en fait, les gens qui prétendent que le fait qu'il y ait des divergences dans la théorie des champs est un inconvénient et qu'on doit s'en débarrasser à toute force, eh bien, en fait, ils ne comprennent pas que ces divergences sont, en fait, une bénédiction, parce que c'est grâce à ces divergences, c'est uniquement grâce à ces divergences, à ce qu'on appelle la fonction β en physique, et à ces composantes dans chaque puissance de $\hbar$, que ce groupe de Galois cosmique agit sur les théories physiques. Donc, si vous voulez, loin d'être un inconvénient, en fait, c'est un groupe de symétrie extrêmement caché, d'accord ? Bon, bien sûr, le groupe de renormalisation, le groupe de renormalisation, en fait, est un sous-groupe à un paramètre de ce groupe-là. Il y a un sous-groupe à un paramètre du groupe de Galois cosmique, qui est le groupe de renormalisation.

Et alors, il y a une étape que j'ai oublié de mentionner, donc, c'est que l'image du groupe de Galois cosmique dans le groupe d'une théorie donnée est ce qu'on appelle le groupe de Galois de la théorie. Et c'est un groupe qui régit, par exemple, le fait de savoir si la théorie est finie ou pas, qu'il y a toutes les bonnes propriétés. Donc, si vous voulez, les idées de Galois, les idées de Galois qui sont des idées... Galois disait “sautons à pieds joints sur les calculs.”.

Donc, ce que disait Galois, si vous voulez, c’est qu’il est impossible de calculer un groupe de Galois. Et les gens lui riaient au nez, parce qu’ils lui disaient, vos trucs, c’est impossible à calculer. Mais, il allait beaucoup plus loin que ça, parce qu’il disait, le travail des géomètres futurs ne sera pas de faire ces calculs.

Le travail des géomètres futurs sera d’organiser ces calculs et de les faire dans leur tête, de les faire abstraitement, sans les faire concrètement. Et de savoir, ou plutôt de deviner, ce vers quoi... ce que vont donner les calculs, etc., etc. Donc, en fait, si vous voulez, la théorie de Galois a un pendant, justement, pour la théorie physique, ici, et alors, en fait, ce qui se produit, donc, c’est que, non seulement on a ça, mais si on utilise ce qu’on appelle la régularisation dimensionnelle, etc., je ne vais pas en parler, eh bien, en fait, il y a un repère universel, il y a un repère singulier universel, qui dit qu’en fait, la renormalisation, si vous voulez, consiste à renormaliser une fois pour toutes, il y a une manière universelle de le faire, qui consiste à renormaliser la géométrie.

C’est-à-dire que la géométrie de l’espace ordinaire de dimension 4, est en fait une géométrie qui n’est pas appropriée à la manière dont on fait la physique à cause de la réaction du champ, justement, et de la self-énergie du champ. Et à condition, bon, d’utiliser les bons outils, etc., et d’avoir effectivement des espaces (X_z) de dimension z, donc il y a une notion d’espace de dimension z, je vais m’arrêter là-dessus, c’est une notion qui utilise la géométrie non-commutative, donc il y a une notion effective d’espace de dimension z, et qui permet, une fois qu’on a cette notion-là, ça permet maintenant d’avoir une image mentale beaucoup, beaucoup plus précise de la signification de la renormalisation, de ce point de vue-là, et la signification est simplement la suivante, c’est qu’au lieu d’avoir la manière triviale de faire la régularisation dimensionnelle, c’est-à-dire d’aller pour la valeur de z de l’espace auxiliaire vers zéro de manière brutale, eh bien, en fait, il y a une manière d’y aller qui suit une trajectoire, d’accord, qui est divergente, mais qui consiste à renormaliser la géométrie. Bon, alors j’avais 36 autres transparents, mais je crois que je vais m’arrêter là.

(Applaudissements)

Édouard Brézin : Voilà. Donc, si là, l’un des jeunes lycéens a compris l’ensemble de l’exposé de M. Alain Connes, je propose qu’on l’élise immédiatement à l’Académie des sciences. L’exposé est ouvert pour des questions.

Vincent Courtillot : Dans l’énorme formule, qu’est-ce qui gouverne le nombre de ces termes et est-ce que c’est important ?

Alain Connes : Ah, bien sûr. Mais malheureusement, c’est dans les transparents d’après.

Cette énorme formule a, non pas une explication, mais enfin, il y a une manière de l’écrire qui prend une ligne, d’accord, à condition de faire la chose suivante, c’est-à-dire d’accepter qu’au lieu que ce soit la toute petite partie de cette formule qui est l’électrodynamique, la partie électrodynamique de cette formule tient en un quart de ligne dans l’énorme formule. Je vais essayer de la retrouver. Donc, si on regarde l’électrodynamique, l’électrodynamique prend un quart de ligne.

Eh bien, qu'est-ce qu'on a fait, nous ? Qu'est-ce qu'on a fait ? On a pris ce quart de ligne et on a dit, voilà l'espace-temps, puisque c'est Maxwell qui nous a donné les équations de Maxwell, qui sont une partie de l'électrodynamique, d'accord. Et c'est à partir de ça qu'on a dit, bon, eh bien, d'accord, on a $\sqrt{\frac{1-v^2}{c^2}}$, etc., etc., et on en a déduit l'espace-temps, l'espace-temps de Minkowski, d'accord. Et puis on s'est dit, chaque fois qu'on rajoute un terme dans la formule, l'interaction faible, etc., c'est une nouvelle particule.

C'est une manière de penser. C'est une manière de penser. Il y a une autre manière de penser.

Cette autre manière de penser consiste à dire : "adaptons nos concepts géométriques d'abord", d'accord. Alors, en quel sens adaptons-nous nos concepts géométriques ? Eh bien, on s'aperçoit, les mathématiciens ont énormément à apprendre de la physique. Pourquoi ? Parce que dans la géométrie, il y a mètre, d'accord.

Et dans mètre, il y a la définition de l'unité de longueur. La première définition de l'unité de longueur, ça a été l'arpentage entre Dunkerque et Barcelone, d'accord, avec un angle précis du Méridien. On en a pris la 40 millionième partie, on en a fait un objet concret, qu'on a appelé le mètre et qu'on a déposé au pavillon de Breteuil.

Très bien, d'accord. Eh bien, ça, ça correspond au ds^2 et au $g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$, d'accord. Qu'est-ce qui s'est passé ? Ce qui s'est passé, c'est qu'au bout d'un moment, on s'est aperçu que le mètre, qui était déposé au pavillon de Breteuil, ce n'était pas pratique.

En exagérant, si je veux mesurer mon lit, et si je dois aller à Paris et comparer au mètre qui est déposé au pavillon de Breteuil, ce n'est pas pratique, d'accord. Et en plus, ce mètre-là, il n'était pas de longueur fixe. Donc les physiciens ont réfléchi.

Les physiciens ont réfléchi. Et quel a été le bout de leur réflexion ? Le bout de leur réflexion, les physiciens se sont aperçus qu'en fait, il y avait bien mieux, bien mieux pour définir une longueur, une unité de longueur, c'était de prendre un corps chimique, si possible un corps pur, d'accord, prendre une de ses raies spectrales, et prendre la longueur d'onde de cette raie spectrale comme unité de longueur. Bien sûr, on va la multiplier par un nombre de telle sorte que ça ressemble au mètre.

Alors on a commencé par le faire pour le krypton, avec la raie orange du krypton, etc., et ensuite on l'a fait pour le césium. Mais ça, ça ne correspond pas au $ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$, d'accord. Pas du tout.

Par contre, par contre, ça correspond exactement, ça correspond exactement à l'élément de longueur en géométrie non-commutative. Donc il se fait qu'exactement pour cette raison-là, d'accord, il y a eu, si vous voulez, il y a eu un changement de paradigme, mais qui a été imposé pour d'autres raisons, qui n'étaient pas du tout celles qui venaient de la physique, qui a été imposé parce qu'on voulait s'intéresser à des espaces qui étaient différents des espaces ordinaires dans lesquels les points sont donnés par des coordonnées qui commutent.

Donc on voulait s'intéresser à des espaces qui étaient plus délicats. Eh bien, lorsqu'on s'intéresse à des espaces qui sont plus délicats, on s'aperçoit qu'on est obligé de prendre la même convention que les physiciens. En quel sens cette convention des physiciens est une convention intéressante ? C'est une convention intéressante parce que supposez qu'on veuille unifier, par exemple, le système métrique dans la galaxie.

Si on dit aux autres systèmes planétaires dans la galaxie "vous allez devoir venir à Paris et vous allez devoir prendre une copie du mètre-étalon et c'est ça qui va vous servir d'unité de longueur". Bon, c'est évident que ça va déclencher une guerre galactique, etc. Par contre, si on leur dit "vous prenez un corps chimique pur, d'accord, qui vient du tableau périodique des éléments, etc., et vous prenez telle raie spectrale, et c'est ça votre unité de longueur", bon, là ça va marcher, d'accord, parce que c'est une définition infiniment plus intrinsèque. Alors, donc, si vous voulez, on est obligé d'adapter les concepts géométriques. Une fois qu'on a adapté les concepts géométriques, une fois qu'on a élargi le concept de géométrie, bon, d'abord on s'aperçoit que ce concept de géométrie, il contient le concept ordinaire de manière stricte.

C'est-à-dire que ce n'est pas une généralisation dans laquelle vous oubliez le concept de départ. Le concept de départ est strictement contenu dedans. D'accord ? Bon, mais alors maintenant ce qui se produit, donc ce qui se produit, c'est la chose suivante.

C'est qu'une fois que vous avez un concept géométrique qui est plus flexible, eh bien vous pouvez faire l'opération suivante. Vous pouvez regarder l'énorme formule. Je ne sais pas si je vais la retrouver.

Vous vous souvenez comme elle était énorme, cette formule. Donc vous pouvez regarder l'énorme formule et vous pouvez vous dire, de cette formule, je ne veux pas retenir, je ne veux absolument pas retenir dans cette formule un petit bout, et puis dire qu'après je rajoute des particules. Non ! Je veux dire que cette formule, par elle-même, me donne la géométrie de l'espace-temps. D'accord ? C'est-à-dire que je veux avoir un principe, extrêmement simple, qui me dise que c'est cette formule qui me décrit la géométrie de l'espace-temps. Et le procédé qui, à partir, si vous voulez, de la géométrie de l'espace-temps va vous redonner cette formule doit être une simplicité délirante. Il doit être extrêmement simple. D'accord ?

Et alors le procédé qui est appliqué, justement, pour retrouver, si vous voulez, la formule en question à partir de la géométrie de l'espace-temps, eh bien, c'est un procédé qui est purement spectral. C'est-à-dire, le procédé qui vous redonne cette formule, c'est le procédé qui consiste à compter le nombre de valeurs propres, qui sont plus petites qu'une valeur propre donnée, à faire son développement, d'accord ? Et on doit réobtenir exactement la formule en question.

Alors qu'est-ce qu'on obtient, comme structure de l'espace-temps ? Eh bien, on obtient que l'espace-temps, effectivement, ressemble à l'espace de Minkowski. On traite les espaces courbes, là, dans ce cas-là. D'accord ? Mais, en fait, il a une structure beaucoup plus raffinée. C'est-à-dire qu'il a une structure... En gros, si vous voulez, de manière très simple, très simpliste, cet espace-temps, c'est le produit de l'espace-temps ordinaire par un espace fini mais non-commutatif. Fini, ça veut dire que c'est comme un ensemble fini de points.

Et cet espace non-commutatif, en fait, il est dicté par le modèle standard. Il est dicté par la physique. C'est-à-dire que le modèle standard est ce qu'on appelle une matrice de Yukawa. C'est cette matrice de Yukawa dans le modèle standard qui vous donne la géométrie de l'espace fini. Alors, après, on peut faire un tas de calculs, mais en particulier, lorsque vous calculez après, lorsque vous calculez ce nombre de valeurs propres, vous obtenez non seulement le modèle standard avec cette formule, mais vous obtenez aussi l'action d'Einstein-Hilbert. C'est-à-dire que vous obtenez la somme des deux.

Alors, si vous voulez, pour le moment, c'est une interprétation simplement au niveau classique. Et un des problèmes auxquels je me suis attaché, en particulier dans ma collaboration avec Kreimer et Marcolli, si vous voulez, c'est d'essayer de comprendre en quel sens la compréhension que l'on a maintenant de la renormalisation, c'est-à-dire cette image mentale que l'on a de la renormalisation de la géométrie de l'espace, cadre avec le modèle standard. Et en fait, ce qui est remarquable, c'est qu'effectivement, on peut les mettre ensemble. C'est-à-dire que l'opération de produit qui consiste à faire le produit par un espace de dimension z complexe, puis à faire tendre z vers zéro de cette manière assez ad hoc, eh bien, elle cadre exactement avec le modèle standard, c'est-à-dire avec le fait de faire le produit par cet espace non-commutatif et fini, qui lui aussi va bouger en fonction de z. C'est-à-dire que la géométrie de cet espace va être fonction de la variable z, puisqu'on a la renormalisation. Alors on est encore très très loin du compte, mais si vous voulez, en tout cas, en tous les cas, ce que l'on voit, c'est qu'on voit typiquement cet échange qu'il y a entre les mathématiques et la physique. Alors c'est un échange qui va dans toutes les directions, mais je pense qu'on aurait bien tort de dire que d'un côté, on a les mathématiciens qui font leurs équations, etc., qui prennent un petit problème de physique, puis essayent de le résoudre de manière rigoureuse, et d'un autre côté, on a la physique. Non ! En fait, on est tous confrontés au même problème. Et ce même problème, c'est le monde dans lequel on vit.

Et c'est ce monde dans lequel on vit qui est la source de la géométrie. Et une des choses les plus fascinantes, je l'avais sur les transparents, mais je n'ai pas eu le temps d'en parler si vous voulez, c'est à quel point, en fait, on s'aperçoit au bout d'un moment que le problème de comprendre la géométrie des nombres premiers n'est pas du tout un problème disjoint du problème de la compréhension de l'espace-temps. C'est-à-dire qu'il y a des reflets, il y a des choses qui se produisent, il y a ce qu'on appelle le groupe de Weil, qui correspond à la théorie de Galois, etc.

Le même auditeur : C'est passionnant de vous écouter. J'ai l'impression que j'ai un peu compris. Je voudrais poser une question peut-être encore plus naïve mais qui est liée à ma première question. J'aurais eu tendance à penser que cette formule si compliquée dans laquelle on reconnaissait quelques notations était construite de façon ascendante, à partir de l'observation et de la donnée, entre autres, de particules.

Or, dans votre dernier discours, j'ai eu l'impression de comprendre qu'une vision extérieure ou au-dessus permettait d'obtenir quelque chose qui éventuellement ferait découvrir qu'il y a une particule qu'on avait loupée. Laquelle de ces deux façons de dire les choses est la plus proche ?

ALAIN CONNES : Non, non, attention : mon point de vue est le suivant. Mon point de vue est intermédiaire entre les deux.

C'est-à-dire que je n'essaie pas de deviner. Il y a certaines théories qui essayent de deviner comment l'espace-temps devrait être. Je n'essaie pas du tout de faire ça. Ce que je dis, c'est que j'ai un cadre plus flexible pour la géométrie, je pars de cette formule et j'essaie de l'écrire de manière infiniment simple mais de manière géométrique. En fait, c'est la combinaison des deux. Mais si, par exemple, il se faisait qu'au CERN, on découvre de nouveaux raffinements, etc., la première chose qu'il faudrait comprendre, c'est "est-ce que ces raffinements sont compatibles avec cette vision géométrique des choses ?". C'est une approche entre les deux. C'est une approche qui ne consiste pas à essayer de deviner la pensée divine, etc., et de savoir pourquoi l'espace-temps... Non, pas du tout. C'est une approche très pragmatique.

J'admire beaucoup chez les physiciens les choses qui sont testées par l'expérience, et qui sont des calculs extrêmement sophistiqués. Pour moi, je ne connais pas beaucoup de physique, mais je connais deux endroits de la physique qui sont comme ça. Ces deux endroits sont le modèle standard, d'une part, et la renormalisation, d'autre part.

J'ai toujours été fasciné, si vous voulez, par le fait qu'on savait que ces choses ont à voir avec la Nature, puisqu'elles ont été testées avec cette précision faramineuse. Donc, on sait qu'elles ont à voir avec la Nature, d'accord, et c'est encore plus merveilleux si elles ont à voir avec des mathématiques qui sont des mathématiques extrêmement élaborées. Et c'est effectivement comme ça que ça se produit.

Et donc, à travers toutes ces étapes, en particulier avec Dirk Kreimer, avec l'intuition de Cartier, etc., on a compris maintenant, donc, qu'il y avait ce lien avec la théorie de Galois, enfin cette extension de la théorie de Galois, de la renormalisation. Bien sûr, les physiciens savent que la renormalisation est une théorie de l'ambiguïté. Ils le savent au départ.

ÉDOUARD BRÉZIN : Oui, mais non, si tu permets les commentaires du physicien, d'abord, je trouve que ta formule compliquée, comme tu dis, est injuste. Jamais les physiciens n'y seraient arrivés, s'ils n'avaient pas derrière, des principes extrêmement simples qui permettent d'écrire cette formule toute simple, qui sont des principes de symétrie de jauge non-abélienne, qui permettent de l'écrire en une ligne. Quand on cherche à développer ce que ça signifie pour faire un calcul, c'est vrai qu'in fine, il faut faire ça, mais jamais on n'y serait arrivés autrement et qu'ils partent d'observation, quand même, de la Nature. Donc ça, c'est le premier point.

Deuxième point, j'ai deux questions qui me gênent par rapport à ce que tu dis. La première, c'est que les physiciens savent que le modèle standard n'est qu'un modèle effectif et limité, qu'il ne peut pas prétendre être un modèle fondamental, même si pour l'instant il n'existe aucune contre-observation expérimentale qui le mette en défaut, nous savons qu'il porte de manière interne sa propre mort.

Je vois mal, dans l'approche que tu veux, comment c'est contenu... Et ma dernière question sera sur ton groupe de Galois cosmique des constantes de couplage, qui contient comme sous-groupe à un paramètre le groupe de renormalisation habituel, est-ce que tu es certain qu'il contient autre chose ? Je vais prendre un exemple. Lorsqu'on a une théorie invariante par dilatation, nous savons qu'elle est invariante également par tout le groupe conforme, mais à l'exception de la dimension 2, l'ensemble des autres symétries sont automatiquement appliquées, donc ça n'ajoute rien de nouveau d'ajouter ce groupe plus général. Est-ce que tu es certain que tu as ajouté des choses qui ont un sens dynamique concret ?

Alain Connes : Oui. Alors, je répondrai d'abord à la première question. La première question sur le modèle standard, disons que ce qui se produit, c'est la chose suivante. C'est que bien sûr, cette théorie ne prétend pas avoir la réponse ultime sur l'espace-temps ; ce qu'elle prétend simplement, c'est formuler géométriquement les connaissances que l'on a, à l'heure actuelle, sur l'espace-temps. D'accord ? C'est-à-dire qu'elle prétend dire la chose suivante, elle prétend dire que l'espace de Minkowski est une approximation qui aurait été parfaitement valable si on s'était restreint à l'électrodynamique.

C'est à dire que l'espace de Minkowski aurait été la réponse si l'on avait seulement les interactions électromagnétiques. D'accord ? Ce que dit ce modèle, d'accord ? Ce que dit cette géométrie, simplement, elle ne dit pas du tout que le modèle standard est la réponse ultime, mais elle dit qu'aux échelles de l'ordre de 10^{-16}, 10^{-17}, 10^{-18} centimètres, voilà ce que l'on voit au niveau géométrique. C'est tout. D'accord ? Et donc, si tu veux, elle prétend donc donner un cadre à la géométrie qui adapte à, qui absorbe si tu veux, ce que l'on voit à cette échelle et le rend simple.

Alors maintenant tu me dis bien sûr le modèle standard est basé sur des principes de symétrie comme les symétries de jauge, bien entendu. Mais où est-ce que ces principes interviennent justement ? Ils interviennent de la manière suivante, qui est très très compréhensible ; la symétrie de jauge se rajoute à la symétrie d'Einstein, par les difféomorphismes. Donc en fait, en gros, si tu veux, pour simplifier les choses, on a deux groupes de symétries : on a le groupe des difféomorphismes et on a le groupe des symétries de jauge.

Et alors, ce n'est pas difficile de comprendre que l'un agit sur l'autre, c'est à dire que si on regarde les transformations de jauge, ce sont des transformations qui vont dépendre du point de l'espace-temps, d'accord, et que si on agit par difféomorphisme, elles vont être chamboulées entre elles. Alors c'est ce qu'on appelle un produit semi-direct, c'est un peu comme le groupe de Poincaré, qui est le produit semi-direct du groupe des translations par le groupe de Lorentz. Alors ce n'est pas difficile de comprendre que si on voulait que les choses soient purement gravitationnelles, il faudrait que ce groupe-là soit purement le groupe des difféomorphismes ; c'est normal. C'est à dire que les gens pourraient se dire “on va chercher un espace” et c'est ce qu'ils ont fait dans la théorie de Kaluza-Klein, dont le groupe des difféomorphismes corresponde à ce produit semi-direct.

Or les mathématiques ont cela de très convaincant, c'est qu'il y a des théorèmes généraux en mathématiques, c'est à dire qu'il y a des théorèmes qui vous disent que, quelle que soit la variété que vous prendrez, si vous regardez la composante connexe de son groupe des difféomorphismes, c'est ce qu'on appelle un groupe simple (un groupe simple, c'est un groupe qui ne peut pas se casser en deux groupes, comme ça). Donc on sait, pour sûr, si vous voulez, que si l'on cherche parmi les théories de Kaluza-Klein de quelque sorte que ce soit, et si l'on n'essaye pas de tricher, c'est-à-dire de dire que les transformations vont ce qu'on appelle “préserver les fibres”, eh bien à ce moment-là, on est coincé. On est coincé, et on ne trouvera jamais un groupe comme ça. Or, ça, c'est le point de départ de la théorie : si on prend une algèbre non-commutative, et si on regarde son groupe des difféomorphismes, eh bien, il contient toujours les difféomorphismes intérieurs, c'est à dire les transformations $x \to uxu^{-1}$, d'accord, qui est un sous-groupe normal, et qui a exactement cette structure de produit semi-direct. Et ce qui est étonnant, c'est que la terminologie mathématique, ce qu'on appelle les automorphismes intérieurs, coïncide avec la terminologie physique, qu'on appelle les symétries internes. Donc c'est ça le point de départ. Le point de départ, c'est que l'idée que l'on a de la géométrie est une idée trop, comment dire, corsetée, d'accord, et que même dans les théories qui prétendent être des généralisations, etc., eh bien ce sont des théories qui en fait sont constamment, en fait, corsetées par la même idée d'espace géométrique, qui est une idée beaucoup trop restreinte ; donc, c'est ça, l'idée. Si tu veux, l'idée fondamentale, ce n'est pas que bien sûr on va jeter les principes de symétrie, qui sont les principes de géométrie, mais c'est qu'on va les rendre entièrement géométriques, et entièrement gravitationnels. C'est à dire que l'action dont je parlais, n'est pas une action qui à un bout de théorie de jauge, Yang-Mills, etc., elle s'écrit une fois pour toutes, elle s'écrit en un seul bloc, c'est une action purement gravitationnelle. C'est une action qui dans le cas de l'espace de Minkowski, etc., ou dans le sens de l'espace de l'électrodynamique, redonnerait exactement l'action d'Einstein, c'est tout. Elle ne donnerait rien d'autre, elle ne donnerait pas de terme de jauge.

Un auditeur : Et la supersymétrie ?

Alain Connes : Alors, la supersymétrie n'apparaît pas, je ne veux pas parler de la supersymétrie, puisque bon, je veux dire... elle n'apparaît pas, d'accord. Donc, ce que l'on a, c'est un principe, qui permet de passer de manière naturelle, c'est très simple à comprendre, du secteur fermionique, c'est le secteur fermionique du modèle standard qui spécifie la géométrie. Et il y a un procédé, qui est entièrement mathématique, qui permet de passer, entièrement de manière canonique, de la partie fermionique à la partie bosonique, mais qui n'est pas la supersymétrie.

Alors, tu avais posé une deuxième question, c'était sur... Je ne me souviens pas.

Édouard Brézin : La question c'était, est-ce que tu es certain que ce groupe de Galois cosmique contient plus que simplement le zéro de la fonction β habituelle ?

Alain Connes : Non, alors, je peux te dire ce qu'il contient. D'abord, si tu veux, il y a une fonction β par constante de couplage.

Or, dans ce groupe-là, justement dans le groupe intermédiaire qui est au milieu, qui est le groupe qui est associé à l'algèbre de Hopf des graphes, etc., il y a une seule fonction β, qui va s'envoyer, par les différentes applications, vers les différentes fonctions β. Alors, en gros, le groupe de Galois cosmique, ce qu'il contient, ce sont les composantes homogènes de cette fonction β par puissance de $\hbar$, en gros. Et il contient l'algèbre de Lie qu'elles engendrent.

Et ce qui est nouveau, et ce qui n'était absolument pas dans la littérature ordinaire, c'est le fait qu'il y a une algèbre de Lie. Et justement, que ce groupe est engendré par l'algèbre de Lie des composantes de la fonction β. Et si tu veux, le point essentiel, dont je n'ai pas, bien sûr, eu le temps de parler, c'est un théorème qui est, je pense, dû à 't Hooft et à David Gross, et qui dit qu'on peut calculer les contre-termes dans la régularisation dimensionnelle, avec la soustraction minimale, uniquement en termes de la fonction β.

Donc, tout est basé là-dessus. Sur le fait que les contre-termes sont indépendants de ce qu'on appelle le paramètre massif μ, etc. Donc, tout est basé là-dessus.

C'est basé sur un tas de formules. Et si tu veux, le fait que, justement on puisse écrire, une fois pour toutes, les contre-termes, à partir de ce groupe cosmique, vient de là. Donc, c'est ça, l'idée.

Alors, je veux dire, au moins, ça a un mérite, si tu veux, c'est que, pour les mathématiciens, c'est un paradis, parce qu'on relie à des théories qu'on connaît bien, comme la théorie de Galois, etc. Et ensuite, on s'attend à ce que le potentiel de la théorie de Galois... J'en ai discuté avec Ramis. Je veux dire, on a l'exemple de l'impossibilité de résoudre le problème des trois corps à partir de la théorie de Galois différentielle, on s'attend à ce qu'on puisse transplanter ces idées de la théorie de Galois, de la théorie de Galois différentielle, au cas de la renormalisation. D'accord ? Il y a un autre aspect, dont je ne parle pas, qui est extrêmement important.

Ce sont les travaux de Bloch, Kreimer et Esnault, sur l'aspect théorie des nombres. C'est-à-dire que les transcendants qui apparaissent en théorie des champs, on sait bien que $\zeta(3)$ intervient dans le calcul du moment anormal de l'électron, eh bien, sont gouvernés par ce groupe de Galois cosmique. C'est-à-dire, c'est la théorie des motifs de Grothendieck, qui est derrière, et qui gouverne ces nombres transcendants.

Donc je veux dire, il y a un paysage merveilleux à découvrir. On ne sait pas si ce paysage aura tant que ça de conséquences sur la physique. Ce n'est pas ça qui nous intéresse.

Ce qui nous intéresse, c'est de comprendre.

Édouard Brézin : Je propose qu'on revienne aux questions terre-à-terre, si on peut. Oui, monsieur.

Un auditeur : Ma question concerne les nombres premiers. Et c'est une question qui concerne la conjecture de Goldbach. Alors, la conjecture de Goldbach a le gros avantage d'être extrêmement simple dans son énoncé, ou bien d'être suffisamment simple, non seulement pour être comprise des jeunes qui sont ici, mais même de beaucoup plus jeunes.

Et cette conjecture est que "tout entier pair supérieur à 2 peut être mis sous la forme de la somme de deux nombres premiers et deux seulement". Alors, je voulais savoir si c'est toujours une conjecture, d'abord. Et ensuite...

Alain Connes : Je ne suis pas vraiment la personne la mieux placée, je dois vous dire, pour vous répondre, à l'instant t, je ne saurais pas vous dire. Je ne pense pas, non, ce n'est pas démontré.

Édouard Brézin : Est-ce qu'il y a d'autres questions ? Oui, Denis ? (Ah, monsieur Tits, oui).

Denis : Dans tout ce dont on parle, on ne parle jamais du fait que, dans le fond, on ne sait pas ce qu'est la gravité. C'est bon, vous avez parlé, il y a quand même la force d'Archimède, des choses comme ça. Enfin, tout ça, c'est quand même assez vague quand on pense que la Terre tourne à une vitesse, elle fait un tour en un jour, et que par conséquent, si on était, nous, sur une ligne, qui nous paraît comme une vraie rectiligne, on se trouverait à plusieurs mètres de hauteur en l'espace de quelques secondes. Alors, ça, on ne paraît pas en tenir compte du tout.

Alain Connes : Je ne pense pas que je puisse répondre à ça.

Édouard Brézin : Oui, mais c'est de la physique. Monsieur Tits, oui.

L'auditeur :*(on lui a ostensiblement tourné le dos)* Ça me paraît important de tenir compte de ça.

Jacques Tits : Il y avait ici un problème de physique[5] J'ai deux petites questions : à propos du modèle standard. C'est la plus grande formule que j'ai jamais vue de ma vie. Je voudrais te demander s'il y a derrière cette formule une structure telle que, par exemple, toi, rentré chez toi et que tu oublies tout ça, tu peux la reconstruire facilement.

