L'imagination et l'infini

Alain Connes
Alain Prochiantz [1]

Imaginations, une série d'entretiens proposée par Alain Prochiantz, neurobiologiste, professeur au Collège de France.

Alain Prochiantz : Nous sommes dans la grille d'été, sur le programme *Imaginations*, avec des philosophes, des sociologues, et des savants, et des artistes, sur le thème probablement rassembleur, entre les scientifiques et les artistes. Il faut dire que c'est comme ça qu'on a en tout cas pensé la chose. Et j'ai aujourd'hui le plaisir de recevoir Alain Connes. Alors, Alain Connes est un très grand mathématicien. Il est professeur du Collège de France, où il a occupé la chaire Analyse et géométrie. Il est récipiendaire de la plus grande récompense qu'on puisse avoir en mathématiques, qui est la médaille Fields. Et il a cet intérêt non seulement pour les mathématiques, bien entendu, mais aussi pour la musique et pour l'art, ce qui fait qu'il est vraiment une des personnes qui peut faire le lien aujourd'hui très fort entre art et science sur un mode qui n'est pas un mode plat mais qui est un mode qui engage intellectuellement celui qui fait de l'art ou celui qui fait de la science, c'est-à-dire une véritable réflexion sur le sujet de l'art et le sujet de la science. C'est un spécialiste de ce qu'on appelle la géométrie non-commutative et si je dis ça, c'est probablement parce que ce n'est pas étranger à son intérêt pour le temps, et à travers l'intérêt pour le temps, son intérêt pour la création musicale.

Alain, j'ai le devoir d'essayer d'extraire de toi, pas tout parce que c'est inépuisable, mais en tout cas des éléments de réflexion sur cette question de la science, des mathématiques, de la beauté en mathématiques, et de son lien avec la beauté artistique.

1. Cet interview d'Alain Connes, Professeur honoraire de mathématiques au Collège de France, par Alain Prochiantz, Administrateur du Collège de France ainsi que Professeur de Neurobiologie au Collège de France, a été réalisé lors d'une émission Savoirs du Cycle Imaginations sur France-Culture (22.7.2018).
Transcription par Denise Vella-Chemla (2.2.2019).

Alain Connes : Oui. En fait, donc, j'ai un peu réfléchi en ce qui concerne simplement l'imagination. Et la première chose qui m'a frappé, c'est que finalement, la radio, comme moyen de communication, est un moyen qui est beaucoup plus intéressant, au niveau de la concentration de l'auditeur, au niveau de l'écoute justement, qu'un autre moyen de communication comme la télévision. Pourquoi ? Parce que l'imagination, dans le terme imagination, il y a les images, et il est extrêmement important que l'auditeur n'ait pas un rôle purement passif, ne reçoive pas l'image telle qu'on veut la lui imposer, mais soit capable lui-même de la créer, et de la créer à partir du discours, à partir du langage. Donc, c'est la première chose qui m'a frappé, c'est à quel point une émission de radio est beaucoup plus appropriée, pour parler de l'imagination, que si on essayait de l'illustrer directement. La deuxième chose qui m'a aussi beaucoup frappé, c'est en quel sens les mathématiciens ont une utilisation de l'imagination qui a priori est très différente, très très spéciale, très différente de ce qui se passe dans les autres domaines, c'est ça que je veux essayer d'expliquer. Donc, ce que je veux dire, c'est qu'un mathématicien utilise beaucoup l'imagination, mais il l'utilise d'une manière très spéciale. C'est-à-dire qu'en fait, le rôle, le premier rôle de l'imagination pour un mathématicien, qui est un rôle essentiel, c'est celui de créer des images mentales.

Et dans ce rôle-là, en fait, bien sûr, bien entendu, ce n'est absolument pas quelque chose de passif. C'est un... comment dire... on ne peut y arriver véritablement que lorsqu'on sèche sur un problème. Donc il y a une vertu essentielle... pour un mathématicien, c'est, par exemple s'il est en train de lire un bouquin, c'est de prendre par exemple un théorème qui est dans un livre etc. et surtout, de ne pas regarder la démonstration, mais d'essayer de démontrer lui-même. Pourquoi ? Parce que lorsqu'il fait cela, en fait, il va créer dans son cerveau, je dis une image mentale mais en fait, c'est très rarement, c'est pas toujours quelque chose de géométrique, c'est pas toujours quelque chose qui peut se décrire comme une image, mais, c'est un certain assemblage dans son cerveau qui ensuite va faire que, lorsqu'il sera confronté à une page de formules, eh bien, cette page de formules va lui parler. Et dans cette page de formules, il va voir des acteurs. Il va voir des choses qui vont "résonner" entre elles, etc. La comparaison que j'ai toujours envie de prendre, c'est que supposez par exemple que vous soyez dans le métro, et que vous voyiez un passager du métro ou une passagère du métro qui est en train de lire une partition de musique. Quand on n'est pas musicien, cette partition de musique ne nous dit rien, rien du tout. Quand on n'est pas mathématicien et qu'on voit un passager en train de lire des formules de maths, on a l'impression que... je veux dire, qu'on est complètement exclu et qu'on n'a aucune chance de comprendre. Et en fait, la raison, c'est justement cette fabrication d'images mentales et cette fabrication d'images mentales, elle implique de manière absolument essentielle cette capacité d'imaginer. Cette capacité d'imaginer, là, elle joue un rôle absolument fondamental. Et je donne toujours le conseil suivant, je veux dire, par exemple, à un jeune mathématicien : le conseil, c'est si on est confronté par exemple à un calcul même très difficile, bien sûr, ce sont des calculs abstraits etc., la bonne méthode, ça n'est pas de se ruer sur l'ordinateur pour essayer de faire le calcul, ou de prendre une feuille de calculer, non ! La bonne méthode, c'est de partir pour faire un tour à pied et d'essayer de se débrouiller avec ce qu'on a, pour justement, en y réfléchissant, créer dans le cerveau ces images mentales. Et peu importe la complexité du problème.

Peu importe le caractère impossible au départ de cette création, c'est en séchant, et justement, en s'appropriant progressivement des objets mentaux qui vont correspondre au problème qu'on va progresser. Donc, il y a une part active qui est absolument essentielle et de mon point de vue, c'est ça vraiment le premier, le rôle fondamental de l'imagination en mathématiques. En ce sens-là, c'est très différent d'autres domaines, parce que, bien sûr lorsqu'on fait de la physique, et qu'on parle de l'univers, bon, eh bien, chacun a une image mentale au départ, de ce que c'est que l'univers, donc, on ne va pas avoir besoin de créer quelque chose à partir de rien, alors qu'en maths, vraiment, on est confronté à cette chose-là. Donc, de mon point de vue, il y a ce point essentiel, qui est que l'on doit être actif, et on est d'autant plus actif que l'on ne nous donne pas un modèle déjà pré-établi. Et si par exemple on était à la télévision, on essaierait d'illustrer des concepts de mathématiques par des images mais, chaque mathématicien, chaque personne, est un cas particulier et va créer dans son cerveau, une image très particulière, un assemblage très très particulier, et il est impossible de donner une forme générique comme cela.

Alain Prochiantz : Mais quand tu parles d'images mentales, je pense qu'à un certain niveau, même en dehors des mathématiques, il y a un moment où il est besoin d'avoir recours à cet espèce de fabrication d'images mentales...

Alain Connes : Tout à fait.

Alain Prochiantz : de briques que l'on manipule...

Alain Connes : ...qui s'emboîtent entre elles...

Alain Prochiantz : qui s'emboîtent ou qui ne s'emboîtent pas et ça, c'est peut-être parce que justement, la pensée mathématique est la seule façon de penser, en dehors des formules. C'est pas uniquement des formules, c'est une façon de réfléchir qui est une langue naturelle pour le savant d'une certaine façon. Donc la question que je voulais te poser, pour éclairer un petit peu, pour moi d'ailleurs, mais aussi peut-être pour ceux qui nous écoutent, c'est, je dirais "Quelle est l'image de ces images mentales ? Ca ressemble à quoi une image mentale ?"

Alain Connes : Bon, alors d'abord, il y a les images mentales les plus simples, bien entendu. C'est-à-dire que si on parle de la géométrie ordinaire, par exemple, la géométrie plane, il y a un théorème que j'aime beaucoup, c'est le théorème de Morley. Donc là, l'auditeur doit essayer d'abord d'imaginer un triangle. Alors chaque auditeur va imaginer un triangle différent, mais peu importe, d'accord. Donc on part d'un triangle. Et que dit le théorème de Morley, que dit le théorème de Morley ? C'est qu'on découpe chaque angle du triangle en trois parties égales, donc en trois angles égaux. Et on intersecte les droites correspondantes. On obtient un triangle à l'intérieur, en général, du triangle dont on est parti, et la merveille, c'est que le triangle qu'on obtient à l'intérieur est toujours, toujours, un triangle équilatère. Alors ça, c'est merveilleux ! C'est ce qu'on appelle le théorème de Morley. Et quand on a énoncé ce théorème, on a une image mentale, bien sûr. Et en fait, l'image mentale que l'on a est bien meilleure que si on dessinait sur un papier un triangle, et qu'on ait dessiné le triangle équilatère au milieu. Pourquoi ? Parce qu'on serait automatiquement perturbé par le grain du papier, par le crayon avec lequel on a écrit, etc. Donc là, il y a déjà une abstraction qui s'est produite. Mais... il y a un point essentiel justement en mathématiques. Il y a un point essentiel, c'est que j'ai pu vous expliquer ce que c'était qu'une image mentale très simple, dans le cas de la géométrie plane. Mais en mathématiques, on manipule des géométries qui sont bien plus compliquées que ça, et qui en général, sont des géométries qui sont de dimensions bien plus grandes que 3, et même en général, de dimension infinie.

C'est-à-dire on a compris, grâce à la physique par exemple, que la mécanique quantique, c'est une mécanique qui se produit dans un espace qu'on appelle l'espace de Hilbert, qui est un espace de dimension infinie. Alors, comment se fait-il que le mathématicien puisse avoir accès à cet espace, de dimension infinie ? C'est ça la question, c'est la question essentielle. Et cette question essentielle, en fait, elle a une réponse très, très, très fondamentale. Cette réponse, c'est la dualité entre la géométrie et l'algèbre.

Alors pour l'expliquer, je vais prendre un exemple. Je vais prendre un exemple plus simple que le théorème de Morley. Supposons par exemple qu'on soit frappé par le fait que les médianes d'un triangle se rencontrent en un point. Alors ça va bien quand on fait dans la géométrie plane. On voit bien ce que c'est. On a un énoncé analogue lorsqu'on va dans la géométrie dans l'espace. Mais qu'en est-il lorsqu'on regarde une géométrie en dimension arbitraire ? Ca paraît impossible parce que comment est-ce qu'on va se représenter un espace de dimension 4, un objet correspondant à un triangle en espace de dimension 4 etc. ou en dimension plus grande : la réponse est merveilleusement simple : c'est que la manière de comprendre, dans le langage, algébrique, par une formule, pourquoi les médianes d'un triangle se rencontrent, c'est simplement d'écrire les coordonnées de ce qu'on appelle le barycentre de 3 points. C'est-à-dire qu'on prend les coordonnées des points. Et puis on fait leur somme et on la divise par 3, parce qu'on est en dimension deux ; si on était en dimension 3, on diviserait par 4 et ainsi de suite. Et alors, ce qui est merveilleux, c'est que lorsqu'on a, c'est un peu comme les deux hémisphères du cerveau, c'est-à-dire il y a l'hémisphère droit et l'hémisphère gauche, ils communiquent entre eux. C'est l'hémisphère droit qui a l'image mentale du triangle, comme je vous l'ai expliqué au début. C'est-à-dire qu'il le voit, qu'il voit le triangle de Morley, etc. Et puis après, on communique.

On communique avec l'hémisphère gauche. Dans l'hémisphère gauche, il y a une formule. C'est une formule qui permet... Et cette formule, elle est complètement insensible à la dimension. C'est-à-dire qu'une fois qu'on l'a écrite en dimension 2, elle va exister en dimension 3, en dimension 4, et même en dimension infinie. Donc il y a une merveille qui se produit, qui est qu'en mathématiques, on est capable d'escalader, précisément, parce qu'il y a quelque chose qui permet de renforcer l'image mentale, qui permet de lui donner une sécurité, et c'est la formule. Et une fois qu'on a cette formule, après, on va fonctionner dans un autre mode. Et ce mode n'est plus le mode visuel, et c'est pour ça que la notion d'image mentale est réductrice, parce qu'elle réduit tout à une vision géométrique. Or, en mathématiques, il y a une dualité, entre justement la géométrie et l'algèbre. C'est-à-dire que d'un côté, on a cette vision géométrique et là, en général, la vision géométrique, c'est quelque-chose qui va s'imposer immédiatement... C'est-à-dire on a une figure, cette figure va vous parler, mais elle va vous parler tout de suite.

Alors que l'algèbre, c'est précisément autre chose. Et c'est quelque chose qui va évoluer dans le temps, et c'est une chose dans laquelle les calculs vont se faire algébriquement, et j'avoue que moi, je suis par exemple persécuté. La nuit dernière, je me suis réveillé, je me suis dit "est-ce que dans telle formule, je ne me suis pas trompé ?". Pourquoi ? Parce que mon cerveau continue à fonctionner...

Et il continue à faire les calculs etc. Et ça, c'est quelque chose qui se déroule dans le temps, et qui n'est pas du tout de la même nature, qu'une image mentale statique, une image géométrique, qui elle existe et est figée une fois pour toutes et qu'on comprend de manière immédiate.

Alain Prochiantz : Les images mentales ne sont pas forcément statiques. J'imagine qu'on les bouge, on les retourne, on les combine.

Alain Connes : On peut les bouger, on peut les retourner. Il y a le retournement de la sphère par exemple.

Alain Prochiantz : Mais probablement pas n'importe comment. C'est-à-dire est-ce qu'il y a une grammaire de la combinaison des images mentales ? Qu'est-ce qui est permis dans la manipulation des objets mentaux, de ces images, et qui fait que ce n'est pas n'importe quoi, il y a une sorte de grammaire derrière.

Alain Connes : Il y a bien sûr une grammaire derrière. Je pense que, sans doute, une des facettes les plus importantes de la grammaire, c'est le pouvoir de l'analogie. Et puis ensuite de la métaphore. Mais je pense que l'analogie, c'est quelque chose d'extraordinairement puissant, et qui pour le moment, est tout à fait inaccessible à des procédés comme le Machine Learning, l'intelligence artificielle, etc. Donc c'est un outil extraordinaire...

Alain Prochiantz : Pour toi, c'est l'intuition, l'analogie ?

Alain Connes : Non, c'est plus que ça. C'est-à-dire qu'en fait, ce qui se produit, justement, à travers les images mentales, c'est qu'à un moment donné, le cerveau s'aperçoit que deux images mentales qui paraîtraient extrêmement loin les unes des autres (c'était ce qui était arrivé à Poincaré lorsqu'il montait dans le bus), des images mentales extrêmement éloignées les unes des autres, je veux dire, il parlait de deux choses complètement différentes, en fait, il s'est aperçu à un moment donné qu'il y avait des ressemblances extraordinaires entre les deux. Et le fait qu'il y a eu ces ressemblances extraordinaires entre les deux a fait que, après, il a pu développer une analogie entre deux domaines qui a priori n'ont rien à voir les uns avec les autres.

Et alors, une analogie, c'est quelque-chose qui est extrêmement délicat à manipuler, parce que c'est pas un simple dictionnaire. Si c'était un simple dictionnaire, ce serait rasoir, c'est-à-dire si on pouvait dire "telle chose correspond à telle autre chose etc., etc". C'est une espèce de... Il y a un mathématicien japonais, qui s'appelle Oka, qui avait merveilleusement décrit, c'est une espèce de transplantation, une espèce de... On a une petite fleur et très délicatement, on essaie de la transplanter à un autre endroit, et pourquoi c'est quelque chose d'incroyablement fécond et efficace, c'est parce que en général, justement, les choses que l'on comprend d'un côté, on ne les comprend pas de l'autre et inversement. Donc ça veut dire qu'on va pouvoir transplanter la compréhension qu'on a d'un côté, et voir comment, en essayant, on fait des essais, on voit etc. mais il ne faut surtout pas, à ce moment-là du développement, il ne faut surtout pas essayer d'être trop rigoureux, parce que si on est trop rigoureux, tout va s'effondrer. Et c'est un moment, justement, qui a un aspect poétique et artistique. Pourquoi ? Parce que quand on transplante des petites fleurs, quand on fait ce procédé-là, si on essaie d'être trop intelligent, trop rapide, etc., on va dire "bah, ça va pas marcher, mais ça va pas marcher pour telle raison etc." Et à ce moment-là, on abandonne, et on a tout gâché.

Alain Prochiantz : C'est une sorte de correspondance, en fait.

Alain Connes : C'est une sorte de correspondance, d'analogie. Et on ne peut pas essayer de la codifier de manière trop précise au moment où on la découvre. C'est quelque-chose d'extrêmement fragile et cette fragilité-là fait que, si par exemple, au moment où on la découvre, on essaie de la dire, on essaie, il faut, il faut savoir que les mathématiciens sont des gens très durs, c'est-à-dire qu'en mathématiques, le rêve est exclu. Je vais revenir là-dessus. Mais si on a perçu une analogie entre deux sujets, et si on essaye de manière trop rapide, trop prématurée, de la dire, elle va être détruite. Donc il y a une partie du développement d'une nouvelle théorie comme ça, dans laquelle on doit se protéger, on doit se protéger, c'est comme un petit enfant qui doit être protégé, etc. et seulement au bout d'un moment, quand il aura fait ses preuves, quand il aura grandi suffisamment, là on pourra le dévoiler.

Alain Prochiantz : Il faut laisser mûrir l'analogie, mûrir la correspondance, pour que ça soit suffisamment solide, pour affronter l'épreuve de vérité.