Alain Connes : Oui, bien sûr, si tu veux. Oui, oui. Au niveau... Non, non, non. Ce qu'il faut voir... Bon, on a déjà eu la discussion, si tu veux, là-dessus. C'est-à-dire que, d'une part, il y a les principes de physique comme invariance de jauge, etc., dont on parlait.

Mais, en fait, ce que je disais simplement, si tu veux, c'est qu'on peut l'écrire géométriquement, mais après, il y a un calcul à faire. Il faut faire ce calcul. Ce calcul, c'est un calcul d'équation de la chaleur, etc., d'un développement qui donne quantité de termes.

Donc, en fait, on peut l'écrire de manière infiniment simple, je pense plus simple qu'en disant... on a le principe de Yang-Mills. On écrit un potentiel quartique pour les Higgs. On écrit le couplage minimal entre les Higgs et les champs de jauge, ce que, normalement, il faudrait dire...

On écrit le couplage de Yukawa entre les champs de Higgs et les fermions, etc. Ce que je dis, moi, simplement, si tu veux, c'est qu'on a un espace. Je donne cet espace.

Après, pour cet espace, il faut faire le calcul de ce que c'est que la gravitation. On obtient une partie interne dans les $g_{\mu\nu}$, dans la gravitation. Et ensuite, on a un principe d'action qui est extrêmement simple, qui est simplement le nombre de valeurs propres.

Ce nombre de valeurs propres, on le calcule par un calcul mathématique, qui est compliqué, mais qui va donner tous ces termes-là.

Édouard Brézin : Monsieur Tits, c'est un peu comme les équations de Maxwell. Quand Maxwell les écrivait, il écrivait 12 équations, puisqu'il y avait 4 équations pour des trivecteurs.

[5] *(parlant vraisemblablement du micro, qui n'a pas fonctionné du premier coup)*

Aujourd'hui, nous l'écrivons en une demi-ligne. $d\mu\, f_{\mu\nu} = g_{nu}$. Voilà l'ensemble des 12 équations.

Alain Connes : Alors, attention, Cette simplification, elle était déjà présente. C'est-à-dire que les indices, ils étaient déjà là. On n'a pas développé les indices. C'est-à-dire que dans l'équation que tu as vue, il y avait, par exemple, je ne sais pas moi, il y avait des indices g, μ, etc. Tous ces indices-là, on fait la somme sur ces indices. Donc ça, je ne l'ai pas développé, heureusement.

Donc effectivement, si tu veux... Et ce qui est vrai, c'est que si tu écris Maxwell... Je vais peut-être la sortir, cette formule. Non, parce que je veux dire... Justement, on entend trop facilement dire par les physiciens... C'est vrai ce qu'ils disent. C'est parfaitement vrai. C'est parfaitement vrai qu'on l'obtient à partir des principes, etc. Mais il faut quand même l'avoir vue une fois. D'accord ? Il faut quand même... C'est une espèce de Pierre de Rosette, on peut dire, d'une certaine manière.

Voilà. Alors, la voilà, la formule. Alors maintenant, vous pouvez me poser des questions sur cette formule, d'accord[6].

---

[6]

Bosons : A_μ, W_μ, Z^0, g_μ
Quarks : u^κ, d^κ
Leptons : e^λ, ν^λ
Higgs : H, ϕ^0, ϕ^+, ϕ^-
Masses : m_d, m_u, m_e, m_h, M_W
$g = \sqrt{4\pi\alpha}$, g_s (interaction forte)
$C_{\lambda\kappa}$: matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
f^{abc} : constantes de $SU(3)$
Jauge de Feynman.
Les fantômes de Faddeev-Popov sont omis pour simplicité.*Note de la transcriptrice : Dans la page suivante, est fournie une expression de la formule en question (je n'ai pas vérifié s'il s'agissait exactement de la formule présentée dans l'exposé d'Alain Connes).*

Notations de Martinus Veltman :

Bosons : A_μ, W_μ, Z^0, g_μ
Quarks : u^κ, d^κ
Leptons : e^λ, ν^λ
Higgs : H, ϕ^0, ϕ^+, ϕ^-
Masses : m_d, m_u, m_e, m_h, M_W
$g = \sqrt{4\pi\alpha}$, g_s *(interaction forte)*
$C_{\lambda\kappa}$ *: matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*
f^{abc} *: constantes de* $SU(3)$
Jauge de Feynman.
Les fantômes de Faddeev-Popov sont omis pour simplicité.

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_{SM} = \\
-\frac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc} f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \\
\frac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \frac{1}{2c_w^2} M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - igc_w[\partial_\nu Z^0_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - \\
Z^0_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] - igs_w[\partial_\nu A_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - \\
W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] - \\
\frac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \frac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2 (Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + \\
g^2 s_w^2 (A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w [A_\mu Z^0_\nu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - \\
2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu] - \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - 2M^2 \alpha_h H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \beta_h\left[\frac{2M^2}{g^2} + \frac{2M}{g}H + \right. \\
\left.\frac{1}{2}(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-)\right] + \frac{2M^4}{g^2}\alpha_h - g\alpha_h M[H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-] - \frac{1}{8}g^2\alpha_h[H^4 + (\phi^0)^4 + \\
4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2H^2] - gMW^+_\mu W^-_\mu H - \frac{1}{2}g\frac{M}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu H - \\
\frac{1}{2}ig[W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)] + \frac{1}{2}g[W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \\
\phi^-\partial_\mu H) - W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)] + \frac{1}{2}g\frac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) + M(\frac{1}{c_w}Z^0_\mu\partial_\mu\phi^0 + \\
W^+_\mu\partial_\mu\phi^- + W^-_\mu\partial_\mu\phi^+) - ig\frac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_wMA_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - \\
ig\frac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_wA_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \frac{1}{4}g^2W^+_\mu W^-_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + \\
2\phi^+\phi^-] - \frac{1}{8}g^2\frac{1}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2\phi^+\phi^-] - \frac{1}{2}g^2\frac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \\
\frac{1}{2}ig^2\frac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \frac{1}{2}g^2s_wA_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) + \frac{1}{2}ig^2s_wA_\mu H(W^+_\mu\phi^- - \\
W^-_\mu\phi^+) - g^2\frac{s_w}{c_w}(2c_w^2 - 1)Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - g^2s_w^2A_\mu A_\mu\phi^+\phi^- + \frac{1}{2}ig_s\lambda^a_{ij}(\bar{q}^\sigma_i\gamma^\mu q^\sigma_j)g^a_\mu - \bar{e}^\lambda(\gamma\partial + \\
m^\lambda_e)e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_\nu)\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial + m^\lambda_u)u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial + m^\lambda_d)d^\lambda_j + igs_wA_\mu[-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \\
\frac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \frac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)] + \frac{ig}{4c_w}Z^0_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda) + \\
(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(\frac{4}{3}s_w^2 - 1 - \gamma^5)d^\lambda_j) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1 - \frac{8}{3}s_w^2 + \gamma^5)u^\lambda_j)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}}W^+_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)U^{lep}_{\lambda\kappa}e^\kappa) + \\
(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1+\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}}W^-_\mu[(\bar{e}^\kappa U^{lep}_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^\lambda_j)] + \\
\frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m^\kappa_e(\bar{\nu}^\lambda U^{lep}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)e^\kappa) + m^\lambda_\nu(\bar{\nu}^\gamma U^{lep}_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)e^\kappa)] + + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m^\lambda_e(\bar{e}^\lambda U^{lep\dagger}_{\lambda\kappa}(1 + \\
\gamma^5)\nu^\kappa) - m^\kappa_\nu(\bar{e}^\lambda U^{lep\dagger}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)\nu^\kappa)] - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_\nu}{M}H(\bar{\nu}^\lambda\nu^\lambda) - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_e}{M}H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_\nu}{M}\phi^0(\bar{\nu}^\lambda\gamma^5\nu^\lambda) - \\
\frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_e}{M}\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5e^\lambda) - \frac{1}{4}\bar{\nu}_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1-\lambda^5)\hat{\nu}_\kappa - \frac{1}{4}\overline{\bar{\nu}_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1-\lambda^5)\hat{\nu}_\kappa} + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m^\kappa_d(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1 - \\
\lambda^5)d^\kappa_j) + m^\lambda_u(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1+\lambda^5)d^\kappa_j)] + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m^\lambda_d(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m^\kappa_u(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1 - \\
\lambda^5)u^\kappa_j)] - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_u}{M}H(\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_d}{M}H(\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_u}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5u^\lambda_j) - \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_d}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5d^\lambda_j)
\end{gathered}
$$

Alors en particulier, il y a une erreur[7]. Il y a une erreur. Il y a une erreur quelque part, hein, Brézin ?... Il y a une erreur quelque part.

Édouard Brézin : Il n'y a pas de terme quartique dans ton potentiel de Higgs ?

Alain Connes : Si, si... si, si, si.

Édouard Brézin : Où est-ce qu'il est ?

Alain Connes : Si, si, il y a des termes quartiques dans le potentiel de Higgs. Bien sûr.

Édouard Brézin : Ah, je ne les vois pas...

Alain Connes : Si, si, ils y sont. H^2 ici. Si, si, ils y sont, les termes quartiques.

Si, si, ici, tu vois. $H^2, \varphi^+, \varphi^-$. Ça, c'est un terme quartique de Higgs. D'accord ? Non, non, il n'y a pas de problème.

Il y a des termes qui... Je pourrais te poser des questions. Par exemple, est-ce que tu saurais me dire qu'est-ce que c'est que cette constante ? Ça, je ne l'avais pas trouvée β_H. Est-ce que tu saurais me dire ce que c'est ? Les autres, ce n'est pas difficile.

Mais celle-là, est-ce que tu saurais me dire ce que c'est ? Je suis dur, hein, quand même.

Édouard Brézin : Attends, mais c'est la masse d'huile...

Alain Connes : Non, absolument pas. Non, non, ce n'est pas la masse d'huile. C'est ce qu'on appelle la constante de *tadpole*. C'est la constante de *tadpole*, ce qu'on appelle. C'est le terme linéaire. C'est le terme linéaire qu'on annule en disant que le *tadpole* est nul. D'accord ? D'accord.

Qu'est-ce que c'est que M ? M... D'accord. Dans cette formule, il faut bien voir que, tout de même, dans cette formule, si vous voulez, on a la sommation sur les indices. C'est-à-dire les gluons, par exemple, ici, ils ont un indice de couleur qui est le petit a, et ils ont l'indice du bas.

Donc, je veux dire, on n'a pas développé. Alors, si vous connaissez les termes, vous vous apercevrez que ce n'est pas si compliqué que ça, parce qu'au bout d'un moment, on reconnaît les termes, etc., etc. Ce n'est pas ça, la question.

Ce n'est pas ça, la question. La question, pour un mathématicien, ce n'est pas ça du tout. D'accord ? Ce n'est pas de refaire le trajet en sens inverse.

Le mathématicien, il n'a pas du tout envie de refaire en sens inverse le trajet du physicien. Bien sûr que non. D'accord ? Il a envie de prendre cette formule, bon, et il a envie de la comprendre

[7] Pour retrouver, peut-être, la formule du modèle standard de l'exposé, se reporter à cet article d'Alain Connes sur arxiv https://arxiv.org/pdf/hep-th/0608226.pdf, pages 10 et 11.

sous forme géométrique, qui est autre.

Sinon, justement, il ferait le trajet en sens inverse, c'est tout ce qu'il ferait. Monsieur Kahane.

Jean-Pierre Kahane : Oui, j'ai une question sur les nombres premiers. André Weil considérait que, malgré le succès d'HAdamard et de la Vallée-Poussin, la théorie des nombres premiers n'avait plus rien à voir avec la théorie des fonctions. Il a introduit l'idée que c'était un problème de géométrie algébrique.

Alain Connes : Absolument.

L'auditeur : Et c'est exactement le cadre dans lequel tu as fait ton exposé.

Alain Connes : Tout à fait.

Jean-Pierre Kahane : Il n'empêche... qu'il y a des progrès récents dans la théorie des nombres premiers, qui retournent au point de vue de l'analyse classique, avec la théorie ergodique, avec l'analyse de Fourier, les résultats de Green et Tao, sur les nombres premiers en progression arithmétique.

Quel est ton sentiment sur les modes d'attaque de la théorie des nombres premiers ?

Alain Connes : Disons que mon sentiment est le suivant. Mon sentiment, j'aurais une déception terrible s'il s'avérait qu'un jour, quelqu'un démontre, par exemple cette hypothèse de Riemann, par des moyens, comment dire, qui ne débouchent pas sur une nouvelle théorie. C'est-à-dire que pour moi, l'intérêt d'un problème mathématique n'est pas de savoir si oui ou non, c'est vrai.

Puisqu'au fond, la majorité d'entre nous sommes convaincus que la fonction ζ de Riemann a les zéros où il faut, et un physicien dirait que l'hypothèse de Riemann est vraie. Donc, je vais dire, le problème n'est pas tellement de savoir si le problème est vrai ou pas, non, pour moi, l'intérêt d'un problème mathématique, justement, c'est comme force motrice pour développer de nouvelles théories. Or, s'il s'avérait que, bon, on arrive à le résoudre par un biais, etc., et qui ne débouche pas sur une nouvelle théorie, mais je ne prétends pas du tout que ce que tu dis, si tu veux, si par exemple cette théorie, c'était une théorie ergodique, convenable, un peu dans le sens de Furstenberg, etc., ce serait merveilleux, bien sûr, tout le monde applaudirait.

Mais ce que j'espère, si tu veux, c'est que ma familiarité avec le problème, j'avais d'autres transparents, etc., me fait voir qu'il y a un espace. Bon, en fait, à nouveau, c'est une espèce d'espace non-commutatif, etc., qui donne, en fait, à la formule explicite, la valeur d'une formule de trace. C'est vraiment une formule de trace.

Donc, pour moi, en fait, un problème comme ça est un problème qui est une motivation extraordinaire pour développer la géométrie, découvrir de nouvelles choses, et justement, j'espère qu'à l'occasion de ce problème de la conjecture de Riemann, en fait, on découvrira la vraie géométrie de la droite. Parce qu'il s'agit là du corps des nombres rationnels. Donc, ça montre l'étendue de notre ignorance.

Je veux dire, autant on sait quelque chose à propos des corps finis et des corps de fonctions, etc., autant on a une ignorance incroyable à propos du corps des rationnels. Donc, qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire, bon, eh bien, on écrit 36 traités, etc., mais en fait, on ne comprend pas même la chose la plus simple, d'accord ? Puisqu'on n'arrive pas à résoudre ce problème. Et ce que j'espère, c'est qu'on ne le résoudra pas de biais, d'accord ? C'est-à-dire qu'on découvrira les concepts qu'il faut justement, au moment, et à propos de cette résolution.

Édouard Brézin : Est-ce qu'il y a d'autres questions ? Oui, Roger Balian.

Roger Balian : Le modèle standard contient, je ne sais pas exactement combien, 15, 16...
Alain Connes : 19.

Roger Balian : ...paramètres indépendants. Est-ce que la vision géométrique que tu mets dessous risque de les réduire ?

Alain Connes : D'accord. Alors, si tu veux, la manière dont les paramètres... D'abord, il y a deux types de paramètres. L'essentiel des paramètres dont tu parles interviennent dans la métrique sur l'espace fini. C'est-à-dire qu'en gros, si tu veux, la géométrie, c'est la géométrie standard sur l'espace ordinaire.

On a cet espace fini. Cet espace fini a une géométrie qui est donnée par son opérateur de Dirac qui, ici, est la matrice de Yukawa. La matrice de Yukawa ne contient pas tous, mais la plupart, des paramètres du modèle standard.

D'accord ? Et en particulier, elle ne contient pas, par exemple, le couplage quartique du Higgs, des choses comme ça. Alors, ce que donne le modèle, il donne, entre guillemets, parce que ce n'est pas vraiment une prédiction puisque, justement, comme le disait très bien Brézin, on ne sait pas du tout ce qu'il va advenir à des énergies plus grandes. Mais si on l'extrapole, ce qui est idiot, je veux dire, si on l'extrapole à l'énergie d'unification, eh bien, il donne une valeur pour la constante de couplage quartique du Higgs. Donc, il donne, en gros, une valeur de la masse du Higgs de l'ordre de 160 GeV, ou quelque chose comme ça.

Mais ce n'est pas une prédiction. Et ce n'est pas une prédiction parce que, justement, c'est stupide de penser que rien ne va se produire lorsqu'on va à des énergies plus grandes. D'accord ? Donc, ça réduit un peu.

Par exemple, ça donne le même angle de Weinberg. Ici, on avait les constantes C_w et S_w qui sont le cosinus et le sinus de l'angle de Weinberg. Ça donne le même angle de Weinberg que pour l'unification de la SU(5), bon.

Donc, ça donne un certain nombre de choses, qui ne sont pas contradictoires, qui ne sont pas... D'accord. Mais ce qu'il faut bien voir, c'est exactement comme le disait Brézin. C'est un modèle effectif de la géométrie de l'espace-temps.

Il ne faut pas y voir plus. Ce n'est pas du tout une réponse à des choses faramineuses, etc. Pas du tout.

C'est un modèle qui consiste à dire qu'on a une géométrie qui est plus facile, plus appropriée, etc. Mais on va regarder ce que ça donne. Et ça donne, effectivement, que les paramètres libres du modèle standard, tels que la matrice de couplage de Yukawa ou de Kobayashi-Maskawa, etc., eh bien, elles sont contenues dans la partie géométrique, d'accord ? Donc, elles donnent la géométrie de l'espace fini. D'accord ?

Édouard Brézin : Très bien. Je peux t'interroger sur les nombres premiers ?

Alain Connes : Bien sûr.

Édouard Brézin : Il y a cette infinité de zéros de la fonction ζ.

Alain Connes : Oui.

Édouard Brézin : Apparemment, expérimentalement, ils sont donnés par des valeurs propres de matrice aléatoire.

Alain Connes : Tout à fait.

Édouard Brézin : Est-ce que tu as une... Est-ce que ça te paraît une propriété intéressante ?

Alain Connes : Bien sûr. C'est une propriété incroyablement intéressante. J'avais des transparents plus loin, etc., qui consistaient justement à comparer... Oh, je me demande... Tu me permets de...

Édouard Brézin : Oui, oui. D'accord.

Alain Connes : Bon, j'avais un transparent après qui consistait justement à partir de là.

Alors, il y a une chose qui est effectivement merveilleuse qui se produit, c'est que les gens n'ont pas pu ne pas être frappés par l'analogie, c'est exactement ce que vient de dire Brézin, entre le nombre de valeurs propres d'un opérateur hamiltonien plus petit que E, d'accord, et le nombre de zéros de la fonction ζ, qui est tracée ici, c'est la fonction d'escalier, plus petit qu'une énergie E donnée.

D'accord. Mais alors, les gens ont été arrêtés pendant très longtemps par le fait que si on regarde la partie oscillatoire, c'est-à-dire une partie moyenne que Riemann avait calculée comme étant

$$\frac{E}{2\pi}\left(\log\frac{E}{2\pi}-1\right)+\frac{7}{8}+o(1).$$

D'accord. Et les gens ont été arrêtés pendant très longtemps par le fait que si on compare le cas de Riemann avec le cas des systèmes hamiltoniens, il y a un signe qui cloche. Il y a le signe moins.

D'accord.

Alors, ça, ça a été résolu en partant précisément du fait qu'en physique, il y a deux types de spectres.

Il y a ce qu'on appelle les spectres d'émission qui sont les raies blanches sur un fond noir. D'accord. Il y a les spectres, comme le spectre de Fraunhofer, qu'on voit lorsqu'on regarde les rayons du soleil qui sont ce qu'on appelle les spectres d'absorption.

Donc, en fait, la réalisation spectrale des zéros de ζ, c'est une réalisation par spectre d'absorption. Et alors, une des choses qui est remarquable, c'est qu'il y a un espace, effectivement. Bon, je n'ai pas voulu en parler.

C'est un espace qu'on appelle *l'espace des classes d'adèles*. Et c'est un espace qui contient justement les orbites, exactement comme les orbites du Frobenius dans le cas des nombres premiers. Mais si on regarde cet espace, eh bien, on trouve exactement le calcul de Riemann avec $\frac{E}{2\pi}\left(\log\frac{E}{2pi}-1\right)$ par un calcul de mécanique quantique.

D'accord. Et avec un spectre d'absorption. C'est-à-dire que ce qu'on trouve, c'est qu'on a la lumière blanche moins des raies spectrales qui ont été absorbées.

Si on fait le calcul de manière plus précise, on trouve le $\frac{7}{8}$ et le petit $o(1)$, exactement comme dans Riemann. D'accord. Donc, en fait, on commence à avoir... Alors, bien sûr, il y a bien d'autres résultats.

Je veux dire, il y a toutes sortes de gens qui ont travaillé sur les matrices aléatoires, la correspondance, etc., avec ζ. Mais c'est une des choses qui sont extrêmement fascinantes. Justement, c'est le fait qu'il y a cette comparaison qui n'est pas du tout triviale, qui n'est pas du tout évidente puisqu'il y avait énormément de gens qui avaient essayé d'écrire, justement, la formule explicite de Riemann comme une formule de trace.

La raison pour laquelle ça ne marchait pas, c'est ce signe mois. D'accord ? On pourrait parler pendant des heures là-dessus. Mais ça bouge.

Édouard Brézin : Je ne vois plus de mains qui se lèvent. Si, monsieur Tits ?

Jacques Tits : Tu as fait allusion à une formule de Birkhoff. Est-ce que tu peux dire de quoi il s'agit ?

Alain Connes : Alors, la formule de Birkhoff, c'est la formule qui, disons, lorsqu'on regarde un fibré holomorphe sur la sphère, d'accord, eh bien, on peut se dire qu'on peut voir un fibré holomorphe sur la sphère comme étant obtenu en prenant un fibré trivial en haut et un fibré trivial en bas, et en les recollant.

Et on recolle ces fibrés par une application qui va d'un cercle vers le groupe GL_n. D'accord ? Alors, la décomposition de Birkhoff consiste à faire le chemin inverse. C'est-à-dire, lorsqu'on vous donne une application d'un cercle, qui est un hémisphère, par exemple, vers le groupe GL_n, ça consiste à écrire cette application comme le rapport entre une fonction qui est holomorphe dans l'hémisphère du bas et une fonction qui est holomorphe dans l'hémisphère du haut, d'accord ?

D'accord ? Et alors, ce qui est étonnant, c'est que, dans le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ce n'est pas toujours possible. C'est la théorie de Grothendieck-Birkhoff, etc., des fibrés holomorphes sur la sphère qui ont des obstructions topologiques, etc. Mais lorsqu'on regarde des groupes qui sont des groupes comme le groupe des graphes de Feynman, des groupes unipotents, c'est toujours possible et c'est donné par une formule récursive et la merveille, c'est que cette formule récursive, c'est exactement la formule de BPHZ, de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann.

C'est exactement identique à ça.

Jacques Tits : En fait, c'est ce que je pensais, c'est une formule tout à fait analogue à une formule de double classe.

Alain Connes : Oui, c'est ça.

Jacques Tits : On transforme la grosse cellule d'un côté en la grosse cellule de l'autre côté.

Alain Connes : Oui, c'est exactement ça, c'est tout à fait ça.

Édouard Brézin : Bien, je crois qu'il nous reste à remercier Alain Connes. Je crois que c'était une très belle illustration de la puissance des mathématiques.

Conférence d'Alain Connes "*Évariste Galois et la théorie de l'ambiguïté*", à l'Académie des Sciences, dans le cadre du Colloque pour le bicentenaire de la naissance de Galois (29 novembre 2011).

Le Président de séance : Bien, mesdames, messieurs, nous avons à l'évidence une séance exceptionnelle, d'ailleurs, une audience exceptionnelle, mais pour un homme exceptionnel, dont la vie, exceptionnellement courte, a été exceptionnellement productive. Nous avons la chance d'avoir Alain Connes, qui va nous parler d'un aspect particulier d'Évariste Galois, qui est la relation que Galois a entretenue avec les académiciens des sciences à l'époque. Alain Connes, vous avez la parole.

Alain Connes : En fait, mon exposé aura deux parties. Dans la première partie, j'expliquerai, si vous voulez, effectivement les relations très complexes, beaucoup plus complexes qu'on ne le dit, entre Évariste Galois et les académiciens de son époque. Et dans la deuxième partie, j'essaierai de vous expliquer, de la manière la plus simple possible, ce qu'est la théorie de l'ambiguïté.

Donc, je commencerai par vous montrer un portrait bien connu d'Évariste Galois. Et ensuite, on ira très, très rapidement à travers une chronologie que je n'utiliserai que quand j'en aurai besoin, parce que, si vous voulez, je vous décrirai en gros ce qui s'est passé pendant ces trois années, qui marquent la fin de la vie de Galois. Et donc, je ne reviendrai dans les détails de la chronologie qu'occasionnellement.

Et donc, vous m'excuserez si je passe très vite sur cette chronologie. Après, on reprendra le fil des événements de manière beaucoup plus lente. Donc, la chronologie, évidemment, Galois naît il y a 200 ans, le 25 octobre 1811.

La première date marquante, c'est en avril 1829, c'est la mort d'Abel, parce qu'on verra que les destins d'Abel et de Galois sont incroyablement reliés l'un à l'autre. À la même époque, le 25 mai et le 1er juin, Cauchy présente les premiers travaux de Galois à l'Académie. Cette même année, en juillet, le père de Galois se suicide.

Galois échoue pour la deuxième fois à Polytechnique, mais il est reçu à l'ENS, ce qui s'appelait à l'époque l'École préparatoire. Le 18 janvier 1830, il y a une lettre de Cauchy très importante que je vous montrerai. Et en février 1830, Cauchy remet au Secrétaire perpétuel de l'Institut, qui était Joseph Fourier, le mémoire de Galois sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.

Et il lui demande, justement, de faire concourir ce Mémoire pour le Grand Prix des Sciences mathématiques. Le 28 juillet 1830, le Grand Prix des sciences mathématiques de l'Académie est attribué à Abel et Jacobi. La même année, en juillet, c'est un événement politique très important, les Trois Glorieuses, que vous connaissez tous, mais qui fait que Cauchy part.

Donc Cauchy part de France pour de nombreuses années. Il va à Turin. En janvier 1831, Galois est exclu de l'École Normale.

Le 13 janvier 1831, il inaugure, dans une librairie au 5 rue de la Sorbonne, on y reviendra, avec 30 élèves, un cours privé d'Algèbre supérieure, visant explicitement à suppléer les carences de l'enseignement public. La même année, en 1831, Galois réécrit et soumet à l'Académie, sur les conseils de Poisson (Poisson faisait partie du jury qui a exclu Galois de l'École Normale), son mémoire perdu relatif aux conditions de résolubilité des équations algébriques par radicaux. Le 9 mai, il est arrêté. Il y a un banquet bien connu, qui était donné pour l'acquittement de certains républicains, et Galois avait levé son verre à Louis-Philippe, mais en tenant un couteau à la main. Le 15 juin, il est acquitté. Le 4 juillet 1831, il reçoit le rapport négatif de Poisson sur ses travaux. On le verra, ce rapport, je l'ai dans les documents. Et bon, ensuite, la fin, vous la connaissez, Galois passe de nombreux mois en prison. Il est arrêté le 14 juillet, peu de temps après avoir reçu le rapport de Poisson, il est arrêté à la tête d'une manifestation. Et cette fois, il est arrêté pour port d'arme illégal. Il n'est pas jugé par un jury (il y avait un jury populaire), donc, il reste en prison très, très longtemps. Il est enfermé à la prison Sainte-Pélagie. Il en ressort le 16 mars, mais simplement parce qu'il y a le choléra dans Paris.

Et il est libéré, mais pas vraiment : il est dans une maison de santé privée. Et enfin, bon, il y a le mercredi 30 mai qui est le jour du duel et il meurt le lendemain.

Alors, évidemment, ça, c'est extrêmement rapide, c'est simplement pour vous donner quelques repères. Et on y reviendra quand on aura des problèmes de date. Donc, un personnage central, c'est le personnage d'Abel qui meurt le 5 avril 1829, alors que Galois a 17 ans.

Et Abel avait eu déjà des relations assez complexes et assez compliquées avec Cauchy. Et je vais vous montrer une lettre d'Abel dans laquelle il parle de Cauchy. Je m'inspire là, bien sûr, d'un merveilleux article d'*Histoire des mathématiques* de René Taton, sur lequel je reviendrai à maintes reprises.

Donc, Abel écrit à propos d'Augustin Cauchy la chose suivante :

> *"Cauchy est fou et il est impossible d'avoir affaire avec lui. Pourtant, c'est lui qui, à présent, est le mathématicien qui sait comment doivent être traitées les mathématiques. Ses travaux sont excellents, mais il écrit obscurément.*
>
> *D'abord, je ne comprenais presque rien à ses œuvres. Maintenant, j'y arrive mieux. Cauchy est infiniment catholique et bigot. Chose bien singulière pour un mathématicien ! D'ailleurs, il est le seul qui travaille les mathématiques pures. Poisson, Fourier, Ampère, etc. s'occupaient exclusivement de magnétisme et d'autres parties de la physique."*

Donc ça, c'est une lettre qu'Abel avait écrite en 1826. Il est bien connu que Cauchy et l'Académie ont pris du temps pour reconnaître les travaux d'Abel, mais ça a été fait.

Donc ça, c'est un portrait de Galois qui a été fait, je pense, par Augustin Chevalier, de mémoire, après la disparition de Galois. Mais qui dit beaucoup de choses sur Galois, en fait. Donc la relation entre Galois et Abel est très intéressante.

Alors voilà ce que Galois a écrit. En gros, si vous voulez, ce qui s'est passé, c'est que Galois, en 1829, avait donné deux manuscrits à l'Académie. Et après la mort d'Abel, il a appris que ses travaux étaient largement anticipés par ceux d'Abel.

Et ça lui a donné un coup, évidemment. Mais bon, voilà ce qu'il dit après[1].

> *"Dans tous les cas, il me serait aisé de prouver que j'ignorais même le nom d'Abel quand j'ai présenté à l'Institut, mes premières recherches sur la théorie des équations, et que la solution d'Abel n'aurait pu paraître avant la mienne.*

Donc ça, c'est écrit à la prison, quand il était à la prison Sainte-Pélagie, en décembre 1831, donc la dernière année de sa vie. Cette note a pour but essentiel d'affirmer l'indépendance des travaux de Galois par rapport à ceux d'Abel. Galois qui connaissait alors une lettre qu'Abel avait envoyée à Legendre, il y avait une très longue correspondance entre Abel et Legendre, le 25 novembre 1828. Et voilà ce que dit Galois. Il dit :

> *"Mais la mort anticipée de ce géomètre, ayant privé la science des recherches promises dans cette lettre, il n'en était pas moins nécessaire de donner la solution d'un problème qu'il m'est bien pénible de posséder, puisque je dois cette possession à une des plus grandes pertes qu'aura faite la science."*

Donc il n'y avait pas du tout d'antipathie ou quoi que ce soit, il n'y avait même pas de rivalité. En gros, si vous voulez, Abel disparaît exactement où Galois commence à exister dans le paysage mathématique. Donc voilà Cauchy.

Il est né en 1789, donc quand Galois naît, il avait déjà 22 ans. Je veux dire, c'était un mathématicien extraordinaire. Et la relation entre Galois et Cauchy est extrêmement intéressante. Comme je vous l'ai dit, Cauchy est parti de France en 1830. Et à ce moment-là, il n'a plus eu de contact avec Galois. Donc les meilleurs renseignements que l'on ait sur les relations entre Cauchy et Galois, qui bien souvent sont présentées de manière complètement caricaturale, c'est à travers un article de René Taton, un grand historien des mathématiques, qui est mort en 2004, et qui nous dit la chose suivante.

Il nous dit :

> *"Parmi les très rares renseignements qu'elles nous apportent à ce sujet, les archives de l'Académie des sciences révèlent que Galois eut le privilège de voir ses premiers travaux [a] présentés devant l'Académie au cours des séances des 25 mai et 1er juin 1829 [b] par un juge aussi sévère que compétent, Cauchy. Bien qu'aucune précision ne nous soit parvenue sur ce point, l'acceptation par le grand analyste de cette tâche de présentation prouve que le jeune auteur de ces mémoires avait réussi à le convaincre du sérieux, de l'importance et de l'originalité de ses recherches."*
>
> [a] Galois avait 17 ans.
>
> [b] En mai-juin 1829, Galois avait 17 ans puisqu'il est né en octobre.

[1] en 1829.

Alors, un peu après, pendant le début de l'été 1829, le mémoire d'Abel sur les équations algébriques est paru de manière posthume et bien sûr, Cauchy a constaté qu'une bonne partie des résultats obtenus par Galois étaient absorbés par le mémoire d'Abel.

Donc, il était de son devoir d'essayer d'atténuer la déception de Galois, en l'encourageant à sauver la part la plus originale de son travail. On verra qu'il y avait une part extrêmement originale, même à cette époque-là.

> "*Lorsqu'il se décida au début de 1830 à rédiger son rapport sur les mémoires de Galois, on peut penser que dans cette circonstance, Cauchy songea beaucoup moins à remplir une obligation académique qu'à apporter d'utiles conseils au jeune mathématicien. Toujours est-il que ce rapport fut rédigé pour être lu à la séance de l'Académie du 18 janvier 1830 et que seule une indisposition empêcha Cauchy de le présenter.*"

Alors, j'espère qu'on va voir la lettre. J'ai écrit le texte en clair.

C'est une lettre d'excuse :

> "*Monsieur le Président,*
>
> *Je me proposais de présenter aujourd'hui à l'Académie le rapport sur les travaux du jeune Galois, un mémoire sur la détermination analytique des racines primitives dans lequel on fait voir comment on peut réduire cette détermination à la résolution d'équations numériques, etc.*
>
> *Retenu chez moi par une indisposition, je regrette de ne pouvoir assister à la séance de ce jour et je vous prie de bien vouloir inscrire mon nom sur l'ordre du jour de la séance suivante. Agréez, je vous prie, l'hommage...*"

Donc, c'est une lettre de Cauchy qu'on retrouve dans les archives de l'Académie et qui montre que, bien sûr, Cauchy n'ignorait absolument pas Galois, il y avait des relations très, très fortes entre Cauchy et Galois à cette époque-là. Il y a cette lettre. Et en fait, voilà ce que dit René Taton.

Il dit :

> "*Du fait du report annoncé de ce rapport, donc le rapport de Cauchy sur Galois à la séance suivante, celle du 25 janvier 1830, nous* (c'est René Taton) *avons examiné avec un soin tout particulier les différentes pièces concernant cette séance : dossier, primitif, registre de procès-verbaux. Mais alors que ces divers documents montrent que Cauchy, effectivement présent, y présenta bien son mémoire annoncé* "Sur la détermination des racines primitives dans la théorie des nombres", *rien n'y rappelle le premier point évoqué dans sa lettre du 18 janvier, le* "*Rapport sur les travaux du jeune Galois*".

L'étude des procès-verbaux des séances de l'Académie révèle que, non seulement ce rapport annoncé par écrit pour la séance du 25 janvier, n'y a pas été présenté, mais qu'aucune allusion n'y a plus été faite au cours des séances suivantes. Le fait que Galois ne se soit jamais plaint de la négligence de Cauchy en cette circonstance, alors qu'il plaçait tous ses espoirs en un jugement favorable de l'Académie, semble montrer que l'annulation de ce rapport est intervenue avec son accord. Il reste alors à expliquer ce brusque changement d'attitude des deux acteurs de cette mystérieuse affaire."

La thèse de René Taton, et je pense que c'est quelque chose qui est parfaitement plausible, est :

"*La confrontation attentive des quelques éléments d'information permet de formuler à ce sujet une hypothèse qui paraît vraisemblable.*"

Son hypothèse, c'est que Cauchy avait demandé à Galois de réécrire son manuscrit, de manière plus détaillée, de telle sorte qu'il soit présenté au Grand Prix de l'Académie. Quel Grand Prix de l'Académie ? Il y avait un concours. En fait, ce n'était pas un Grand Prix, c'était un concours. Ça s'appelait un concours à l'époque.

C'était un concours qui était formulé de la manière suivante.

"*Le prix sera décerné à celui des ouvrages, ou manuscrits, ou imprimés, qui présentera l'application la plus importante des théories mathématiques, soit à la physique générale, soit à l'astronomie, ou qui contiendra une découverte analytique très remarquable.*".

Donc, ce Grand Prix se distinguait également par le fait que les travaux publiés entre le 1er janvier 1828 et le 1er janvier 1830, séparément ou dans des recueils scientifiques, pouvaient être pris en considération par le jury sans que leur auteur ait fait acte de candidature, concurrentement avec les ouvrages ou mémoires qui étaient déposés au secrétariat de l'Institut avant le 1er mars 1830.

Donc, en fait, ce Grand Prix a permis à l'Académie de réparer l'injustice qui avait été faite à Abel dans les années précédentes, la lenteur du processus de jugement des écrits d'Abel, le fait qu'ils avaient été reconnus de manière tardive. Et en fait, donc, le Grand Prix a été attribué à Abel conjointement à Jacobi. Et c'était évidemment parfaitement mérité : si on regarde la liste des candidats, c'est une liste époustouflante. Donc, ce que pense René Taton : il pense, comme je vous l'ai dit, que Cauchy persuada Galois de rédiger son mémoire pour le Grand Prix de mathématiques, un mémoire de synthèse qui réunissait l'ensemble de ses contributions, en même temps que les mémoires de 1829. Donc, évidemment, les espoirs que Galois plaçait dans le concours du Grand Prix de l'Académie devaient se trouver cruellement déçus.

Il ne pouvait pas raisonnablement ressentir comme une injustice, bien sûr, le fait que le 28 juin, le prix ait été accordé à Abel et à Jacobi. Mais par contre, là où il a commencé à devenir un peu paranoïaque, on peut dire, c'est qu'il a appris à ce moment-là que son manuscrit avait été perdu. Alors, la raison est complexe.

La raison est que Cauchy ne faisait pas partie des examinateurs, pour le Grand Prix, il n'en faisait pas partie. Le secrétaire perpétuel, c'était Joseph Fourier.

Et Joseph Fourier est mort en mai de cette année-là. Donc, il a disparu avant même que le Grand Prix ait été attribué. Et, en fait, les recherches montrent que, bien sûr, l'explication qui a été donnée à Galois ne tenait pas. On lit :

> *"C'est une chose bien simple", aurait repondu Cuvier à une réclamation de Galois..."*

Le mémoire a été perdu à la mort de Fourier, qui était chargé de l'examiner. Donc, c'était effectivement Fourier qui était chargé de présenter les travaux de Galois pour le Grand Prix. Ce n'était pas Cauchy.

> "*...et l'on conçoit, bien sûr, que ce nouveau malheur,...*"

(le fait que son manuscrit ait été perdu, à l'époque, il n'y avait pas beaucoup de photocopieuses !, donc, le fait que son manuscrit ait été perdu),

> "*...ait été vécu par lui comme presque une attaque personnelle.*"

Et en fait, les recherches montrent qu'il a été perdu par le Secrétariat de l'académie. Donc, Galois l'a pris comme étant une injustice terrible.

Et voilà ce que dit Galois. Voilà ce qu'il dit dans ses écrits.

> "*Il suffira de dire que mon mémoire sur la théorie des équations a été déposé en substance à l'Académie des sciences en février 183...0"*

(c'était l'année du concours, c'était l'année où Cauchy lui avait demandé de déposer son mémoire),

> *"...que des extraits en avaient été envoyés en 1829..."*

(donc, ce sont les deux articles qu'il avait déposés au printemps de 1829, quand il avait 17 ans).

> "*...qu'aucun rapport ne s'en est suivi et qu'il m'a été impossible de revoir les manuscrits.*"

Donc, il lui a été impossible de revoir les manuscrits, effectivement, parce qu'ils ont été perdus à la mort de Fourier. Il devait y avoir un désordre dans tous les papiers. Et son manuscrit a été perdu.

Alors, voilà ce que dit Auguste Chevalier, qui était un ami très, très proche de Galois, auquel Galois se confiait. Voilà ce qu'il dit à ce moment-là :

> "*Le peu d'attention donnée par l'Institut au premier travail soumis à son jugement par Galois commença pour lui des douleurs qui, jusqu'à sa mort, devaient se succéder de plus en plus vives.*"

Donc, il avait un sentiment d'injustice.

> "*Une telle indifférence aurait suffi pour guérir de toute ardeur scientifique. Mais il n'en fut point abattu. Une puissante nature le poussait en avant.*"

Alors, le deuxième épisode, c'est donc à ce moment-là, en 1830. Donc, il y a les Trois Glorieuses. Galois est enfermé à l'École Normale. On ne laisse pas les élèves de l'École Normale, enfin, de l'École Préparatoire, sortir, alors qu'on laisse sortir ceux de l'École Polytechnique. Enfin, on ne les laisse pas sortir, mais ils font le mur. Ils vont sur les barricades.

Et à partir de ce moment-là, Galois éprouve une aversion pour le Directeur de l'École Normale de l'époque. Et il fait tant et si bien que finalement, il finit par se faire renvoyer de l'École Normale. Alors, donc, il est renvoyé de l'École Normale fin décembre, début janvier de 1831, de l'année suivante.

Et la personne, d'abord, qui signe l'arrêt de renvoi de Galois de l'École Normale, c'est un certain Victor Cousin. Et la rue Victor Cousin est la rue dans laquelle Galois a donné ses cours après avoir été renvoyé de l'École Normale. Il a donné son cours d'algèbre, avec 35 élèves.

Il n'y a pas dans Paris de rue Galois. Il y en a une qui est en dehors du périphérique. Et je pense que ce serait une bonne idée qu'au moins, qu'on ne change pas le nom de la rue, ce n'est pas la peine, mais qu'il y ait une plaque dans la rue de la Sorbonne, la rue Victor Cousin, qui explique clairement que Galois a donné ses cours à cet endroit-là après s'être fait renvoyer de l'École Normale.

Alors, le rapport avec Poisson est très intéressant parce que Poisson, qui faisait partie du comité (ce n'était pas un jury) qui a renvoyé Galois de l'École Normale, a sûrement parlé à Galois en privé, et lui a dit qu'il fallait qu'il redonne son manuscrit pour qu'il soit examiné par l'Académie. Je vous rappelle que Cauchy n'était plus présent. Cauchy était à Turin, donc Galois n'avait plus de protecteur direct. Il n'avait pas de personne à laquelle il pouvait s'adresser à l'Académie.

Et je pense qu'il a parlé à Poisson. Et donc, à ce moment-là, il a donné à Poisson son manuscrit. Et voilà, je vais vous lire le rapport. C'est un rapport de référé qui a été lu à la séance du 11 juillet 1831, cette même année, donc peut-être quelques six mois après, et qui est le rapport que Poisson et Lacroix ont rédigé sur le Mémoire de Galois.

Donc, ce rapport est extrêmement bien fait. Je veux dire, ce n'est pas du tout une négligence. C'est un rapport qui est extrêmement précis et bien argumenté.

Donc, voilà ce que dit Poisson :

“*L’auteur entend par équation irréductible une équation dont les coefficients sont rationnels* (donc on en verra des dizaines), *et qui ne peut se décomposer en d’autres équations, qui aient aussi leurs coefficients rationnels*” (parce que si vous avez une équation qui s’écrit comme produit, le polynôme s’écrit comme produit de plusieurs polynômes, il suffit de regarder chacun des polynômes).

“D’après sa proposition, l’équation générale...”

Alors, quelle est la proposition de Galois ? Il dit que

“pour qu’une équation irréductible de degré premier soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s’en déduisent rationnellement”.

Alors, pour les mathématiciens, ça, ça veut dire que l’extension galoisienne correspondante est engendrée par deux quelconques des racines, distinctes, de l’équation. On verra ce que ça signifie au niveau théorie des groupes.

Donc, c’est ça le critère que Galois entendait prouver pour les équations de degré premier.

“Alors, donc, l’auteur entend par équation irréductible, on l’a vu. D’après sa proposition...”

Donc, ce qu’il propose, évidemment, si vous prenez une équation de degré 3, 3 est premier, et si vous connaissez deux racines, vous connaissez la troisième, puisque vous avez, par exemple, la somme ou le produit qui est connu. Donc, ça, c’est une remarque triviale. Maintenant, on vient à un point plus embêtant.

Donc, il dit :

“Des notes trouvées dans les papiers d’Abel, qui ont été imprimées après sa mort dans le journal de Crelle, tome V, page 345, renferment une proposition analogue à celle de M. Galois, dont voici l’énoncé. Si trois racines d’une équation quelconque irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l’une de ces racines puisse être exprimée rationnellement au moyen des deux autres, l’équation dont il s’agit sera toujours résoluble à l’aide de radicaux”.

Alors, cet énoncé diffère de celui de Galois en ce que le géomètre norvégien ne dit pas que la condition dont il s’agit soit nécessaire, mais seulement qu’elle suffit pour que l’équation soit résoluble.

"Et il ne semble pas qu'il la regardât comme indispensable, car on trouve dans les notes citées une autre proposition relative à la résolution d'une classe nombreuse d'équations qui pourraient bien ne pas remplir cette condition. Il ne paraît pas non plus que ce soit à cette proposition qu'il ait fait allusion dans ce passage d'une lettre écrite à M. Legendre et publiée après la mort d'Abel dans le journal de Crelle, dans laquelle il dit", ça c'est Abel qui parle, *"J'ai été assez heureux, dit-il, de trouver une règle sûre à l'aide de laquelle on pourra reconnaître si une équation quelconque proposée est résoluble ou non à l'aide de radicaux. Un corollaire de ma théorie fait voir que généralement il est impossible de résoudre des équations supérieures au quatrième degré."*

"Alors nous ignorons si Abel a laissé un manuscrit de cette théorie, elle n'a point encore été imprimée, non plus que la démonstration du théorème analogue à celui qui fait l'objet de ce rapport et qui appartiendrait entièrement à Galois, s'il parvenait à l'établir d'une manière satisfaisante. Toutefois, on doit remarquer qu'il ne renferme pas, comme le titre du Mémoire le promettait, la condition de résolubilité des équations par radicaux. Car, en admettant comme vraie la proposition de Galois, on n'en serait guère plus avancé pour savoir si une équation donnée, dont le degré est un nombre premier, est résoluble ou non par des radicaux".

"Puisqu'il faudrait d'abord s'assurer si cette équation est irréductible". Ça, c'est vraiment du pinaillage, parce que s'assurer d'abord si l'équation est irréductible, ce n'est pas très difficile. *"Et ensuite, si l'une de ses racines peut s'exprimer en fonction rationnelle des deux autres".*

Ça, c'est beaucoup plus difficile.

"La condition de résolubilité, si elle existe (alors là Poisson est vraiment très terre à terre), il dit, *devrait être un caractère extérieur que l'on pût vérifier à l'inspection des coefficients d'une équation donnée, ou, tout au plus, en résolvant d'autres équations d'un degré moins élevé que celui de la proposée.".*

On verra qu'il y a toute une histoire ultérieure derrière ça qui est très très intéressante. *"Quoi qu'il en soit, nous avons fait tous nos efforts pour comprendre la démonstration de Galois. Ses raisonnements ne sont ni assez clairs, ni assez développés pour que nous ayons pu juger de leur exactitude et nous ne serions pas en état d'en donner une idée dans son rapport".*

"L'auteur annonce que la proposition qui fait l'objet spécial de son Mémoire est une partie d'une théorie générale susceptible de beaucoup d'autres applications. Souvent, il arrive que les différentes parties d'une théorie, en s'éclairant mutuellement, sont plus faciles à saisir dans leur ensemble qu'isolément. On peut donc attendre que l'auteur ait publié en entier son travail pour se former une opinion définitive mais dans l'état où est maintenant la partie qu'il a soumise à l'Académie, nous ne ne pouvons pas vous proposer d'y donner votre approbation".

Alors, je vais simplement vous raconter une anecdote. C'est que quand Galois a reçu ce rapport, c'était le 4 juillet 1831, il a écrit en dessous "Ô Chérubins !". Parce que... Pardon, ce qu'il a écrit en dessous de ce rapport quand il a eu le rapport de Poisson le 4 juillet, il a écrit en dessous "Ô Chérubins". C'est-à-dire, vous n'avez pas bien compris, c'est-à-dire il faut bien admettre que la manière dont Galois a écrit est extrêmement elliptique. Mais, on verra aussi en lisant un peu en détail à quel point il va exactement au point le plus profond.

Donc, ce qui est vrai, c'est que, par exemple, si on lit ce que Galois a écrit pour démontrer ce théorème qu'une équation de degré premier est résoluble par radicaux, si et seulement si toute racine est fonction rationnelle des deux autres, c'est très difficile à comprendre. Par contre, il avait la démonstration de manière complète, ça c'est clair. En fait, ce qui est très amusant aussi, c'est que pour démontrer ce théorème, il faut utiliser un résultat de Cauchy que Galois utilise, qui est que si on prend un groupe fini dont l'ordre est divisible par un nombre premier qui agit sur un ensemble à p éléments, il contient une permutation cyclique d'ordre p. En fait, il connaissait aussi la théorie de Sylow.

Si on regarde ses papiers, il connaissait aussi le fait que ça contient un groupe d'ordre p^n, où p^n est la plus grande puissance qui permet de diviser l'ordre du groupe. Alors en fait, donc, la situation était très mauvaise à ce moment-là. Comme je l'ai dit, quelques jours après avoir reçu le rapport de Poisson, Galois devait être vraiment découragé dans un état assez instable, et c'est à ce moment-là qu'il a été arrêté à la tête de la manifestation et qu'il s'est retrouvé à la prison pour pratiquement le reste de sa vie.

Donc les choses auraient pu en rester là, et puis il y a un miracle, et ce miracle c'est Joseph Liouville, qui est aussi un membre de l'Académie, et qui est un contemporain de Galois, ça il faut le savoir, c'est-à-dire Galois est né en 1811, vous voyez, Liouville est né en 1809, donc il est exactement de la même génération que Galois. Et la résurrection de Galois, de ses Œuvres, on peut le dire, ce serait trop facile de dire que, je veux dire que ça aurait été trouvé de toute manière, parce qu'il s'est écoulé plus de dix ans entre la disparition de Galois et le moment où Liouville a étudié de manière extrêmement soigneuse et précautionneuse les papiers qui lui avaient été remis par le frère de Galois et par Auguste Chevalier, qui était la liasse de papier que Galois a laissé la veille de sa mort.

Et voilà ce que dit Liouville dans la séance du 4 septembre 1843. Donc c'est plus de dix ans après. Donc c'est un peu écrit en petit, mais je l'ai écrit en clair, mais je voulais simplement vous montrer comment ça apparaît dans les registres de l'Académie.

Donc ce que dit Liouville, c'est :

"À la suite d'une discussion où l'on a tant parlé d'équations algébriques, j'espère intéresser l'Académie en lui annonçant que dans les papiers d'Évariste Galois, donc ces manuscrits m'ont été confiés par Auguste Chevalier, j'ai trouvé une solution aussi exacte que profonde de ce beau problème : "étant donné une équation irréductible de degré premier, décider si elle est ou non résoluble à l'aide de radicaux". "Le mémoire de Galois est rédigé peut-être d'une manière un peu trop concise (ça c'est évident), je me propose de le compléter, donc il a fait le travail, de le compléter par un commentaire qui ne laissera, je crois, aucun doute sur la réalité de la belle découverte de notre ingénieux et infortuné compatriote."

Donc ça c'est merveilleux, c'est merveilleux, parce qu'en fait il a fallu attendre deux ans après cette séance de l'Académie, du 4 septembre 1843, pour que les papiers de Galois soient publiés par Liouville, dans ce qui s'appelle maintenant, je pense, le Journal de Liouville.

Et à ce moment-là, il faut dire, ils ont eu une influence absolument considérable. Bon, alors voilà pour la partie historique, voilà pour la partie historique, voilà pour la partie qui concerne ces relations entre Galois et l'Académie, mais vous voyez à quel point ces relations sont complexes. Ce sont des relations extrêmement complexes, et on aurait tort de les caricaturer en disant que Galois haïssait, c'est vrai qu'il a écrit des choses un peu exagérées, mais il s'est retrouvé dans une situation dans laquelle il était devenu presque paranoïaque.

Alors maintenant, donc, je vais vous parler de mathématiques, je vais essayer de vous expliquer ce qu'est la théorie de l'ambiguïté, mais comme la voyait Galois. Alors, vous voyez, d'abord, quand vous parlez de théorie de l'ambiguïté, ça paraît absolument absurde, parce que si je vous donne une équation, j'ai pris une équation simple, ici, là, une équation de degré 5, je me contenterai du degré 5, à la fois parce qu'il est premier, et puis parce qu'on peut faire toutes sortes de choses. Donc si vous prenez une équation, et si je vous dis il y a une ambiguïté entre les racines, vous pouvez me rire au nez, puisque les racines, j'ai pris l'équation pour que les racines soient réelles, il y en a une qui est la plus petite, c'est A, et puis comme ça, elles sont en ordre croissant.

Donc vous voyez bien qu'il n'y a pas d'ambiguïté entre les racines, elles sont toutes devant vous. Mais maintenant, supposez que je vous demande, je vous pose une question, je vous dis, est-il possible de nommer la plus grande racine, par exemple E, par une relation qui ne laissera pas, justement, d'ambiguïté sur le fait que c'est la plus grande racine, et qui soit une relation rationnelle. Alors j'ai écrit cette relation $E = 4C^2 + 2D^2$, parce que quand vous faites les calculs avec l'ordinateur, vous avez l'impression qu'elle est vraie.

Alors pourquoi est-ce que cette relation ne peut pas être vraie ? La théorie de Galois a cette force, si vous voulez, que c'est une théorie qui vous permet de savoir, à partir de rien, simplement par un raisonnement abstrait, et ça va aller beaucoup plus loin après, dans des circonstances beaucoup plus générales, pour qu'on sache qu'une telle relation ne peut pas avoir lieu. Alors pourquoi, quelle est la raison pour laquelle elle ne peut pas avoir lieu ? Eh bien parce qu'en fait, il y a un groupe, qu'on appelle le groupe de Galois, qui permute les racines entre elles, qui n'est jamais trivial, pour une équation irréductible, celle-là est irréductible, qui permute les racines entre elles, et qui a la propriété de préserver toutes les relations algébriques rationnelles entre les racines. Donc si cette relation avait lieu, comme vous pouvez remplacer E par n'importe quelle autre racine, toutes les racines seraient positives, puisqu'un carré c'est positif, 4 c'est positif, 2 c'est positif, donc toutes les racines seraient positives, ce n'est pas possible.

Donc on sait, a priori, simplement parce qu'il y a ce groupe d'ambiguïté, ce groupe de symétrie qui est caché derrière, qu'il est impossible que cette relation ait lieu. Alors en l'occurrence, le groupe est très très simple, parce que j'ai pris une équation cyclique, et en fait c'est très facile, c'est un petit exercice qui prend 3 secondes, de vérifier que si vous avez une racine de cette équation, si vous prenez son carré moins 2, c'est encore une racine de l'équation. Donc vous avez un groupe d'invariance qui fait que, automatiquement, à chaque fois que vous avez une racine x, la formule $x^2 - 2$ vous donne une autre racine.

Alors quel est l'intérêt de ça ? L'intérêt, ça veut dire que toutes les racines de cette équation sont fonctions rationnelles d'une seule des racines ; et comme c'est le cas, si vous avez une relation algébrique entre les racines, comme la relation qui était là, vous en déduirez que sur une racine quelconque, vous avez une relation polynomiale, mais c'est forcément un multiple du polynome irréductible dont on est parti, et on a la conclusion. Alors on verra ce raisonnement en un petit peu plus de détails, mais que dit la théorie de Galois dans ce cas là ? Eh bien, elle dit qu'en fait, il faut indexer convenablement les racines de l'équation, pas du tout comme ABCD comme on avait fait tout à l'heure, il faut les indexer, les racines, par les entiers modulo 5, exactement comme j'ai indiqué sur la figure, donc 0, 1 pour les deux premières, les plus à gauche, 3, 4 pour les deux qui suivent, et puis 2 pour celle qui est le plus à droite. Et si vous faites ça, vous allez voir qu'en fait le groupe de Galois a décelé une structure qui était cachée, qui était sous-jacente aux racines, et qui était la structure, si vous voulez, des entiers modulo 5. Et le groupe de Galois les permute de manière cyclique, mais cette structure, elle est présente, et on ne l'aurait jamais vue si on avait simplement agi comme, disons, comme un expérimentateur ou un physicien en disant, eh bien j'ai une équation, j'ai ses racines, et puis je suis content.

En fait, ce qui est extraordinaire dans la théorie de Galois, c'est que derrière cette évidence apparente, si vous voulez, qui vous donne une équation et qui vous fait voir ses racines, il y a une théorie beaucoup plus subtile, beaucoup plus intéressante qui est cachée derrière, et qui justement permet de comprendre, de saisir qu'il y a, du fait que l'équation est irréductible et du fait qu'elle n'est pas résoluble directement, qu'elle n'est pas factorisée, il y a une ambiguïté entre les racines. Alors en fait, pour mieux comprendre tout ça, donc il y a une définition abstraite, on va la voir telle que l'écrit Galois, donc on va voir qu'il y a une subtilité, que Galois décrit absolument de manière parfaite, et qu'il faut comprendre, sinon on ne comprend pas la théorie. Donc soit une équation donnée, on prend les racines, ce que dit Galois c'est qu'il y aura toujours un groupe de permutation des lettres qui aura la propriété suivante : que toute fonction des racines invariable par les substitutions de ce groupe soit rationnellement connue et réciproquement que toute fonction des racines qui est déterminable rationnellement soit invariable par ces substitutions.

Alors si on le dit comme ça, on ne comprend pas vraiment si on n'a pas l'explication de Galois. Voilà le texte de Galois est beaucoup plus précis et beaucoup plus intéressant que cet énoncé abstrait. Voilà ce que dit Galois.