Alain Connes : Alors l'épreuve de vérité est quelque-chose d'absolument terrible. Donc ce qu'il faut savoir, quand je parlais de l'imagination en mathématiques, naïvement, on pourrait croire que, l'imagination en mathématiques, c'est imaginer des choses et puis essayer de les démontrer, etc. Mais en fait, il y a un carcan en mathématiques, qui est absolument terrible, et qui, je pense, est largement semblable à celui de la physique, mais d'une manière très différente. C'est-à-dire en fait, en mathématiques, ce qui se produit, c'est qu'on peut avoir de l'imagination, on peut imaginer une nouvelle théorie etc. Mais, le problème, c'est que, très vite, on va se heurter à une réalité, qui est la réalité mathématique, et cette réalité mathématique, elle est terrible, au sens où, je veux dire, que si on n'a pas tous les éléments d'une démonstration, si on n'a pas par exemple, je veux dire, la possibilité de vérifier les choses sur un ordinateur etc., on se rend compte en fait que la liberté dont on jouit est absolument minimale. Donc c'est pour ça que j'ai insisté sur le fait que le rôle de l'imagination en mathématiques, ce n'est pas d'imaginer de nouvelles choses, etc. Pas du tout. C'est de créer une image mentale à l'intérieur du cerveau. Là, ça sert vraiment. C'est quelque chose d'essentiel. Par contre après, il y a un tel carcan au niveau de l'imagination, par rapport à d'autres sujets, je pense aux artistes, je pense aux romanciers etc., ce carcan est tellement dur, tellement contraint, qu'en fait, ça empêche, ça annihile justement toute possibilité de liberté.

Alain Prochiantz : Très bien. Nous allons peut-être passer sur une première variation sur un air national allemand de Chopin, interprétée par Nikita Magaloff, sur lequel tu nous feras un petit commentaire.

Alain Connes : Exactement, bien sûr, oui oui.

(Intermède musical) : Sur un air national allemand

Alain Prochiantz : Est-ce que tu peux nous dire pourquoi tu as choisi ce morceau ?

Alain Connes : Voilà, alors, pourquoi est-ce que j'ai choisi cet air, ces variations. Bien sûr, pour l'interprétation de Nikita Magaloff, que j'aime beaucoup. Mais, en fait, ma raison est une raison très personnelle, et qui a à voir, comment dire, avec la structuration de l'imaginaire de l'enfant. Ce que je vais dire, c'est quelque-chose de très personnel, donc, mais peu importe, je pense que c'est quelque chose de générique. C'est-à-dire en fait, mes deux grands-parents du côté de ma mère viennent de Constantine en Algérie. Ils étaient originaires de cette ville. Et mon enfance a été bercée par le fait que justement, ma grand-mère maternelle était pianiste. Et elle était orpheline, elle était devenue orpheline à l'âge de 6 ans. Ses deux parents étaient morts. Elle était en Algérie, elle avait été recueillie dans un couvent, et elle me racontait, souvent, quand j'étais gamin, quand j'étais tout petit, des histoires de son père. Et son père, quand elle était toute petite, lui avait offert un piano, et lui avait joué, sur le piano, la partie des variations de Chopin qui est si belle, pas le tout début, mais le thème majeur et qui est introduit par Nikita Magaloff de manière incroyable, parce que c'est un morceau qu'on pourrait interpréter comme un morceau de technique mais pas du tout en fait, il a compris exactement à quel point l'exposition du thème devait être précédée par un ralentissement, etc., et à quel point le thème est beau.

Et en fait, mon enfance a été bercée par cette air, que j'ai eu beaucoup de mal à retrouver ensuite, lorsque j'ai écrit la généalogie de la famille, et donc en fait, ce que je voulais dire, c'est que je pense que l'imaginaire d'un enfant est structuré très tôt en particulier par la musique, et par, cette fois, l'imaginaire, au sens naïf, de ce que l'enfant peut imaginer quand il entend des histoires comme celle-là. Donc je ne suis jamais allé à Constantine. En fait, je ne suis jamais allé en Algérie, mais j'ai toujours eu dans ma tête, une image extrêmement intéressante, justement, de ce moment auquel le père de ma grand-mère qui était médecin, en fait, lui avait offert ce petit piano. Et le rôle que ça a joué...

Alain Prochiantz : Et est-ce que ça a un rapport avec la façon de penser en mathématicien ?

Alain Connes : Eh bien, disons qu'il est très connu, chaque mathématicien est différent, donc je ne veux pas faire de généralités. Mais en fait, il est très, très admis, qu'en général, les mathématiciens sont très intéressés par la musique, à défaut, forcément, d'être musiciens, puisqu'on n'a pas beaucoup de temps lorsqu'on est mathématicien, donc, si on veut pratiquer un instrument, c'est quelque chose qui occuperait trop de temps. Mais en général, ils sont très sensibles à la musique et c'est vrai, c'est vrai, et je continue ce que je disais tout à l'heure, c'est vrai qu'il y a une analogie très forte entre l'algèbre et la musique, par le déroulement dans le temps...

J'explique toujours bien sûr le fait que le langage lui-même, le langage que nous utilisons tout le temps, est non-commutatif puisqu'on peut pas permuter les lettres entre elles, à moins de faire des anagrammes mais... donc, il y a toute une relation très forte effectivement entre la musique et l'algèbre, je pense.

Alain Prochiantz : Et donc la temporalité...

Alain Connes : Et la temporalité, bien sûr, bien entendu.

Alain Prochiantz : Tu peux nous expliquer un peu cette question de la temporalité et un petit peu la géométrie non-commutative, comment ça se met là-dedans ?

Alain Connes : Oui, bien sûr. Alors disons qu'on a écrit deux livres, avec Dany Chéreau, qui est mon épouse, et puis Jacques Dixmier qui était mon professeur de thèse. Et justement, dans ces deux livres, on a continué ce thème qui est un thème essentiel dans ce que j'ai fait, dans ma vie de scientifique, et qui a démarré par la découverte du fait que lorsqu'on fait de l'algèbre, mais de manière non-commutative, c'est-à-dire qu'on ne s'autorise pas à permuter les lettres entre elles. Alors bien sûr, c'est quelque chose qui est essentiel parce que c'est ce qu'a trouvé Heisenberg, lorsqu'il a découvert la mécanique quantique.

Lorsqu'il a découvert la mécanique quantique, il a compris que lorsqu'on traite de systèmes tout petits, de systèmes microscopiques, en fait, contrairement à ce qu'on fait lorsqu'on fait de la physique classique, où on écrit $e = mc^2$ ou $e = c^2m$, c'est la même chose. Lorsqu'on travaille avec un système microscopique, on n'a plus le droit de permuter les lettres, c'est extraordinaire, il a fait une découverte fantastique. Et d'ailleurs, il a fait cette découverte à 4 heures du matin, alors qu'il était isolé sur l'île d'Heligoland et, ce qui est merveilleux en fait, c'est à quel point les découvreurs arrivent à transmettre, dans leurs écrits, Heisenberg l'a fait dans ses mémoires, l'extraordinaire vision qu'il a eue au moment où il a fait cette découverte. Et il a dit que c'était une vision qui était effrayante, parce que du fait qu'il était le premier à voir cela, en fait, il a eu devant lui un paysage qui était presque tout le paysage, et qui était effrayant. Et il le décrit merveilleusement. Et il n'est pas le seul à avoir été capable justement, en étant le premier découvreur, à transmettre cela.

Alors de mon côté donc, ce que j'avais perçu si vous voulez, c'est que, en fait, lorsqu'on fait de la géométrie non-commutative eh bien, automatiquement, c'est un certain type d'algèbre qui a été découverte par Von Neumann, automatiquement, l'algèbre elle-même sécrète son propre temps donc le fait que l'algèbre soit non-commutative sécrète le temps, le passage du temps et ça c'est quelque chose d'absolument bouleversant d'une certaine manière, et pendant des années et des années, j'avais été fasciné par ce fait-là. Bien sûr, mathématiquement, ça a un tas de conséquences parce que par exemple, l'algèbre a des périodes, etc., mais j'avais toujours été incapable d'avoir une idée de comment cette trouvaille, si vous voulez, pouvait trouver sa place en physique et donc ça c'est le sujet de notre premier livre, qui s'appelle Le théâtre quantique, qui est publié chez Odile Jacob et dans lequel, justement, on a essayé, moi et mes deux co-auteurs, de transmettre cette trouvaille, mais de telle sorte qu'elle puisse être perçue par le public.

C'est difficile, c'est difficile. Et dans le deuxième livre alors, Le Spectre d'Atacama, on est allé beaucoup plus loin au sens où là, on a essayé de transmettre justement, ce lien entre les formes et la musique, qui est un lien aussi extrêmement important, et qui dit que, lorsqu'on essaie par exemple d'expliquer où nous nous trouvons dans l'espace eh bien en fait, on se trouve confronté à un problème mathématique qui n'est pas du tout trivial, qui n'est pas du tout évident, qui est le problème de pouvoir donner un espace ou une forme, de manière plus générale, de manière invariante. Et ce que les mathématiques nous enseignent, c'est que si on veut donner une forme de manière invariante, la première chose qu'une forme nous procure, nous donne, c'est une gamme musicale, ça paraît quelque-chose de tout à fait étonnant donc : une forme nous procure une gamme musicale qui s'appelle un spectre. Et après, bien sûr, il y a à partir de là tout un développement. Le deuxième livre s'appelle Le Spectre d'Atacama parce que précisément, ce qui se produit, et qui est tout à fait étonnant, c'est que, alors qu'on peut calculer le spectre de formes ordinaires. Donc bon, si on regarde un espace comme un tambour, c'est Marc Kac qui avait depuis longtemps posé le problème si vous voulez : est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?

C'est-à-dire qu'un tambour a des vibrations, lorsqu'on tape dessus, et il ne faut pas croire qu'on obtiendra toujours le même son ; c'est ce que savent faire les gens qui jouent de la batterie par exemple ; donc on a des sons très différents mais ces sons forment une gamme, et une question évidente, c'est "est-ce que on peut reconnaître la forme du tambour à partir de la gamme ?".

Alors c'est une question qui a une réponse mathématique mais la chose vraiment étonnante, alors qu'on peut calculer la gamme d'un objet géométrique, d'une forme géométrique que l'on connaît, il existe des spectres, donc j'identifie la gamme si vous voulez avec la gamme des fréquences. Et ces fréquences, on va les représenter par des raies spectrales. Il y a un problème qui se pose de manière absolument insolente. C'est qu'en fait, il existe des spectres, qui apparaissent complètement naturellement, et où on a vraiment une difficulté considérable, mais bon, dans certains cas, on y arrive, à retrouver la forme, la forme physique, dont le spectre est le spectre. Et alors, il y a un exemple qu'on explique et qui justifiera le deuxième morceau de musique dont je parlerai tout à l'heure... C'est un exemple qu'on explique en grand détail dans le livre, c'est ce qu'on appelle le spectre de la guitare.

Alors je vais essayer de l'expliquer, mais à nouveau, il faut que l'auditeur se prépare à construire lui-même des images mentales dans ce que je vais expliquer. Donc la première image mentale, c'est imaginez une guitare. Bon. Vous avez une guitare. Vous avez sans doute vu des guitares, donc vous pouvez imaginer dans votre tête ce que c'est qu'une guitare, j'ai pas besoin de vous la montrer. Alors si vous regardez une guitare, vous allez voir sur le manche de la guitare, des raies qui sont perpendiculaires au manche, et qu'on appelle des frettes. Alors si vous regardez attentivement ces frettes, vous allez voir... Regardez-les dans votre tête. Vous allez voir qu'au départ, il n'y a pas de frettes, il y a un espèce de trou, bon, qui va permettre des résonances. Et puis là, les frettes commencent. Et elles ne sont pas du tout espacées de manière régulière. On aurait pu penser que simplement, lorsqu'on regarde le manche de la guitare, si vous voulez, les frettes vont être espacées également. En fait, elles ne sont pas du tout espacées également Et le mathématicien, quand il voit l'espacement des frettes, il se pose tout de suite la question "mais pourquoi est-ce qu'on n'a pas espacé les frettes de manière égale ?". Alors la réponse, c'est une réponse mathématique, mais c'est une réponse qui est merveilleuse, parce qu'elle va nous donner un spectre. Et ce spectre, après, on va devoir chercher la forme dont c'est le spectre. Alors d'abord, quel est ce spectre ? Eh bien, quand on fait de la musique, on s'aperçoit d'une chose très importante, qui est que l'oreille n'est pas du tout sensible à 1 2 3 4 5, etc. elle n'est pas sensible à additionner, elle est sensible en fait à multiplier une fréquence par quelque chose, c'est-à-dire si on prend une fréquence et qu'on la multiplie par 2, ça correspond au passage à l'octave. L'oreille est sensible au passage à l'octave, elle ressent une correspondance entre les deux fréquences, elle ressent une harmonie entre les deux fréquences. C'est la multiplication par 2. L'oreille 'est également sensible à la multiplication par 3 : quand on prend une fréquence et quand la multiplie par 3, l'oreille entend une résonance, elle entend quelque chose qui correspond. Alors maintenant, comment cela explique-t-il le spectre de la guitare ? Ca explique le spectre de la guitare parce que, lorsqu'on élève le nombre 2 à la puissance 19, on obtient pratiquement le nombre 3 élevé à la puissance 12. Ca peut pas être une égalité parce que quand on élève 2 à la puissance 19, on obtient un nombre pair. Alors que quand on élève 3 à la puissance 12, on obtient un nombre impair. Donc ça ne peut pas être une égalité. En fait, ce qui se produit, c'est que si on regarde la racine douzième de 2, c'est un nombre qui vaut 1.05 etc., et c'est pratiquement la même chose que la racine $19^{\text{ème}}$ de 3, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire qu'en musique, ce qu'on a fait, avec les frettes de la guitare, c'est qu'on s'est arrangé pour faire croire que ces deux nombres étaient égaux et le 12 en question, ce sont les 12 tonalités de la gamme bien tempérée. Et toute la musique est basée là-dessus. Et qu'est-ce que c'est que le spectre de la guitare ? Ce sont les puissances du nombre, qui est la racine douzième de 2, et qui est pratiquement la racine $19^{\text{ème}}$ de 3. Donc c'est quelque chose d'extraordinaire. Et alors, on se trouve là confronté à un problème parce qu'on a de manière évidente ce spectre. Ce spectre est devant nous et on se demande quel est l'objet donc il est le spectre. Alors quand on est mathématicien, on a un tas d'outils pour regarder ça ? Pourquoi ? Parce que quand on regarde le spectre qui correspond au tambour, ou le spectre qui correspond à une forme qui est bi-dimensionnelle, qui est de dimension 2, on s'aperçoit que sa gamme, elle croît comme une parabole. Si on regardait un objet de dimension 3, ça croîtrait avec une puissance 3, etc. Et alors, on regarde maintenant le spectre de la guitare ? *(Claquement de langue interrogatif).* Ah ! Il est extrêmement bizarre ! Parce que si on calcule sa dimension en utilisant ce que je vous ai dit avant, on obtient que c'est un objet de dimension 0, un objet de dimension 0 au sens où sa dimension est plus petite que tout nombre, non nul mais positif. Ah ? ! Alors la merveille, c'est qu'en fait, il y a un objet dont le spectre est le spectre de la guitare, mais c'est un objet de géométrie non-commutative. Donc on retombe sur ses pieds. Et donc en fait, le livre, le livre qu'on a écrit sur le Spectre d'Atacama, c'est un livre qui est entièrement basé sur le fait d'essayer de comprendre un spectre. Ce spectre a été observé par l'Observatoire d'Alma au Chili et pendant tout le livre, il y a un héros, enfin, il y en a plusieurs, il y a trois personnages essentiels, il y a un mathématicien, il y a une physicienne qui était là dans le premier livre, qui a échappé à un séjour quantique et tout le livre est basé sur le fait d'essayer de comprendre ce spectre mystérieux dans le désert d'Atacama.

Alain Prochiantz : Dans le désert d'Atacama. Donc nous allons écouter maintenant Salut d'amour, d'Elgar, joué par Itzhak Perlman et après, nous reprendrons notre discussion.

Alain Connes : Bien sûr.

(Intermède musical : Salut d'amour)

Alain Prochiantz : Après ce Salut d'amour, je rappelle que nous recevons aujourd'hui, dans le cadre de la série d'interviews sur le thème Imaginations, Alain Connes, mathématicien et professeur du Collège de France, titulaire de la chaire Analyse et géométrie. Alain, je crois que tu voulais t'exprimer sur ce morceau.

Alain Connes : Absolument. Pourquoi j'ai choisi cet air ? C'est pour illustrer exactement ce que je disais tout à l'heure, mais la différence entre le violon et la guitare. Donc la guitare, j'ai parlé du spectre de la guitare, et des frettes sur le manche de la guitare. Bon. C'est bien évident que quand on a un violon, on n'a pas de frettes, et la difficulté extraordinaire du violon vient du fait que justement, on n'a pas un spectre discret au sens mathématique, c'est-à-dire on n'a pas... Si vous voulez, un déplacement infinitésimal du doigt sur le manche du violon va faire toute la différence. Et cette interprétation de Itzhak Perlman Perlman, est merveilleuse, et c'est pour ça que je voulais qu'on l'écoute, elle est merveilleuse par l'infinie précision qu'il arrive à avoir, dans les sons qu'il produit ; mathématiquement, ce qu'on dit, si vous voulez, c'est que la différence entre la guitare et le violon, c'est que la guitare a un spectre discret, que j'ai expliqué tout à l'heure, le violon a un spectre continu. Mais il y a dans le spectre du violon la même difficulté que dans la guitare. C'est-à-dire qu'il y a une échelle exponentielle, c'est-à-dire que lorsqu'on passe d'une note à l' autre, naïvement on croirait qu'il faut le faire en espaçant les doigts d'une longueur égale, non, il faut le faire en les espaçant d'une longueur exponentielle, puisque ça correspond aux puissances du nombre d'avant.

Donc en fait, il y a toujours, toujours, entre deux violonistes, des différences infinitésimales et cette interprétation d'Itzhak Perlman est, de mon point de vue, une merveille parce qu'il y a de toutes petites nuances, infimes, que l'oreille perçoit bien sûr, et qui font que cette adaptation est merveilleuse.

Alain Prochiantz : Merci beaucoup, Alain Connes, j'aurais voulu revenir un tout petit peu sur la question du mathématicien, sur la question de la démonstration en fait, parce qu'il y a les conjectures. Comment ça vient une conjecture ? Et comment peut-on passer, après, du travail de la conjecture à la démonstration de la chose et ce sont deux façons différentes de faire des mathématiques. Ce sont deux types d'esprits mathématiques différents ?