Il dit ici la chose suivante :

> “*Nous appelons ici invariable, non seulement une fonction dont la forme est invariable par les substitutions des racines entre elles* (voyez bien si on prend la somme des racines, par exemple, elle est invariable par toutes les substitutions), *mais encore celle dont la valeur numérique ne varierait pas par ces substitutions.* Et là, il y a une distinction qui est cruciale. Par exemple, ce que dit Galois, c'est que si l'équation c'est $Fx = 0$, eh bien Fx c'est une fonction des racines qui ne varie par aucune permutation. En fait, il est beaucoup plus précis que ça, il continue et il dit : *Lorsqu'une fonction des racines ne change pas de valeur numérique par une certaine substitution opérée entre les racines, elle est dite invariable par cette substitution.*
>
> *On voit qu'une fonction peut très bien être invariable par telle ou telle substitution entre les racines sans que sa forme l'indique. Ainsi si $Fx = 0$ est l'équation proposée, la fonction $\varphi(F(a), F(b), F(c), ...)$* (on épèle les racines), *où φ est une fonction quelconque, rationnelle bien sûr, sera une fonction de ces racines qui sera invariable par toute substitution entre les racines, sans bien sûr que sa forme l'indique.*

Ça pourrait être par exemple $F(a) + 3F(b)$ ou un truc comme ça. Or c'est une question dont il ne paraît pas qu'on ait encore la solution de savoir si étant donnée une fonction de plusieurs quantités numériques, on peut trouver un groupe qui contiennent toutes les substitutions par lesquelles cette fonction est invariable et qui n'en contiennent pas d'autres.

Vous voyez, il y a un pas énorme qui est franchi à ce moment-là, parce que dans Lagrange par exemple, ou dans d'autres textes, on cherchait à trouver pour l'équation générale, des fonctions des racines qui ne sont pas trop invariantes, tout en étant un petit peu invariantes. Par exemple si vous prenez une équation du quatrième degré, vous avez $ab + cd$, ça c'est une fonction qui n'est pas invariante par toutes les permutations mais qui ne prend que trois valeurs différentes quand on applique toutes les permutations et ça permet de résoudre l'équation du quatrième degré par l'équation du troisième degré. Donc c'était différent, les gens faisaient des choses dans le cadre complètement général.

Alors donc ce que dit Galois c'est qu' :

> *évidemment, cela a lieu pour des quantités littérales, puisqu'une fonction de plusieurs lettres invariable par deux substitutions est invariable par leur produit.* Donc ça c'est évident. *Mais rien n'annonce que la même chose ait lieu quand aux lettres, on substitue des nombres*, ce n'est absolument pas évident. Il dit : *on ne peut donc point traiter toutes les équations comme des équations littérales, il faut avoir recours à des considérations fondées sur les propriétés particulières de chaque équation numérique, c'est ce que je vais tâcher de faire.*

Il faut voir qu'à l'époque les gens faisaient énormément de calculs et par exemple si vous regardez la copie de Galois d'entrée à l'École Préparatoire, vous verrez qu'on donnerait ces problèmes même à des gens maintenant, je ne suis pas sûr qu'ils seraient tous capables de donner la bonne solution. Et donc les gens faisaient énormément de calculs et remarquons que tout ce qu'une équation numérique peut avoir de particulier doit provenir de certaines relations entre les racines. Ces relations seront rationnelles dans le sens que nous l'avons entendu, c'est à dire qu'elles ne contiendront d'irrationnels que les coefficients de l'équation bien sûr et les quantités adjointes.

> *De plus ces relations ne devront pas être invariables par toute substitution opérée entre les racines, sans quoi on n'aurait rien de plus que pour les équations littérales ordinaires. Ce qu'il importe donc de connaître, c'est par quelles substitutions peuvent être invariables les relations entre les racines, ou ce qui revient au même, des fonctions des racines dont la valeur numérique est déterminable rationnellement.*

Alors là je vais quand même vous donner une toute petite explication. Ce qui est incroyable c'est la chose suivante, c'est que ce que fait le groupe de Galois, c'est, si vous voulez, si on vous disait, je prends une équation, il faut déterminer toutes les relations rationnelles entre les racines, vous pourriez le faire, on va voir comment. Mais qu'est ce que ça vous donnerait ? Ça vous donnerait les multiples d'un polynôme, qu'on appelle le polynôme associé à l'extension galoisienne correspondante, ce serait quelque chose qu'il est très difficile de calculer et de manipuler. Et ce qui est merveilleux, c'est que ce que Galois a démontré, c'est que ce n'était pas exactement les relations, une certaine fonction comme par exemple tout à l'heure $E - 4B^2 - 2C^2 = 0$ ou un truc comme ça, ce n'est pas ça qui compte. Ce qui compte, ce n'est pas un truc égal à 0, parce que les trucs égaux à 0, vous auriez un peu de mal à les déterminer, ce qui compte, ce sont les quantités rationnelles, c'est-à-dire que bien sûr que si vous écrivez une relation égale à 0, 0, c'est rationnel, donc elle doit être invariante par le groupe de Galois. Mais réciproquement, si vous prenez une expression qui est invariante par le groupe de Galois, elle ne vous donnera pas 0, mais elle vous donnera un nombre rationnel. Mais comme ce nombre est rationnel, vous pouvez le soustraire de cette expression et vous obtenez 0. Donc, par l'invariance par le groupe, vous déterminez toutes les relations rationnelles, donc toute la spécificité d'une équation. Et alors donc, ce que fait Galois, le groupe de Galois, donc en fait, il donne un groupe de permutations des racines, qui est toujours non trivial, c'est ça qui est absolument époustouflant, c'est que le groupe n'est jamais réduit à l'identité, sauf si l'équation est bien sûr complètement résolue, c'est à dire si on a un facteur irréductible de degré 1. Et pour montrer l'existence de ce groupe d'ambiguïté, Galois procède en deux étapes ; la première étape, c'est de trouver une autre équation (ça en fait, le rapport de Poisson dit que Lagrange le savait déjà), de trouver une équation auxiliaire telle que les racines de l'équation dont on part soit toutes fonctions rationnelles d'une seule racine de l'équation auxiliaire. Et de plus (bien sûr, ça s'en déduit immédiatement), que les racines de l'équation auxiliaire vont être fonctions rationnelles les unes des autres. Donc les racines de cette équation, c'est un peu comme dans l'équation de tout à l'heure, quand vous aviez la transformation $x \to x^2 - 2$, vous avez des transformations rationnelles qui vont transformer les racines les unes en les autres. Et alors après, c'est fini parce que si vous prenez une relation rationnelle entre les racines, elle va vous donner une équation $H(V) = 0$, qui va pouvoir se formuler en termes d'une seule racine de l'équation auxiliaire. Comme il y a une seule racine de l'équation auxiliaire, elle sera forcément un multiple du polynôme minimal de V et vous avez gagné, puisque ce polynôme minimal est invariant par les transformations rationnelles. Donc la démonstration est incroyablement simple, bien sûr. Alors c'est ce qu'on voit, le groupe de Galois, il le calcule de manière explicite. Il dit, bien sûr, la difficulté des calculs ; il n'avait pas d'ordinateur, à l'époque, et on va voir à quoi ressemble la difficulté des calculs, je vais vous le montrer, parce que maintenant, on n'a pas d'excuse pour ne pas le montrer. Donc voilà ce que Galois disait, et c'était vraiment quelque chose d'extrêmement profond parce qu'il ne dit pas qu'il ne faut pas faire les calculs, il dit :

> "*sauter à pieds joints sur les calculs, grouper les opérations, les classer* (justement) *suivant leurs difficultés et non suivant leur forme, telle est selon moi la mission des géomètres futurs*".

Donc alors maintenant, si vous voulez, on va voir un peu plus tard comment Galois faisait les calculs, mais avant de vous montrer ça, je vais vous montrer simplement comment on fait maintenant, pour comprendre ce que c'est que le groupe de Galois de manière extrêmement naturelle et simple il y a un théorème qui est un théorème de Chebotarev et qui permet de comprendre en quel sens il est vrai que plus le groupe d'ambiguïté est grand plus il est difficile de résoudre une équation. Alors comment est ce que le théorème est formulé ? Eh bien, le théorème est formulé en disant qu'on va s'intéresser maintenant (l'équation est à coefficients entiers), donc on va pouvoir réduire modulo un nombre premier, c'est-à-dire que pour chaque nombre premier, on va regarder si on peut résoudre l'équation modulo ce nombre premier ; ce n'est pas très difficile de savoir ce que ça veut dire : ça veut dire que tous les nombres qui sont multiples d'un nombre premier p, vous les identifiez à zéro et vous cherchez à résoudre l'équation. Ce que dit le théorème de Chebotarev, c'est que la probabilité pour que l'équation soit résoluble modulo un nombre premier p, la probabilité sur l'ensemble des nombres premiers, c'est l'inverse de l'ordre du groupe de Galois, donc c'est quelque chose qui est extrêmement simple, et si vous regardez par exemple pour le polynôme dont je vous ai parlé tout à l'heure et si vous le réduisez modulo p, alors vous aurez l'impression qu'il change chaque fois mais c'est parce que quand il y a un moins quand vous réduisez modulo p par exemple si vous réduisez modulo 47, 44 ça fait -3, donc ça vous donne une impression, mais vous voyez qu'il arrive, assez fréquemment là, que le polynôme ait toutes ses racines dans les entiers modulo le nombre premier. Alors, il ne faut pas vous inquiéter du nombre 11, le nombre 11, il a la propriété que ce qu'on appelle le discriminant de l'équation dans les parties, je crois que c'est 11 puissance 4 ou quelque chose comme ça, donc en fait ça veut dire que le nombre 11 est très particulier et l'équation, elle n'aura pas des racines distinctes, quand on travaille modulo 11. Par contre, dès qu'on prend des nombres premiers autres, si les racines existent dans les entiers modulo p, elles vont être distinctes et alors là, on voit un comportement qui est très très clair, et qui vous dit qu'à peu près tous les cinq nombres premiers, l'équation est complètement résolue, elle est complètement résolue, elle a toutes ses racines modulo p.

Donc cette équation, elle est facile : elle est facile au sens où si après, vous regardez la densité, vous voyez, j'ai mis l'inverse de la densité ici, et on voit bien qu'on obtient le nombre 5, on obtient le nombre 5 en prenant... on va très loin au niveau... l'indice qui est en bas le 10 000, ça veut dire qu'on est au dix millième nombre premier et on regarde l'inverse de la proportion de nombres premiers pour lesquels elle est complètement résolue. Alors c'était une équation très simple. Maintenant, on va s'intéresser à des équations un petit peu plus compliquées. Donc prenons par exemple les racines cinquième de 2 : si vous regardez les racines cinquièmes de 2 et si vous essayez modulo un nombre premier, eh bien là, vous allez vous apercevoir que bouh...! Dans tous les exemples que je vous ai montrés, il n'y en a même pas un seul dans lequel l'équation est vraiment résoluble complètement modulo le nombre premier et je suis pourtant allé assez loin. Et alors si vous faites le calcul, vraiment, si vous faites le calcul loin, vous allez vous apercevoir que l'inverse de la densité de l'ensemble des nombres premiers pour lesquels il y a cinq solutions, cinq racines cinquième de 2, vous voyez que ça vaut environ 20 ; ça met du temps à se stabiliser mais au bout d'un moment, ça se stabilise et ça vaut de l'ordre de 20. Donc qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que le groupe de Galois de cette équation, il est d'ordre 20 ; bien sûr, je vais dire, il y a des gens naïfs, quand ils restituent la théorie de Galois, ils vous disent $x^5 = 2$, c'est un groupe cyclique, bien sûr, ce n'est pas ça : c'est un groupe d'ordre 20, qui est un petit peu plus compliqué qu'un groupe cyclique, parce que pour obtenir un groupe cyclique il aurait fallu adjoindre les racines cinquième de 1 et on ne l'a pas fait. Alors on peut faire le calcul explicite de ce groupe, je vous montrerai comment Galois le faisait, et quand on fait le calcul explicite, on s'aperçoit, bien sûr, qu'il y a la permutation cyclique, mais qu'il y a aussi d'autres permutations, qui sont même impaires ; en fait, le fait que ce groupe ait des permutations impaires, je pense que c'est la raison qui a fait croire à Abel et à Galois qu'ils avaient résolu l'équation du cinquième degré, je pense que je vous dirai pourquoi un petit peu plus tard, et en fait donc, à nouveau, il y a une structure sous-jacente, et ce qu'il faut faire, c'est indexer les racines sur le corps $\mathbb{F}_5$ mais le groupe de Galois, vous voyez dans ce cas-là, ça devient le groupe affine, ce n'est plus le groupe seulement des translations, c'est le groupe affine, c'est le groupe à nouveau sur le corps $\mathbb{F}_5$, mais des transformations affines de la forme x donne $ax+b$, qui sont effectivement très simple, mais il faut indexer les racines, de manière évidente, c'est 0 1 2 3 4 par le corps $\mathbb{F}_5$.

Alors regardons maintenant un exemple d'ordre 10, c'est un exemple qui est plus intéressant. Donc je vous donne une équation, dont le groupe dihédral est le groupe de Galois, c'est un groupe qui est d'ordre 10 et on la trouve facilement en regardant par exemple le théorème de Chebotaref, on obtient ça et alors si on regarde cette équation, si on fait le calcul explicite de son groupe de Galois, on trouve, à ce moment-là, quelque chose d'un petit peu différent. Alors, vous voyez qu'on a le même type de permutation cyclique quand j'écris les petits ronds, là, ce sont les racines dans le plan complexe, je n'ai pas fait ça de manière arbitraire, les petits ronds sont les racines dans le plan complexe. Et les permutations, ce sont de vraies permutations du groupe de Galois. Donc on a la permutation du haut, qui est une permutation cyclique entre les cinq racines, et la permutation du bas, qui est caractéristique du groupe dihédral parce que c'est une involution, bien sûr avec un point fixe, mais qui quand on les met ensemble, l'une avec l'autre, va engendrer un groupe dihédral. Alors la structure sous-jacente à nouveau, eh bien on voit bien qu'à nouveau on va indexer les racines de la manière que j'ai indiquée 0 1 2 3 4 d'accord, par le corps $\mathbb{F}_5$ et à nouveau, le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe affine. Alors donc maintenant, l'équation vraiment intéressante si on s'en était restreint au degré 4, on n'aurait pas eu d'équation intéressante parce qu'on n'aurait eu que des équations qui sont résolubles par radicaux.

C'est pour ça que j'ai choisi le degré 5, bien sûr, c'est pour pouvoir vous montrer une équation qui soit non résoluble par radicaux. Alors, j'ai quand même fait un choix un peu simplificateur c'est-à-dire que j'ai pris une équation dont le discriminant est un carré, de telle sorte que son groupe de Galois, ce ne soit pas le groupe symétrique, vous voyez, si vous me donnez... tout à l'heure, vous pourrez me donner une équation au hasard, et je vous montrerai que son groupe de Galois, c'est le groupe symétrique S_5. Mais, avec un peu de chance, on arrive à... donc dès que le discriminant est un carré, c'est une espèce d'ersatz de ce qui se passait pour l'équation du second degré, le groupe de Galois devient le groupe A_5, qui est un groupe simple, qu'on appelle le groupe alterné, et on le voit en calculant la probabilité pour que l'équation soit résoluble complètement modulo p.

Voyez cette probabilité, si vous allez assez loin, vous voyez que l'inverse de cette probabilité, c'est

60. Alors si on fait le calcul explicite, on peut calculer explicitement le groupe de Galois, on trouve des permutations comme celles qui sont là. Quel est l'intérêt des deux permutations que j'ai écrites ? Eh bien, c'est qu'elles vont vous donner la présentation du groupe. Vous voyez, c'est un groupe d'ordre 60, donc un groupe d'ordre 60, ça peut paraître difficile à appréhender, en fait il est extrêmement simple à appréhender, parce que c'est un groupe dont la présentation est très simple ; il y a un générateur, celui du haut, qui est de carré 1 ($u^2 = 1$) et celui du bas, son cube est égal à 1 ($v^3 = 1$), c'est évident puisqu'il permute de manière cyclique les trois racines qui sont là, et en plus, quand on fait le produit uv de ces deux générateurs, on obtient un élément dont la puissance cinquième est égal à 1 ($(uv)^5 = 1$).

Alors quand vous connaissez ces relations $u^2 = 1, v^3 = 1, (uv)^5 = 1$, vous avez tout compris sur le groupe parce qu'après vous écrivez des mots avec les lettres u et v, et vous faites les simplifications qui s'imposent, c'est-à-dire les simplifications qui viennent de $u^2 = 1$, vous ne pouvez pas répéter u deux fois, $v^3 = 1$, vous ne pouvez pas répéter v 3 fois, et ainsi de suite. Et il est immédiat, par exemple, qu'une équation, qui a ce groupe-là, ne peut pas être résoluble par radicaux parce qu'à ce moment là, vous pourriez représenter ces relations de manière abélienne, c'est-à-dire de manière commutative, mais si vous avez $u^2 = 1, v^3 = 1$ et si u et v commutent, quand vous prenez $(uv)^5 = 1$, vous allez en déduire immédiatement que $u = v = 1$; donc vous avez une contradiction évidente. Donc c'est comme ça qu'on comprend ces groupes.

Et maintenant, ce qui est extraordinaire, c'est que quand Galois avait 18 ans, il a publié un article, son article est publié dans le Bulletin de Férussac, en juin 1830, et dans cet article, il fait la chose suivante : je vous ai montré sur des exemples très simples qu'il fallait indexer les racines par le corps $\mathbb{F}_5$ d'accord, alors ce que fait Galois, c'est fantastique, il définit les corps finis quelconque $\mathbb{F}_q$, bon, on sait qu'il faudrait être beaucoup plus "non canonique" que ça, il y a une ambiguïté dans la définition du corps $\mathbb{F}_q$, mais donc il définit le corps $\mathbb{F}_q$ (Gauss le connaissait sûrement aussi) et ensuite, qu'est ce que fait Galois ? Bien sûr, il calcule le groupe de Galois de $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$, ce n'est pas difficile, il est engendré par le Frobenius.

Ce n'est pas ça qui est difficile ; ce qui est extraordinaire, c'est que Galois prolonge au cas général des équations résolubles par radicaux ce qu'il avait compris pour les équations de degré premier en utilisant le corps $\mathbb{F}_q$. Voilà ce qu'écrit Galois. Alors vous ne le lirez pas, mais ça ne fait rien, je crois que je peux le lire : alors il dit la chose suivante "*Cette remarque...*" Donc qu'est ce qu'il fait ? C'est dommage que je ne voie pas la formule mais elle est dans l'article. Qu'est ce qu'il dit ? Il dit "*vous prenez une équation*" bon vous savez, vous voulez qu'elle soit résoluble, il demande qu'elle soit primitive, c'est une petite condition qui n'est pas difficile à comprendre, qui dit en gros que le corps qui est défini par l'équation n'a pas de sous-corps. Donc il prend son équation, ensuite il dit que "*si l'équation est résoluble (si elle est primitive), on pourra indexer les racines non pas par $\mathbb{F}_5$ comme tout à l'heure, mais par un corps fini $\mathbb{F}_q$ et que les transformations des racines par le groupe de Galois seront automatiquement contenues...*" dans quoi ? Pas seulement dans le groupe affine, ce serait trop simple, si c'était comme dans les cas précédents, le groupe $ak + b$ comme dans le cas premier, non, *"...dans le groupe affine produit semi direct par les puissances du Frobenius"*.

Donc ça, c'est vraiment extraordinaire, c'est écrit explicitement dans l'article de Galois et Galois avait la démonstration, il y a quelques cas particuliers auxquels il faut faire attention. Mais donc il avait parfaitement compris ce qui se passait dans cette chose-là.

Bien sûr, après, il explique la théorie générale, mais on réduirait à très peu la théorie de Galois si on ne parlait que de la théorie générale. En général, si vous voulez, quand on explique la théorie de Galois, quand on explique ce qu'a fait Galois, on explique surtout la théorie générale, qui est expliquée ici, par exemple, si on adjoint à une équation donnée, la racine d'une équation auxiliaire irréductible, qu'est-ce qui arrive, etc. Mais, en fait, la théorie de Galois, Galois était allé bien plus loin, au sens où il avait compris que, quand on connaît le groupe de Galois d'une équation dans le cas où elle est résoluble, ce groupe, en fait, décèle une structure très intéressante, très particulière dans les racines, par le fait qu'on peut indexer ces racines par tous les éléments d'un corps fini, et qu'ensuite, si vous voulez, cette structure est automatiquement préservée par l'action du groupe de Galois.

Donc, c'est une structure intrinsèque à l'ensemble des racines. C'est quelque chose qui est tout à fait extraordinaire. Alors, je ne vais pas vous embêter avec ça.

Ce que je vais faire maintenant, c'est vous montrer les calculs. J'espère que vous ne m'en voudrez pas. À l'époque de Galois, les gens ne pouvaient pas faire les calculs.

Bon, ça, c'est des trucs classiques, je n'ai pas envie. Donc, alors ça, ce n'est pas grave, ce n'est rien. C'était pour montrer un peu Chebotarev.

Vous voyez, si vous calculez, pour savoir quel groupe de Galois a une équation, vous prenez l'inverse de cette proportion de tout à l'heure. Donc, vous voyez, pour le polynôme qui est là, vous avez 60. Là, vous avez 5. Là, vous avez 10.

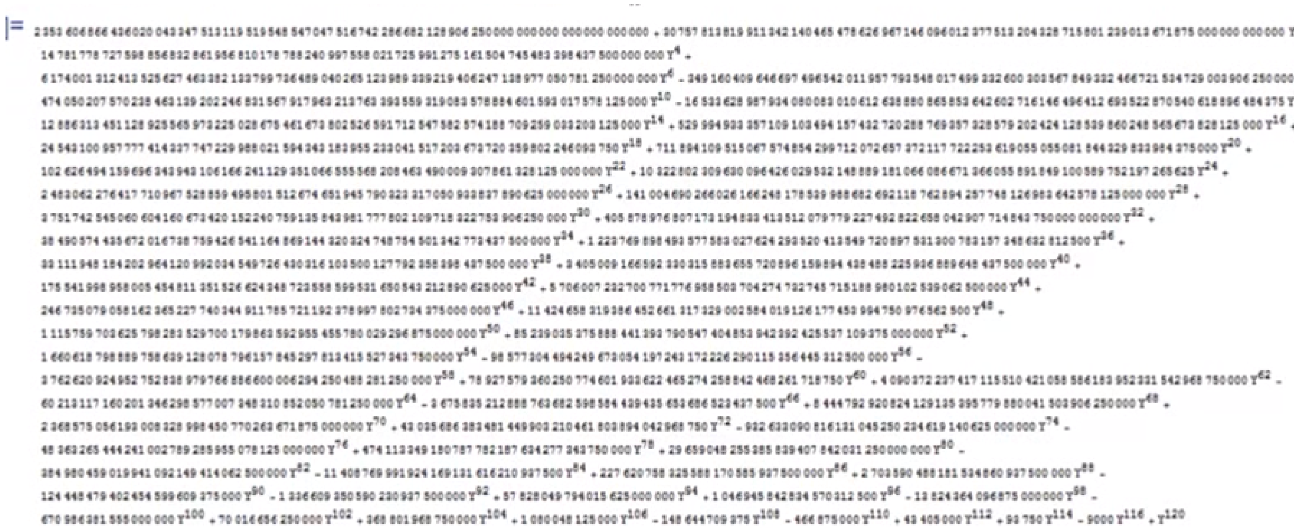
Et là, vous avez 20. Donc, ça vous donne le point de départ. Bon.

Alors ensuite, on part d'une équation. On part, par exemple, de celle-là. Celle-là, c'est celle qui a 10. Donc, c'est celle qui a le groupe dihédral. D'accord ? Alors, qu'est-ce qu'on fait quand on a une équation ? Comment on fait pour calculer son groupe de Galois ? Comment Galois proposait de le faire ? Alors, ce que disait d'abord Galois, c'est que vous allez trouver une fonction des racines qui est telle que cette fonction va prendre factorielle 5 valeurs différentes, 120 valeurs différentes, quand vous permutez les racines entre elles. Alors, on essaye la fonction la plus simple possible. La fonction la plus simple possible, c'est $a + 2b + 3c + 4d$. Je n'ai pas envie de mettre e, puisque la somme des racines est connue. Et puis, les coefficients, il faut bien qu'ils soient différents. Donc, j'ai pris 1, 2, 3, 4. Ça ne peut pas être plus simple que ça. D'accord ? Donc, on prend ces coefficients-là et on cherche quelle est l'équation qui a pour racine les $a+2b+3c+4d$. D'accord ? On la calcule.

Je ne vous la montre pas parce que ça vous ferait peur. Si quelqu'un veut que je la montre, je peux la montrer. D'accord ? Mais bon, il ne faut peut-être pas.

Ce qui est sûr, c'est que vous demandez de la factoriser. Si, je vais quand même vous la montrer. D'accord ? Attendez, je vais supprimer.

Je vais vous la montrer. Je vais faire “entrez”. Vous voyez ? Voilà.



D’accord ? Ce n’est pas jojo. D’accord ? Donc, si on vous donne comme exo de factoriser ce polynôme, bon, ça peut être un peu embêtant. L’ordinateur, il fait ça en 3 secondes.

D’accord ? Je vais lui demander de le faire, l’ordinateur, parce que pourquoi pas. Voilà. Donc, l’ordre que je lui donne, c’est de factoriser ce polynôme.

D’accord ? Il va le faire. Voilà. Il vous donne le résultat tout de suite.

Donc, vous voyez que tous les facteurs irréductibles sont de degré 10. D’accord ? Il y en a 12. Et maintenant, une fois qu’on a ces facteurs irréductibles, par un raisonnement d’élimination qui est très très simple, on peut exprimer les racines de l’équation de départ en fonction d’une racine quelconque de ce polynôme.

Alors, on fait le calcul. C’est un calcul par élimination qui n’est pas difficile, mais qui est long. Et on obtient, voilà, l’expression pour les racines. C’est une expression qui est unique. Vous voyez qu’elle... Ici, ça s’arrête au degré 8. Ici, ça s’arrête au degré 9. On ne va pas jusqu’au degré 10, puisque l’équation irréductible est de degré 10. Donc, on peut toujours simplifier par y^{10}. Donc, voilà ces fonctions-là. Ça, c’est tout à fait calculable. Je veux dire, Galois peut le faire parfaitement, ça. Il n’y a aucune difficulté, là, sauf le premier polynôme. Ensuite, on prend les racines du polynôme du premier facteur, là, de tout à l’heure, qui était celui-là, d’accord ? On choisit le premier facteur irréductible. On prend ses racines. Elles ont l’air de ça. Et alors, maintenant, ce qui est incroyable, c’est que chaque fois qu’on a un couple de racines... C’est ça qu’il faut bien comprendre. Chaque fois qu’on a un couple de racines de l’équation auxiliaire, ça va nous donner une permutation. Ça correspondait au tableau de tout à l’heure, qui donnait l’ambiguïté entre les racines. Alors, j’ai écrit un petit programme qui va vous montrer que chaque fois que vous me donnez deux nombres, par exemple celui-là, j’ai une permutation correspondante. Dans ce cas-là, on va voir apparaître le groupe dihédral.

En fait, on peut fixer l'une des deux. On va, par exemple, fixer la première racine comme étant égale à 1. Et on va faire varier la deuxième. Et on va voir qu'en faisant varier la deuxième, on obtient tout le groupe dihédral.

Alors, j'obtiens l'identité, mais je ne l'ai pas marquée. Ensuite, on obtient ça. Vous voyez bien que ça fait partie du groupe dihédral.

Ça, c'est une involution de carré 1 qui fixe ce point, etc. Et puis, on va avoir les dix éléments. Ça, c'est une permutation cyclique.

Là, on a une involution qui fixe un autre point, une autre involution, permutation cyclique, involution, etc. D'accord ? Permutation cyclique, involution. D'accord.

Donc, je veux dire, là, on voit parfaitement comment le groupe de Galois se calcule. Le calcul n'est pas vraiment compliqué, parce que l'équation a pour groupe le groupe dihédral. Et ensuite, si on applique la factorisation de tout à l'heure, on peut vérifier quelque chose qui est mieux encore, enfin, qui est mieux, qui est très relié au théorème de Chebotarev et qui est un théorème de Dedekind. Et qui dit que si on regarde maintenant comment le polynôme va se factoriser modulo p, par exemple modulo 23, ça va correspondre à des cycles dans le groupe de Galois. Vous voyez, par exemple, la décomposition modulo 23, elle va correspondre à une involution qui va fixer une racine, qui va permuter deux autres racines, qui va permuter deux autres racines, et ainsi de suite.

Ça, ça va correspondre à une permutation cyclique. Et ça, ça va correspondre à une involution. Voilà.

Donc, en fait, on a un contrôle. Alors là, maintenant, on va partir d'une autre équation. Ah oui, c'était celle dont j'étais parti. Et si je prends celle dont j'étais parti au départ. Celle-là, on l'a déjà complètement traitée. Elle avait un groupe de Galois qui était très simple.

Mais vous voyez qu'on va retrouver cette simplicité du groupe de Galois parce que quand on factorise le polynôme associé, eh bien, on va ne retrouver que des tout petits polynômes de degré 5. Donc là, le groupe de Galois est d'ordre 5. Il est très, très simple. On peut calculer l'expression des racines. On peut calculer le polynôme associé.

Mais l'intérêt, maintenant, par rapport à ce qu'on avait tout à l'heure, c'est qu'on peut calculer explicitement les permutations. Ça, c'est beaucoup plus joli que de savoir abstraitement que le groupe de Galois est d'ordre 5. Par exemple, ici, on va obtenir toutes les permutations. Et ces permutations ne se comprennent qu'une fois qu'on a indexé, comme je l'ai dit tout à l'heure, correctement les racines par le corps $\mathbb{F}_5$ de telle sorte qu'elles deviennent simplement des translations.

On a une structure qui est dévoilée par le groupe de Galois. De même qu'on l'a vu, il y a la résolubilité modulo un nombre premier. Ça, on l'a déjà montré tout à l'heure.

Maintenant, on regarde l'équation des racines $5^{\text{ièmes}}$. Bon alors l'équation des racines $5^{\text{ièmes}}$, c'est un petit peu plus embêtant. Voilà le polynôme de degré 120 dont on part.

Les polynômes irréductibles qu'on obtient ne sont pas très méchants. Ils sont de degré 20. Ils ne sont vraiment pas méchants du tout.

Et à nouveau, les équations qui donnent les racines en fonction de ces polynômes ne sont pas compliquées. Regardez, celle-là est extrêmement simple. Je vais faire un petit aparté pour les mathématiciens.

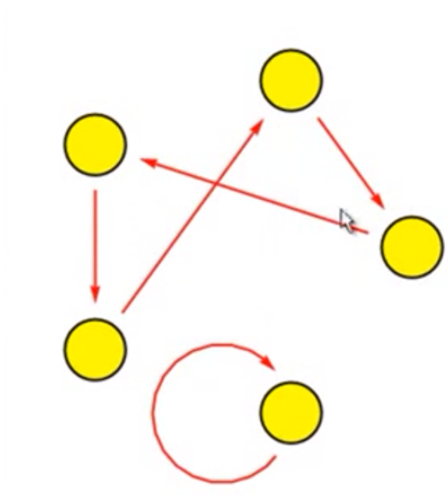
Vous savez, en mathématiques, on a un moyen merveilleux pour résoudre une équation. Si on prend l'anneau des polynômes, on a une équation $P(x) = 0$. Pour résoudre l'équation, on prend l'anneau des polynômes et on le divise par l'idéal engendré par $P(x)$. À ce moment-là, on a résolu l'équation parce que x est une racine. Malheureusement, ça a un gros inconvénient de faire ça, c'est qu'en général, on a une seule racine.

C'est-à-dire que vous ne pouvez pas factoriser le polynôme. Mais la méthode de Galois, la méthode dont je vous parle, elle permet de factoriser entièrement le polynôme. Et c'est formidable, après, quand on a un peu l'habitude de l'ordinateur, de voir que quand on a exprimé toutes les racines en fonctions rationnelles d'une seule racine, on peut se poser toutes sortes de questions et on a une réponse absolument immédiate.

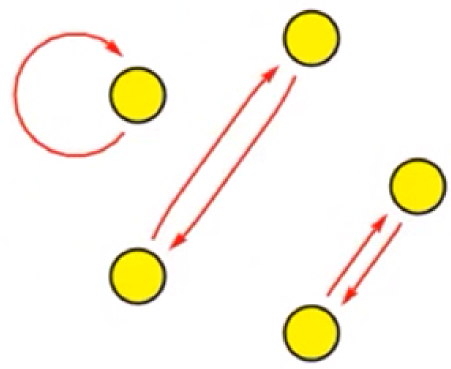
C'est quelque chose de merveilleux. Donc, il y a un pas qui a l'air de rien. Bien sûr, quand on définit les nombres complexes, on a rajouté toutes les racines de l'équation parce qu'on a rajouté i, mais l'autre racine, c'est $-i$. Lorsqu'on définit les corps finis, c'est pareil.

Mais lorsqu'on définit des extensions plus générales, ce procédé-là est extrêmement efficace. Maintenant, ce qui se passe, c'est que là, on fait pareil. On regarde les racines de l'équation auxiliaire et on a le groupe de Galois.

Vous allez avoir le groupe de Galois. Il est un petit peu plus compliqué parce qu'il est d'ordre 20. Vous avez des permutations cycliques. Ça, c'est encore le groupe dihédral. Je vais essayer de trouver quelque chose qui ne soit pas dans le groupe dihédral, quand même. Ça, c'est encore dans le groupe dihédral. Ça encore. Ça encore. Tiens, c'est bizarre. On va aller vers le bas. Ça encore.



Voilà, ça, ce n'est pas dans le groupe dihédral. Ça, c'est une permutation impaire. Il faut bien savoir maintenant, si vous réfléchissez, si le groupe A_5 avait contenu le groupe des transformations affines, l'équation du cinquième degré aurait été résoluble par radicaux.



Je pense que c'est ça l'erreur qu'ont fait Galois et Abel. Et la raison, c'est la suivante. C'est que le polynôme adjoint, pour résoudre l'équation, aurait été un polynôme de degré 3, puisque 60 divisé par 20, ça vaut 3. Et à ce moment-là, on aurait pu résoudre cette équation puisqu'elle est de degré 3. Et comme le groupe d'ordre 20 est résoluble, on aurait pu, en rajoutant des radicaux, résoudre l'équation de départ. Mais c'est bien sûr faux. Il suffit de regarder que la permutation qui est en face de vos yeux, elle est impaire. Elle n'est pas paire. Et donc, elle ne peut pas appartenir au groupe A_5. Donc, voilà ce qui se passe. Alors, bien sûr, il y a le théorème de Chebotarev.

Vous pouvez aussi regarder ce qui se passe ici. D'accord ? Bon. Alors maintenant, on va venir à quelque chose de beaucoup plus intéressant.

Et je pense que c'est ce à quoi Galois faisait référence lorsqu'il disait "*on ne peut pas faire les calculs*". Pourquoi ? Parce que ça ne l'intéressait pas d'avoir des équations qui étaient résolubles par radicaux. Il y en avait partout.

Il voulait une équation concrète, numérique, qui ne soit pas résoluble par radicaux. Ça, il le voulait absolument, d'accord ? Et appliquer sa méthode à cette équation.

Alors, j'en ai pris une qui, comme je l'ai dit tout à l'heure, a un discriminant qui est un carré. Donc, elle n'est encore pas trop méchante. Ça veut dire que quand vous prenez son polynôme irréductible, bon, c'est celui-là, il va se casser en deux.

Il va se casser en deux. Est-ce que je l'ai cassé en deux ? Voilà. Non, je ne l'ai pas cassé en deux, peu importe. Vous avez un polynôme de degré 60. Je ne sais pas si le degré de celui-là, c'est 60. Oui, c'est 60. Donc, celui-là, c'est le polynôme irréductible, de degré 60, que vous obtenez en décomposant le polynôme associé toujours aux racines $a + 2b + 3c + 4d$, en facteurs irréductibles. Donc, vous obtenez ça.

Et alors maintenant, vous demandez de calculer les racines comme tout à l'heure. Vous vous souvenez, tout à l'heure, il y avait une belle formule pour les racines de l'équation de départ en fonction du polynôme associé, des racines du polynôme associé. Alors maintenant, vous demandez de faire le calcul.

Alors ça, vous pouvez le demander à l'ordinateur. Il fait le calcul. Il obtient des polynômes. Il obtient des polynômes de degré 59, puisque l'équation associée est de degré 60. Et alors, l'ordinateur fait les calculs avec, sans aucune difficulté. Mais par curiosité, j'ai demandé à l'ordinateur de me donner le terme constant du polynôme qui donne la première racine.

D'accord ? Le terme constant, c'est cette fraction-là. D'accord ? Alors, j'ai demandé à l'ordinateur le numérateur de la fraction. C'est facile.

Et j'ai demandé combien il y avait de zéros. C'est 10 puissance 393. Alors maintenant, les physiciens nous disent que c'est le nombre d'univers qui sont possibles, 10 puissance 500, un truc comme ça.

Mais vous imaginez bien que quand on doit faire des calculs à la main, et que pour la première racine, et le terme constant, on obtient ce terme-là, c'est impossible. C'est absolument impossible de continuer. C'est impossible.

C'est infaisable. C'est infaisable. À la main, c'est infaisable.

À l'ordinateur, c'est parfaitement faisable. C'est-à-dire qu'à l'ordinateur, vous faites le calcul. Vous demandez à l'ordinateur de vérifier, de calculer le polynôme minimal, etc. Il vous donne le résultat sans aucune difficulté et il vérifie toutes les propriétés. Et en plus, l'ordinateur va vous donner le groupe de Galois.

Donc, voilà comment le groupe de Galois, comme je vous l'ai dit, il est indexé par des paires de racines de l'équation auxiliaire. Ces paires sont indexées par des entiers et ces entiers sont très spécifiques. Ils sont donnés comme ça, par les racines de l'équation auxiliaire. Et à chaque paire de racines, le groupe de Galois vous donne une permutation. Il vous donne des permutations. Alors là, bien sûr, comme c'est le groupe symétrique, on a toutes les permutations paires possibles entre les racines. Ce n'est pas ce groupe-là en soi qui soit vraiment surprenant. C'est son indexation.

Et ensuite, bien sûr, quand on regarde avec Chebotarev et Dedekind, on s'aperçoit qu'on a effectivement toutes sortes de choses qui peuvent se produire. Vous voyez, par exemple, là, vous avez deux points fixes et puis une permutation cyclique. Là, vous avez un point fixe et deux permutations, deux involutions, etc.

Donc ça, c'est très simple. Alors maintenant, ce que je voulais faire, c'était peut-être aussi... Je n'avais jamais vu faire de manière concrète le fait que quand on adjoint une racine d'une équation auxiliaire, le groupe de Galois, qui était le groupe A_5 ici, va se casser en sous-groupes, mais qui ne seront pas des sous-groupes normaux. Ça, c'est un point essentiel que Galois a compris. Il a compris que quand on adjoint une seule racine d'une équation auxiliaire, le groupe de Galois va diminuer, l'ambiguïté va diminuer, dans des cas particuliers. L'ambiguïté va diminuer, mais elle ne va pas diminuer de manière normale. C'est-à-dire qu'elle va diminuer d'une manière qui dépend du choix de cette racine auxiliaire. C'est extrêmement bizarre. C'est extrêmement bizarre parce que quand vous écrivez la factorisation en polynômes de degrés..., je ne sais plus quels degrés ils ont, ils sont de degré 10, en polynômes de degré 10, quand vous rajoutez cette équation à l'équation de tout à l'heure, à l'équation, je ne l'ai pas choisie au hasard, bien sûr, 109+493x-15x$^2 + 10x^4 + x^6$, quand vous rajoutez cette équation de degré 6, le polynôme se factorise ; il se factorise en termes de la racine adjointe ω. Mais la factorisation ne dépend pas du choix d'ω puisque c'est une factorisation abstraite.

Comment se fait-il que, alors que la factorisation ne dépend pas du choix de ω, le groupe de Galois, lui, se réduise d'une manière qui dépend de ω ? Alors, la manière dont ça arrive, c'est la chose suivante, c'est qu'en fait, ω va prendre six valeurs possibles. Et à chacune de ces six valeurs possibles, quand on regarde les racines d'un terme irréductible du polynôme qui est là, on va obtenir une partition de l'ensemble des 60 racines de l'équation de départ en six sous-ensembles de dix éléments. Alors, j'ai eu beaucoup de mal à la représenter.

J'ai voulu le faire avec des couleurs, ça ne marchait absolument pas, on ne voyait rien. Alors, j'ai finalement opté pour le jeu de cartes et puis j'ai rajouté un loup et puis un symbole un peu connu, c'est celui-là, voilà, d'accord. Et voilà, je vais vous montrer.

Donc, chaque fois que vous rajoutez une racine différente, il y a une partition différente des 60 racines de l'équation auxiliaire. Alors, si je change la racine, ça donne ça. Chaque fois, ce sont des partitions différentes. Chaque fois, ce sont des partitions différentes. Et à chacune de ces partitions, va correspondre un groupe de Galois différent et ce groupe de Galois différent, on peut le calculer, donc. On peut le calculer.

Alors ici, je crois que j'ai calculé pour la partition numéro 3, il me semble. Je vais regarder. Partition numéro 3, c'est ça, d'accord. Donc, je vais simplement vous montrer que ces groupes sont vraiment différents. Alors, il faut que je trouve un élément qui soit un peu typique. Alors, un élément typique, voilà. C'est un élément, par exemple, qui préserve ce point. Alors, je sais que le groupe, ça va être un groupe dihédral d'ordre 10, et je veux distinguer ce sous-groupe du groupe qui correspondra à l'adjonction, je crois que c'est l'adjonction de la numéro 2, ici. Donc, je vais chercher, ah ben voilà, je l'ai.

Ah non, c'est pas possible, ça. Ah non, ces deux-là sont les mêmes, voilà. On va chercher un autre point fixe.

D'accord, donc on va chercher un autre point fixe. Voilà, alors on va prendre ce point fixe-là, d'accord, et je vais le chercher dans le groupe du haut. D'accord, donc je vais chercher dans le groupe du haut, le truc qui fixe le point qui est là.

Alors, je vais chercher. Là, j'ai 10, donc je vais chercher ici. Non, j'ai pas.

Alors, ici. C'est lequel ? C'est celui-là, oui, que je vais fixer. Voilà.

Vous voyez que ce ne sont pas les mêmes. Vous voyez que la permutation qui fixe cette racine, il n'y en aura qu'une, elle n'est pas la même dans le sous-groupe obtenu en adjoignant la racine numéro 3 de la racine numéro 2. D'accord ? Et donc les sous-groupes sont distincts. Bon, alors ça c'était simplement, donc, si vous voulez, une expérimentation, bien entendu. Mais c'est une expérimentation qui, j'espère, montre absolument clairement, je veux dire, l'incroyable vision de Galois qui était capable, sans, à aucun moment, effectuer les calculs, de savoir les résultats que les calculs donneraient, et de voir infiniment plus loin parce que, si vous voulez, non seulement il a été capable de voir qu'une équation primitive est résoluble, si et seulement si on peut indexer ces racines par un corps fini qu'il avait défini et les permutations étant données par le produit semi-direct du groupe affine par le Frobenius, mais en fait il s'est aperçu après qu'il pouvait appliquer sa théorie aux fonctions elliptiques et aux divisions des fonctions elliptiques et c'était pour lui tout à fait un hasard.

Alors je voudrais terminer en revenant sur la fin, si vous voulez, en revenant sur, j'espère que ça va marcher ça, voilà, d'accord, donc en revenant sur la lettre que Galois a écrite à son ami Auguste Chevalier, donc la veille du duel, et dans cette lettre, il dit quelque chose de tout à fait cryptique, impossible presque à comprendre, à quoi on pourrait toujours essayer de donner 36 significations possibles, qui est la chose suivante, c'est dans le paragraphe du milieu :

> "*Tu sais mon cher Auguste que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés, mes principales méditations depuis quelques temps ont été dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté ; il s'agissait de voir, a priori, dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire* (vous voyez tout à l'heure on a vu pour des équations concrètes algébriques qu'il y a certains échanges qu'on ne pouvait pas faire ; il y a certaines équations qui n'étaient pas possibles comme l'équation $E = 4D^2 + 2D^2$) *quelle quantité on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation puisse cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher, mais je n'ai pas le temps, et mes idées ne sont pas encore assez développées sur ce terrain qui est immense.*".

Alors, je voudrais conclure si vous voulez de manière à bien faire voir à quel point la pensée de Galois n'est sûrement pas épuisée : la raison c'est la suivante, c'est que maintenant, on a dans les mathématiques modernes, bien sûr, comme je vous l'ai montré, on a parfaitement maîtrisé cette partie qui est la théorie de Galois qui est la théorie des équations etc., on la contrôle infiniment bien. Mais on a un problème analogue, on a un problème analogue plus difficile, bien sûr, que le problème de Galois, et qui est un problème transcendant, et dans ce problème-là, en gros, c'est comme si on avait une équation, ce qu'on appelle les fonctions L, c'est comme si on avait une équation, dont on ne sait même pas démontrer que les racines de cette équation sont toutes réelles ; on ne sait même pas, on en est sûr, parce qu'on peut le vérifier à l'ordinateur, on ne sait même pas démontrer que les racines de cette équation sont toutes réelles. Donc on n'est même pas au premier pas, qui est le pas des physiciens, si vous voulez, qui consiste à regarder où sont les racines de l'équation. Mais le pas suivant, c'est un pas qui est absolument évident tel qu'il est posé par Galois, c'est de développer la théorie de Galois pour ces équations-là. Et ça, ça commence un tout petit peu à exister, mais c'est une théorie qui est bien bien bien loin d'être développée et d'être comprise. Donc il faut bien voir que réduire la théorie de Galois à son application au cadre classique de la théorie des corps, etc., ce serait quelque chose qui serait complètement illusoire parce qu'en fait, dans l'idée fondamentale qui est derrière, l'idée qui est infiniment difficile à expliquer, à saisir, il y a un potentiel qui est beaucoup plus grand que celui qui a été capturé par le formalisme des mathématiques modernes. Voilà je crois que je vais terminer ici.

(Applaudissements)

Le Président de séance : Même ceux qui n'ont pas tout compris, dont je suis, ont été captivés. On vous remercie, beaucoup, et ce qui est intéressant, c'est que vous puissiez dire que tout n'est pas fini, que ça peut encore se développer.

Alain Connes : Bien sûr.

Le Président de séance : La seule question que je voulais vous poser personnellement, c'est de savoir quel crédit on donne à Galois dans les autres pays que notre pays.

Alain Connes : Eh bien en fait, on lui donne plus de crédit qu'en France, puisque par exemple, les corps finis sont appelés les corps de Galois dans tous les pays étrangers. Pas en France ! Donc je vais dire, non, son crédit est immense : je veux dire, ce qu'on appelle groupe de Galois, théorie de Galois, c'est un nom qui est utilisé tout le temps, le nom de Galois est utilisé en permanence ; on appelle extension galoisienne l'extension qui provient de l'équation auxiliaire etc. etc. donc je veux dire il est omniprésent, il est omniprésent. C'est incroyable, cette destinée, c'est une destinée absolument incroyable, penser qu'il n'a jamais eu vraiment la sûreté, à aucun moment, que son travail allait être reconnu, à aucun moment, même au moment où il est mort, je veux dire, à aucun moment, il n'a eu le sentiment que son travail, il faut dire que bon, on comprend, j'espère que vous avez compris, à quel point les relations avec Abel sont complexes et intéressantes, et à quel point, justement, je veux dire, il n'était pas dans une situation simple ; en gros, il a pris le relais, en gros, Abel est mort, et puis Galois est arrivé, il a pris le relais, c'est comme s'ils s'étaient passés le relais de l'un à l'autre, c'est quelque chose d'incroyable. On aurait bien tort de dire "l'un a fait plus que l'autre", ce serait ridicule, ce serait grotesque. Galois avait compris indépendamment, il n'aurait rien fait s'il était parti de là où Abel était, il avait compris indépendamment, il lisait les papiers de Cauchy, les papiers de Lagrange, les papiers de Gauss, et à partir de là, il avait compris énormément de choses...

Le Président de séance : Est-ce que c'est possible d'imaginer ce qu'il aurait fait s'il n'avait pas...

Alain Connes : On n'en sait rien on ne peut absolument rien dire, c'est comme "qu'est-ce que Mozart aurait composé ?". Qui peut dire quoi que ce soit là-dessus personne.

Le Président de séance : Si, Mozart aurait fait de la musique.

Alain Connes : Oui, bon, peut-être.

Le Président de séance : Bien, la discussion est ouverte ; je pense qu'il va y avoir beaucoup de questions.

Jean-Pierre Kahane[2] : Juste où en est-on de la dernière phrase ? C'est-à-dire est-ce qu'on a avancé depuis Galois, sur le programme de Galois, i.e. l'extension aux fonctions transcendantes ?

Alain Connes : Non, il y a pas mal de théories qui peuvent prétendre à ça, en particulier la théorie de Malgrange et Ramis, bien entendu, mais je veux dire, si on est un peu, comment dire, un peu simples, un peu naïfs, on peut dire que ce qui remplace les équations, ce sont les fonctions L. Et on a la notion de factorisation, il y a des fonctions L qui se factorisent etc., il y a des fonctions L dont on pense qu'elles sont irréductibles en un sens convenable etc. La théorie de Galois pour les fonctions L, c'est un peu la théorie des motifs, mais bon, je veux dire, par exemple, trouver des relations non triviales entre les racines, entre les zéros de la fonction ζ de Riemann, pour le moment, personne ne sait rien là-dessus. Donc on voit bien qu'il y a des relations, il y a les fonctions symétriques de la fonction ζ de Riemann, ça, ce sont les formules explicites de Riemann et Weil qui donnent les fonctions symétriques : on les connaît, on les exprime en termes des fonctions qui comptent les nombres premiers, mais les fonctions qui ne sont pas symétriques, est-ce qu'il existe des relations qui ne sont pas des fonctions symétriques, on le sait un peu, parce qu'on a des relations entre les zéros qui imposent de compter les zéros de manière symétrique par rapport à la droite réelle, et ce ne sera pas des relations qui seront invariantes par toutes les symétries, mais on est très peu avancé dans ce domaine et si Galois avait vécu, il aurait peut-être eu l'article de Riemann, sur la conjecture de Riemann, il aurait peut-être développé sa théorie dans ce cadre-là. On n'en sait rien, on ne peut rien dire, personne ne peut dire quoi que ce soit là-dessus.

Le Président de séance : Est-ce qu'il y a d'autres questions ? Monsieur Pecker[3] ?

Jean-Claude Pecker : Excusez-moi, c'est plutôt sur la première partie de ton exposé que je voudrais poser une question : la dernière lettre qui est projetée, celle de Galois à Chevalier, que tu nous as projetée, dit bien qu'il n'a plus eu le temps de faire quelque chose, de développer telle théorie ou telle autre ; est-ce que ça veut dire qu'il s'attendait à être tué en duel ?

Alain Connes : Bon c'est très compliqué, disons qu'il n'a plus eu le temps, c'est plus compliqué que ça. Galois avait passé la dernière année de sa vie en prison. En prison, il a continué à faire des maths et ça, avec un mérite absolument incroyable, parce qu'il n'était pas dans une petite chambre tranquille, avec des bouquins, il était au milieu des autres prisonniers. La prison Sainte-Pélagie, c'était une prison où tous les prisonniers étaient ensemble, et de temps en temps, ses collègues le forçaient à boire. À un moment donné, il avait été obligé de vider une bouteille d'eau de vie, il avait été malade comme un chien, et au moment où Nerval l'a vu dans cette prison, Nerval a dit que Galois avait l'air d'avoir 50 ans ; il n'avait pas encore 20 ans. Donc il était déjà extrêmement usé physiquement, par le fait qu'il continuait à travailler malgré la prison. Alors ensuite ce qui s'est passé, pour le duel, il y a 36 versions, il y a plusieurs versions, il y a la version du bouquin de Infeld, il y a la version du complot, il y a un tas de versions différentes, Jean-Pierre Kahane m'a donné un bouquin qui a une autre version, on ne peut rien dire ; par contre, c'est évident qu'il pensait qu'il n'avait pas beaucoup de chance d'en sortir, de ce duel, il y avait une histoire

[2]Jean-Pierre Kahane, mathématicien français et académicien (1926 - 2017).

[3]Jean-Claude Pecker (1923 - 2020) : astrophysicien français.

de femme, il s'était mis dans de sales draps etc. il avait été provoqué, on ne sait pas, comme je l'ai dit, s'il y avait un complot etc. Mais en tout cas, on imagine mal que Galois était un expert dans le tir au pistolet. Et je ne connais pas les détails, j'avais entendu une fois mais je ne peux pas certifier mes sources, qu'en fait, au lieu d'être un duel dans lequel ils étaient à une vingtaine de mètres et puis ils se rapprochaient à 10 mètres et ils se tiraient l'un sur l'autre, j'ai entendu dire mais je n'en suis pas sûr, qu'en fait, c'était un duel dans lequel un seul des deux pistolets était chargé, ils mettaient chacun le pistolet sur le ventre de l'autre et ils tiraient. Donc bon, je vais dire, il n'a pas eu, il y avait une chance sur deux qu'il s'en sorte, et une chance sur deux qu'il y reste. Et bien sûr, il n'est pas mort tout de suite, il est mort de péritonite, le lendemain, à l'hôpital, vous connaissez l'histoire mais c'est bien évident que quand il disait qu'il n'avait pas le temps, c'est qu'il n'avait pas le temps d'écrire ses idées, mais les idées, il les avait en tête. Quand il disait "je n'ai pas le temps", c'est qu'il n'avait pas le temps d'écrire, mais les idées, il les avait en tête. Ça c'est évident.

Le Président de séance : La chirurgie est honteuse de ne pas avoir pu corriger cette péritonite. Monsieur Balian ?

Roger Balian : C'est simplement pour signaler un tout petit fait, à propos du manque d'hommage officiel à Galois, il y a une rue Galois à Bourg-la-Reine, mais c'est son père.

Alain Connes : C'est son père, absolument, il y a une autre rue Galois à Vitry, mais elle est en dehors du périphérique, et je pense que l'Académie s'honorerait, en demandant qu'une plaque soit mise au 5 rue de la Sorbonne, disant simplement "En cet endroit, Galois a donné un cours d'algèbre en janvier, donc si je me souviens bien, c'est janvier 1830".

Un auditeur : Si vous me permettez, non pas une question, mais deux remarques ; la première, c'est que je crois que le portrait que vous avez montré au début c'est celui de son frère, fait de mémoire par son frère, et non pas par Auguste Chevalier.

Alain Connes : Oui vous avez raison, parfaitement, j'ai hésité, j'avais une hésitation, et c'était une des rares mais celle-là, c'était une hésitation fondée, tout à fait.

Le même auditeur : Alors j'ai une autre remarque c'est qu'il existe une rue Galois dans Paris, mais elle n'est pas à l'intérieur du périphérique, elle est juste à droite de la porte des Lilas, c'est ça elle fait 80 mètres de long, elle n'est effectivement pas à la hauteur du personnage.

Alain Connes : On ne peut pas, c'est insensé, je veux dire...

Le même auditeur : Si vous permettez une troisième chose, c'est que le Conseil de Paris a voté je crois, le 17 octobre, le fait de mettre une plaque à la mémoire d'Évariste Galois au 16 rue des Bernardins, qui est le domicile qu'il avait eu avant sa deuxième incarcération.

Alain Connes : bon bon bon bon bon bon bon.

Le même auditeur : Ça n'interdit absolument pas de mettre une plaque au 5 rue de la Sorbonne.

Alain Connes : Oui pourquoi pas.

Le même auditeur : Il n'y a plus de librairie, mais il y a quand même une grande maison.

Alain Aspect : C'est une blague comme personne n'a de questions sérieuse à poser : on pourrait imaginer un Prix Évariste Galois, et j'étais en train de réfléchir aux sociétés qu'on pourrait solliciter comme sponsor, et il m'est passé par la tête l'idée saugrenue, connaissant la personnalité d'Évariste Galois, qu'on pourrait demander aux banques, qui bénéficient des mathématiques pour faire les choses, je ne suis pas sûr que la mémoire d'Évariste Galois apprécierait, mais par contre, l'idée que vous fassiez quelque chose, les mathématiciens, pour un grand prix Évariste Galois, en trouvant un sponsor honorable, ça peut peut-être se trouver, quand même...

Alain Connes : Oui, mais il y a déjà un prix Abel, je ne sais pas...

Le Président de séance : d'autres questions ? Non... S'il n'y a pas d'autres questions, tout le monde est impressionné, c'est comme cela qu'il faut interpréter ce silence admiratif. On vous remercie infiniment.

(Applaudissements).

Conférence d'Alain Connes, séance publique de l'Académie des Sciences, dans le cadre des Conférences 5 à 7 : Mathématiques et imagination (6 février 2024, 17h30).

Françoise Combes : Bonsoir tout le monde, nous allons commencer. Donc nous avons le plaisir d'entendre aujourd'hui Alain Connes qui est Professeur émérite au Collège de France et à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Il est membre de la section mathématique de l'Académie des Sciences. Il a reçu la médaille Fields en 1982, le prix Crafoord en 2001, et la médaille d'or du CNRS en 2004. Alain a révolutionné entièrement la théorie des algèbres de von Neumman et résolu la plupart des problèmes posés dans ce domaine. Il s'est aussi illustré en géométrie non-commutative et dans les espaces mathématiques de la renormalisation. Il va nous parler aujourd'hui de mathématiques et imagination, un exposé qui s'annonce passionnant, notamment de la théorie de l'ambiguité de Galois ou bien de la partie non déchiffrée de la Pierre de Rosette [1]. Donc Alain.

Alain Connes : Merci. Merci. Donc je vais vous parler de mathématiques et imagination, et je vais dire, je vais commencer, on peut difficilement en parler sans expliquer, si vous voulez, le début des nombres imaginaires en mathématiques. Alors ça commence, disons, vers 1500 et Scipione del Ferro était à Bologne et avait trouvé une formule pour résoudre les équations du 3ième degré. Ensuite ce qui s'est produit, c'est qu'il y a eu une période où Scipione del Ferro n'avait pas divulgué sa formule et un de ses disciples, qui était Antonio Maria del Fiore, avait provoqué Tartaglia : ce n'était pas un duel, mais c'était une joute mathématique. Donc chacun des deux donnait à l'autre 30 équations du 3ième degré et euh celui qui gagnait, cétait celui qui en résolvait le plus et celui qui gagnait, gagnait 30 banquets ; donc vous voyez le degré de civilisation de cette époque. C'était en 1535 et Tartaglia, une semaine avant le concours, a lui aussi trouvé une formule pour résoudre les équations du 3ième degré, d'accord. Alors vous verrez qu'en fait, c'est à travers toutes ces tribulations qu'en fait, les formules qui avaient été obtenues étaient des formules qui marchaient dans le cas où l'équation du 3ième degré a une seule solution réelle ; donc la solution réelle est bien définie, il y a une formule et c'est une formule qui, dans ce cas-là, ne fait intervenir que des nombres réels. Donc il n'y a pas de difficulté véritable.