Alain Connes : En fait, c'est toujours étonnant ce qui se produit avec les conjectures. C'est-à-dire en fait, un mathématicien découvre quelque chose de totalement nouveau. L'exemple que j'ai en tête, bien sûr, on en parle beaucoup dans le livre, c'est Riemann, au siècle dernier, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, plus précisément, c'est pas le siècle dernier, qui a fait une découverte absolument phénoménale. En fait, il a trouvé qu'on pouvait comprendre les nombres premiers, donc comprendre l'aléatoire des nombres premiers, l'aléatoire qui n'était pas du tout contrôlé, à partir d'une fonction qui s'appelle la fonction zêta (ζ) et après avoir démontré une formule, donc il donne une formule exacte si vous voulez, pour le nombre de nombres premiers plus petits que n. C'est pas tellement le fait qu'il y ait une formule exacte, parce qu'il en existe d'autres, mais c'est le fait que cette formule en fait décrit exactement le comportement des nombres premiers. Et il s'est aperçu en fait, dans cette formule qu'il a démontrée, qu'il y avait une musique des nombres premiers, c'est-à-dire il a montré qu'il y avait un terme dominant, qui est facile à comprendre parce qu'en gros, les nombres premiers deviennent de plus en plus rares, en gros, comme l'inverse du nombre de chiffres du nombre qu'on regarde.

Donc quand on regarde les nombres premiers par exemple, entre 10000 et 100000, ou bien entre 100000 et 1000000, la proportion va être divisée par 2. En fait, cette chose-là, si vous voulez, ce phénomène-là, conduit à une fonction qu'on appelle le logarithme intégral, qui est effectivement le premier terme dans la formule de Riemann. Mais après, l'aléa des nombres premiers se manifeste justement par un spectre. Et se manifeste justement par ce qu'on pourrait appeler la musique des nombres premiers.

Alors en fait, quand Riemann a trouvé ça, il s'est aperçu en faisant des calculs, il a fait des calculs, il s'est aperçu que les zéros de sa fonction, qui gouverne justement le spectre, avaient l'air d'être tous sur une certaine droite. Et le fait qu'ils soient sur cette droite joue un rôle essentiel, parce que le fait qu'ils soient sur sa droite dit que la formule qu'il a donnée est une formule extrêmement précise. S'il y en avait qui étaient en dehors de cette droite, il y aurait une espèce de chaos qui s'introduit, ça ne serait pas du tout quelque chose d'agréable. Et il a conjecturé que tous ses zéros étaient là. Cette conjecture, elle a été faite donc, en gros dans les années 1850-1860, donc ça fait un temps considérable qu'elle a été faite, mais, je pense que lui était pratiquement sûr que c'était vrai, et en gros, il voulait continuer et faire une conjecture, c'est être pratiquement sûr qu'un résultat est vrai, et aller au-delà.

Alors maintenant, cette conjecture de Riemann, elle a été vérifiée avec l'ordinateur, parce qu'avec l'ordinateur, on peut aller très très loin ; en fait, on a une manière de calculer, qui est très très efficace pour cette fonction, et on l'a vérifiée pour des milliards de zéros ; donc au niveau vérification, on a une indication très forte. On ne sait pas si elle est vraie parce qu'il y a d'autres conjectures qui avaient l'air d'être vraies comme ça, mais qui ne sont pas vraies pour des nombres très très grands, donc on ne sait pas si elle est vraie mais la manière dont il l'a trouvée, c'est qu'il n'avait pas envie de s'arrêter là, si vous voulez, et il avait envie d'aller plus loin.

Et bon après lui, il y a eu un très grand nombre de mathématiciens qui s'y sont intéressés, il y a eu par exemple des mathématiciens qui, lorsqu'ils prenaient l'avion ou etc., envoyaient une lettre en disant "j'ai démontré etc." en pensant que si l'avion se cassait la gueule..., à ce moment-là... *(rires)*. Voilà. Donc j'ai toutes sortes d'histoires, autour de cette conjecture. Mais disons que, ce qu'elle a d'extraordinaire, ce qu'une conjecture comme celle-là a d'extraordinaire, c'est qu'en fait secrètement, elle a motivé la plupart des développements les plus intéressants en mathématiques au XX$^{\text{ème}}$ siècle. C'est-à-dire que si on connaît suffisamment de choses en mathématiques, on s'aperçoit que, quantité de développements qui n'ont a priori rien à voir avec la conjecture, en fait étaient motivés par celle-là ; un exemple typique, c'est toute la théorie des fonctions presque périodiques de Bohr, le footballeur, le frère du physicien, donc je veux dire, c'est étonnant, c'est étonnant. Et à ce propos-là, et ça, on l'explique en détail dans le livre, ce qu'il est important de savoir, c'est qu'un mathématicien devant un problème, a toujours une technique qui fait qu'il n'est pas désarmé et quelle est cette technique ? C'est une technique très intéressante qui je pense ne s'applique pas seulement aux mathématiques, elle s'applique, je pense, en fait à toutes sortes de domaines ; et c'est pour ça que je veux l'expliquer.

C'est une technique qui consiste à dire, face à un problème fixé, par exemple la conjecture de Riemann, au lieu d'être là à regarder le problème et puis d'être incapable de faire quoi que ce soit, non. Ce qu'on va faire, c'est la première chose qu'on va faire, c'est quelque chose de criminel d'une certaine manière. C'est-à-dire, on va prendre le problème et on va le généraliser. Alors ça paraît complètement idiot. Ca paraît complètement idiot de remplacer un problème particulier par un problème beaucoup plus général. Et l'exemple qu'on prend dans le livre, c'est l'exemple des tablettes de chocolat. C'est-à-dire qu'on est là, on vous regarde, et puis on vous demande "quelle est la manière optimale de casser une tablette de chocolat de 6 x 8 par exemple en petits carreaux ?". Et alors, l'intérêt de généraliser, c'est qu'on va maintenant pouvoir spécialiser le problème généralisé à des cas beaucoup plus simples. Ca, c'est formidable parce que si vous êtes confronté au problème d'une tablette de 6 x 8, vous êtes complètement coincé parce que vous vous dites "mais c'est trop compliqué, j'y arriverai jamais." Par contre, si vous remplacez 6 et 8 par l et m, ça paraît bizarre. Mais maintenant, vous prenez $l = 1,\ m = 3$, vous avez une tablette de trois carreaux, trois carreaux. Bon ben pour la casser, c'est pas très difficile. Donc en fait, en mathématiques, on fait ça et on a fait ça pour l'hypothèse de Riemann, et ça a été quelque chose d'extrêmement fructueux parce que c'est ça qui a permis à André Weil justement, de démontrer une généralisation qui avait été faite et de démontrer que c'était vrai dans ce cas-là. Donc ça donne confiance et en général, justement, ça permet de donner un point d'ancrage, pour ce dont je parlais tout à l'heure, c'est-à-dire l'analogie. C'est-à-dire qu'une fois qu'on a démontré un cas particulier du problème généralisé, on a un outil extraordinaire qui est l'analogie. C'est-à-dire qu'on imagine que la démonstration qu'on a fait dans le cas particulier va pouvoir se transplanter, je ne dis pas se transposer, je dis se transplanter, comme je le disais tout à l'heure, avec les petites fleurs qui sont très fragiles. Donc elle va pouvoir se transplanter au cas qui nous intéresse vraiment. Donc le pouvoir créateur des conjectures n'est pas du tout négligeable, c'est une espèce de manière d'avoir vu plus loin que les autres, et après bon ben, après, il faut rentrer dans le dur, il faut essayer de démontrer la conjecture.

Alain Prochiantz : Mais les conjectures sont toujours démontrées ? Ou bien il y en a qui sont fausses ?

Alain Connes : Oui, bien sûr, il y en a qui sont fausses.

Alain Prochiantz : Et si on travaille sur une conjecture qui est fausse, et si on tire des résultats intéressants, et qu'on démontre qu'elle est fausse...

Alain Connes : En fait, ce qui se produit en mathématiques, c'est qu'il y a deux aspects. Il y a l'aspect il y a un problème, est-ce que ce problème est résolu ou non, bon... Ca, c'est un aspect des mathématiques. Mais il y a un aspect qui est largement aussi important, c'est l'aspect d'édifier des théories. Et par exemple Grothendieck était très connu justement pour lorsqu'on lui posait une question, etc. il essayait toujours de formuler la question dans le bon cadre, et ensuite d'édifier une théorie qui fasse en sorte que la question se résolve par elle-même. C'est Serre qui a employé la meilleure métaphore par rapport à ça : il disait que quand on lui posait un problème comme ça, il essayait de le laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales. Donc ça dit bien ce que ça veut dire. Et donc en fait, il y a l'impulsion qui est donnée par une question comme une conjecture etc. Très souvent justement, l'aspect le plus créateur, le plus positif d'une conjecture, c'est l'édification des théories qui vont permettre soit de la résoudre, soit de dire qu'elle est fausse. Ca peut très bien arriver. Et d'ailleurs, ce qu'on veut, c'est savoir la vérité. On ne veut pas, nécessairement, démontrer. En fait d'ailleurs, dans le livre, on raconte une histoire que je ne veux pas louper parce que le livre, Le Spectre d'Atacama, se termine par cette histoire ; cette histoire, c'est l'histoire d'un mathématicien vieillissant, bon, pensez à qui vous voudrez, qui s'est attaqué pendant des années à une conjecture bon, et qui finalement décide, parce qu'il voit qu'il n'a plus beaucoup de temps devant lui, de vendre son âme au diable, pour connaître la réponse. On dit au départ, pour connaître la réponse.

Alain Prochiantz : C'est une histoire connue, ça.

Alain Connes : Euh, pas tellement celle que l'on raconte...

Alain Prochiantz : L'histoire de vendre son âme au Diable, en tout cas.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr. Vendre son âme au Diable, c'est un phénomène connu, mais dans ce cas-là, ce qui se produit, c'est assez étonnant, parce qu'il finit par avoir rendez-vous avec le Diable et d'ailleurs le Diable est incarné par le Machine Learning. Hein ! *(rires)* Donc il finit par avoir un rendez-vous avec le diable et puis, lorsqu'il rencontre le Diable, il le rencontre dans une banlieue mal famée de Naples et le diable commence par lui faire signer les papiers comme quoi il a vendu son âme au diable et le mathématicien ne se rend pas compte que, du fait qu'il a signé les papiers et qu'il a donné son âme au Diable, il va changer de comportement. Donc le Diable lui dit "mais bon quel est votre souhait maintenant ? Il faut que vous donniez votre souhait..." Et le mathématicien dit "je souhaite que l'hypothèse de Riemann soit fausse" *(rires)* Et c'est seulement quand il rentre chez lui qu'il réalise qu'en fait, ce qu'il vient de dire, c'est parce qu'il avait vendu son âme et que donc, au lieu de souhaiter qu'elle soit vraie, etc., il a souhaité qu'elle soit fausse.

Alain Prochiantz : Cher Alain, je pense que nous allons bientôt clôre cet entretien qui était vraiment passionnant ; j'aimerais te poser une question : "est-ce que les mathématiques sont pour toi une langue naturelle ?"

Alain Connes : Alors je pense que non seulement, c'est une langue naturelle, mais je pense que c'est la seule langue qui nous permettra de communiquer avec une intelligence extraterrestre. Et ça rejoint le livre mais je suis désolé de le mentionner trop, mais eh bien, ce qui se produit dans le livre justement, c'est que ce message qui est reçu et qui est le spectre d'Atacama, il est reçu en alternance avec les nombres premiers, et une intelligence terrestre, un mathématicien, ne peut pas manquer de reconnaître une intelligence extérieure à nous, et qui se manifeste par cette compréhension qui est extraordinaire, qui a été faite par Riemann au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, donc ce que je prétends, ...et il y a un langage qui a été inventé qui s'appelle le Lincos..., mais ce que je prétends, c'est qu'on pourra communiquer justement avec les extraterrestres grâce au langage mathématique, pourquoi ? Parce que c'est le seul langage qui n'est pas auto-référentiel. C'est le seul langage qui n'est pas auto-référentiel, c'est-à-dire que, contrairement à un dictionnaire qui, quand on cherche la définition d'un mot fait référence à un autre mot, qui lui-même fait référence à un autre mot etc. etc., n'est pas auto-référentiel.

Alain Prochiantz : Mais ce langage est composé, donc, pour revenir au point de départ, d'images mentales.

Alain Connes : Euh non, ce langage est composé, au départ, par exemple de signaux, qu'on envoie de manière spectrale, qu'on envoie de manière répétitive...

Alain Prochiantz : Mais par exemple toi, quand tu penses ?...

Alain Connes : Ah quand je pense, bien sûr, je pense à travers des images mentales, bien entendu.

Alain Prochiantz : Tu ne penses jamais en langue naturelle ?...

Alain Connes : Non, non, non. La langue naturelle, je veux dire, c'est une langue qui après, péniblement, essaie de transcrire nos images mentales, nos manières de penser, etc., mais je dis "péniblement" parce qu'en général, je n'arrive pas à transmettre ça de manière vraiment satisfaisante, j'essaie de manière orale etc., il y a des gens qui sont vraiment forts pour le faire, et je pense en particulier à Grothendieck. Grothendieck était capable lorsque, ce dont on parlait tout à l'heure, c'est-à-dire à propos d'une idée qui n'était pas encore mûre, il était capable de se mettre à écrire sur elle et ça,...

Alain Prochiantz : Ca la faisait mûrir ?...

Alain Connes : Ca la faisait mûrir, mais je pense que ça n'est pas donné à tout le monde d'être capable d'écrire sur une idée qui n'est pas encore mûre et de la faire mûrir, je veux dire.

Alain Prochiantz : De la sortir de son cocon...

Alain Connes : De la sortir de son écrin, de son cocon. Et il y a une autre chose que je voulais dire quand même, avant qu'on termine, c'est, je ne sais pas si ça a été mentionné dans un autre dialogue sur l'imagination, mais il y a un exemple extraordinaire, c'est l'exemple de Eureka d'Edgar Poe. Donc cet exemple, c'est quand même merveilleux, de savoir qu'un poète a pu, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, avoir l'intuition pas seulement du Big Bang, mais du fait que l'univers pouvait ensuite avoir un Big Crunch, etc., et qu'il a pu être moqué, il a été moqué pendant plus d'un siècle, jusqu'à ce que finalement, on s'aperçoive qu'en fait, il avait raison, mais il avait raison par une intuition purement géniale, et purement poétique.

Alain Prochiantz : Voilà, eh bien, écoutez, je pense que c'est la meilleure façon de terminer cet entretien avec, je le rappelle, Alain Connes, titulaire de la chaire Analyse et géométrie du Collège de France. Merci Alain, d'être venu aujourd'hui et à bientôt.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273 (15 novembre 1971) Série A - 900

Analyse fonctionnelle

Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann.

Note[1] de M. **Alain Connes**, présentée par M. Gaston Julia.

À toute algèbre de von Neumann M de genre dénombrable, nous associons un invariant $S(M)$, sous-ensemble fermé de R_+, défini comme intersection des spectres des opérateurs modulaires associés par la théorie de Tomita aux états normaux et fidèles sur M.
Si M est semi-finie, $S(M) \subset \{0,1\}$.
Si M_λ désigne les facteurs étudiés par Powers, avec $0 < \lambda < 1/2$ nous montrons que $S(M_\lambda) = \{u^n, n \in Z\}$, $u = (1-2\lambda)/(1+2\lambda)$, ce qui donne une nouvelle démonstration du non-isomorphisme des M_λ.

M désigne une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, α un vecteur totalisateur et séparateur pour M ; M' le commutant de M.

L'opérateur qui à $x\alpha$, où $x \in M$ associe $x^*\alpha$ (resp. qui à $y\alpha$, $y \in M'$ associe $y^*\alpha$) est préfermé [3] ; nous notons S_α (resp. F_α) sa fermeture, $S_\alpha = J_\alpha \Delta_\alpha^{1/2}$ la décomposition de S_α étudiée dans [3], $\Delta_\alpha = F_\alpha S_\alpha$ est un opérateur positif.

Soit φ un état normal et fidèle sur M, soit $\mathfrak{H}_\varphi, \Pi_\varphi, \xi_\varphi$ la construction de Gelfand-Segal relative à φ ; nous notons Δ_φ l'opérateur modulaire relatif au triplet $\mathfrak{H}_\varphi, \Pi_\varphi(M), \xi_\varphi$.

Soit M une algèbre de von Neumann de genre dénombrable, nous posons $S(M) = \bigcap$ Spectre Δ_φ, φ état normal et fidèle. $S(M)$ est un fermé de R_+, et $t \neq 0, t \in S(M)$ entraîne $t^{-1} \in S(M)$, car $J_\varphi \Delta_\varphi J_\varphi = \Delta_\varphi^{-1}$; de plus, $S(M_1 \times M_2) = S(M_1) \cup S(M_2)$, où $M_1 \times M_2$ désigne un produit d'algèbres de von Neumann.

Théorème 1. *Soit M une algèbre de von Neumann opérant dans $\mathfrak{H}$, si l'ensemble $\mathfrak{G}$ des vecteurs totalisateurs et séparateurs de norme un est non vide, l'ensemble $S(M)$ est l'ensemble des $t \geq 0$, tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in \mathfrak{G}$, il existe $x \in M, y \in M'$ tels que $\|x\,\alpha\| = 1, \|t^{1/2}\,x\,\alpha - y\,\alpha\| < \varepsilon, \|x^*\,\alpha - t^{1/2}\,y^*\,\alpha\| < \varepsilon$.*

Il résulte des lemmes suivants :

Lemme 2. *Soit φ normal fidèle sur M, il existe $\alpha \in \mathfrak{G}$, et U isométrie de $\mathfrak{H}_\varphi$ sur $\mathfrak{H}$ tels que $U\xi_\varphi = \alpha, U\Delta_\varphi U^{-1} = \Delta_\alpha$.*

[1] Séance du 3 novembre 1971.

Comme $\mathfrak{G}$ est non vide, l'isomorphisme Π_φ est spatial [1], ainsi $\Pi_\varphi(x) = U^{-1}x\,U$, posons $\alpha = U\xi_\varphi$; on vérifie que $US_\varphi U^{-1}$ est la fermeture de l'opérateur

$$\{\beta, U^{-1}\beta = \Pi_\varphi(x)\xi_\varphi \text{ pour un } x \in M, US_\varphi U^{-1}\beta = U\Pi_\varphi(x^*)\xi_\varphi\},$$

d'où $S_\alpha = US_\varphi U^{-1}$ et $\Delta_\alpha = U\Delta_\varphi U^{-1}$.

Lemme 3. *Soit* $t \geq 0, \varepsilon > 0, \alpha \in \mathfrak{G}$ *:*
(a) Distance($t^{1/2}$, Spectre $\Delta_\alpha^{1/2}$) $< \varepsilon$ *si et seulement s'il existe* $x \in M$,

$$\|x\ \alpha\| = 1, \qquad \left\|\left(\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) x\ \alpha\right\| < \varepsilon\ \ ;$$

(b) $x \in M, \|(\Delta_\alpha^{1/2} - t^{1/2})x\alpha\| < \varepsilon$ *entraîne l'existence de* $y \in M'$ *tel que*

$$\|t^{\frac{1}{2}}x\ \alpha - y\ \alpha\| < \varepsilon, \qquad \|x^*\alpha - t^{\frac{1}{2}}y^*\alpha\| < \varepsilon\ \ ;$$

(c) $x \in M, y \in M', \|t^{1/2}x\ \alpha - y\ \alpha\| < \varepsilon, \|x^*\alpha - t^{1/2}y^*\alpha\| < \varepsilon$ *entraîne*

$$\left\|(\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})x\ \alpha\right\| < 2\ \varepsilon$$

(a) Résulte de la densité de $M\alpha$ dans le domaine de $\Delta_\alpha^{1/2}$.

(b) Soit $y = J_\alpha x^* J_\alpha$; on a $y \in M', y\ \alpha = \Delta^{1/2}x\ \alpha$; de plus,

$$\left\|x^*\alpha - t^{\frac{1}{2}}y^*\alpha\right\| = \left\|J_\alpha(x^*\alpha - t^{\frac{1}{2}}y^*\alpha)\right\| \quad \text{et} \quad J_\alpha y^*\alpha = x\alpha.$$

(c) Soit $\beta = x\ \alpha, \gamma = \Delta_\alpha^{-1/2}\,y\,\alpha$; γ et β sont dans le domaine de $\Delta_\alpha^{1/2}$ et $\|t^{1/2}\beta - \Delta_\alpha^{1/2}\gamma\| < \varepsilon, \|\Delta_\alpha^{1/2}\beta - t^{1/2}\gamma\| < \varepsilon$, soit, comme $\Delta_\alpha^{1/2}(t^{1/2} + \Delta_\alpha^{1/2})^{-1}$ et $t^{1/2}(t^{1/2} + \Delta_\alpha^{1/2})^{-1}$ sont des contractions

$$\|t(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}\beta - t^{\frac{1}{2}}\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}\gamma\| < \varepsilon,$$
$$\|\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}\beta - t^{\frac{1}{2}}\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}\gamma\| < \varepsilon.$$

La conclusion résulte de $(\Delta_\alpha^{1/2} - t^{1/2}) = (\Delta_\alpha - t)(\Delta_\alpha^{1/2} + t^{1/2})^{-1}$.

Dans la suite, $\mathfrak{M}$ désigne l'algèbre des matrices d'ordre 2, H l'espace de Hilbert obtenu en posant

$$(\alpha, \beta) = \text{Trace}\ \beta^*\ \alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \quad \beta \in \mathfrak{M}.$$

On pose

$$\eta = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}\ \ ;\ \ \text{on a} \ \ \|\eta\| = 1.$$

$\mathfrak{H}$ désigne l'espace de Hilbert produit tensoriel d'une infinité dénombrable de couples $(H, \eta)_n$, $n \in N$.

L'on note Π_n (resp. Π'_n) la représentation (resp. antireprésentation) de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{H}$ qui à x associe $\Pi_n(x)$ [resp. $\Pi'_n(x)$] telle que

$$\Pi_n(x)(\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n \otimes \alpha_{n+1} \otimes ...) = \alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_{n-1} \otimes x\alpha_n \otimes \alpha_{n+1} \otimes ...$$

(resp. $\alpha_n\, x$ au lieu de $x\, \alpha_n$).

M_λ désigne l'algèbre de von Neumann engendrée par les $\Pi_n(\mathfrak{M})$.

Théorème 4. *(a) Si M est de genre dénombrable, semi-finie, alors $S(M) \subset \{0, 1\}$.*
(b) $S(M_\lambda) = \{u^n, n \in Z\}, u = (1 - 2\lambda)/(1 + 2\lambda)$.

(a) Soit τ une trace normale fidèle semi-finie sur $M, \mathfrak{H}_\tau$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt, Π (resp. Π') la représentation (resp. antireprésentation) de M dans $\mathfrak{H}_\tau$ par multiplication à gauche (resp. à droite).

Soit $h \in \mathfrak{H}_\tau$ positif, non singulier, Δ_h l'opérateur modulaire relatif à $(\mathfrak{H}_\tau, \Pi(M), h)$.

Lemme 5. *Soit $\nu \in R$, alors $\Delta_h^{i\nu} = \Pi(h^{2i\nu})\Pi'(h^{-2i\nu})$.*

D'après [3], le groupe modulaire σ_ν est

$$\sigma_\nu(x) = h^{2i\nu} x\ h^{-2i\nu}, \quad \text{d'où} \quad \Delta_h^{i\nu} xh = h^{2i\nu} xhh^{-2i\nu}.$$

Comme $\Pi(M)$ et $\Pi'(M)$ commutent l'on a Spectre $\Delta_h^{1/2}$ inclus dans (Spectre h).(Spectre h^{-1}).

L'assertion (a) résulte de l'existence de h_1 (resp. h_2) positif non singulier, élément de $\mathfrak{H}_\tau$ dont le spectre ne contient que des $(1/2)^k, k \in N$ [resp. des $(1/3)^k, k \in N$].

(b) Soit δ l'opérateur modulaire relatif au triplet $(H, \mathfrak{M}, \eta)$; soit

$$z = \begin{bmatrix} 0 & (\frac{1}{2} + \lambda)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

on a $\|z\, \eta\| = 1$, $u^{1/2}\, z\, \eta = \eta\, z$ et $u^{1/2}\, \eta\, z^* = z^*\, \eta$; d'après les lemmes 3, 5, Spectre $\delta = \{u, 1, u^{-1}\}$.

Lemme 6. *Le vecteur $\alpha_0 = \eta \otimes \eta \otimes ... \otimes \eta \otimes ...$ est séparateur et totalisateur pour M_λ dans $\mathfrak{H}$,* Spectre$\Delta_{\alpha_0} = \{u^n, n \in Z\}$.

L'espace vectoriel E engendré par les vecteurs de la forme

$$x_1\,\eta\otimes ... \otimes x_n\,\eta\otimes\eta\otimes ...\ (\text{resp. } \eta\,y_1\otimes ... \otimes\eta\,y_n\otimes\eta\otimes ...),$$

où $x_i \in \mathfrak{M}$ (resp. $y_j \in \mathfrak{M}$) est dense dans $\mathfrak{H}$.

S_{α_0} (resp. F_{α_0}) est une extension de l'opérateur qui à l'élément ci-dessus de E associe $x_1^*\,\eta\otimes ... \otimes x_n^*\,\eta\otimes\eta\otimes ...$ (resp. $\eta\,y_j^*$) ; ainsi $\Delta_{\alpha_0} = F_{\alpha_0} S_{\alpha_0}$ est une extension de l'opérateur produit tensoriel algébrique de δ, noté $\otimes\,\delta$, qui a un sens car $\delta(\eta) = \eta$.

Comme $(1+\Delta_{\alpha_0})E = E$ est dense dans $\mathfrak{H}$, Δ_{α_0} est la fermeture de $\otimes\,\delta$, d'où la conclusion.

Lemme 7. *Soit* $k \in N, \varepsilon > 0, \alpha \in \mathfrak{H}$, $\|\alpha\| = 1$; *il existe* $x \in M_\lambda, y \in M'_\lambda$ *tels que*

$$\|x\alpha\| > 1-\varepsilon\ ;\quad \text{et}\quad \left\|u^{\frac{k}{2}}x\alpha - y\alpha\right\| < \varepsilon,\quad \left\|x^*\alpha - u^{\frac{k}{2}}y^*\alpha\right\| < \varepsilon.$$

Soit E_n le sous-espace de $\mathfrak{H}$ engendré par les vecteurs

$$\alpha_1\otimes ... \otimes\alpha_n\otimes\eta\otimes ...,\qquad \text{où } \alpha_i \in H\qquad (i = 1, 2, ..., n)\ ;$$

comme $E = \bigcup\limits_1^\infty E_n$ il existe $n \in N$ et $\alpha' \in E_n$ tels que

$$\|\alpha'\| = 1\qquad \text{et}\qquad \|\alpha' - \alpha\| < \varepsilon\ 2^{-\frac{k}{2}}\left(u^{\frac{k}{2}} + 1\right)^{-1}.$$

Soit $x = \Pi_{n+1}(z)...\Pi_{n+k}(z), y = \Pi'_{n+1}(z)...\Pi'_{n+k}(z)$; on a

$$u^{\frac{k}{2}}x\ \alpha' = y\ \alpha',\qquad x^*\alpha' = u^{\frac{k}{2}}y^*\alpha',\qquad \text{donc}\quad \|x\alpha\| > 1-\varepsilon,$$

$$\left\|u^{\frac{k}{2}}x\ \alpha - y\ \alpha\right\| < \varepsilon,\quad \left\|u^{\frac{k}{2}}y^*\alpha - x^*\alpha\right\| < \varepsilon,$$

car

$$|x| \leq |z|^k\qquad \text{et}\qquad |z| = \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^{-\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}}.$$

Référence

[1] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 2e édition, 1969.

[2] J. T. Schwartz, *Recent progress in the structure theory of factors* (Proceedings of a Symposium, Ed. by C. O. Wilde, New York, Academic Press, 1970).

[3] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Springer, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, no 128.

1, avenue Mathilde,
95-Saint-Gratien,
Val-d'Oise.

ANALYSE FONCTIONNELLE. - *Flots des poids sur les facteurs de type III.*

Note [1] de MM. **Alain Connes** et **M. Takesaki**,
transmise par M. Laurent Schwartz.

L'étude des poids à centralisateur proprement infini conduit à associer à tout facteur une action ergodique de R_+^* sur un espace mesurable. Aux ensembles mesurables correspondent les classes de poids à équivalence unitaire près. L'action de R_+^* correspond à l'opération $\varphi \to \lambda\varphi, \lambda > 0$. Si M n'est pas de type III_0, le flot est transitif et égal à R_+^* agissant sur $R_+^*/R_+^* \cap S(M)$. Sinon le sous-groupe virtuel $S_V(M)$ de R_+^* "noyau" de l'action de R_+^* généralise $S(M)$ et est relié aux descriptions connues des facteurs de type III_0.

La définition du flot des poids de M est fonctorielle, ce qui permet d'associer à M un homomorphisme γ_M de $\operatorname{Aut} M$ dans le groupe des automorphismes du flot. Quand M est un facteur de Krieger, cela permet de calculer entièrement $\operatorname{Out}_0 M = \operatorname{Aut} M/\overline{\operatorname{Int} M}$. L'homomorphisme modulaire δ_M se prolonge au groupe dual $S_V(M)^\wedge$ de $S_V(M)$ et permet d'obtenir $\operatorname{Out} M$ comme extension de $S_V(M)^\wedge$ par un groupe d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann de type II_∞.

1. Comparaison des poids de multiplicité infinie. Un poids de multiplicité infinie sur une algèbre de von Neumann M est par définition un poids normal fidèle semi-fini φ dont le centralisateur M_φ est proprement infini.

Définition 1. *Soient φ_1, φ_2 des poids de multiplicité infinie sur M ; on écrit :*

(a) $\varphi_1 \sim \varphi_2$ quand il existe un unitaire $u \in M$ tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(uxu^*), \forall x \in M_+$.

(b) $\varphi_1 \prec \varphi_2$ quand il existe une isométrie $w \in M, ww^* \in M_{\varphi_2}$ avec $\varphi_1(x) = \varphi_2(wxw^*)$, $\forall x \in M_+$.

On montre que $\sim$ est la relation d'équivalence correspondant à la relation de préordre $\prec$.

Théorème 2. *Soit M un facteur proprement infini de genre dénombrable. Il existe alors un couple unique (p_M, P_M) tel que :*

(a) *P_M soit une algèbre de von Neumann abélienne ;*

(b) *p_M soit une surjection de l'ensemble des poids de multiplicité infinie de M sur l'ensemble des projecteurs non nuls de genre dénombrable de P_M ;*

(c) on ait $(p_M(\varphi_1) \leq (p_M(\varphi_2)) \iff (\varphi_1 \prec \varphi_2)$, *pour tous φ_1, φ_2.*

[1] Séance du 11 février 1974.

Théorème 3. *Soit M un facteur à prédual séparable, proprement infini et (p_M, P_M) comme dans le théorème 2 :*

(a) *Pour tout $\lambda > 0$, il existe un automorphisme unique Z_λ tel que $Z_\lambda p_M(\varphi) = p_M(\lambda\varphi), \forall\varphi$ de multiplicité infinie.*

(b) *Il existe un projecteur unique $d_M \neq 0$, de genre dénombrable tel que $Z_\lambda d_M = d_M, \forall\lambda > 0$.*

On montre que d_M est le plus grand projecteur d de P_M tel que l'application $\lambda \to Z_\lambda x$ soit continue fortement pour tout $x \in (P_M)_d$.

Définition 4. *Soit M une algèbre de von Neumann proprement infinie à prédual séparable. On appelle poids dominant sur M tout poids φ de multiplicité infinie tel que $\varphi \sim \lambda\varphi, \forall\lambda > 0$.*

Le théorème 3 montre l'existence et l'unicité (modulo $\sim$) du poids dominant.

Définition 5. *Soit M un facteur proprement infini à prédual séparable, on appelle flot des poids de M la restriction à l'algèbre de von Neumann $(P_M)_{d_M}$ de l'action Z de R_+^* sur P_M.*

L'action Z ainsi restreinte est continue et ergodique. Dans la terminologie de G. Mackey [2], à toute action ergodique d'un groupe localement compact G correspond un sous-groupe virtuel de G, noyau de cette action. Nous notons $S_V(M)$ le sous-groupe virtuel de R_+^* associé au flot des poids de M.

Théorème 6. *Soit M comme dans le théorème 5, on a*

$$\begin{aligned}(M \text{ n'est pas de type } \mathrm{III}_0) &\iff (S_V(M) = S(M) \cap R_+^*) \\ &\iff (S_V(M) \text{ est un sous groupe ordinaire de } R_+^*).\end{aligned}$$

Ainsi $S_V(M)$ coïncide avec $S(M) \cap R_+^*$ sauf dans le cas III_0 où il apparaît comme le spectre modulaire virtuel de M.

Théorème 7. *Soient N une algèbre de von Neumann, τ une trace normale fidèle semi-finie sur N, G un groupe localement compact, U un homomorphisme continu de G dans $\mathrm{Aut}\, N$ tel que l'action $\overline{U}$ correspondante de G sur le centre de N soit libre et ergodique.*

Soient H le sous-groupe virtuel de G associé à l'action $\overline{U}$ et ρ l'homomorphisme de H dans R_+^* correspondant au cocycle

$$s \to \rho_s = \frac{d\ \tau\ U_s}{d\tau} \Delta(s),$$

où Δ est la fonction modulaire de G.

Alors le produit croisé de N par G via U est un facteur M tel que $S_V(M) = \overline{\rho(H)}$ au sens de [2], p. 194.

Corollaire 8. *Soient M un facteur de type* III *à prédual séparable, N une algèbre de von Neumann de type* II_∞*, τ une trace normale fidèle semi-finie sur N, et $s \to \theta_s$, un groupe à un paramètre d'automorphismes de N tels que $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau, \forall s \in R$ et que M soit le produit croisé de N par R via θ [cf. [3]].*

Alors le flot des poids de M est la restriction au centre de N de l'action $\lambda \to \theta_{-\mathrm{Log}\ \lambda}, \lambda \in R_+^*$.

Corollaire 9. *Soient M un facteur de type* III_0*, N une algèbre de von Neumann de type* II_∞*, τ une trace normale fidèle semi-finie sur N et $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ tel que $\tau \circ \theta = \tau(\rho\ .), \rho \geq \lambda_0 > 1$ et que M soit produit croisé de N par θ [cf. [1]].*

Alors le flot des poids de M est le flot construit sur la restriction de θ au centre de N, sous la fonction ρ.

Corollaire 10. *Soient G un groupe virtuel principal [[2], p. 204] et Δ la fonction modulaire sur G [homomorphisme de G dans R_+^* défini dans [2], p.198]. Soit M le facteur engendré par la représentation régulière de G, alors :*

$$S_V(M) = \overline{\Delta(G)}.$$

De plus les algèbres N des descriptions [1] et [3] de M comme produit croisé se calculent à partir de la représentation régulière du noyau [au sens de [2], p.196] de Δ.

Corollaire 11. *Soient M_1 et M_2 deux facteurs proprement infinis à prédual séparable alors :*

$$S_V(M_1 \otimes M_2) = \overline{S_V(M_1)S_V(M_2)}.$$

En particulier $S(M_1 \otimes M_2) \supset \overline{S(M_1)S(M_2)}$.

2. Régularisation des poids de multiplicité infinie. Ce procédé permet de relier tout poids de multiplicité infinie aux poids ψ tels que $p_M(\psi) \leq d_M$.

Théorème 12. *Soient M, p_M, P_M, d_M comme dans le théorème 3. Pour tout poids φ de multiplicité infinie et tout $\varepsilon > 0$ il existe $h \in M_\varphi$, $1-\varepsilon \leq h \leq 1+\varepsilon$ tel que $p_M(\psi) \leq d_M$ où $\psi = \varphi(h\ .)$.*

Il en résulte que si M est de type III_λ, $\lambda \neq 0$ et si φ_1 et φ_2 sont deux poids de multiplicités infinies, il existe un unitaire $u \in M$ tel que $u\,\mathscr{M}_{\varphi_1} u^* = \mathscr{M}_{\varphi_2}$ où $\mathscr{M}_{\varphi_j}$ désigne le domaine de φ_j.