Alors ce qui est extrêmement paradoxal, c'est que quand il y a trois racines réelles, ça paraît totalement absurde il y en a beaucoup plus que dans le cas où il y en a une, quand il y a trois racines réelles, à ce moment-là, la formule ne marche pas. Donc ça paraît quelque chose de vraiment extrêmement mystérieux.

Et ce qui s'est produit, donc, c'est que c'est à cette occasion là qu'un disciple de Cardan a vraiment inventé les nombres complexes. Alors il faut savoir qu'on parle des formules de Cardan mais comme très souvent en mathématiques, le nom qui est donné à ces formules ne correspond absolument pas aux personnes qui les ont découvertes, parce que les personnes qui les ont découvertes dans ce cas, ce sont Scipione del Ferro et Tartaglia. Et ce qui s'est produit c'est que Cardan, qui était à Milan, avait invité Tartaglia, il voulait lui tirer les vers du nez, Tartaglia ne voulait absolument pas divulguer sa formule mais après un certain temps, etc., il a fini par céder en demandant à Cardan de jurer que jamais il ne dévoilerait sa formule. Et il la lui a dévoilée, voyez le degré de civilisation,

[1] Pierre de Rosette des mathématiques.
Transcription de la vidéo visionnable ici : https://www.youtube-nocookie.com/embed/Y0-tt85Xhlg.
Transcription : Denise Vella-Chemla (assistée d'outils, Wondershare Filmora, et Turboscribe).

en lui donnant un poème, qui était en fait très difficile à déchiffrer, mais qui contenait la formule en question.

Alors ce qui s'est passé après, c'est assez moche, c'est que Cardan a appris que Scipione del Ferro avait aussi la formule et du coup, il s'est dit qu'il était dédouané, qu'il pouvait divulguer la formule. Maintenant on appelle ça *formule de Cardan*, ce qui est une rigolade, d'accord.

Alors, donc, en fait, Rafael Bombelli était un disciple de Cardan et c'était un ingénieur, et si vous voulez en tant qu'ingénieur, bah, il savait très bien ce que c'était que les nombres réels ; en fait pour lui c'étaient les nombres positifs qui comptaient, et à un moment, il était mathématicien aussi, bien sûr, et à un moment donné, dans sa vie, si vous voulez, c'était un ingénieur qui s'occupait de drainer des marais. Et à un moment donné dans sa vie, il n'avait plus de travailleur à sa disposition ; donc en fait il a été reçu dans une villa qui s'appelait la Villa Rufina [2] et il est resté là 3 ans, et pendant 3 ans, il avait toute la liberté de penser. Il avait un frère aussi qui était mathématicien, il avait toute la liberté de penser et d'écrire et c'est à ce moment-là qu'il a écrit son ouvrage qu'il a appelé l'*Algebra* dont je vous montre l'image ici. Et c'est à cette occasion-là qu'il a découvert vraiment les nombres complexes. Alors pour les mathématiciens pour qu'ils ne s'ennuient pas trop, j'ai mis en haut une petite formule, vous voyez, avec $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$, $\sqrt[3]{4+\sqrt{-11}}-\sqrt[3]{4-\sqrt{-11}}$ et pour ne pas qu'ils s'ennuient, il faut qu'ils trouvent quels sont ces deux nombres, d'accord, alors, et puis, je vous dis également une chose. Il ne faut jamais retenir la formule pour la solution de l'équation de $3^{\text{ième}}$ degré, ce n'est pas ça qu'il faut retenir, on ne fait pas des maths en retenant une formule, jamais. On retient une idée et quelle est l'idée, et à partir de cette idée, vous pouvez tout de suite trouver la formule : l'idée c'est que $(u+v)^3$ est égal à $3uv(u+v)+u^3+v^3$. Ça suffit.

Donc en fait ce qu'a fait Bombelli, il a écrit son ouvrage et bien sûr, dans la deuxième formule, vous voyez qu'il y a une racine carré d'un nombre négatif, alors ça, Cardan le manipulait, mais pas vraiment et on voit bien que si on essaie de manipuler naïvement les racines carrées de nombres négatifs, ça ne marche pas parce que par exemple, vous réfléchissez à ce que vaut $\sqrt{-2}\times\sqrt[3]{-8}$, vous allez trouver 4, alors qu'en fait, c'est -4. Donc en fait, Bombelli a mis une vingtaine d'années à accepter une idée qui est une idée un peu folle, vous savez, je suppose que vous avez tous encore dans votre champ visuel toutes ces affiches qui disent "plus ou moins de SUV", hein je suppose que vous les avez encore tous devant vous, d'accord, eh bien Bombelli a dit "plus de moins" c'est incroyable, c'est-à-dire que Bombelli a inventé quelque chose qu'il a appelé "più di meno" et avec ce "più di meno" qu'il a inventé, il a réussi à complètement résoudre le cas de l'équation du $3^{\text{ième}}$ degré dans le cas pour lequel on dit que le discriminant est positif, c'est-à-dire dans le cas où vous avez les racines carrées de nombre négatif. Et pendant un très long temps, il a cru que ce qu'il faisait n'avait pas de sens et en fait, il dit, vous voyez, dans les trois dernières lignes, il dit que ça paraîtra quelque chose d'entièrement sophistiqué, de plus sophistiqué que réel. Et telle était son opinion pendant longtemps jusqu'à ce qu'en fait, il trouve la clé.

Et quelle a été la clé, pour lui, vous voyez, ce n'est pas si simple que ça, parce que même si vous avez les nombres complexes, après il faut prendre des racines cubiques de nombre complexes, et quand vous prenez des racines cubiques de nombres complexes, vous tombez directement sur le problème de la trisection de l'angle dont on sait qu'elle n'est pas résoluble à la règle et au compas.

[2] à Frascati au sud de Rome

Et Bombelli est tombé directement là-dessus et il n'a pu résoudre ce problème que quand il a lu des textes qui disaient que Platon avait réussi la duplication du cube de manière concrète en utilisant la géométrie plane. Et c'est à partir de là que Bombelli a compris ce qui se passait et il a écrit les règles de multiplication pour son nouveau symbole, on peut dire, mais dont il avait compris qu'il était fondamental. Et pour un mathématicien, bien sûr le mathématicien reconnaîtra le nombre i qui est tel que son carré vaut -1 mais Bombelli lui devait écrire la table de multiplication et la table de multiplication c'est :

- più via più di meno, fà più di meno. $(+1) \times (+i) = +i$;
- meno via più di meno, fà meno di meno. $(-1) \times (+i) = -i$;
- meno via meno di meno, fà più di meno. $(-1) \times (-i) = +i$;
- più di meno via meno di meno, fà più, $(+i) \times (-i) = +1$,
- più di meno via più di meno fà meno, $(+i) \times (+i) = -1$,
- mais ce qui est le plus intéressant, c'est que meno di meno via meno di meno, ça fait meno $((-i) \times (-i) = -1)$; donc vous voyez c'est extraordinaire, c'est extraordinaire d'avoir réussi à donner ses règles à partir pratiquement, si vous voulez, de rien, et à partir de ces règles bien sûr, il a pu presque de manière concrète résoudre l'équation du $3^{\text{ième}}$ degré quand justement les racines sont trois racines réelles et que finalement, si vous voulez, on arrive à les donner mais ce qui surgit dans la manière de les donner, c'est une ambiguité parce que comme elles sont trois, on ne sait pas laquelle est laquelle donc on voit par là, si vous voulez, la théorie de Galois qui est la théorie de l'ambiguïté vers laquelle on se dirige.

C'est un exercice, en théorie de Galois, de démontrer que dans le cas qu'on appelle le cas irréductible, le casus irreducibilis des géomètres italiens, il n'est pas possible de donner une formule pour les racines qui n'invoque que des racines des radicaux réels ; ça c'est formidable, parce que ça veut dire qu'il était strictement impossible à ces géomètres de résoudre l'équation sans inventer les nombres complexes, d'accord.

Donc ça, c'est quelque chose qui est formidable, c'est un exercice à faire si vous connaissez la théorie de Galois, je vous le recommande, ce n'est pas un exercice tout à fait évident mais ça se fait.

Donc on va passer à Galois, et on peut dire sur Galois, j'ai fait un exposé à l'Académie lors du $200^{\text{ième}}$ anniversaire de sa naissance, il y a quelques années, et j'avais beaucoup insisté sur le fait que, contrairement à ce que les gens racontent, Augustin Cauchy avait défendu Galois et en fait, Augustin Cauchy avait parlé deux fois à l'Académie, en juin 1829, alors que Galois avait 17 ans, ce qui est absolument incroyable et ensuite, vous connaissez l'histoire.

Mais du vivant de Galois, un seul de ses articles, pratiquement, bon, il y avait deux articles qui étaient moins intéressants, mais un article de lui a été publié en 1830 dans le Bulletin de Ferussac et ce qui est extraordinaire, je vais vous expliquer, ce qui est extraordinaire dans cet article, c'est que Galois va infiniment plus loin que les nombres complexes : ce que fait Galois, c'est qu'il prend un, il faut dire... je vous parle des nombres complexes, le nom de nombre complexe est dû à Gauss, et en fait c'est Descartes qui les a appelés nombres imaginaires ; mais maintenant, on les appelle tous des nombres complexes.

Et ce que fait Galois, c'est la chose suivante : Gauss avait bien vu, bien sûr, que lorsqu'on regarde des équations diophantiennes etc, on a tout intérêt à les regarder modulo un nombre premier. Alors quand on les regarde modulo un nombre premier, en langage moderne, on obtient ce qu'on appelle un corps.

Et ce que fait Galois, c'est extraordinaire, c'est qu'il essaie de résoudre des équations dans ce corps. Donc il écrit qu'il prend un polynôme à coefficients dans ce corps, il essaie de le résoudre ; il suppose qu'il est irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le factoriser, c'est exactement la formule qu'il écrit, et ce qu'il fait, c'est qu'il crée des imaginaires ; voyez la dernière phrase, c'est la classification de ces imaginaires, et la réduction au plus petit nombre possible qui va nous occuper. Donc ce que fait Galois, c'est qu'il rajoute ces imaginaires, en fait, comme par exemple dans le cas le plus simple, c'est le cas où on part du corps des entiers pairs ou impairs c'est-à-dire de ce qu'on appelle les entiers modulo 2. On peut les multiplier, on peut les additionner, tout ça, c'est très simple, et il y a une extension ; la première fois qu'elle a été obtenue, c'est par Galois, qui est le corps a quatre éléments. Et Galois le définit simplement en regardant l'équation qui est $x^4 = x$.

Bon, il démontre que tout marche bien, et alors on pourrait dire "Bon, Galois a inventé les imaginaires. Quel était le problème qu'il cherchait à résoudre en faisant cela ?" Et ce qui est absolument phénoménal, c'est que quand on lit vraiment l'article de Galois, il y a un théorème que Galois énonce et qui est le suivant :

> *quand on prend une équation, qu'il appelle primitiv,e dont le degré est une puissance d'un nombre premier, par exemple 4, eh bien, pour que l'équation en question soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que l'on puisse indexer ses racines par les éléments du corps que Galois avait créé, c'est-à-dire par les imaginaires de Galois, de telle sorte que le groupe de Galois qui est le groupe d'ambiguïté qui qui vous empêche de distinguer une racine de l'autre, soit contenu dans le produit semi-direct du groupe affine du corps par le Frobenius ;*

Ça veut dire que Galois connaissait le Frobenius, il connaissait toutes ces choses-là, et si vous voulez comprendre ce théorème, il faut que vous regardiez le cas le plus simple, qui est le cas de l'équation du $4^{\text{ième}}$ degré. Si vous regardez l'équation du $4^{\text{ième}}$ degré, vous allez vous apercevoir comme on sait qu'elle est résoluble bien sûr, c'était Ferrari qui avait donné des formules, eh bien vous vous apercevrez que pour la résoudre, il faut indexer les racines par le corps des imaginaires de Galois F_4 et à ce moment-là, vous verrez que le groupe de toutes les permutations, c'est simplement justement le produit semi-direct du groupe affine par le Frobenius.

Alors une autre chose qui montre, si vous voulez, quelle était la philosophie de Galois et à quel point cette philosophie est orthogonale au, comment dire, à la machine, la philosophie de Galois, il s'était aperçu et je vous l'avais montré quand j'avais parlé à l'Académie il y a une dizaine d'années, que les calculs qu'il proposait de faire étaient infaisables, strictement infaisables, ils étaient infaisables parce que j'avais montré que le premier coefficient d'un polynôme qu'il fallait calculer pour suivre Galois et j'avais demandé aux académiciens de me donner en gros la taille du numérateur et du dénominateur, eh bien, le numérateur et le dénominateur avaient 500 chiffres chacun, et pourtant c'était un calcul le plus simple possible. Donc Galois bien sûr ne pouvait pas faire ces calculs, la machine peut le faire maintenant, très facilement bien sûr, mais que disait Galois, il disait : "sautons à pieds joints sur les calculs" et grâce à son imagination, à son cerveau, il était capable d'entrevoir ce à quoi allaient ressembler les résultats et de travailler sur eux comme s'ils étaient devant lui ; et ça c'est quelque chose qui est merveilleux.

Donc si vous voulez, on voit bien qu'il y a là, dans l'œuvre de Galois, il y a derrière quelque chose d'assez amusant, enfin amusant, d'une certaine manière, c'est que les anglo-saxons donnent le nom de Galois aux corps qu'il a trouvés, ils les appellent les corps de Galois, et ils les dénotent en anglais GF, pour Galois Field. En France, on hésite, pour la raison évidente que c'est presque...[3] c'est gênant de parler du corps de Galois. Donc euh en fait, en France, et très souvent, on les dénote grand F indice q ou q est une puissance d'un nombre premier (F_{p^k}). Et alors pour les mathématiciens, je dirais la chose suivante, qui est assez souvent peu connue, c'est qu'en fait, on est encore, sauf dans le cas où q est une puissance de 2, on en est encore au stade de Galois, c'est-à-dire qu'on définit les corps F_q en résolvant des équations polynomiales, mais on a le choix entre ces équations et ce n'est pas canonique : ça n'est canonique que pour les puissances de 2 et ça, ça a été fait par un mathématicien qui s'appelle John Conway, et qui a construit explicitement la clôture algébrique de F_2 en utilisant l'ordinal Oméga puissance Oméga puissance Oméga ($\Omega^{\Omega^{\Omega^{\cdots}}}$).

Donc voilà pour Galois. Alors un peu plus tard que Galois, il y a eu une autre découverte absolument incroyable, qui a été faite et toutes ces découvertes sont toujours faites, ayant en tête un problème extrêmement difficile que les gens veulent résoudre ; comment dire ? L'imagination en mathématique n'a de sens que si elle est motivée par un problème simple à poser mais extrêmement difficile à résoudre et dans le cas de Kummer, c'était le problème de Fermat, bien sûr, et si vous voulez, j'ai pas besoin d'écrire la formule, vous imaginez facilement que quand on écrit $x^n+y^n=z^n$, si vous pouvez factoriser x^n+y^n et comme vous avez de l'autre côté z^n, eh bien vous allez pouvoir comparer les facteurs premiers. Or, c'est facile de factoriser x^n+y^n en utilisant des racines de l'unité. Donc c'est ce que faisait Kummer ; ça avait l'air de marcher etc.

Sauf que malheureusement, on n'avait pas l'unique décomposition en facteurs premiers et l'exemple le plus simple, c'est l'exemple qui est écrit en bas : c'est-à-dire le nombre 6 qui s'écrit 2×3 mais quand on travaille dans le corps qui contient $\sqrt{-5}$ c'est-à-dire $i\sqrt{5}$, eh bien on peut aussi l'écrire, on peut aussi le factoriser d'une autre manière. Alors ce qui est formidable, c'est que Kummer avait en tête la chimie, et donc euh, il savait qu'en chimie, il y a des corps purs et que c'est très très important de décomposer un corps chimique en corps purs. Et à son époque, on était incapable d'isoler le fluor. Donc le fluor était d'une certaine manière un corps un peu *idéal*, qu'on n'arrivait pas à isoler. Donc il a pris cette inspiration-là et à partir de cette inspiration-là, il a inventé ce qu'il appelle les *nombres idéaux*.

Alors ça paraît incroyable, mais avec des nombres idéaux il arrive à retrouver l'unique factorisation de 6, en utilisant des nombres qu'on peut appeler j, u et v : le nombre 2 c'est j^2, le nombre 3 c'est uv, le nombre $1+i\sqrt{5}$ c'est ju et le nombre $1-\sqrt{5}$ c'est jv. Donc si vous voulez, là, il y a un pas qui est franchi, mais c'est un pas qui est franchi en utilisant une analogie, qui est l'analogie avec la

[3] *Note de la traductrice : le mot non proféré par Alain Connes est peut-être le mot "sacrilège".*

chimie. Bien sûr, maintenant on sait isoler le fluor, c'est très difficile. Mais cette... comment dire... cette idée de Kummer par analogie a en fait donné naissance à un concept capital en algèbre qui est le concept non pas de *nombre idéal* mais comme on dit d'*idéal*. Et ça, c'est un concept dû à Dedekind. C'est arrivé des années après, c'est arrivé environ vers 1870, alors que Kummer, c'était vers 1848, ou quelque chose comme ça. Voilà. Alors bien sûr, il a résolu le problème de Fermat dans pas mal de cas, bien sûr, ça a donc... été... bon. Mais on voit bien là, finalement, que Kummer avait en tête une analogie, et quand il y a une analogie, bon, les choses, d'une certaine manière, sont plus faciles en ce sens qu'une analogie, bien sûr, elle n'est jamais fidèle, c'est-à-dire qu'on n'a jamais une correspondance exacte : vous n'avez pas de correspondance entre la chimie et les nombres algébriques. Mais, quand on arrive à traduire une partie du texte, d'un côté ou de l'autre, on avance.

Alors en fait, tout ça, ça a été extrêmement bien décrit par André Weil, dans une lettre à sa sœur, et aussi dans un article, qu'il a écrit en 1960, et qui traite, si vous voulez, de de la métaphysique et des mathématiques. Alors donc André Weil, lui, a fait la comparaison avec la Pierre de Rosette, et euh, comment dire, derrière les symboles qui sont écrits au-dessus de la Pierre de Rosette, vous savez que la Pierre de Rosette, elle contient trois textes, il y a un texte en bas, qui est un texte en grec ancien mais très compréhensible, il y a un texte au milieu qui est en démotique qui est relativement compréhensible, et il y a un texte en haut qui est en hiéroglyphe. Alors dans les symboles qui sont écrits au-dessus de ces textes, la personne qui est derrière, c'est un mathématicien extrêmement important qui est Bernard Riemann. Et lui a complètement compris le texte grec, il a développé ce qu'on appelle maintenant la théorie des surfaces de Riemann ou la théorie des courbes sur les corps des complexes et c'est aussi lui qui a créé le symbole ζ que vous voyez en haut, au sens où, bon, il avait déjà été défini par Euler, mais c'est lui qui a énoncé, si vous voulez, un problème très difficile, et ce problème très difficile a été pour André Weil en particulier, une motivation fondamentale.

Alors il faut bien savoir que les mathématiciens ont une technique devant un problème très, très difficile. Et je pense que c'est une technique que vous devriez tous connaître et avoir dans votre poche. La technique est la suivante : quand on est confronté à un problème extrêmement difficile la première chose à faire, ça paraît idiot, mais c'est de généraliser ce problème, ça paraît incroyable parce qu'au lieu d'un problème, maintenant, vous en avez des myriades. Mais quand vous avez correctement généralisé le problème, vous pouvez ensuite le spécialiser. Et quand vous le spécialisez, vous allez pouvoir le spécialiser à un cas beaucoup plus simple qui va vous permettre de comprendre ce cas très simple et de pouvoir progresser. Et ensuite vous pouvez progresser, et si vous avez formulé le problème de telle sorte que les divers cas se correspondent, vous allez pouvoir enfin procéder par analogie.

Alors ce que dit André Weil, donc, c'est que le mathématicien qui étudie ses problèmes a l'impression de déchiffrer une inscription trilingue. Euh, je pense qu'il n'avait jamais vu la Pierre de Rosette parce qu'il dit dans la première colonne se trouve la théorie riemanienne des fonctions algébriques au sens classique donc ça, ça correspond à la partie du bas de la Pierre de Rosette ; la troisième colonne, c'est-à-dire, en fait, celle qui est en haut dans la Pierre de Rosette, hein, c'est la théorie arithmétique des nombres algébriques, et la colonne du milieu est celle dont la découverte est la plus récente : elle contient la théorie des fonctions algébriques sur un corps de Galois. Donc lui, il utilise un corps de Galois et effectivement, ce qu'a fait André Weil, donc, c'est de résoudre l'analogue, si vous voulez, de cette hypothèse de Riemann dans le cas des corps de fonctions.

Alors donc, voilà où on en est. Alors maintenant, on va passer à Grothendieck et aux schémas. Donc ce qui s'est produit, si vous voulez, c'est que cette idée des idéaux dans les anneaux commutatifs, elle a permis de franchir, dans les mains de Grothendieck, un pas absolument essentiel mais qui, si on ne comprend pas la signification, peut paraître, comme les mathématiciens disent, "trivial". C'est vrai qu'il y a une...

On peut transformer la théorie des anneaux commutatifs en la dualisant, et en parlant d'un schéma affine, mais lorsqu'on dit ça, on n'a rien fait. On n'a rien fait. Pourquoi ? Parce que les deux théories sont les mêmes, sauf que les flèches vont dans des sens opposés. Alors évidemment, la chose importante, c'est qu'on peut recoller ces schémas affines mais surtout, ce qui est fondamental, et en fait, l'idée est due à Pierre Cartier, c'est que les points d'un schéma affine correspondent aux idéaux premiers. Donc cette notion, ce concept, qui est dû à Dedekind, qui vient de Kummer, en fait, nous donne l'idée des points, nous permet de relier quelque chose de géométrique, c'est-à-dire les points d'un espace, avec quelque chose qui est entièrement algébrique, c'est-à-dire un anneau commutatif.

Alors quel est l'intérêt pour ce qui nous intéresse. Eh bien l'intérêt, c'est que voilà, maintenant, grâce à cette notion de schéma, les trois langues dont on a parlé tout à l'heure sont des schémas réguliers. Les objets de ces trois langues, c'est-à-dire ce qu'on étudie dans les trois langues : l'anneau des entiers, une courbe sur un corps fini, un corps de Galois, ou une courbe sur le corps des complexes, dans les trois cas, ce sont des schémas réguliers de dimension 1. Donc on a une unification déjà, c'est un petit peu comme... si vous voulez, si en regardant la Pierre de Rosette, les gens avaient dit voilà trois langues anciennes, on n'a pas tellement plus avancé que ça, d'accord, mais en tout cas, on a pu les nommer de la même manière : on a pu dire dans les trois cas, ce sont des schémas réguliers de dimension 1.

Alors Grothendieck est allé beaucoup plus loin que ça, et Grothendieck, grâce à ça, si vous voulez en fait, grâce à l'idée de Grothendieck de la cohomologie étale, qui en fait est venue d'un exposé que faisait Serre au séminaire Chevalley et dans lequel Grothendieck a compris que l'idée de Serre, qui était l'idée d'avoir des ouverts qui sont *au-dessus* de l'espace, et pas *dans* l'espace lui permettait de définir la cohomologie qu'il cherchait. Alors en fait, ce qu'a fait Grothendieck, il a étendu la théorie de Galois, il faut comprendre que l'innovation extraordinaire de Grothendieck, ça a été de... d'ailleurs, je veux dire, dans les écrits de Grothendieck, on voit bien à quel point il est un admirateur fasciné de Galois, et ce qu'a fait Grothendieck, c'est qu'il a compris comment géométriser la théorie de Galois, mais de manière suffisante pour qu'elle s'étende aux schémas, et parmi ces schémas, bien entendu, il y a la colonne du haut qui est le schéma qu'on appelle, en jargon, $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. Alors quand on calcule les choses en utilisant justement les idées de Grothendieck sur les revêtements étales etc., eh bien, on s'aperçoit d'une analogie.

Alors cette analogie, elle est née en gros en 1963, il y a très, très longtemps, et en fait je crois que c'est David Mumford qui a eu le premier l'idée, et ensuite Barry Mazur l'a beaucoup développée. Et d'ailleurs, ici, un des académiciens, Jean-Loup Waldspurger a beaucoup travaillé là-dessus. Mais c'est une analogie. Donc c'est une analogie, alors ça paraît incroyable : comment est-ce qu'il pourrait y avoir une analogie entre les nœuds, donc je pense que vous imaginez ce que c'est qu'un nœud, c'est le nœud au sens bête, hein, je veux dire, alors au sens mathématique, ça veut dire qu'on a plongé le cercle dans la sphère S^3, une analogie, donc, entre les nœuds et les nombres premiers. Alors c'est une analogie qui paraît extrêmement bizarre, bien sûr, ça ne veut pas dire qu'à chaque nœud, vous allez associer un nombre premier et réciproquement, ce serait ridicule, mais c'est une analogie. Eh bon, comme André Weil en parle, il parle si vous voulez de subtiles caresses de l'un à l'autre etc. et du fait qu'il n'y a jamais une correspondance exacte.

Et dans cette analogie, donc, en fait, ce qui se passe, c'est qu'on peut relier, par exemple, le fait que la sphère S^3 soit simplement connexe avec le fait qu'il n'y a pas d'extension non ramifiée de $\mathbb{Z}$ enfin (etc.) du corps des rationnels etc. etc. Je ne vais pas vous embêter avec ça, mais je vais lentement venir maintenant à des considérations auxquelles j'ai contribué et qui sont directement reliées à ça. Et la contribution est extrêmement récente. Donc en fait, ce qu'on va voir, c'est qu'exactement comme Grothendieck a étendu la théorie de Galois, euh, pour les schémas, eh bien la théorie du corps de classes, qui est une théorie tout à fait classique très, très importante, qui permet justement de calculer ce qu'on appelle l'extension abélienne maximale dans le cas des corps, se prolonge au schéma relié au corps des rationnels.

Alors ça, c'est un travail donc en collaboration avec Caterina Consani, et ce qu'il faut retenir, c'est l'évolution des mots... vous voyez... je parle de *l'espace des classes d'adèles*. Alors, tout à l'heure, on a parlé des *idéaux*. Eh bien, Claude Chevalley a compris qu'il y avait un moyen de comprendre ce qu'on appelle *les classes d'idéaux* avec ce qu'on appelle *le groupe des classes d'idèles*, qui sont construites à partir des complétés du corps et de quelque chose qui est très, très concret. Et à partir de là, je crois que c'est André Weil qui a donné le nom d'*adèles*, à quelque chose qui n'est plus un groupe mais qui a une propriété merveilleuse de compatibilité avec l'analyse, et qui contient les nombres rationnels et les adèles, si vous voulez, la propriété qu'elles ont, c'est de dire bonjour à l'analyse, parce qu'elles forment un anneau localement compact, mais qui est intimement relié au corps des rationnels, par le fait que les rationnels sont dedans et ils forment un groupe discret et cocompact, bon.

Alors en fait en 1996, j'avais introduit un espace qui est l'espace des classes d'adèles, parce que classiquement, ce qu'on prend c'est *le groupe des classe d'idèles*. Alors *l'espace des classes d'adèles*, donc, c'est la variante *additive* de ça, et ce dont je vais vous parler, c'est le fait que grâce à cet espace, on va comprendre beaucoup mieux le lien entre les nœuds et les nombres premiers. Et on va, en fait, étendre la théorie du corps de classes pour les schémas. Donc en fait, l'espace des classes d'adèles, donc, que j'avais introduit en 1996, si vous voulez, il donne déjà, c'est connu depuis longtemps, la réalisation spectrale des 0 de ζ comme une cohomologie H^1. Il donne les formules explicites de Riemann-Weil comme formules de trace, il donne la formule de Hasse-Weil pour ζ. Je m'excuse de ce langage technique mais je vais expliquer. Et surtout en fait, il donne, si vous voulez, l'action du groupe qui permet de comprendre la formule de Hasse-Weil comme un groupe de Galois ; mais c'est un groupe de Galois, comme on le verra, qui est relié à ce qu'on appelle la géométrie tropicale, c'està-dire qu'il est relié à ce qu'on appelle $(\mathbb{R}, +, \max)$. Et en fait, cet espace, l'espace X_q, si vous voulez, il est incroyablement simple à décrire, à nommer. Pourquoi ? Parce que c'est simplement l'espace des sous-groupes de rang 1 de la droite réelle. Vous prenez la droite réelle, quand je parle de sous-groupe de rang 1, j'entends par là que c'est un sous-groupe tel que si je prends deux éléments de ce sous-groupe, ils sont commensurables : c'està-dire un multiple entier de l'un est égal à un multiple entier de l'autre alors ça vous paraît un espace très simple ; quand on est un peu naïf, on a l'impression que cet espace est très simple, mais en fait, c'est un espace qui a exactement les mêmes propriétés que l'espace des feuilles d'un feuilletage, très, très, très difficile à comprendre, et c'est ce qu'on appelle un *espace non-commutatif*. Et la *géométrie non-commutative* est faite pour comprendre les espaces de cette nature exactement.

Alors, une découverte qu'on avait faite en 2014, avec Katia Consani, on s'était aperçu qu'en fait cet espace c'est-à-dire si vous voulez l'espace des sous-groupes de rang 1 de $\mathbb{R}$, c'est en fait exactement un espace de points d'un topos de Grothendieck. Et le topos de Grothendieck en question a une définition, cette fois remarquablement simple, parce que c'est le produit de la demi-droite réelle 0 à l'infini par l'action des entiers par multiplication, et ça, c'est quelque chose qu'on a appelé le *site des fréquences*, et qui est presque, si vous voulez, intégralement relié à la musique parce que vous savez que la musique, vous avez des fréquences, et que l'oreille est sensible à la multiplication des fréquences par 2 ou par 3, et le site des fréquences, il... comment dire... il mathématise cette chose-là, sous la forme d'un topos de Grothendieck, et quand on regarde les points de ce topos, on obtient exactement l'espace, le même espace que celui qui est décrit ici, qui est l'espace des classes d'adèles. Alors ce dont on s'est aperçu, il y a environ un mois avec Katia Consani, c'est qu'en fait, si on regarde la projection de l'espace des classes d'adèles, donc que j'appelle $X_{\mathbb{Q}}^{ab}$, sur ce topos de Grothendieck, eh bien, on obtient ce qu'il faut, exactement, pour pouvoir faire la théorie du corps de classes pour les schémas, et donc voilà ce qui se produit : ce qui se produit, c'est que d'abord, pour chaque nombre premier, il y a une orbite périodique, c'est-à-dire qu'il y a vraiment un cercle dans l'espace $X_{\mathbb{Q}}$, et quel est ce cercle ? Si je vous donne un nombre premier p, eh bien, il y a un anneau qui lui correspond, c'est l'anneau $\mathbb{Z}/\frac{1}{p}\mathbb{Z}$; ça correspond, en fait, au niveau complémentaire du nombre premier p, donc on regarde maintenant les sous-groupes de rang 1 dans $\mathbb{R}$ qui sont isomorphes aux groupes additifs de cet anneau, et on s'aperçoit qu'ils forment un cercle, et que ce cercle a pour longueur le logarithme de p ; donc pour chaque nombre premier, on a un cercle de longueur logarithme de p, et maintenant, quand on cherche à relever ce cercle dans l'espace des classes d'adèles, on s'aperçoit qu'on ne peut pas le relever, bien sûr, il y a ce qu'on appelle une monodromie, et cette monodromie, c'est exactement ce que donne l'action du Frobenius en p dans le groupe fondamental étale abélianisé du spectre de l'anneau local. Alors ça, ce sont des mots, mais pour bien comprendre l'analogie avec les nœuds, donc, on savait que c'était ça qu'il fallait obtenir, en terme de groupe fondamental étale, mais au niveau des nœuds, c'est facile, enfin relativement facile à comprendre, parce que si vous prenez deux nœuds, voilà, et qui sont enlacés dans ce qu'on appelle un entrelacement entre les deux, eh bien, pour le calculer, cet entrelacement, ce que vous faites, c'est que vous prenez le premier nœud, et vous essayez de le relever, dans le revêtement abélien du complémentaire du deuxième nœud, donc ça correspond exactement à ce qui se passe ici dans l'espace des classes d'adèles, et ça veut dire, si vous voulez, que maintenant, en fait, grâce à ça, euh, on a compris, enfin en tout cas, de mon côté, j'ai compris ce que j'avais trouvé, en fait en 1996, et ce que j'avais trouvé en 1996, ça n'était rien d'autre que l'extension de la théorie du corps de classes qui avant était purement limitée à Galois, l'extension du corps de classes aux schémas. Et bien sûr, à ce moment-là, si vous voulez, ça donne une lumière totalement différente sur ce qui avait été trouvé avant, et c'est comme ça que les mathématiques progressent, c'est-à-dire qu'au bout d'années et d'années et d'années, on s'aperçoit en fait qu'il y a un éclairage complètement nouveau qui apparaît, parce qu'on s'est posé une question, une question un peu insolite, qui était cette question de la relation entre les nœuds et les nombres premiers. Et il y a un autre élément, que je dis pour les mathématiciens, c'est qu'il y avait quelque chose qui m'avait toujours dérangé, qui était le fait que *les idèles sont denses dans les adèles*, or là, on a compris que cette densité, c'est exactement la densité de ce que Grothendieck appelle le point générique de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ dans tout le spectre. Voilà.

Donc alors, j'en viens maintenant à un point sur lequel je veux arriver et auquel j'arrive, et c'est pour vous dire que c'est loin d'être fini. Et c'est loin d'être fini parce qu'ici, je cite Jacques Tits dans un article de 1956, dans lequel Jacques Tits parle (n'ayez pas peur) du corps à un élément. Donc ce que dit Jacques Tits, c'est, si vous voulez, pour un mathématicien, c'est une hérésie terrible, c'est-à-dire, il dit *(le corps à un élément, c'est)* le corps dans lequel 0 est égal à 1. Alors on ne voit pas trop qu'est-ce qu'on va pouvoir faire avec ça, d'abord. Mais bon, lui, sa motivation, c'était le fameux article de Chevalley sur les groupes algébriques, et il essayait de comprendre que quand on regarde les grandes séries de groupes finis, on a bien sûr toutes les séries avec des groupes simples qui proviennent des groupes sur les corps finis, et on a aussi tous les groupes alternés, sauf le groupe A_4 qui n'est pas un groupe simple. Donc toute cette série de groupes alternés, ça ne cadre nulle part, sauf si on admet qu'il y a un corps à un élément, oh la la ! Donc là, les mathématiciens poussent de hauts cris, sauf que quelques années plus tard, Yuri Manin et puis Christophe Soulé ont repris la question et l'idée de Manin était la suivante : il disait que finalement, il faut penser aux entiers comme à des polynômes sur un corps fini, mais bien sûr, ce n'est pas vrai. Et ce qu'il dit, c'est que si c'est le cas, à ce moment-là, on devrait faire des produits de Spec [4] etc. Alors, en suivant cette idée, Christophe Soulé a défini une fonction ζ qui est associée à un polynôme, et c'est à partir de la fonction ζ de Soulé qu'on a pu démontrer avec Katia Consani que la formule de Hasse-Weil s'étend à la fonction ζ de Riemann, mais ce n'est plus du tout une fonction polynôme,

[4] *Note de la transcriptrice : sur la diapositive projetée est notée un passage de l'introduction de l'article* Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger et Kurokawa) *de Manin, l'auteur interroge dans l'introduction par la phrase :* "The central question we address can be provocatively put as follows : if numbers are similar to polynomials in one variable over a finite field, what is the analogue of polynomials in several variables ? Or, in more geometric terms, does there exist a category in which one can define "absolute Descartes powers" $\operatorname{Spec}Z \times \ldots \times \operatorname{Spec}Z$?"

mais c'est une distribution au sens de Schwartz. Et elle est très, très difficile. Et là, on revient à ce que disait André Weil, il dit :

> *Les mathématiciens du* XVI^e *siècle avaient coutume de parler de la "métaphysique du calcul infinitésimal", de la "métaphysique de la théorie des équations", ils entendaient par là un ensemble d'analogies vagues, difficilement saisissables et difficilement formulables, qui néanmoins leur semblaient jouer un rôle important à un moment donné dans la recherche de la découverte mathématique.*
>
> *A. Weil, De la métaphysique aux mathématisques, 1960.*

Alors là, on pourrait dire, oui, tout ça, c'étaient des temps anciens, dans lesquels les mathématiciens n'avaient pas les outils pour arriver à donner un sens à une idée, eh bien, heureusement, ce n'est pas le cas, et si vous voulez, ce qui s'est produit, c'est que, euh, on n'a pas le droit, en mathématiques, d'inventer des choses comme ça, sans démontrer de théorèmes. Tant que vous n'avez pas démontré de théorème, personne ne vous dira que vous avez la bonne notion. Alors, on a trouvé, avec Katia Consani, comment il fallait utiliser le corps à un élément, on a trouvé ce truc-là, et on en a déduit une formule de Riemann-Roch pour l'anneau des entiers. C'est une formule qui est parfaitement analogue à la formule de Riemann-Roch dans les trois colonnes, ce ne sont pas des colonnes bien sûr, dans les trois parties de la Pierre de Rosette, et en fait, cette formule, ce qui s'est produit, c'est assez amusant, c'est qu'au départ, on n'avait pas vraiment la bonne notion et on n'obtenait pas que le genre était égal à zéro. Pourquoi ? Parce qu'on utilisait le fait que tout entier s'écrit de manière unique comme un polynôme dans le nombre 3 [5] à coefficient plus ou moins 1 ou 0 ; ça, c'est vrai, ça va être utilisé par les Russes après la deuxème guerre mondiale pour essayer de fabriquer des ordinateurs, dans lesquels l'opération de soustraction était immédiate. Et en fait, on a mis beaucoup de temps avec Katia, mais on a une note aux Comptes-Rendus qui va paraître ; et en fait, ce qui est vraiment incroyable, c'est que l'anneau $\mathbb{Z}$, c'est un anneau de polynômes, sur ce corps à un élément et le générateur c'est le nombre -2 : tout nombre entier s'écrit de manière unique comme un polynôme à coefficients 0 et 1 dans le nombre -2 [6]. Et en fait, la théorie, elle est basée sur quelque chose d'extrêmement sophistiqué, qui est la théorie de l'homotopie. Et le corps à un élément correspond à ce qu'on appelle le spectre en sphère [7], qui est, si vous voulez, j'avais il y a très, très longtemps, je finis là-dessus, j'avais, il y a très très longtemps écouté une conférence à Oberwolfach dans laquelle Tom Goodwilly disait qu'il expliquait que les entiers étaient une algèbre sur quelque chose de beaucoup plus basique qui est justement le spectre en sphère. Alors en fait, le spectre en sphère, ça ne marcherait jamais, il faut avoir quelque chose de beaucoup plus simple, et en appliquant la technique qui a pour origine Chevalley, en fait, quand Chevalley définit un groupe algébrique, il dit que c'est un foncteur des anneaux commutatifs vers les groupes, en appliquant cette technique, la technique si vous voulez fonctorielle, on a trouvé, on espère, la bonne définition, mais comme toujours, il faut qu'elle passe 36 000 tests avant d'avoir le droit d'exister, dans le domaine des mathématiques, voilà. Je vais m'arrêter là-dessus.

---

[5] *Note de la transcriptrice : "dans le nombre 3" signifie dont le générateur est 3 ; i.e., un polynôme égal à une combinaison linéaire de puissances de 3.*

[6] *Note de la transcriptrice : dont le générateur est -2*

[7] *Note de la transcriptrice : Sphere spectrum ?*

Poursuite de la conférence par la séance de questions à l'orateur

---

Françoise Combes : Merci beaucoup pour ce passionnant exposé, est-ce qu'il y aura des questions ?

Alain Connes N'hésitez pas, je veux dire, je sais que Jean-Pierre [8] , où est Jean-Pierre ?...

Jean-Pierre Changeux : Merci. D'abord, je dois dire qu'en tant que neurobiologiste, je n'ai pas vraiment pu suivre l'exposé du début jusqu'à la fin, je le regrette beaucoup et il y avait un vocabulaire que je ne comprenais pas. Ceci dit, j'ai essayé de comprendre les raisonnements que tu as présentés, et il y a juste un point qui m'a un peu surpris, c'est l'importance de l'analogie, que tu reprends à plusieurs reprises, au moins trois ou quatre fois, oui ; en neurobiologie ou en biologie, en général, l'analogie est loin de la causalité qui peut exister entre l'objet et sa fonction, comme par exemple, l'aile de la chauve-souris ou celle du pinson, bien-sûr, qui ont la même fonction, mais elles sont construites de manière totalement différente... Alors eux...

Alain Connes : Non, mais analogie ne signifie pas du tout identité.

Jean-Pierre Changeux : Est-ce que on a le droit de parler d'analogie en mathématiques, et certainement qu'on a le droit, puisque tu le fais, oui, mais je voulais savoir si ça avait des implications... plus larges.

Alain Connes : Non, disons que là, on n'a aucun droit : pourquoi ? Parce que si tu veux, la mathématique est une réalité, qui est d'une résistance phénoménale. Donc si tu veux, le seul droit qu'on a, c'est de trouver un théorème, de faire des erreurs, de réparer les erreurs, de tester sur l'ordinateur, etc. C'est ça, le seul droit qu'on a. L'analogie est un guide, c'est-à-dire que lorsqu'on s'aperçoit qu'il y a des correspondances entre deux théories différentes et on n'a jamais l'idée qu'elles sont identiques, on n'a jamais idée, si tu veux, qu'à un nœud va correspondre un nombre premier, non, mais qu'il y a des correspondances, comme ça, et ces correspondances permettent de mettre la pensée en mouvement, en essayant de traduire, en espérant toujours qu'il y a une traduction possible, d'un domaine à l'autre. Et ça, effectivement, c'est extrêmement fructueux, mais c'est dangereux, bien entendu, c'est-à-dire que si on concluait de l'analogie, l'identité entre les deux domaines, ce serait une erreur terrible, bien sûr. Je pense que c'est pareil en biologie.

Une auditrice : Merci pour cet exposé très, très poétique mathématique. Donc j'ai une question simple. Je veux dire : est-ce que vous pouvez développer la façon dont vous avez étendu la formule de Hasse-Weil...

Alain Connes : Ah oui, absolument, oui, oui, alors, ça je vais l'expliquer, parce que Soulé avait défini, donc, une fonction ζ, dans le sillage de Manin, en prenant une limite, quand q tend vers 1, d'une somme, qui est la somme qui apparaît dans la formule de Hasse-Weil. C'est-à-dire que si vous voulez, dans la formule de Hasse-Weil, on a une somme et on a des puissances de q etc. Et puis, on regarde la fonction de dénombrement. Donc Soulé avait étendu ça, comme une limite

[8] Jean-Pierre Changeux

quand q tend vers 1. Alors la première chose qu'on a faite avec Katia Consani, on s'est aperçus que cette limite quand q tend vers 1, en fait, si on regardait, non pas la fonction ζ mais sa dérivée logarithmique, parce que le problème qu'avait Soulé, c'était qu'il était obligé de corriger par un facteur d'une puissance de q moins 1, avec un exposant qui était la caractéristique d'Euler ; or on sait très bien que pour la fonction ζ, la caractéristique d'Euler va être égale à moins l'infini ; donc ça ne marchait pas, mais par contre, quand on regarde la dérivée logarithmique de la fonction ζ, à ce moment-là, on obtient une formule en utilisant Soulé, qui est une limite quand q tend vers 1, et on s'est aperçus avec Katia Consani que cette limite quand q tend vers 1, c'était simplement une limite de somme de Riemann d'une intégrale. Donc on a remplacé la formule de Soulé, qui était une limite, par une intégrale ; ça, c'est beaucoup mieux déjà. Alors après, on a posé le problème inverse, c'est-à-dire qu'on a pris la fonction ζ de Riemann, avec son terme à l'infini, le terme archimédien, et on s'est dit "est-ce qu'il existe une fonction de comptage qui va compter le nombre de points, etc. telle qu'on obtienne la fonction ζ de Riemann ?". Alors ce qu'on a démontré, c'est que ce n'est pas une fonction, c'est une distribution au sens de Schwartz. Et pourquoi ça ne pouvait pas être une fonction ? La raison pour laquelle ça ne pouvait pas être une fonction, c'est qu'on sait que cette distribution, elle doit être positive, on sait aussi que sa valeur en 1 doit valoir moins l'infini donc ça, ça paraît complètement absurde : on se dit "comment est-ce qu'on peut avoir une fonction, qui soit positive mais qui ait la valeur moins l'infini en 1, puisque ça, c'est la caractéristique d'Euler.". Alors l'explication, en fait, elle vient de la formule qui donne cette distribution comme dérivée d'une fonction ; cette fonction, elle est croissante donc la distribution est positive, mais elle prend la valeur moins l'infini quand on s'approche de 1, alors que la valeur de la distribution au point 1 est finie, et donc, tout s'arrange. Alors quand on utilise cette distribution, ça donne le bon résultat. Mais ce qui nous a convaincus, c'est qu'en fait cette distribution, elle apparaît lorsqu'on regarde les points fixes du groupe de changement d'échelle dans le topos dont j'ai parlé tout à l'heure, c'est-à-dire que ce topos donne vraiment, si vous voulez, un espace géométrique qui supporte les formules de Riemann-Weil, etc., etc., pendant longtemps, on a cru que ce topos, que cet espace, c'était le spectre des entiers, non ! C'est l'espace qui joue le rôle de la théorie du corps de classes pour les schémas, et ça, c'est formidable, c'est un changement d'optique. Donc en fait une des choses les plus importantes en mathématiques, c'est de n'être sûr de rien, c'est-à-dire d'être capable de changer de point de vue *quand* vous recevez une information différente de celle que vous croyiez toujours. C'est ce que dit Grothendieck quand il dit (je ne me souviens pas des paroles exactes) quand il dit : "*Craindre l'erreur et craindre la vérité sont une seule et même chose.*". Et ce qu'il explique, précisément, c'est que quand on craint de se tromper, quand on craint l'erreur, on reste figé, dans les croyances auxquelles on a été habitué et qui nous empêchent d'aller de l'avant, qui nous empêchent de trouver du mil [9]. Il y a une dernière chose que je voudrais rajouter, c'est une chose très importante au niveau de... je ne sais pas pour la biologie mais bon, vous savez, quand on croit que le mathématicien, il est là, et on dit : "Ah ! Il n'a besoin que d'une feuille de papier et d'un crayon !" : je m'inscris en faux contre ça ; je m'inscris en faux contre ça, pourquoi ? Je prétends que le mathématicien, s'il a une feuille de papier, qu'il écrit sur cette feuille de papier, puis qu'il la laisse traîner, n'a rien fait. La difficulté pour faire des mathématiques, c'est d'écrire dans son cerveau ; et ça, c'est infiniment plus difficile que d'écrire sur une feuille de papier, c'est infiniment plus difficile, parce que pour écrire dans son cerveau, il faut prendre un problème, et il faut sécher sur le problème, il faut avoir l'air idiot, il ne faut pas avoir peur du tout d'avoir l'air

[9] *Note de la transcriptrice : référence directe au mil = au blé et donc au livre* Récoltes et semailles *d'Alexander Grothendieck.*

idiot pendant des heures, c'est à ce prix-là qu'on écrit dans le cerveau. Et quand vous avez écrit dans votre cerveau, vous avez ce qu'on appelle une image mentale de l'objet que vous considérez, et là, vous pouvez commencer à le manipuler, etc. Vous n'avez pas besoin d'une feuille de papier et d'un crayon.

Françoise Combes : J'aimerais poser une question : comment un mathématicien trouve-t-il le sujet sur lequel il va chercher ; par exemple, pour les travaux que tu nous as présentés, comment t'est venue l'idée de travailler là-dessus ?

Alain Connes : Ah ! C'est une excellente question, parce que jamais un mathématicien n'aurait l'idée de travailler sur un problème très difficile, sachant que c'était un peu signer sa perte, d'accord ?! Donc comment est-ce qu'un mathématicien va travailler là-dessus ? Dans mon cas, je peux simplement vous raconter ce qui s'est passé dans mon cas. Dans mon cas : j'avais écrit avec Jean-Benoît Bost un article dans le début des années 1990 dans lequel apparaissait la fonction ζ de Riemann, un peu de manière inopinée, elle apparaissait dans ce que les physiciens appellent une fonction de partition, dans un système qui avait une transition de phase avec brisure spontanée de symétrie. Et donc après avoir trouvé ce système, j'avais été invité à Seattle en 1996 pour le 100$^{\text{ième}}$ anniversaire du théorème des nombres premiers. Donc j'y suis allé, j'étais un peu surpris d'être invité, j'étais content d'être invité, donc j'y suis allé, j'ai fait mon exposé et après mon exposé, Selberg est venu me voir, il m'a dit : "*It isn't clear that what you are doing will be related to the zeros of* ζ." [10]. Pourquoi pas, bien sûr, il faut être réaliste, donc quand je suis rentré, j'ai décidé de ne pas me décaler en termes d'horaire, c'est-à-dire que j'ai gardé l'horaire de Seattle pendant une semaine. Je n'ai rien fait, à l'époque, je n'avais pas d'email [11]. Donc je ne regardais pas d'email, je n'avais aucune distraction, la seule distraction que j'avais, c'était de lire un livre, que les gens connaissent sans doute, qui s'appelle *The right stuff*, qui est le livre sur l'histoire d'Apollo 13 [12] . Donc je lisais ce livre, et puis je rêvassais, et au bout d'une semaine, je me suis dit "m..., voilà comment les formules explicites de Weil apparaissent à partir du système que j'avais trouvé avec Jean-Benoît Bost.". Donc j'étais à mon bureau, avant j'étais couché la plupart du temps, donc j'étais à mon bureau, et puis j'ai vérifié effectivement que les formules telles que Weil les avait écrites, et qui sont magnifiques, apparaissaient vraiment telles que celles obtenues si on prenait le système que j'avais écrit avec Jean-Benoît Bost, et qu'on regardait l'espace non-commutatif correspondant, qui est l'espace dont je parle, l'espace F_q. Puis après, je me suis dit "ah d'accord, c'est bien d'avoir les formules de Weil, mais et les zéros de ζ ?". Et là, je me suis aperçu, presque tout de suite, qu'en fait les zéros de ζ apparaissaient mais de manière extrêmement bizarre : ils apparaissaient comme un spectre d'absorption, et ça, ça résolvait le problème du signe moins, sur lequel les gens butaient pour avoir la réalisation spectrale, parce que dans toutes les formules, les zéros de ζ apparaissent avec un signe moins, qu'on comprend très bien lorsqu'on pense en terme de caractéristique d'Euler, et là, ça apparaissait comme un spectre d'absorption. Et alors, donc, depuis, si vous voulez, je n'ai pas pu m'empêcher de travailler, de temps en temps, sur ce problème-là, et une des choses très importantes sur les spectres d'absorption... Vous savez que les spectres d'absorption, le premier, sans doute, c'est le spectre du sodium, qu'on a aperçu à partir de Newton : quand on décompose

[10] *Note de la traductrice : "Il n'est pas évident du tout que ce que vous faites sera relié aux zéros de* ζ*".*

[11] *Note de la transcriptrice : on sent poindre une nostalgie.*

[12] *Note de la transcriptrice : ce livre est traduit en français sous le titre L'étoffe des héros et a été porté au cinéma dans un film au titre éponyme, dans lequel joue l'acteur Ed Harris.*

la lumière du soleil par un prisme, et puis ensuite, Fraunhofer a trouvé 500 raies environ, et parmi ces raies, si vous voulez, il y en avait un tas, dans le spectre d'absorption, qu'on pouvait retrouver sur la Terre comme un spectre d'émission, comme le sodium, comme 36 choses ; par contre, il y avait des raies spectrales qui ne correspondaient à aucun corps chimique sur Terre. C'était très embêtant. Alors qu'ont fait les physiciens ? Eh bien, ils lui ont donné un nom en l'honneur du Soleil, ils l'ont appelé l'hélium. Alors, c'était très embêtant, bien sûr, sauf qu'il y a eu à la fin du XIX^e siècle une éruption du Vésuve et quand on a fait l'analyse spectrale de la lave qui sortait du Vésuve, on a trouvé l'hélium. Et bien sûr, l'hélium, maintenant, on l'utilise tout le temps. Alors, si vous voulez, une des stratégies qu'on utilise et qui avance par rapport à ζ, c'est l'idée de transformer le spectre d'absorption que j'avais trouvé en un spectre d'émission, et récemment on a trouvé avec mon collaborateur Henri Moscovici, on a trouvé le lien avec ce qu'on appelle l'opérateur sphéroïdal prolate, qui est un opérateur connu, je veux dire en analyse, et dont le spectre reproduit de manière très voisine les zéros de ζ. Donc voilà où on en est. Jamais personne n'aurait l'idée de dire : “je vais m'attaquer à ζ”, ce serait ridicule, donc il faut un concours de circonstances, une espèce de... comment dire... de coïncidence, mais la coïncidence ne suffit pas, il faut la reconnaître et la suivre.

Françoise Combes : Merci beaucoup. Est-ce qu'il y a d'autres questions ?

Un auditeur : Oui, je voulais vous demander si l'informatique et l'intelligence artificielle allaient modifier complètement la recherche en mathématiques et peser sur l'imagination.

Alain Connes : Bon alors, c'est une question évidemment brûlante, dont je ne voulais pas parler, bon. Mais, vous m'obligez. Voyons : vous voyez, ce qui est caractéristique, pour le moment, qui échappe à l'intelligence artificielle, c'est la possibilité qu'ont les mathématiciens de créer un concept à partir de myriades de cas particuliers. Prenons l'exemple des topos de Grothendieck. Vous voyez, on arrive à créer un concept de manière précise, à partir de myriades de cas, et on arrive à trouver le formalisme qu'il faut pour créer ce concept, et là, je parle vraiment de créer ce concept. Et pour le moment, l'intelligence artificielle, je l'utilise bien sûr, quand je dois écrire une lettre de recommandation, j'utilise Chap-GPT. Donc c'est très pratique. Pour le moment, je n'y vois qu'une secrétaire d'une extraordinaire efficacité, c'est ça que j'y vois, et j'y vois surtout, si vous voulez, quelqu'un qui est capable, ou quelqu'une qui est capable, d'aller chercher dans la littérature toutes sortes de choses que moi, jamais, je n'arriverai à trouver. Donc, ça va aider, ça va aider terriblement ; j'utilise énormément `Mathematica` sur l'ordinateur, pour faire des calculs. Donc je ne peux pas dire, je ne néglige pas ça, mais je pense que pour l'instant, pour l'instant, il y a encore quelque chose qui est totalement inaccessible à l'intelligence artificielle, et c'est ce qui permet, si vous voulez, de zipper toutes ces connaissances en la création d'un concept, ça, c'est fabuleux. Je veux dire, on le voit chez Galois, on le voit dans tous ces exemples-là, c'est quelque chose. Et bon, alors, je ne sais pas comment ça va évoluer, si ça évolue... Il n'est pas impossible qu'on arrive, je ne sais pas, à quelle idée, avec cela. Mais pour le moment, je pense que le cerveau humain a des petits avantages.

Un auditeur : Merci beaucoup. Moi, il me semble que l'une des créations les plus extraordinaires de l'imagination mathématique, c'est la découverte par Cantor du fait qu'il y a une infinité d'infinis, que ça ne s'arrête jamais, qu'on n'arrive pas à décrire vraiment la suite des ordinaux et des cardinaux.

Alain Connes : Oui ! Non, non, très bien, très bien, je vous arrête, je vous arrête, parce que malheureusement ce n'est pas du tout l'opinion qu'on a en tant que mathématicien : en tant que mathématicien, la théorie des ensembles est une théorie rasoir, je suis désolé de le dire parce qu'elle est... elle est... d'une certaine manière elle est trop simple, et on la remplace, en mathématiques, par la théorie des catégories, qui elle n'est pas du tout rasoir. Et ça, c'est une évolution très importante, bon, je veux dire, les cardinaux, je m'excuse, c'est magnifique, bien sûr, hein, d'ailleurs si vous voulez apprendre à quelqu'un la théorie des ensembles, il ne faut surtout pas... il faut simplement lui poser la question "démontre-moi qu'il n'y a pas de manière d'épuiser les nombres réels, en donnant le premier, le $2^{\text{ème}}$, le $3^{\text{ème}}$, etc., d'accord ?". Si vous posez cette question à quelqu'un et s'il essaie d'y réfléchir, il aura compris la théorie des ensembles, d'accord ? Il ne faut pas lui dire "un ensemble, c'est machin, et deux, c'est... Non !" ; si vous voulez, je vous donne la démonstration, il y a 36 démonstrations et 36 démonstrations dont chacune fait appel à une propriété différente des nombres réels. Moi, la démonstration que je préfère de loin, c'est la suivante : ça consiste... Ok, quelqu'un vous dit "d'accord, j'ai epelé tous les nombres réels !", il me donne le premier, le deuxième, et alors moi je lui dis : "eh bien autour du premier, tu mets un intervalle de longueur 1/2, autour du deuxième, tu mets un intervalle de longueur 1/4, autour du 3ème, tu mets un intervalle de longueur 1/8..." Eh bien, je suis désolé, tu n'auras pas rempli plus que 1, la droite, elle est infinie, donc ça ne marche pas. Une autre démonstration, c'est la démonstration de... on a un mathématicien français qui s'appelait René Baire, qui était un mathématicien formidable. Or René Baire a démontré que si on prend une intersection dénombrable d'ouverts denses, c'est encore dense, si vous voulez ; donc chaque fois que vous enlevez un point, le complémentaire, c'est un ouvert dense, donc ça vous dit qu'en fait, vous auriez pu aussi essayer d'épeler avec des... comment dire... avec des fermés d'intérieur vide, vous n'y arriverez jamais ; ça c'est formidable ! Et enfin, enfin, il y a bien sûr la démonstration bien connue du paradoxe, etc., que je ne vais pas vous imposer.

Françoise Combes : On va prendre une dernière question. Jean-Pierre Bourguignon ?...