3. Homomorphisme fondamental pour les facteurs de type III. Soient M, p_M, d_M, Z, comme dans le théorème 3. Pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}\, M$ il existe un $\bar{\alpha} \in \mathrm{Aut}\, P_M$ unique tel que $p_M(\varphi \circ \alpha^{-1}) = \bar{\alpha}\, p_M(\varphi)$ pour tout φ de multiplicité infinie.

Définition 13. *L'homomorphisme fondamental γ_M est l'homomorphisme qui à tout $\alpha \in \mathrm{Aut}\, M$ associe la restriction $\gamma_M(\alpha)$ de $\bar{\alpha}$ à $(P_M)_{d_M}$.*

Comme $\gamma_M(\alpha)$ commute avec $Z_\lambda, \forall \lambda \in R_+^*$ l'image de γ_M est contenue dans le groupe des automorphismes du flot de M. Ce groupe est égal à $R_+^*/S(M) \cap R_+^*$ dès que $S_V(M) = S(M) \cap R_+^*$.

On montre, quand M est de type II_∞ que la définition ci-dessus coïncide avec [1], p. 224.

Théorème 14. *Soient M et γ_M comme ci-dessus :*

(a) *L'homomorphisme γ_M est continu quand on munit* $\mathrm{Aut}\, M$ *de la topologie de la convergence simple normique dans M_* et* Aut *(flot des poids de M) de la convergence simple forte.*

(b) *On a $\gamma_M(\alpha) = 1, \forall \alpha \in \overline{\mathrm{Int}\, M}$.*

Il en résulte que γ_M définit par passage au quotient un homomorphisme de $\mathrm{Out}_0\, M = \mathrm{Aut}\, M / \overline{\mathrm{Int}\, M}$ dans Aut (flot des poids de M).

Théorème 15. *Soit M un facteur de Krieger* [2]*, continu et infini. Alors γ_M définit par passage au quotient un isomorphisme de* $\mathrm{Out}_0\, M$ *sur* Aut *(flot des poids de M).*

4. Prolongement de l'homomorphisme modulaire. Soient M un facteur de type III, N, τ et $(\theta_s)_{s \in R}$ comme dans le corollaire 8 ci-dessus. Soit $S_V(M)^\wedge$ le groupe des homomorphismes de $S_V(M)$ dans $T_1 = \{z \in C, |z| = 1\}$. En identifiant (corollaire 8) le flot des poids de M au flot $\lambda \to \theta_{-\mathrm{Log}\ \lambda}$/Centre de N on peut associer à tout élément c de $S_V(M)^\wedge$ une classe de 1-cocycles : tout c^0 dans cette classe est une application de R_+^* dans les unitaires du centre de N avec $c^0_{\lambda_1} \theta_{-\mathrm{Log}\ \lambda_1}(c^0_{\lambda_2}) = c^0_{\lambda_1 \lambda_2}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$. Pour tout $s \in R$, soit U_s l'unitaire du produit croisé M de N par R canoniquement associé. Il existe alors un automorphisme $\alpha = \alpha_{c_0}$ unique de M tel que $\alpha(x) = x, \forall x \in N$ et $\alpha(U_s) = c^0_{e^{-s}} U_s, \forall s \in R$.

[2] i.e. M est produit croisé d'une algèbre de von Neumann abélienne par un automorphisme.

Théorème 16. *Soient* $M, N, \tau, (\theta_s)_{s\in R}$ *comme ci-dessus.*

(a) *Pour tout* $c \in S_V(M)^\wedge$, *la classe* $\overline{\delta}_M(c)$ *de* α_{c_0} *dans* $\operatorname{Out} M = \operatorname{Aut} M/\operatorname{Int} M$ *ne dépend ni du choix du représentant* c_0 *de* c *ni du choix de* N, τ, θ *vérifiant les conditions du corollaire 8.*

(b) *L'application* $\overline{\delta}_M$ *est un homomorphisme injectif de* $S_V(M)^\wedge$ *dans* $\operatorname{Out} M$ *et* $\overline{\delta}_M(\overline{t}) = \delta_M(t), \forall t \in R$ *où l'application* $t \to \overline{t}$ *est la transposée de l'injection canonique de* $S_V(M)$ *dans* R_+^*.

(c) *On a* $\gamma_M \circ \overline{\delta}_M = 1$.

(d) *L'image de* $\overline{\delta}_M$ *est un sous-groupe normal de* $\operatorname{Out} M$ *et l'action de tout* $\alpha \in \operatorname{Out} M$ *sur cette image est déterminée par* $\gamma_M(\alpha)$.

Cette extension $\overline{\delta}$ de l'homomorphisme modulaire permet d'étendre aux facteurs de type III la suite exacte de [1], p.225.

Théorème 17. *Soient* $M, N, \tau, (\theta_s)_{s\in R}$ *comme ci-dessus.*

(a) *Le commutant relatif de* N *dans* M *est égal au centre de* N.

(b) *Pour tout* $\alpha \in \operatorname{Out} M$ *il existe* $\alpha_0 \in \operatorname{Aut} M$ *dans la classe de* α *tel que* $\alpha_0(N) = N$ *et que la restriction de* α_0 *à* N *préserve* τ.

(c) *Dans (b) l'image* $\delta'(\alpha)$ *dans* $\operatorname{Out} N$ *de la restriction de* α_0 *à* N *ne dépend pas du choix de* α_0.

(d) *La suite suivante est exacte :*

$$1 \to S_V(M)^\wedge \xrightarrow{\overline{\delta}} \operatorname{Out} M \xrightarrow{\delta'} \operatorname{Out}_{\tau,\theta}(N) \to 1;$$

où

$$\operatorname{Out}_{\tau,\theta}(N) = \{\beta \in \operatorname{Out} N, \tau \circ \beta = \tau, \varepsilon_N(\theta_s)\beta = \beta\varepsilon_N(\theta_s), \forall s \in R\}.$$

(e) *Quand on identifie le flot des poids de* M *à la restriction au centre de* N *de l'action* $\lambda \to \theta_{-\operatorname{Log}\lambda}$ *on obtient pour tout* $\alpha \in \operatorname{Aut} M$,

$$\gamma_M(\alpha) = \textit{ restriction de } \delta'(\alpha) \textit{ au centre de } N.$$

Pour tout facteur de type III_0, on a alors :

$$\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Image} \overline{\delta_M} \subset \overline{\operatorname{Int} M} \subset \operatorname{Noyau} \gamma_M \subset \operatorname{Aut} M.$$

Références

[1] A. Connes, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, 6, fasc. 2, 1973, p. 133-252.

[2] G. W. Mackey, *Math. Ann.*, 166, 1966, p. 187-207.

[3] M. Takesaki, *Acta. Math.*, 131, 1973, p. 249-310.

Centre de Physique théorique,
C. N. R. S.,
31, chemin Joseph-Aiguier,
13274 Marseille-Cedex 02.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279 (5 août 1974) **Série A - 189**

ANALYSE FONCTIONNELLE

Existence de facteurs infinis asymptotiquement abéliens.

Note [1] de MM. **Alain Connes** [2] et **Edward James Woods** [3], transmise par M. Laurent Schwartz.

Démonstration de l'existence de facteurs de type III asymptotiquement abéliens, les facteurs de Powers en particulier. Cela résout un problème posé par S. Sakai, Pb 42, p. 215 de [4].

S. Sakai a introduit [3] la notion d'algèbre de von Neumann asymptotiquement abélienne et a montré l'existence de facteurs de type II_1 asymptotiquement abéliens. Aucun facteur de type I ou II_∞ n'est asymptotiquement abélien ([5], [2]). Soit A une C^* algèbre dans l'espace hilbertien $\mathscr{H}$, et $(\sigma_n)_{n\in N}$ une suite d'automorphismes de A telle que $\|[\sigma_n(x), y]\| \to 0$, $n \to \infty, \forall x, y \in A$. En général les σ_n ne se prolongent pas à la fermeture faible M de A, et même s'ils se prolongent (par exemple si ce sont des automorphismes intérieurs de A) il peut arriver qu'ils ne soient pas fortement asymptotiquement abéliens sur M (par exemple M peut être un facteur de type I ou II_∞. Le théorème 2 donne une condition suffisante très simple (l'existence d'un état normal fidèle invariant) pour que la suite des automorphismes prolongés soit fortement asymptotiquement abélienne.

Rappelons la définition de S. Sakai :

DÉFINITION 1. *Soit M une algèbre de von Neumann. Une suite d'automorphismes de M est dite asymptotiquement abélienne quand $\forall x, y \in M$ $[\sigma_n(x), y]_{n\to\infty} \to 0$ fortement. On dit que M est asymptotiquement abélienne quand une telle suite existe.*

Il serait inintéressant de remplacer dans cette définition la topologie forte par la topologie normique.

Cela impliquerait la commutativité de M ([2]).

THÉORÈME 2. *Soient M une algèbre de von Neumann, $(\sigma_n)_{n\in N}$ une suite d'automorphismes de M, A une sous-algèbre involutive faiblement dense dans M telles que*

$$[\sigma_n(x), y] \to 0 \text{ fortement } \forall x, y \in A.$$

[1] Séance du 27 mai 1974.

[2] Chargé de Recherche au C. N. R. S.

[3] Department of Mathematics, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.

Alors, s'il existe sur M un état ω normal fidèle invariant par σ_n pour tout $n \in N$, la suite $(\sigma_n)_{n\in N}$ est asymptotiquement abélienne.

La démonstration résulte facilement du lemme suivant.

LEMME 3. *Soient M une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$, ω un état normal fidèle sur M défini par un vecteur $\Omega \in \mathscr{H}$ et A une sous algèbre involutive faiblement dense dans M.*

Soient $X, Y \in M_1$ la boule unité de M, et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $x, y \in A_1$ tels que pour tout automorphisme α de M préservant ω on ait

$$\|[\alpha(X), Y]\Omega\| \leq \|[\alpha(x), y]\Omega\| + \varepsilon. \tag{1}$$

Démonstration. Comme ω est fidèle, le vecteur Ω est séparateur pour M donc totalisateur pour M'. Soient donc $x', y' \in M'$ tels que

$$\|X\Omega - x'\Omega\| \leq \frac{\varepsilon}{8}, \tag{2}$$

$$\|Y\Omega - y'\Omega\| \leq \frac{\varepsilon}{8}, \tag{3}$$

Posons

$$K = \mathrm{Sup}\{\|x'\|, \|y'\|, 1\}$$

Soient alors $x, y \in A_1$ tels que

$$\|X\Omega - x\ \Omega\| \leq \frac{\varepsilon}{8\,K}, \tag{4}$$

$$\|Y\Omega - y\ \Omega\| \leq \frac{\varepsilon}{8\,K}. \tag{5}$$

(On applique le théorème de densité de Kaplansky.)

On a

$$[\alpha(X), Y] = [\alpha(x), y] + \{\alpha(X)Y - \alpha(x)y\} - \{Y\alpha(X) - y\alpha(x)\}. \tag{6}$$

En utilisant

$$\|\alpha(T)\Omega\| = \|T\Omega\|, \qquad \forall T \in M \tag{7}$$

(par hypothèse ω est invariant), on obtient :

$$(8) \qquad \begin{aligned} \|(\alpha(X)Y-\alpha(x)y)\Omega\| &\le \|(\alpha(X)-\alpha(x))Y\Omega\| + \|\alpha(x)(Y-y)\Omega\| \\ &\le \|\alpha(X-x)(Y-y')\Omega\| + \|y'\alpha(X-x)\Omega\| + \frac{\varepsilon}{8} \\ &\le 2\frac{\varepsilon}{8} + K(8K)^{-1}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

En remplaçant α par α^{-1} on obtient de la même façon

$$(9) \qquad \|(\alpha^{-1}(Y)X-\alpha^{-1}(y)x)\Omega\| \le \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Donc en appliquant (7), on a

$$(10) \qquad \|(Y\alpha(X)-y\ \alpha(x))\Omega\| \le \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Combinant les équations (6), (8) et (10) on obtient (1). Q.E.D.

Théorème 4. *Soient N un facteur, φ un état normal fidèle sur N et $M = \bigotimes_{v\in Z}(N,\varphi)_v$ le produit tensoriel d'une infinité de couples identiques à (N,φ). Alors M est un facteur asymptotiquement abélien.*

Démonstration. On suppose que N agit dans l'espace de Hilbert $\mathscr{K}$ et que l'état φ correspond à un vecteur totalisateur et séparateur $\Phi \in \mathscr{K}$. Soient

$$\mathscr{H} = \bigotimes_{n\in Z}(\mathscr{K}_n,\Omega_n), \quad M = \bigotimes_{n\in Z}(M_n,\ \Omega_n), \quad \Omega = \bigotimes_{n\in Z}\Omega_n,$$

où $\mathscr{K}_n = \mathscr{K}$, $\Omega_n = \Phi$ et $M_n = N$ pour tout $n \in Z$. Soit U l'unitaire dans $\mathscr{H}$ correspondant au shift. On a $U\Omega = \Omega$ et pour tous $n \in N, x_j \in N, j = -n, ..., n$:

$$(11) \qquad U(\bigotimes_{k<-n} 1) \otimes \left(\bigotimes_{k=-n}^{k=n} x_k\right) \otimes (\bigotimes_{k>n} 1) = (\bigotimes_{k<-n-1} 1) \otimes \left(\bigotimes_{k=-n-1}^{k=n-1} x_k\right) \otimes (\bigotimes_{k\ge n} 1),$$

ce qui montre que les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites par M, $\sigma_n = Ad\ U^n$, en prenant pour A la sous-algèbre involutive engendrée linéairement par les opérateurs qui apparaissent dans l'égalité (11). Q.E.D.

En particulier les facteurs R_x, $0 < x < 1$, de Powers et R_∞ (voir [1]) sont asymptotiquement abéliens.

PROBLÈMES :

(1) Soit $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite asymptotiquement abélienne sur le facteur M, avec $\sigma_n = \alpha^n$ pour un automorphisme α de M. Existe-t-il sur M un état normal invariant ?

(2) Existe-t-il un facteur de type III_0 asymptotiquement abélien ?

Références

[1] H. ARAKI et E. J. WOODS, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, 4, 1968, p. 51-130.

[2] M. S. GLASER, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 178, 1973, p. 41-56.

[3] S. SAKAI, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, série A, 4, 1968-1969, p. 299-307.

[4] S. SAKAI, *Ergebnisse der Mathematik und iher grenzgebiete*, 60.

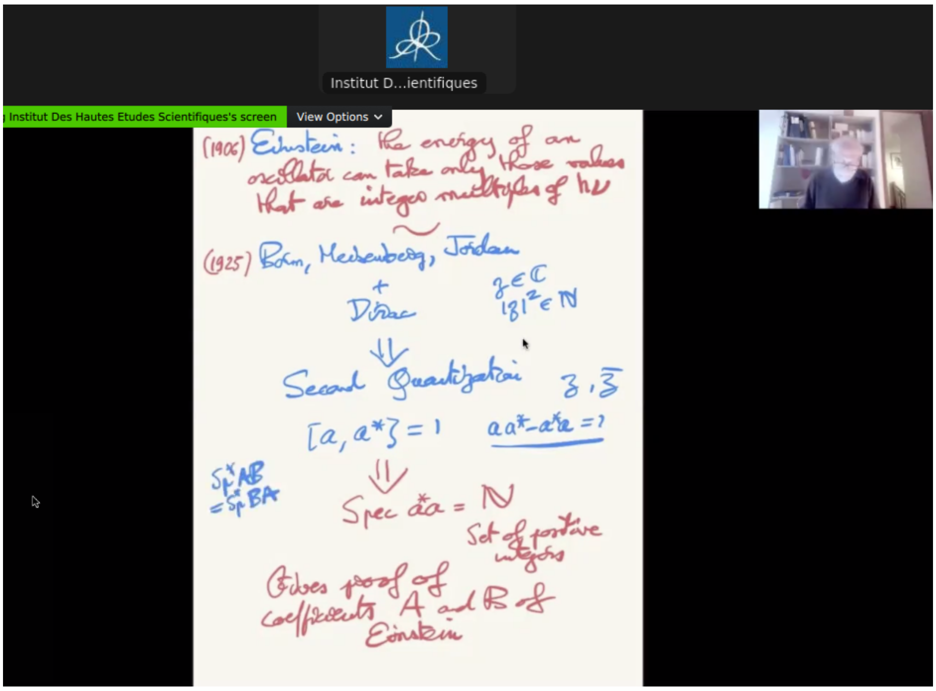
[5] P. WILLIG, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24, 1970, p. 204-205.

Centre de Physique théorique,
31, chemin Joseph-Aiguier,
13274 Marseille.

Renormalisation et théorie de Galois
Alain CONNES
18.11.2020
À l'occasion des 60 ans de Dirk Kreimer

Cher Dirk, Je souhaite bien sûr une joyeuse célébration de tes 60 ans, durant cette semaine, et je veux vraiment te féliciter pour tes grandes découvertes. Ainsi, cet exposé sera une grande occasion pour moi de témoigner ma gratitude à Dirk dont les découvertes ont occasionné un tournant dans ma propre compréhension à la fois dans ce que je souhaiterais dire de la physique, des mathématiques et de la relation entre ces deux domaines.

Je commencerai en disant que j'ai toujours été fasciné par le courage avec lequel les physiciens traitent des problèmes qui semblent mathématiquement insolubles. Je parlerai aujourd'hui du problème de la renormalisation et alors, ce sur quoi je souhaite mettre l'accent deviendra plus clair.