Jean-Pierre Bourguignon : Oui. Dans les exemples que tu as donnés, qui sont presque toujours dans le contexte algébrique, il y a toujours de la géométrie sous-jacente et comme tu le sais, quand Lobatchevski a introduit la géométrie qu'on appelle aujourd'hui *géométrie hyperbolique*, il l'a appelée *géométrie imaginaire*...

Alain Connes : Oui...

Jean-Pierre Bourguignon : Et c'est aussi lié à des nombres négatifs, mais d'une autre façon.

Alain Connes : Bien sûr.

Jean-Pierre Bourguignon : Comment incorpores-tu ça dans ta réflexion ?

Alain Connes : Bah, si tu veux, j'incorpore ça, bien sûr, ça joue un rôle absolument fondamental puisque surtout par Riemann, c'est-à-dire, bon, Lobatchevski, etc., les gens ont lentement quitté le formalisme purement euclidien pour admettre d'autres géométries, mais surtout, surtout, grâce à Riemann, et au fait que la courbure peut être variable, etc. Donc c'est ça, la vraie transition, c'est pas tellement Lobatchevski, c'est plus Riemann, et bien sûr, après, Einstein, et... d'accord...

Je m'excuse aussi car dans mon titre, j'avais parlé de l'espace-temps, mais ce serait vraiment un autre exposé. Quand j'ai préparé, je me suis aperçu que je n'en parlerais pas...

Françoise Combes : Bien, merci beaucoup, nous remercions encore Alain Connes.

(applaudissements).

Algèbre non-commutative
N. Bourbaki [1]

Nous avons vu (p. 85) que les premières algèbres non commutatives font leur apparition en 1843-44, dans les travaux de Hamilton [145 a] et de Grassmann ([134], t. 12). Hamilton, en introduisant les quaternions, a déjà une conception fort claire des algèbres quelconques de rang fini sur le corps des nombres réels ([145 a], Préface, p. (26)-(31)) [2]. En développant sa théorie, il a un peu plus tard l'idée de considérer ce qu'il appelle des "biquaternions", c'est-à-dire l'algèbre sur le corps des nombres complexes ayant même table de multiplication que le corps des quaternions ; et il observe à cette occasion que cette extension a pour effet de provoquer l'apparition de diviseurs de zéro ([145 a], p. 650). Le point de vue de Grassmann est quelque peu différent, et pendant longtemps son "algèbre extérieure" restera assez à l'écart de la théorie des algèbres [3], mais sous son langage qui manque encore de précision, on ne peut manquer de reconnaître la première idée d'une algèbre (de dimension finie ou non, sur le corps des nombres réels) définie par un système de générateurs et de relations ([134], t. II, p. 199-217).

De nouveaux exemples d'algèbres s'introduisent dans les années 1850-1860, de façon plus ou moins explicite : si Cayley, développant la théorie des matrices ([58], t. II, p. 475-496), ne considère pas encore les matrices carrées comme formant une algèbre (point de vue qui ne sera clairement exprimé que par les Peirce vers 1870 [248 c]), du moins note-t-il déjà, à cette occasion, l'existence d'un système de matrices d'ordre 2 vérifiant la table de multiplication des quaternions, remarque que l'on peut considérer comme le premier exemple de représentation linéaire d'une algèbre [4]. D'autre part, dans le mémoire où il définit la notion abstraite de groupe fini, il donne aussi en passant la définition de l'algèbre d'un tel groupe, sans d'ailleurs rien tirer de cette définition ([58], t. II, p. 129).

Il n'y a aucun autre progrès notable à signaler avant 1870 ; mais à ce moment commencent les recherches sur la structure générale des algèbres de dimension finie (sur les corps réel ou complexe). C'est B. Peirce qui fait les premiers pas dans cette voie ; il introduit les notions d'élément nilpotent,

[1]Transcription de l'extrait de Éléments d'Histoire des mathématiques, page 149 et suivantes, Denise Vella-Chemla, septembre 2024.

[2]Le concept d'isomorphie de deux algèbres n'est pas mentionné par Hamilton ; mais dès cette époque les mathématiciens de l'école anglaise, et notamment de Morgan et Cayley, savent bien qu'un changement de base ne modifie pas substantiellement l'algèbre étudiée (voir par exemple le travail de Cayley sur les algèbres de rang 2 ([58], t. I, p. 128-130)).

[3]Peut-être faut-il en voir la raison dans le fait qu'en dehors de la multiplication "extérieure", Grassmann introduit aussi entre les multivecteurs ce qu'il appelle les multiplications "régressive" et "intérieure" (qui lui tiennent lieu de tout ce qui touche à la dualité). Il est en tout cas assez remarquable que, vers 1900 encore, dans l'article Study-Cartan de l'Encyclopédie ([52 a], t. 11, p. 107-246), l'algèbre extérieure ne soit pas rangée parmi les algèbres associatives, mais reçoive un traitement séparé, et qu'il ne soit pas signalé que l'un des types d'algèbres de rang 4 (le type VIII de la p. 180) n'est autre que l'algèbre extérieure sur un espace de dimension 2.

[4]À vrai dire, Cayley ne démontre pas cette existence, n'écrit pas explicitement les matrices en question, et ne paraît pas avoir remarqué à ce moment-là que certaines sont nécessairement imaginaires (dans tout ce mémoire, il n'est jamais précisé si les "quantities" qui interviennent dans les matrices sont réelles ou complexes ; il intervient toutefois incidemment un nombre complexe à la p. 494). On penserait qu'il n'y a plus qu'un pas à faire pour identifier les "biquaternions" de Hamilton aux matrices complexes d'ordre 2 ; en fait, ce résultat ne sera explicitement énoncé que par les Peirce en 1870 ([247], p. 132). L'idée générale de représentation régulière d'une algèbre est introduite par C. S. Peirce vers 1879 [248 c] ; elle avait été pressentie par Laguerre dès 1876 ([192], t. I, p. 235).

d'élément idempotent, démontre qu'une algèbre (avec ou sans élément unité) dont un élément au moins n'est pas nilpotent possède un idempotent $\neq 0$, écrit la célèbre décomposition

$$x = exe + (xe - exe) + (ex - exe) + (x - xe - ex + exe)$$

(e idempotent, x élément quelconque), et a l'idée (encore un peu imprécise) d'une décomposition d'un idempotent en somme d'idempotents "primitifs" deux à deux orthogonaux [247]. En outre, selon Clifford ([65], p. 274) [5], c'est à B. Peirce qu'il faut attribuer la notion de produit tensoriel de deux algèbres, que Clifford lui-même applique implicitement à une généralisation des "biquaternions" de Hamilton ([65], p. 181-200), et explicitement à l'étude des algèbres qui portent son nom, quelques années plus tard ([65], p. 397-401 et 266-276). Ces nouvelles notions sont utilisées par B. Peirce pour la classification des algèbres de petite dimension (sur le corps des nombres complexes), problème auquel s'attaquent aussi, aux environs de 1880, d'autres mathématiciens de l'école anglo-américaine, Cayley et Sylvester en tête. On s'aperçoit ainsi rapidement de la grande variété des structures possibles, et c'est sans doute ce fait qui, dans la période suivante, va orienter les recherches vers l'obtention de classes d'algèbres à propriétés plus particulières.

Sur le continent, où l'évolution des idées est assez différente, de telles recherches apparaissent dès avant 1880. En 1878, Frobenius prouve que les quaternions constituent le seul exemple de corps non commutatif (de dimension finie) sur le corps des nombres réels ([119], t. I, p. 343-405) résultat publié indépendamment deux ans plus tard par C. S. Peirce [248 d]. Dès 1861, Weierstrass, précisant une remarque de Gauss, avait, dans ses cours, caractérisé les algèbres commutatives sans élément nilpotent [6] sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme composées directes de corps (isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; Dedekind était de son côté arrivé aux mêmes conclusions vers 1870, en liaison avec sa conception "hypercomplexe" de la théorie des corps commutatifs ; leurs démonstrations sont publiées en 1884-85 ([329 a], t. II, p. 311-332 et [79], t. II, p. 1-19). C'est en 1884 aussi que H. Poincaré, dans une courte note fort elliptique ([251 a], t. V, p. 77-79), attire l'attention sur la possibilité de considérer les équations, $z_i = \varphi_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ qui expriment la loi multiplicative $(\sum_i x_i e_i)(\sum_i y_i e_i) = \sum_i z_i e_i$, dans une algèbre, comme définissant (localement, bien entendu) un groupe de Lie. Cette remarque semble avoir fait grande impression sur Lie et ses disciples (Study, Scheffers, F. Schur et un peu plus tard Molien et E. Cartan), occupés précisément à cette époque à développer la théorie des groupes "continus", et notamment les problèmes de classification (voir en particulier [271], p. 387) ; pendant la période 1885-1905, elle conduit les mathématiciens de cette école à appliquer à l'étude de la structure des algèbres des méthodes de même nature que celles utilisées par eux dans l'étude des groupes et algèbres de Lie.

Ces méthodes reposent avant tout sur la considération du polynôme caractéristique d'un élément de l'algèbre relativement à sa représentation régulière (polynôme déjà rencontré dans les travaux de Weierstrass et Dedekind cités plus haut), et sur la décomposition de ce polynôme en facteurs

[5] B. Peirce rencontra Clifford à Londres en 1871, et l'un et l'autre font plusieurs fois allusion à leurs conversations, dont l'une eut sans doute lieu à une séance de la London Mathematical Society, où Peirce avait présenté ses résultats.

[6] En fait, Weierstrass impose à ses algèbres une condition plus stricte, à savoir que l'équation

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0$$

(où les a_i et l'inconnue x sont dans l'algèbre) ne peut avoir une infinité de racines que si les a_i sont tous multiples d'un même diviseur de zéro.

irréductibles ; décomposition où, comme Frobenius le découvrira un peu plus tard, se reflète la décomposition de la représentation régulière en composantes irréductibles.

Au cours des recherches de l'école de Lie sur les algèbres se dégagent peu à peu les notions "intrinsèques" de la théorie. La notion de radical apparaît dans un cas particulier (celui où le quotient par le radical est composé direct de corps) chez G. Scheffers en 1891 [271], plus clairement chez Molien [224 a] et Cartan ([52 a], t. II, p. 7-105), qui étudient le cas général (le mot même de "radical" est de Frobenius ([119], t. III, p. 284-329)). Study et Scheffers [271] mettent en relief le concept d'algèbre composée directe de plusieurs autres (déjà entrevu par B. Peirce ([247], p. 221)). Enfin s'introduisent avec Molien [224 a] les algèbres quotients d'une algèbre, notion essentiellement équivalente à celle d'idéal bilatère (définie pour la première fois par Cartan ([52 a], t. II_1, p. 7-105)) ou d'homomorphisme (nom dû aussi à Frobenius) ; l'analogie avec les groupes est très nette ici, et un peu plus tard, en 1904, Epsteen et Wedderburn considèreront des suites de composition d'idéaux bilatères et leur étendront le théorème de Jordan-Hölder. Les résultats les plus importants de cette période sont ceux de T. Molien [224 a] : guidé par la notion de groupe simple, il définit les algèbres simples (sur $\mathbb{C}$) et démontre que ce sont les algèbres de matrices, puis prouve que la structure d'une algèbre quelconque de rang fini sur $\mathbb{C}$ se ramène essentiellement au cas (déjà étudié par Scheffers) où le quotient par le radical est une somme directe de corps. Ces résultats sont peu après retrouvés et établis de façon plus rigoureuse et plus claire par E. Cartan ([52 a], t. II_1, p. 7-105), qui introduit à cette occasion la notion d'algèbre semi-simple, et met en évidence des invariants numériques (les "entiers de Cartan") attachés à une algèbre quelconque sur le corps $\mathbb{C}$ - amenant ainsi la théorie de ces algèbres à un point au-delà duquel on n'a plus guère progressé depuis [7] ; enfin il étend les résultats de Molien et les siens propres aux algèbres sur $\mathbb{R}$.

Aux environs de 1900 se développe le mouvement d'idées qui mène à l'abandon de toute restriction sur le corps des scalaires dans tout ce qui touche à l'algèbre linéaire ; il faut en particulier signaler l'impulsion vigoureuse donnée à l'étude des corps finis par l'école américaine, autour de E. H. Moore et L. E. Dickson ; le résultat le plus marquant de ces recherches est le théorème de Wedderburn [328 a] prouvant que tout corps fini est commutatif. En 1907, Wedderburn reprend les résultats de Cartan et les étend à un corps de base quelconque [328 b] ; ce faisant, il abandonne complètement les méthodes de ses devanciers (qui deviennent inapplicables dès que le corps de base n'est plus algébriquement clos ou ordonné maximal), et revient, en la perfectionnant, à la technique des idempotents de B. Peirce, qui lui permet de mettre sous forme définitive le théorème sur la structure des algèbres semi-simples, dont l'étude est ramenée à celle des corps non commutatifs. En outre, le problème de l'extension du corps des scalaires se pose naturellement dans la perspective où il se place, et il prouve que toute algèbre semi-simple reste semi-simple après une extension séparable du corps de base [8], et devient composée directe d'algèbres centrales de matrices si cette

[7] Les difficultés essentielles proviennent de l'étude du radical, pour la structure duquel on n'a jusqu'ici trouvé aucun principe satisfaisant de classification.

[8] Au moment où écrivait Wedderburn, la notion d'extension séparable n'avait pas encore été définie ; mais il utilise implicitement l'hypothèse que, si un polynôme irréductible f sur le corps de base a une racine x dans une extension de ce corps, on a nécessairement $f'(x) \neq 0$ ([328 b], p. 103). C'est seulement en 1929 que E. Noether signala les phénomènes liés à l'inséparabilité de l'extension du corps des scalaires [236 c].
Mentionnons ici un autre résultat lié aux questions de séparabilité (et maintenant rattaché à l'Algèbre homologique), la décomposition d'une algèbre en somme directe (mais non composée directe !) de son radical et d'une sous-algèbre semi-simple. Ce résultat (qui avait été démontré par Molien lorsque le corps des scalaires est $\mathbb{C}$ et par Cartan pour les

extension est prise assez grande ([328 b], p. 102) [9]. Un peu plus tard, Dickson, pour $n = 3$ [88 a] et Wedderburn lui-même pour n quelconque [328 c] donnent les premiers exemples de corps non commutatifs de rang n^2 sur leur centre [10], inaugurant ainsi dans un cas particulier la théorie des "produits croisés" et des "systèmes de facteurs" que devaient développer plus tard R. Brauer [34 a] et E. Noether [236 c]. Enfin, en 1921, Wedderburn démontre un cas particulier du théorème de commutation [328 d].

Entre temps, de 1896 à 1910, s'était développée, entre les mains de Frobenius, Burnside et I. Schur, une théorie voisine de celle des algèbres, la théorie de la représentation linéaire des groupes (limitée au début aux représentations de groupes finis). Elle tire son origine de remarques de Dedekind : celui-ci (avant même la publication de son travail sur les algèbres) avait, vers 1880, rencontré au cours de ses recherches sur les bases normales d'extensions galoisiennes, le "Gruppendeterminant" $\det(x_{st^{-1}})$, où $(x_s)_{s\equiv 0}$ est une suite d'indéterminées dont l'ensemble d'indices est un groupe fini G (en d'autres termes, la norme de l'élément générique de l'algèbre du groupe G relativement à sa représentation régulière) ; et il avait observé que lorsque G est abélien, ce polynôme se décompose en facteurs linéaires (ce qui généralisait une identité démontrée longtemps auparavant pour les déterminants "circulants", qui correspondent aux groupes cycliques G). Au cours de sa très intéressante correspondance avec Frobenius ([79], t. II, p. 414-442), Dedekind, en 1896, attire son attention sur cette propriété, son lien avec la théorie des caractères des groupes abéliens [327 c] et quelques résultats analogues sur des groupes non commutatifs particuliers, qu'il avait obtenus en 1886. Quelques mois plus tard, Frobenius résolvait complètement le problème de la décomposition du "Gruppendeterminant" en facteurs irréductibles ([119], t. III, p. 38-77), grâce à sa brillante généralisation de la notion de caractère ([119], t. III, p. 1-37), dont nous n'avons pas à parler ici. Mais il nous faut noter que dans le développement ultérieur de cette théorie [11], Frobenius reste toujours conscient de sa parenté avec la théorie des algèbres (sur laquelle Dedekind n'avait cessé d'ailleurs d'insister dans ses lettres) ; et, après avoir introduit pour les groupes les notions de représentation irréductible et de représentation complètement réductible ([119], t. III, p. 82-103), et montré que la représentation régulière contient toutes les représentations irréductibles, c'est par des méthodes analogues qu'il proposait, en 1903, de reprendre la théorie de Molien-Cartan ([119], t. III, p. 284-329). Chez Burnside [44 a] et I. Schur [279 c], l'aspect "hyper-complexe" de la théorie n'intervient pas explicitement ; mais c'est chez eux que se font jour les propriétés fondamentales des représentations irréductibles, lemme de Schur et théorème de Burnside. Enfin, il faut noter pour notre objet que c'est dans cette théorie qu'apparaissent pour la première fois deux cas particuliers du théorème de commutation dans la thèse de I. Schur [279 a] qui relie (précisément par la commutation dans l'anneau des endomorphismes d'un espace tensoriel) les représentations du groupe linéaire et celles du groupe symétrique, et dans son travail de 1905 [279 c], où il montre que les matrices permutables à toutes les matrices d'une représentation irréductible sur le corps $\mathbb{C}$ sont des multiples scalaires de I (résultat qui découle aussi du théorème de Burnside).

algèbres sur $\mathbb{R}$) est énoncé sous şa forme générale par Wedderburn, qui ne le démontre en fait que lorsque le quotient de l'algèbre par son radical est simple ([328 b], p. 105-109) en utilisant d'ailleurs sur les polynômes irréductibles la même hypothèse que ci-dessus.

[9] Les recherches arithmétiques sur les représentations linéaires des groupes, qui commencent à la même époque, amènent aussi à considérer la notion équivalente de corps neutralisant d'une représentation [279 d].

[10] Notons que dans les "*Grundlagen der Geometrie*", Hilbert avait donné un exemple de corps non commutatif de rang infini sur son centre ([163 c], p. 107-109).

[11] Une partie des résultats de Frobenius avait été obtenue indépendamment par T. Molien en 1897 [224 b].

théories [12] : ce fut l'œuvre de l'école allemande autour de E. Noether et E. Artin, dans la période 1921-1933 qui voit la création de l'algèbre moderne. Déjà, en 1903, dans un mémoire sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires ([251 a], t. III, p. 140-149), H. Poincaré avait défini, dans une algèbre, les idéaux à gauche et à droite et la notion d'idéal minimal ; il avait aussi remarqué que dans une algèbre semi-simple, tout idéal à gauche est somme directe de ses intersections avec les composants simples, et que dans l'algèbre des matrices d'ordre n, les idéaux minimaux sont de dimension n ; mais son travail passa inaperçu des algébristes [13]. En 1907, Wedderburn définit à nouveau les idéaux à gauche et à droite d'une algèbre et en démontre quelques propriétés (notamment que le radical est le plus grand idéal à gauche nilpotent ([328 b], p. 113-114)). Mais il faut attendre 1927 pour que ces notions soient utilisées de façon essentielle dans la théorie des algèbres [14]. Mettant sous forme générale des procédés de démonstration apparus antérieurement çà et là [15], W. Krull en 1925 [187 a] et E. Noether en 1926 [236 b] introduisent et utilisent systématiquement les conditions maximale et minimale ; le premier s'en sert pour étendre aux groupes abéliens à opérateurs (qu'il définit à cette occasion) le théorème de Remak sur la décomposition d'un groupe fini en produit direct de groupes indécomposables, tandis que la seconde fait intervenir ces conditions dans la caractérisation des anneaux de Dedekind. En 1927, E. Artin [7 c], appliquant la même idée aux anneaux non commutatifs, montre comment, par une étude systématique des idéaux minimaux, on peut étendre les théorèmes de Wedderburn à tous les anneaux dont les idéaux à gauche satisfont à la fois aux conditions maximale et minimale [16].

D'autre part, Krull, en 1926 [187 b], fait le lien entre la notion de groupe abélien à opérateurs et celle de représentation linéaire des groupes ; point de vue généralisé aux algèbres et développé en détail par E. Noether dans un travail fondamental de 1929 [236 c] qui, par l'importance des idées introduites et la lucidité de l'exposé, mérite de figurer à côté du mémoire de Steinitz sur les corps commutatifs comme un des piliers de l'algèbre linéaire moderne [17].

---

[12] ?? début de la phrase...

[13] Notons aussi que, dans ce mémoire, Poincaré observe que l'ensemble des opérateurs, dans l'algèbre d'un groupe, qui annulent un vecteur d'un espace de représentation linéaire du groupe, forment un idéal à gauche ; il signale que cette remarque pourrait être appliquée à la théorie des représentations linéaires ([251 a], t. III, p. 149), mais ne développa jamais cette idée.

[14] Il est intéressant de remarquer que, dans l'intervalle, la notion d'idéal à gauche ou à droite apparaît, non dans l'étude des algèbres, mais dans un travail de E. Noether et W. Schmeidler [238], consacré aux anneaux d'opérateurs différentiels.

[15] La condition maximale (sous forme de "condition de chaîne ascendante") remonte à Dedekind, qui l'introduit explicitement ([79], t. III, p. 90) dans l'étude des idéaux d'un corps de nombres algébriques ; un des premiers exemples de raisonnement de "chaîne descendante" est sans doute celui qu'on trouve dans le mémoire de Wedderburn de 1907 ([328 b], p. 90) à propos d'idéaux bilatères.

[16] En 1929, E. Noether montrait que pour les anneaux sans radical, ces théorèmes s'appliquent en supposant seulement vérifiée la condition minimale ([236 c], p. 663) ; C. Hopkins prouva en 1939 que cette condition à elle seule entraîne que le radical est nilpotent [167].

[17] C'est là qu'on trouve entre autres pour la première fois sous leur forme générale les notions d'homomorphisme de groupe à opérateurs, d'anneau opposé, de bimodule, ainsi que les fameux théorèmes d'isomorphie" (qui figurent déjà pour les groupes commutatifs dans [236 b]). Des cas particuliers ou corollaires de ces derniers étaient bien entendu intervenus longtemps auparavant, par exemple (pour le second théorème d'isomorphie) chez Hölder à propos des groupes finis [165], chez Dedekind à propos des groupes abéliens ([79], t. III, p. 76-77), chez Wedderburn à propos d'idéaux bilatères ([328 b], p. 82-83) ; quant au premier théorème d'isomorphie, il est par exemple énoncé explicitement par de Séguier en 1904 ([86], p. 65).

Enfin, dans une série de travaux qui débutent en 1927 ([237], [34 a], [236 d]), E. Noether et R. Brauer (auxquels se joignent à partir de 1929-31 A. Albert et H. Hasse) reprennent l'étude des corps gauches au point où l'avaient laissée Wedderburn et Dickson. Si la partie la plus importante de leurs résultats consiste en une étude approfondie du groupe de Brauer (en particulier sur les corps de nombres algébriques) et dépasse donc le cadre de cette note, signalons en tout cas que c'est au cours de ces travaux que se précisent les théorèmes de commutation, ainsi que la notion de corps neutralisant d'une algèbre simple et ses relations avec les sous-corps commutatifs maximaux ; enfin, en 1927, Skolem caractérise les automorphismes des anneaux simples [286 b], théorème retrouvé quelques années plus tard par E. Noether [236 c] et R. Brauer [34 a].

Ainsi, en 1934, la théorie élémentaire des anneaux simples et semi-simples est à peu près arrivée à son aspect définitif (pour un exposé d'ensemble de l'état de la théorie à cette époque, voir [87]) ; depuis lors, elle s'est développée dans deux directions différentes, que nous nous bornerons à mentionner brièvement. D'une part, la théorie des "systèmes de facteurs" de R. Brauer et E. Noether a récemment reçu une impulsion nouvelle, à la suite de son incorporation dans l'Algèbre homologique moderne [18]. D'autre part, on a beaucoup cherché, avec plus ou moins de succès, à étendre tout au moins en partie les résultats de la théorie classique aux anneaux sans condition minimale [19] ou aux anneaux sans élément unité. Mais jusqu'ici ces extensions n'ont guère eu de répercussions dans les autres branches des mathématiques ; pour plus de détails sur ces travaux, nous renvoyons à l'exposé récent de N. Jacobson [172 b].

Références

[7c] E. Artin, Zur Theorie der hypercomplexen Zahlen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, t. V (1927), p 251-260.

[34a] R. Brauer, Über Systeme hypercomplexer Zahlen, *Math. Zeitschr*, t. XXX (1929), p. 79-107.

[44a] W. Burnside, On the condition of reducibility for any group of linear substitutions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, t. III (1905), p. 430-434.

[52a] E. Cartan, *Œuvres complètes*, 6 vol. (3 parties), Paris (Gauthier-Villars), 1953-55.

[58] A. Cayley, *Collected Mathematical Papers*, 13 vol., Cambridge (University Press), 1889-1898.

[65] W. K. Clifford, *Mathematical papers*, London (Macmillan), 1882.

[79] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vol., Braunschweig (Vieweg), 1932.

[86] J. A. de Séguier, *Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Paris (Gautier-Villars), 1904.

[87] M. Deuring, *Algebren (Erg. der Math.*, Bd. 4), Berlin (Springer), 1937.

[88a] L. E. Dickson, Linear associative algebras and abelian equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XV (1914), p. 31-46.

[119] G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen* (éd. J. P. Serre), 3 vol., Berlin-Heidelberg-New York (Springer), 1968.

[134] H. Grassmann, *Gesammelte Werke*, 3 vol., Leipzig (Teubner), 1894-1911.

[145a] W. R. Hamilton, *Lectures on quaternions*, Dublin, 1853.

[18] Nous n'avons pas à faire ici l'histoire de cette théorie et de ses relations avec la notion d'extension d'un groupe par un autre ; mais il convient de noter que les premiers "systèmes de facteurs" font précisément leur apparition à propos d'un problème d'extension de groupes, dans le mémoire de 1904 où I. Schur fonde la théorie des "représentations projectives" des groupes [279 b].

[19] Dès 1928, Krull avait étendu aux modules semi-simples quelconques les théorèmes généraux sur les modules semi-simples de longueur finie ([187 c], p. 63-66).

[163c] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7^e^ éd., Leipzig-Berlin (Teubner), 1930.

[165] O. Hölder, Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, *Math. Ann.*, t. XXXIV (1889), p. 26-56.

[167] C. Hopkins, Rings with minimal conditions for left ideals, *Ann. of Math.*, (2), t. XL (1939), p. 712-730.

[172b] N. Jacobson, Classes of restricted Lie algebras of characteristic p, II, *Duke Math. Journ.*, t. X (1943), p. 107-121.

[187a] W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, *Math. Zeitschr.,* t. XXIII (1925), p. 161-196.

[187b] W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, *Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss.*, 1926, n° 1, 32 pp.

[187c] W. Krull, Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe, *Math. Ann.*, t. XCIX (1928), p. 51-70.

[192] E. Laguerre, *Œuvres*, 2 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1898-1905.

[224a] T. Molien, Ueber Systeme höherer complexer Zahlen, *Math. Ann.*, t. XLI (1893), p. 83-156.

[224b] T. Molien, Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen, *Berliner Sitzungsber.*, 1897, p. 1152-1156.

[236b] E. Noether, Abstraker Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörper, *Math. Ann.*, t. XCVI (1926), p. 26-61.

[236c] E. Noether, Hypercomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Zeitschr.*, t. XXX (1929), p. 641-692.

[236d] E. Noether, Nichtcommutative Algebra, *Math. Zeitschr.*, t. XXXVII (1933), p. 514-541.

[237] E. Noether et R. Brauer, Über minimale Zerfallungskörper irreduzibler Darstellungen; *Berliner Sitzungsber.*, 1927, p. 221-228.

[238] E. Noether et W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, *Math. Zeitschr.*, t. VIII (1920), p. 1-35.

[247] B. Peirce, Linear associative algebra, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), p. 97-221.

[248c] C. S. Peirce, On the relative forms of the algebras, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), p. 221-225.

[248d] C. S. Peirce, On the algebras in which division is unambiguous, *Amer. Journ. of Math.*, t. IV (1881), p. 225-229.

[251a] H. Poincaré *Œuvres*, 11 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1916-1956.

[271] G. Scheffers, Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen, *Math. Ann.*, t. XXXIX (1891), p. 293-390.

[279a] I. Schur, *Uber eine Klasse von Matrices, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Diss. Berlin, 1901.

[279b] I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. de Crelle*, t. CXXVII (1904), p. 20-50.

[279c] I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, *Berliner Sitzungsber.*, 1905, p. 406-432.

[279d] I. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitution, *Berliner Sitzungsber.*, 1906, p. 164-184.

[286b] T. Skolem, Zur Theorie der associativen Zahlensysteme, *Skr. norske Vid. Akad.*, Oslo, 1927, n° 12, 50 pp.

[327c] H. Weber, Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig is, *Math. Ann.*, t. XX (1882), p. 301-329.

[328a] J. Maclagan Wedderburn, A theorem on finite algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. VI (1905), p. 349-352.

[328b] J. Maclagan Wedderburn, On hypercomplex numbers, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), t. VI (1908), p. 77-118.

[328c] J. Maclagan Wedderburn, A type of primitive algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*; t. XV (1914), p. 162-166.

[328d] J. Maclagan Wedderburn, On division algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XXII (1921), p. 129-135.

[329a] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, 7 vol., Berlin (Mayer et Müller), 1894-1927.