Je commencerai à la naissance de la théorie des champs quantiques qui après Planck, après la découverte de Planck en 1900, il y a cet énoncé clair dans l'article d'Einstein de 1906 que l'énergie d'un oscillateur ne peut prendre que des valeurs qui sont des multiples entiers de $h\nu$. Ceci est appelé la quantification, c'est une sorte de vœu pieux. Et elle a été posée sur des bases solides par deux articles : il y a un article de Born-Heisenberg et Jordan je pense en 1925, je ne suis pas complètement sûr, et alors bien sûr, l'article de Dirac en 1930. Alors ce qui est fait là, c'est quelque chose d'assez incroyable qui est que l'on souhaite, à cause de cette assertion d'Einstein, on souhaite qu'un nombre complexe vérifie une sorte de très étrange condition ; on veut des nombres complexes z, qui appartiennent aux nombres complexes, mais on veut les assujettir à la condition que leur valeur absolue au carré soit un entier. Mais dit comme ça, vous savez, c'est vraiment quelque chose qui semble totalement impossible, totalement non naturel mais pourquoi pas. Mais c'est ce que vous

Conférence donnée à distance lors du colloque "*Algebraic structures in perturbative quantum field theory*", organisé par l'IHÉS.
Vidéo visionnable ici https://www.youtube.com/watch?v=bshH2¡6*whc*.
Fichier associé au diaporama ici : https://indico.math.cnrs.fr/event/4834/attachments/2600/3291/AlainCONNES.pdf
Transcription Denise Vella-Chemla, décembre 2020.

voulez pour les coefficients qui apparaîtront vous savez dans l'expansion de Fourier d'une onde, okay.

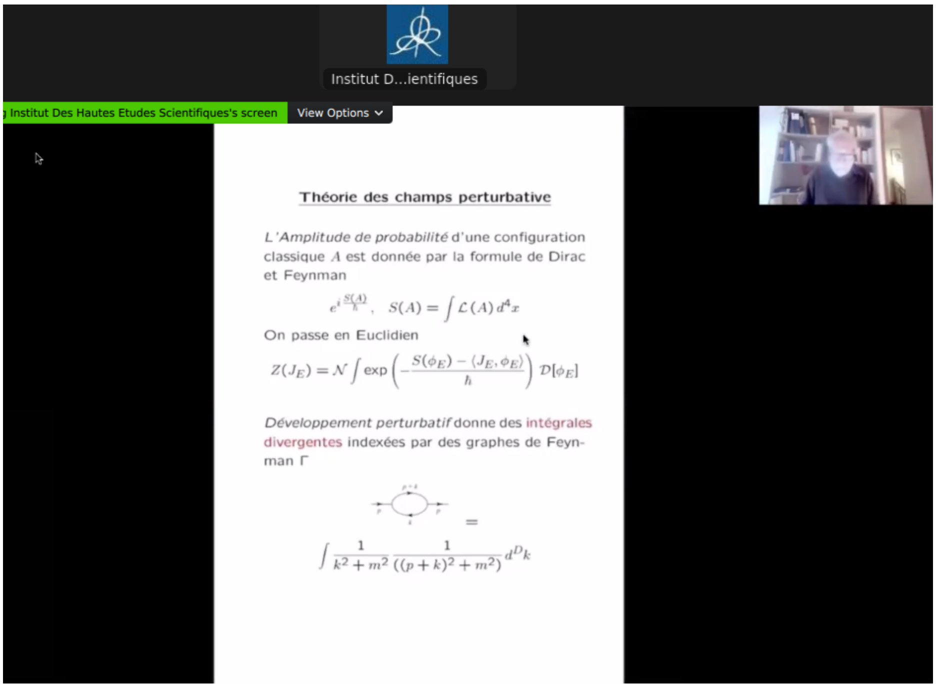
Ainsi les idées incroyables, la source incroyable, vient de l'article de Born-Heisenberg-Jordan : ils ont étudié l'oscillateur et ils ont trouvé l'opérateur correspondant et puis le Dirac et ils l'ont utilisé dans la seconde quantification, dans le premier exemple pour la seconde quantification. Et ce qui est miraculeux, c'est que si vous prenez, non pas un nombre complexe mais un opérateur, et si cet opérateur z est tel que c'est comme si z ne commutait pas avec $\bar{z}$, et par là, je veux dire que le remplacement de ce $\bar{z}$ est l'adjoint de l'opérateur, alors vous avez deux opérateurs A et A^*, adjoints l'un de l'autre, et ils remplissent la condition que leur commutateur, c'est-à-dire $AA^* - A^*A$, vous savez, est égal à 1.

Okay, ceci est extrêmement simple et juste par cette formule, cela implique immédiatement que quand vous prenez A^* le module de ça élevé au carré sera un entier : la raison est très simple, vous savez, la raison est qu'en général, vous avez que le spectre de AB est égal au spectre de BA, excepté potentiellement à cause de la présence de zéro, le point zéro dans le spectre. Et alors, je veux dire, si vous avez cette relation, cela signifie que vous pouvez descendre, vous pouvez descendre d'un élément... avant toute chose, que le spectre est positif, parce que l'opérateur est positif, et que si vous prenez un nombre qui est dans le spectre, vous savez que vous allez descendre de 1 et etc., à la condition que la seule manière de descendre dans les négatifs est absurde parce qu'à un moment vous atterrissez sur 0 et ainsi ce côté du spectre est formé de nombres positifs.

Maintenant avec ceci et cela, vous savez, Dirac a été capable de prouver du point de vue physique, en utilisant les mathématiques, les formules qu'Einstein avait devinées par des expériences de pensée à propos des constantes A et B, les coefficients d'absorption et d'émission d'une radiation par un atome ; et cela a été un fantastique succès en 1930 et cela a réellement été la naissance de la théorie quantique des champs.

Maintenant je veux montrer une affiche humoristique qui contient une plaisanterie[1], mais qui est très réconfortante en quelque sorte, vous savez, la voici. Je ne sais pas si elle est réelle, je veux dire que je ne sais pas si Einstein a vraiment dit ça mais ça n'a pas d'importance, okay, donc ce qu'il dit là c'est : “ne soyez pas inquiet de vos difficultés en mathématiques, je peux vous assurer que celles que j'éprouve quant à moi sont bien plus importantes.” Bon, vous savez, c'est une phrase assez incroyable !

[1]photo d'Einstein avec sa soi-disant pensée écrite à côté.

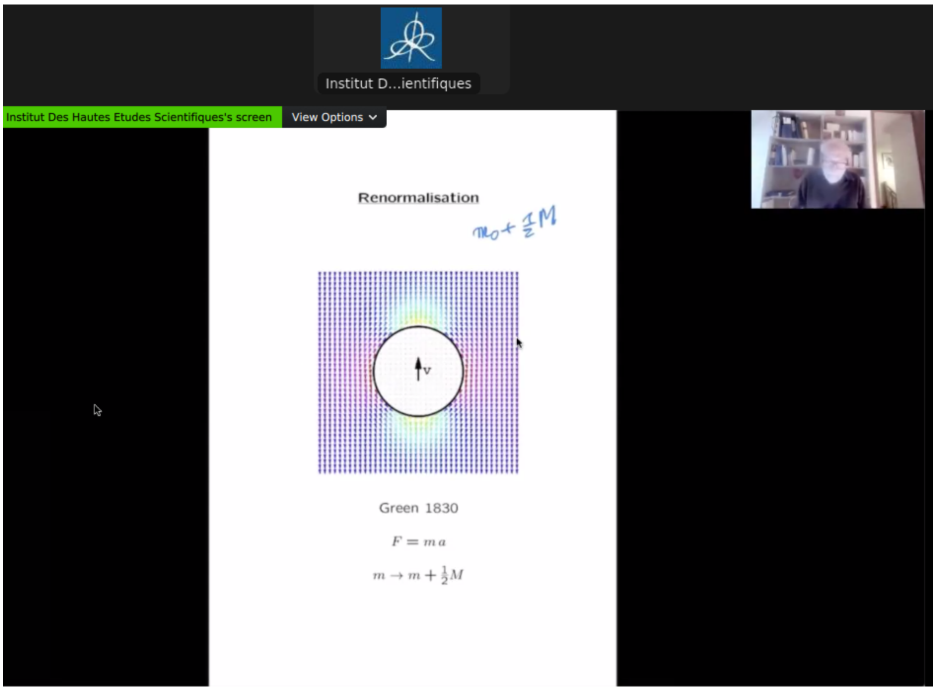


Maintenant, en effet, vous connaissez les difficultés mathématiques qui sont extrêmement rapidement atteintes, quand vous entrez dans la théorie quantique des champs, et qui sont résumées en une formule, qui est due à Feynman, vous savez qu'il y a une citation probablement d'un physicien du passé que vous devez connaître et qui dit "Schwinger a élevé la théorie quantique des champs aux nues et Feynman l'a ramenée aux masses". Bon, la raison pour laquelle il l'a amenée dans les masses est que, vous savez, vous avez un principe, qui est incroyablement simple à formuler, qui est que les amplitudes de probabilité sont comme des racines carrées de probabilités), l'amplitude de probabilité d'une configuration est donnée par cette formule[2], okay, qui est l'exponentielle imaginaire de l'action en unités de $\hbar$. Bon, bien sûr, l'action est définie ainsi, et donc, je veux dire, ceci est extrêmement délicat, parce que, vous écririez l'intégrale fonctionnelle, et si vous écriviez cette intégrale fonctionnelle dans l'espace de Minkowski et non pas dans l'espace euclidien, alors vous rencontreriez immédiatement des difficultés dues au fait que le propagateur a une singularité et que vous ne savez pas comment la gérer.

Maintenant, on la gère par ce qu'on appelle la prescription de l'$i\epsilon$ de Feynman mais cela signifie surtout que vous passez dans le domaine euclidien. Et ainsi, ce que vous faites, c'est que vous calculez, si vous voulez, la source, ainsi vous calculez l'intégrale fonctionnelle et ce qui en quelque sorte vient très rapidement, c'est que, avant tout, vous ne savez pas du tout ce qu'est la mesure d'intégration. Et la seule chose que vous pouvez faire est vraiment de prendre la théorie libre, ou le champ libre, et de perturber autour du champ libre. Quand vous faites cela, vous devez intégrer par parties sous la gaussienne, ce que, okay, tout le monde peut faire, et alors, vous obtenez des expressions qui vous donnent le développement perturbatif. Mais ce que vous trouvez, presque immédiatement, c'est que vous allez sous le niveau de l'arbre, et donc sous le niveau auquel Dirac travaillait, vous trouvez que les intégrales que vous obtenez sont en fait des intégrales divergentes. Donc, je veux dire, face à ça, vous savez que vous obtenez quelque chose qui n'a pas de sens.

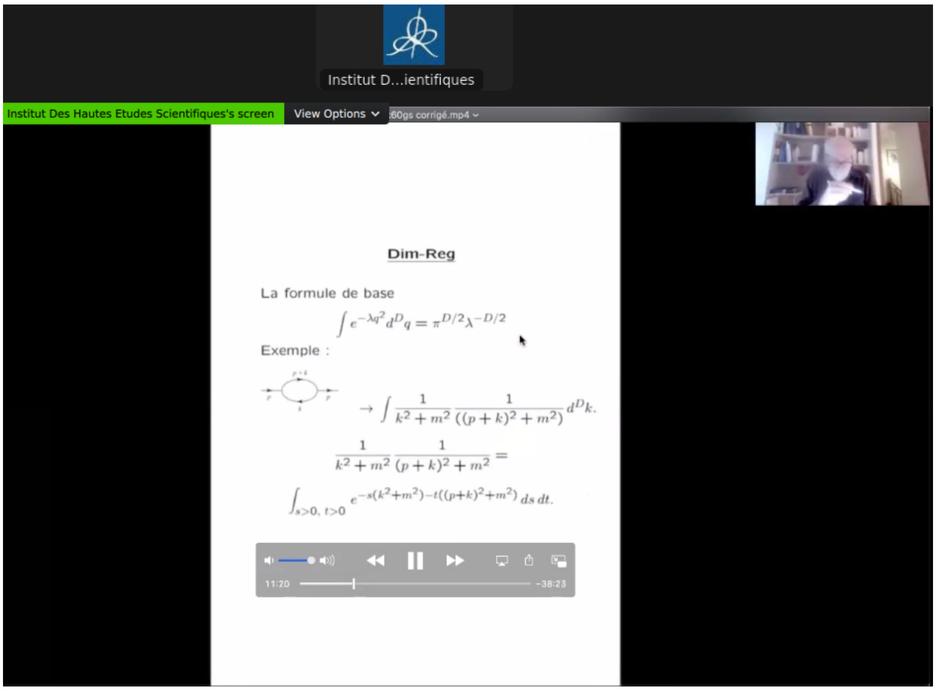
Maintenant, ce type de résultat privé de sens a vraiment un vieil ancêtre. Et ce vieil ancêtre, je me rappelle, vous savez, un exposé par Sidney Coleman en 1978 dans lequel il donnait un exemple qui est une légère variante de l'exemple suivant.

[2] entourant $e^{i\frac{S(A)}{\hbar}}$

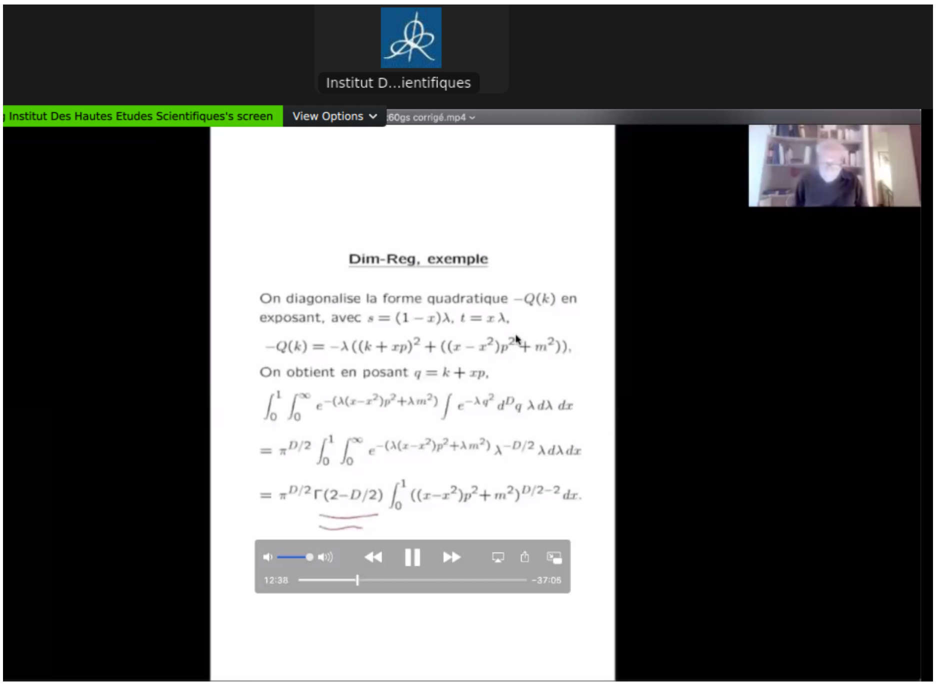


Je veux dire, vous savez, il donnait l'exemple d'un ballon rempli d'hélium et vous pouvez calculer l'accélération initiale du ballon quand il remonte. Mais vous trouvez quelque chose de ridiculement différent de ce qui est observé. Et je veux dire que vous pouvez aussi prendre l'exemple d'une balle de ping-pong dans de l'eau. Et ainsi, le principe d'Archimède si vous voulez, le fait que vous connaissiez que la force correspondra à la masse du volume d'eau qui remonte et tout ça, ça ne marche pas du tout : cela vous donne un résultat qui est en contradiction avec l'expérience. Et il a été observé par Green en 1830, vraiment, qu'il y a une belle explication à cela. Et l'explication est que quand vous calculez vraiment la masse qui devrait entrer dans la loi de Newton, vous trouvez que ce n'est pas la masse originale m_0 si vous voulez, que vous devriez avoir pour le ballon ou pour la balle de ping-pong, mais vous devez ajouter à cela un terme correctif qui est vraiment la moitié de la masse de l'eau contenue dans la balle de ping-pong, si elle était dans l'eau, ou une masse d'air et etc. Et ce que vous trouvez alors c'est que l'accélération initiale ne peut pas excéder 2 ($2g$). Et je veux dire que la raison derrière cela est que vous savez que la balle de ping-pong ou le ballon est immergé dans un fluide. Et lors du mouvement, vous savez, ce qui se produit, c'est qu'il y a création d'une perturbation dans le fluide et quand vous calculez l'énergie de cette perturbation, cela ajoute effectivement un terme additionnel à la masse effective que vous êtes en train de traiter. Donc en quelque sorte, dans le cas du ballon ou de la balle de ping-pong, vous pouvez vraiment calculer la valeur de m_0.

Ce que vous faites c'est que vous sortez la balle de ping-pong de l'eau, c'est ça, vous pouvez la peser. Mais ce que les physiciens ont compris très très vite c'est que ça n'est pas le cas de l'électron parce que vous ne pouvez pas le sortie du champ électromagnétique quoi que vous fassiez. Ainsi vous ne pourrez jamais être capable de trouver ce que vaut ce qu'on appelle la masse nue, par exemple, de l'électron. Et cela a résulté en de nombreuses batailles, de nombreuses réflexions, et de façon incroyable, comment dire, vous savez, cela a amené au développement de ce qu'on appelle la renormalisation, et cela a amené les physiciens à lentement comprendre ce qui se passe et comme je le disais, vous savez, bien sûr, entre les mains de Schwinger, Feynman, Dyson, et alors vous savez, Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann ont réussi un jour en fait à trouver une très bonne manière, je pense à ce dim-reg vraiment, qui est dû à 't Hooft et Veltman, de façon à comprendre et à avoir le contrôle sur ces divergences, à partir du principe physique que vous connaissez, par exemple et qui dit que la masse nue est différente de la masse réelle et similairement pour les charges, similairement pour la force du champ. Vous devez utiliser le processus de régularisation.

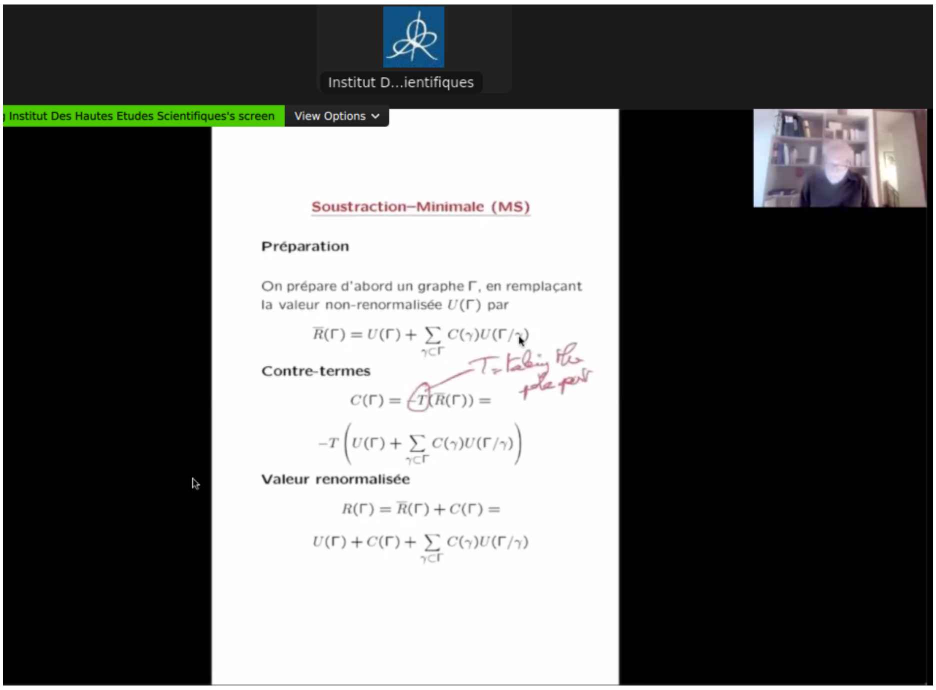


Donc le processus de régularisation actuellement le plus efficace est ce qu'on appelle dim-reg. Donc l'idée de dim-reg est simplement cette formule[3]. Ainsi cette formule dit que si vous devez intégrer une gaussienne en d dimensions, vous n'avez pas à vous soucier que d soit un entier : vous pouvez mettre une définition, et cette définition est que l'intégrale de cette gaussienne en dimension d est donnée par cette formule. Maintenant ce que vous faites, c'est que vous prenez l'une de ces intégrales divergentes que vous avez obtenue des graphes de Feynman, et vous la gérez en passant à ce qu'on appelle les paramètres de Schwinger. Notamment, vous la réécrivez, vous savez, vous réécrivez l'intégrande comme une somme de gaussiennes, je veux dire, d'expressions gaussiennes et alors vous calculez. Okay, vous calculez avec ça et je veux dire, quand vous calculez ça sur un exemple,



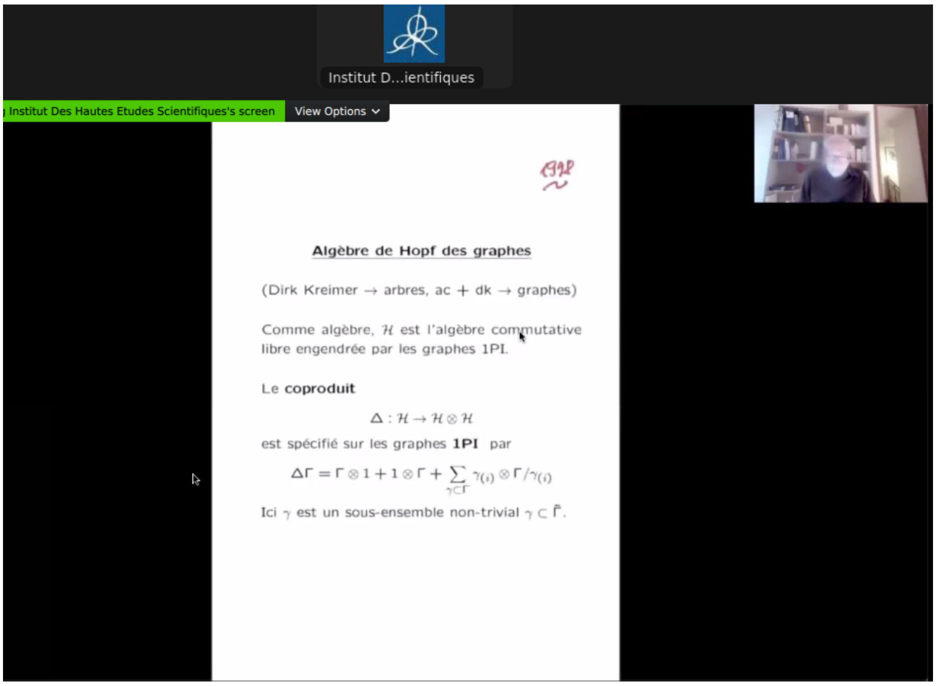
[3]entourant la première formule sur la page.

vous trouvez que ce que vous obtenez, typiquement, dans les exemples les plus simples, ce sera des fonctions gamma. Et ces fonctions gamma auront... à cause de la divergence de cette intégrale, auront le mauvais goût si vous voulez d'avoir un pôle à la dimension qui vous intéresse. Par exemple, vous savez que si vous êtes en dimension quatre alors cette expression quand d égale quatre, aura le pôle de gamma en $z = 0$, multiplié par quelque chose que vous pouvez calculer. Alors ce que les physiciens ont inventé, toutes ces années, de lutte et de compréhension et etc., c'est un processus qui est combinatoire, qui est appelé la soustraction minimale, et qui vous autorise à la fin de la journée, à obtenir un résultat fini.



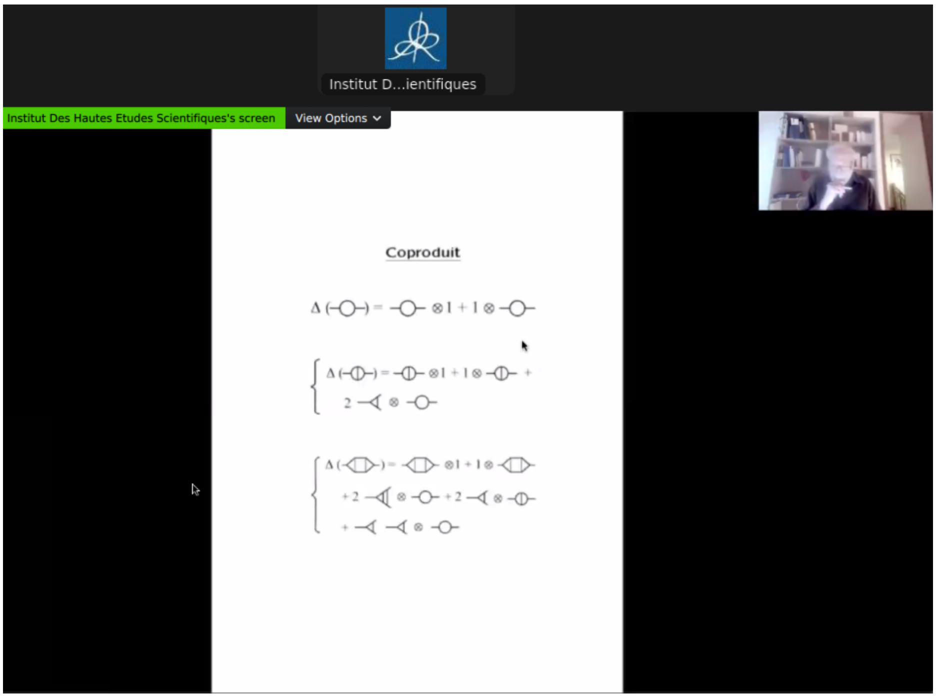
Donc avant tout, vous avez la préparation, et cette préparation vient du fait que vous savez, vous avez à prendre en compte, quand vous travaillez avec des boucles plus hautes, etc., de ce que vous avez fait avant. Donc ces choses-là sont appelées des sous-divergences et vous devez préparer un graphe pour prendre en compte les termes que vous aviez calculés avant dans une certaine formule. Et cela vous fournira ce qu'on appelle les termes compteurs. Et dans ces termes compteurs, ce qui est vraiment important, c'est que si vous devez prendre la partie pôle de telle façon que T prenne la partie pôle, donc la partie qui est la partie divergente. Ainsi je veux dire bien sûr non seulement un epsilon mais également un sur epsilon au carré, et etc., et etc.

Okay. Donc vous prenez ces termes compteurs et vous définissez la valeur renormalisée par soustraction minimale si vous voulez les termes divergents. Ainsi la valeur renormalisée est donnée par cette formule. Okay, donc ça c'est une recette combinatoire, c'est très compliqué et quand vous voyez ça, en tant que mathématicien, d'abord vous vous dites, "okay, bon, c'est sans espoir !", vous savez, parce que je veux dire, bon, on comprend pourquoi en physique on doit faire ça mais en parlant d'un point de vue mathématique, vous savez que c'est très difficile d'imaginer que cela pourrait avoir un sens mathématique, non pas que ça ne soit pas rigoureux, c'est parfaitement rigoureux, non ! Mais vous savez, je veux dire le sens conceptuel okay ? Et c'est ce que nous avons trouvé avec Dirk Kreimer dans notre collaboration.



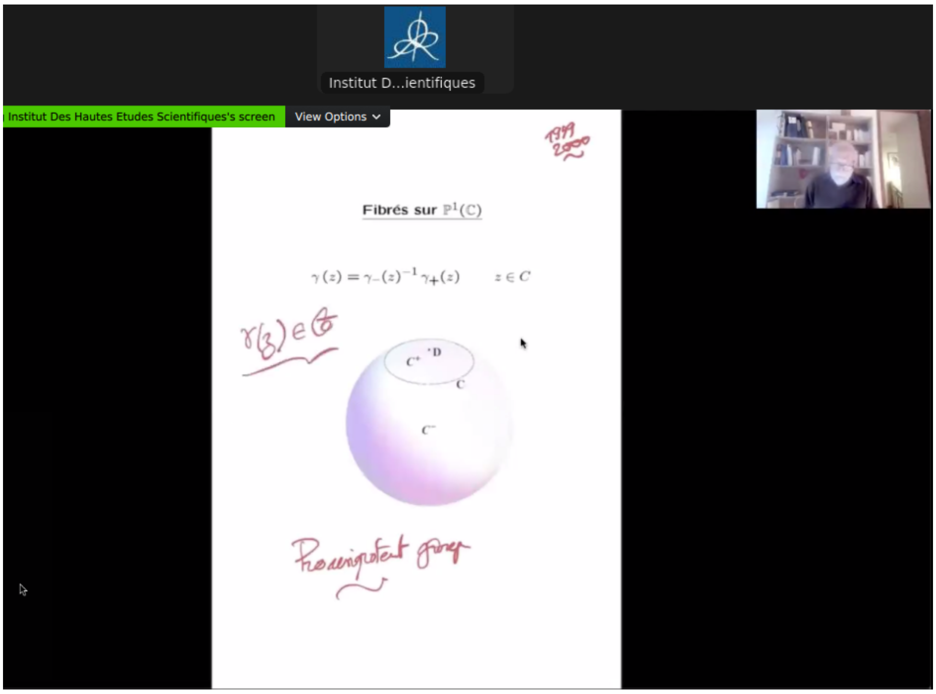
Et je veux dire, nous avons commencé, je pense que c'était en 1998. Oui, nous avons commencé à travailler ensemble en 1998 et l'idée clef est venue de Dirk. L'idée de Dirk était que, vous savez, quand vous regardez ce graphe en fait, au début, il travaillait avec des arbres enracinés, il y a une structure de Hopf derrière la scène. Maintenant, au moment où j'ai rencontré Dirk, je travaillais avec Henri Moscovici. Et nous travaillions aussi sur les algèbres de Hopf. Donc j'étais en quelque sorte parfaitement prêt pour absorber la découverte de Dirk.

Ainsi, il s'avère que quand vous formulez cette algèbre de Hopf en termes de graphes, c'est une belle chose, notamment, vous avez des graphes, vous prenez l'algèbre libre commutative engendrée par les graphes. Donc vous prenez des combinaisons linéaires de graphes, etc., et des produits, des produits formels. Et vous définissez un co-produit. Et ce co-produit est en quelque sorte spécifié sur les graphes qui sont irréductibles à une particule par cette formule. Bien, ce sont les sous-divergences, je veux dire, ce sont les sous-graphes si vous voulez qui correspondraient aux sous-divergences. Et ainsi vous définissez cette formule.

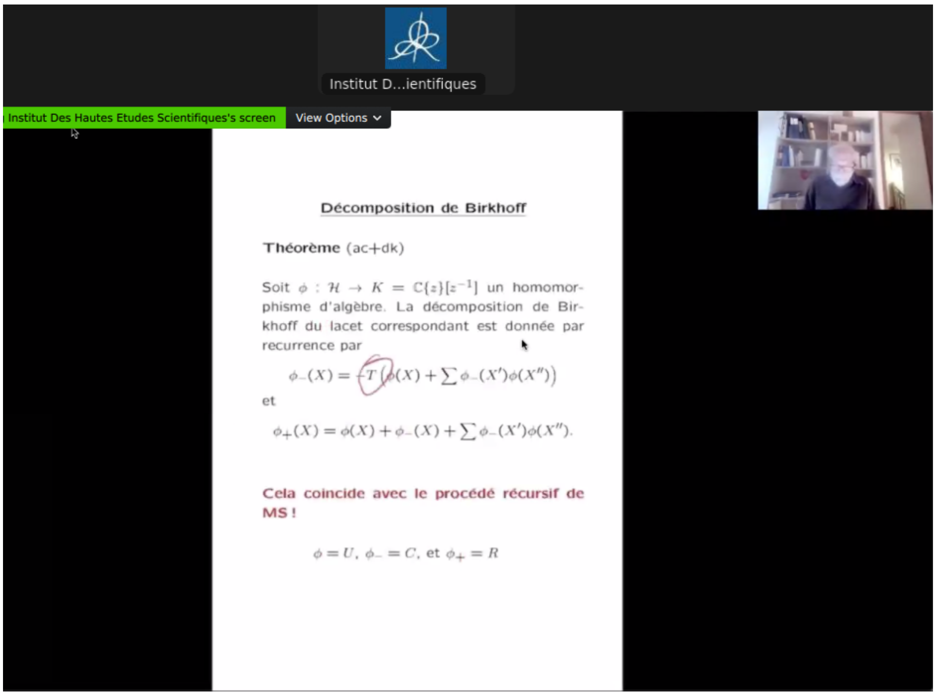


Vous jouez avec et c'est assez incroyable que vous sachiez que le co-produit que vous avez défini comme ça soit vraiment co-associatif, vous savez que c'est un morphisme d'algèbres, etc. Et ce co-produit va de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ pour h et après, quand vous y pensez, après un long processus, vous trouverez que la bonne analogie entre... Quel est le type des algèbres de Hopf ? Ce type d'algèbre de Hopf qui est commutative mais non co-commutative. Parce que le co-produit n'est pas co-commutatif en général, vous savez, parce que vous avez des termes comme ceux-ci.

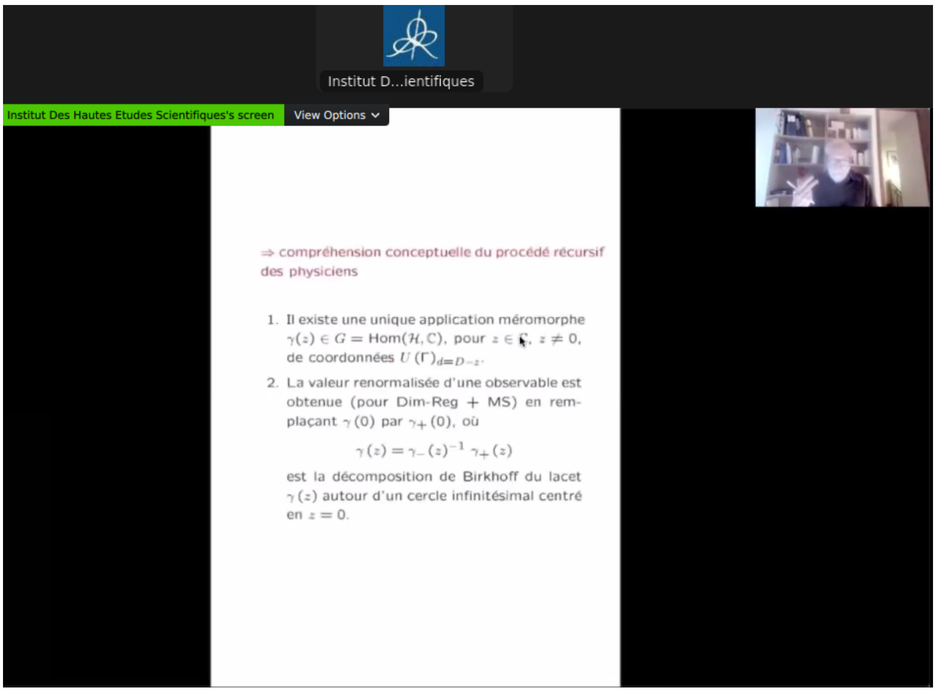
Je veux dire, c'est un groupe, un groupe formel. Maintenant les indices qui peuvent vous faire penser à cela sont en fait très très proches d'indices qui vous amèneraient à l'algèbre de Hopf que vous obtiendriez si vous regardiez les développements de Taylor des difféomorphismes ; donc en fait, vous savez, le nom correct que nous avons mijoté était celui de difféographismes à cause des graphes. C'est la manière dont vous devez penser à de tels objets ; vous devez penser qu'il y a un groupe sous-jacent : ce groupe est la composition de choses qui sont comme des difféomorphismes et qui sont donnés par leur développement de Taylor qui correspond à un développement perturbatif.



Donc nous avons ce co-produit et maintenant la grande découverte que nous avons faite, je pense soit en 1999 et ensuite en 2000, mais le moment absolument fantastique est qu'en fait cette procédure, cette procédure combinatoire des physiciens, n'est en fait rien d'autre que quelque chose qui est connu en mathématique et qui est relié à un problème géométrique. Et ce problème géométrique est le problème de comprendre les faisceaux de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et dans le but de comprendre ces faisceaux, ce que vous faites, c'est qu'ils sont donnés par des données de "collage" (gluing) parce que si vous voulez, si vous regardez la partie qui a lieu dans l'hémisphère du haut ou dans l'hémisphère du bas, okay, ces parties sont aisément compréhensibles, mais la partie qui est non-triviale, c'est la manière dont vous les collez. Ainsi un grand travail a été fait en mathématiques là-dessus, Grothendieck, par exemple, a travaillé là-dessus, et il s'avère qu'en physique, à cause de la nature du problème qui est un problème perturbatif, plutôt que de considérer un faisceau qui prend ses valeurs dans un groupe comme $GL(n, C)$, c'est le groupe sur lequel Grothendieck travaillait, plutôt, nous travaillerons avec des faisceaux dont la structure de groupe est un groupe pro-unimpotent. Okay. Donc c'est un groupe pro-unimpotent et cela rend les choses plus simples au sens où vous n'avez pas, si vous voulez, d'obstructions globales, pour trivialiser le faisceau, mais, quand vous calculez, quand vous comprenez... ce que cela signifie, qu'en quelque sorte vous trivialisez le faisceau, alors vous l'appliquez à la boucle suivante, vous voyez, quand nous parlons d'algèbre de Hopf, il s'avère que quand vous regardez les valeurs des graphes quand la dimension n'est pas la dimension critique, vous savez, comme égale à 4, etc... Bon, alors vous pouvez donner un sens et ce sens, que vous dit-il ? Il vous dit que ce que vous avez, c'est la chose suivante : vous avez une boucle $\gamma(z)$ okay, dont les valeurs sont dans ce groupe, attaché à l'algèbre de Hopf, mais que ce $\gamma(z)$ est comme une donnée de collage. Et vous ne savez pas comment l'évaluer pour cette dimension d parce que là, vous savez, il est singulier. Donc ce que vous faites, c'est que vous appliquez la méthode qui vous permet de trivialiser le faisceau et cette méthode est appelé la décomposition de Birkhoff et qu'est-ce que ça fait ?

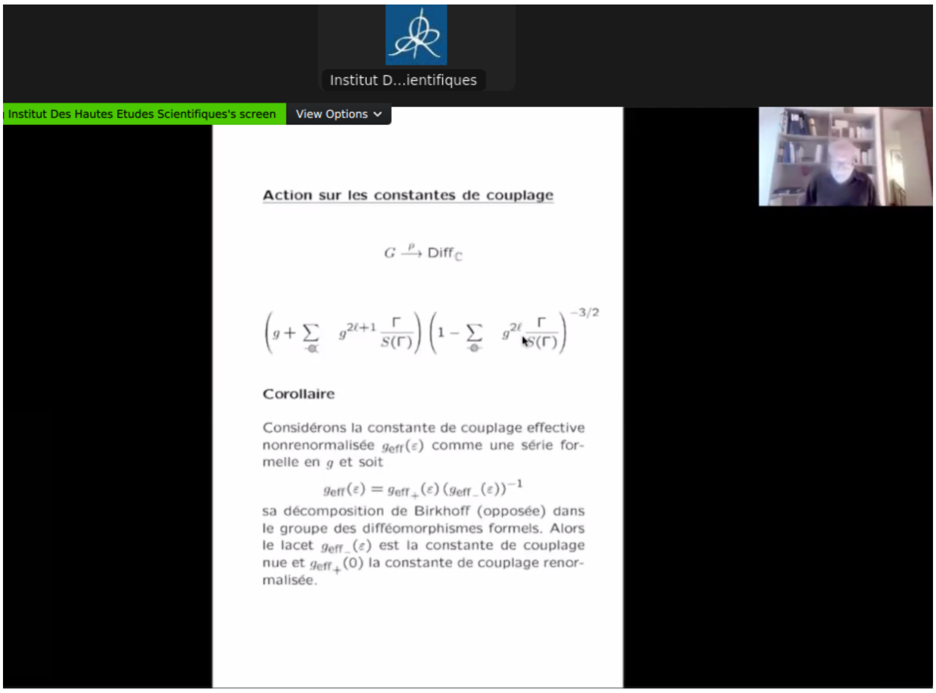


Ça écrit cette boucle avec des valeurs dans le groupe, le groupe est grandement non-commutatif, ce n'est pas un groupe commutatif du tout. Mais vous l'écrivez comme un rapport de deux boucles, une qui sera assez singulière mais une qui sera parfaitement régulière dans ce $(C, +)$ qui est ce $\gamma_+(z)$ et le résultat incroyable que nous avons prouvé avec Dirk, c'est que quand vous regardez uniquement d'un point de vue mathématique, si vous voulez, la décomposition de Birkhoff de la boucle correspondant aux données qui sont calculées par le procédé dim-reg, et etc., alors vous trouvez par induction que c'est donné par cette formule où T a la même signification que précédemment, c'est l'extraction de la partie pôle, okay et ainsi, ça a été un moment incroyable que ce processus coïncide exactement avec le processus récursif avec la recette combinatoire qui était donnée dans la soustraction minimale, okay. Et donc nous avons fait la traduction de l'un à l'autre. Et cela a été un moment absolument clef, et qu'est-ce que cela signifie ?

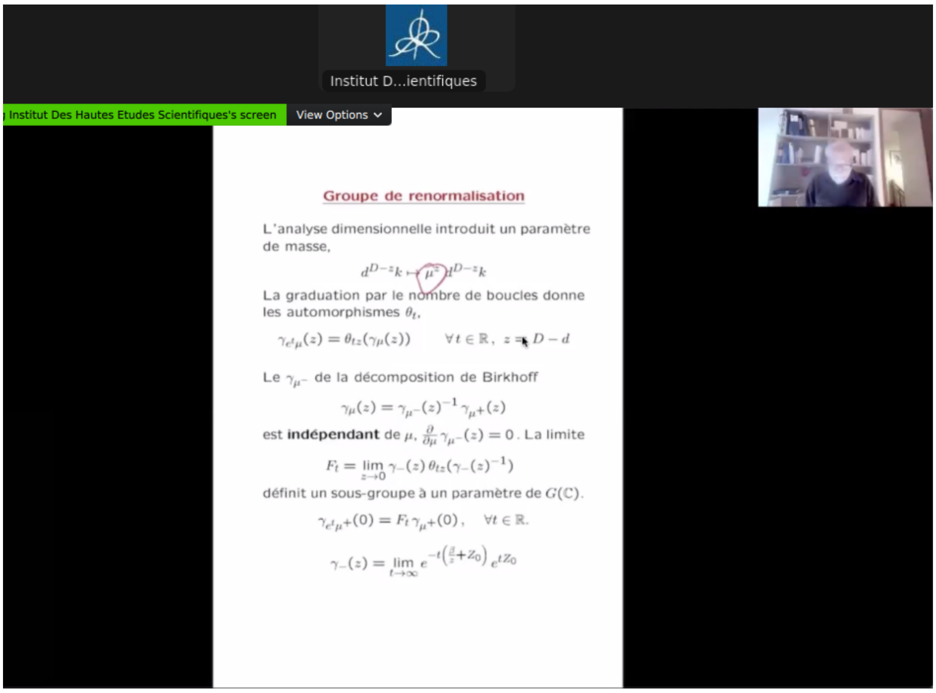


Cela signifie qu'on a, vous savez, une compréhension conceptuelle de ce processus récursif des physiciens. Ainsi, en d'autres termes, nous avons une application méromorphique unique qui va vers ce groupe associé à l'algèbre de Hopf, okay. Et quand vous prenez, maintenant, les valeurs renormalisées d'un observable, et etc. Que faites-vous ? Pour le paradigme dim-reg + MS ? Alors ce que vous faites c'est que vous ignorez la divergence en remplaçant $\gamma(0)$ par $\gamma_+(0)$ dans ce processus de décomposition non-commutative qui est la décomposition de Birkhoff. Donc qu'est-ce que cela signifie ? Cela signifie que si au milieu de la nuit, quelqu'un vient et vous pointe un pistolet sur la tempe et vous dit "c'est quoi la renormalisation ?", voici ce que serait ma réponse. Ma réponse serait "okay, bon, regardez, vous savez, c'est une décomposition de Birkhoff de la boucle et vous prenez la partie de la boucle qui a du sens et vous ignorez l'autre". Okay, maintenant il s'avère que, vous savez, il y a beaucoup plus que ça, il y a plein de trucs derrière la scène dans cette donnée, et ce qui est derrière la scène est lié à la théorie de Galois. Je reviendrai à la théorie de Galois plus tard.

Mais en quelque sorte, je décrirai maintenant les résultats qui ont été obtenus, vous savez, en collaboration avec Matilde Marcolli



et avant de faire cela, je voudrais dire que, vous savez, dans le travail que nous avons fait avec Dirk, nous avions comme corollaire de ce que nous obtenions, la manière dont le groupe agissait sur les constantes de couplage ; notamment, il y a un morphisme naturel du groupe associé aux graphes vers les difféomorphismes, comme je le disais, vous savez, ce groupe devrait être pensé comme un difféographisme. Ainsi, il est lié aux difféomorphismes, et la manière dont il leur est relié, c'est par la façon dont il agit sur les constantes de couplage. Ainsi, il agit sur les constantes de couplage par l'image de cette série. Mais parce que la décomposition de Birkhoff est une sorte de fonctorielle, ce qui se produit c'est que vous ne pouvez pas obtenir si vous voulez, ce qu'est la constante de couplage effective de la décomposition de Birkhoff. Vous pouvez obtenir la constante de couplage finie, renormalisée à partir de la décomposition de Birkhoff. Et ainsi ceci était le corollaire de ce que nous avions trouvé précédemment.



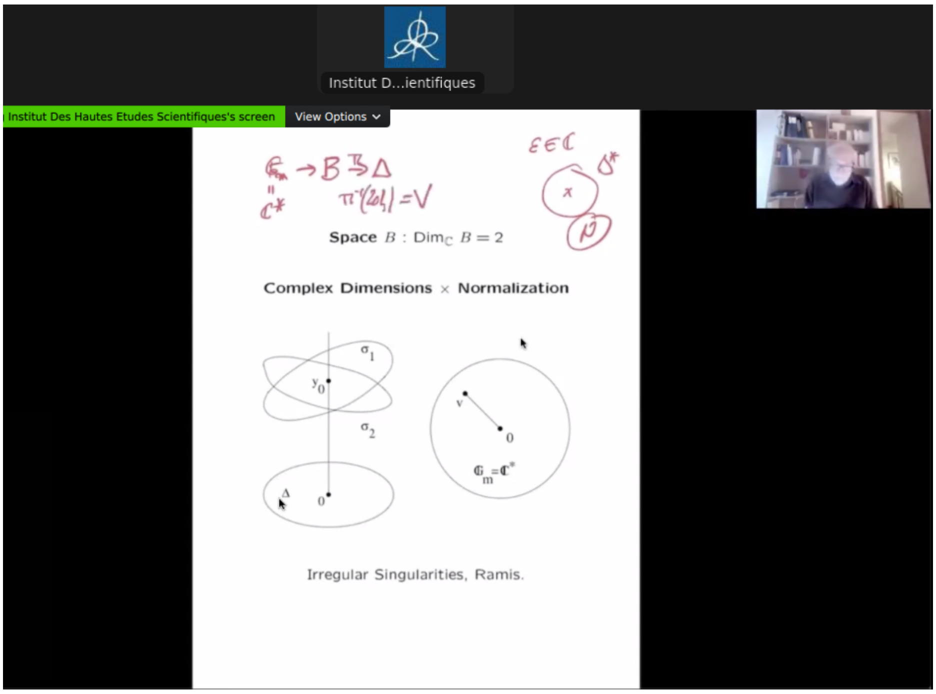
Comme je l'ai dit, j'ai continué à travailler là-dessus et dans ce que nous avions fait avec Dirk, nous avions compris le groupe de renormalisation, et cela venait essentiellement du fait que, quand vous regardez l'analyse dimensionnelle, quand vous intégrez en dimension $D - z$ vous devez introduire un paramètre de dimension pleine[4] qui a la dimension d'une masse que nous appelons μ et que nous mettons dans les formules.

Et le fait incroyable, qui est un fait de la vie, est que ce qui était connu avant, est que quand vous prenez un morceau négatif (maintenant nous disons dans la décomposition de Birkhoff mais okay, je veux dire en termes physiques, c'était dans la méthode DPH), ce morceau négatif dans la décomposition de Birkhoff est vraiment dépendant de μ et donc de ce fait, vous savez qu'il y a un groupe à un paramètre qui apparaît du sous-groupe du groupe associé à l'algèbre de Hopf, qui apparaît de façon complètement naturelle et alors, dans mon travail avec Matilde Marcolli, ce que nous avons fait a été, si vous voulez, de comprendre le lien entre tous ces faits que j'ai mentionnés précédemment et la théorie de Galois.

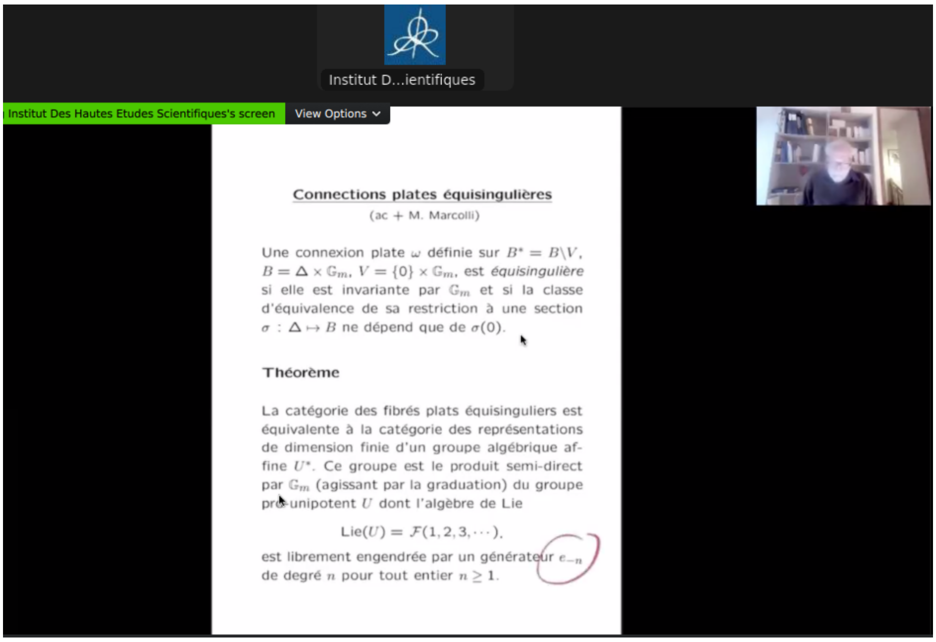
[4] a dimension full parameter ?

Je veux dire la théorie de Galois différentielle mais dans une situation qui est beaucoup plus étendue que quand vous regardez le rapport de Picard ou la théorie de Galois différentielle pour les équations différentielles régulières singulières. Et je veux dire, heureusement, vous connaissez la théorie du rapport de Picard, qui était très belle, et qui s'applique très bien pour les équations différentielles régulières singulières, pendant un long temps, elle est restée un peu silencieuse, parce que vous savez, il y avait un résultat essentiel qui était que le groupe de Galois était la fermeture de Zariski de la monodromie. Mais alors, dans les mains de Martinez-Ramis-Malgrange... Deligne, et aussi Ecalle, c'est devenue une théorie considérablement sophistiquée qui s'applique à des situations particulières.

Dans le travail avec Matilde, ce que nous avons trouvé c'est que nous avons appliqué le formalisme Tannakien qui avait été formulé, d'abord, par Grothendieck et avait ensuite été développé par de nombreuses autres personnes, en particulier par Deligne, et ainsi, ce que nous avons trouvé c'est comment... si vous voulez, il y a une catégorie Tannakienne naturelle de... comment dire... des systèmes différentiels ou si vous voulez de connexions et de modules et qui est associée au problème de la renormalisation et qui incarne toutes les propriétés précédentes dont j'ai parlé. Maintenant, l'idée principale est la notion de connexion plate équi-singulière.

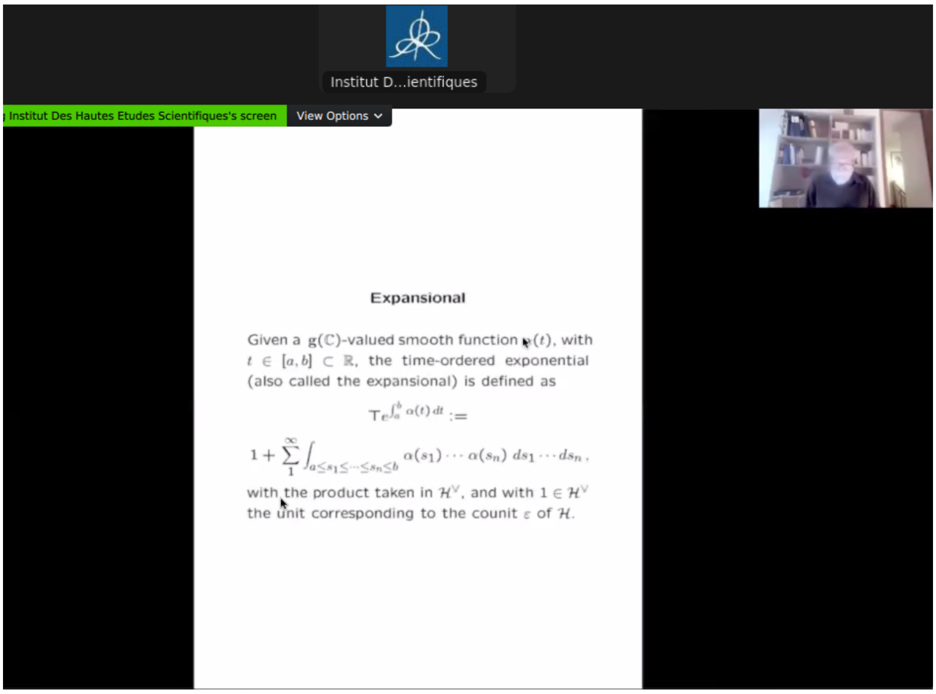


Alors pour cela, je dois penser géométriquement, et vous devez penser ainsi, quand je vous ai dit qu'il y avait epsilon qui était un nombre complexe, très proche de zéro, mais vous ne voulez pas qu'epsilon soit nul et donc ce que vous faites, c'est que vous prenez un disque pointé que vous appelez Δ^*. Mais il y a aussi ce μ, ce paramètre μ, quand vous le combinez avec le epsilon, ce que vous obtenez c'est un espace de dimension deux, de dimension deux complexe, et dans cet espace de dimension deux complexe, ce que vous savez principalement c'est qu'il est fibré par le groupe multiplicatif G_m qui est $\mathbb{C}^*$, si vous voulez, il est fibré sur le disque Δ mais vous voulez enlever la partie qui est au-dessus de zéro.

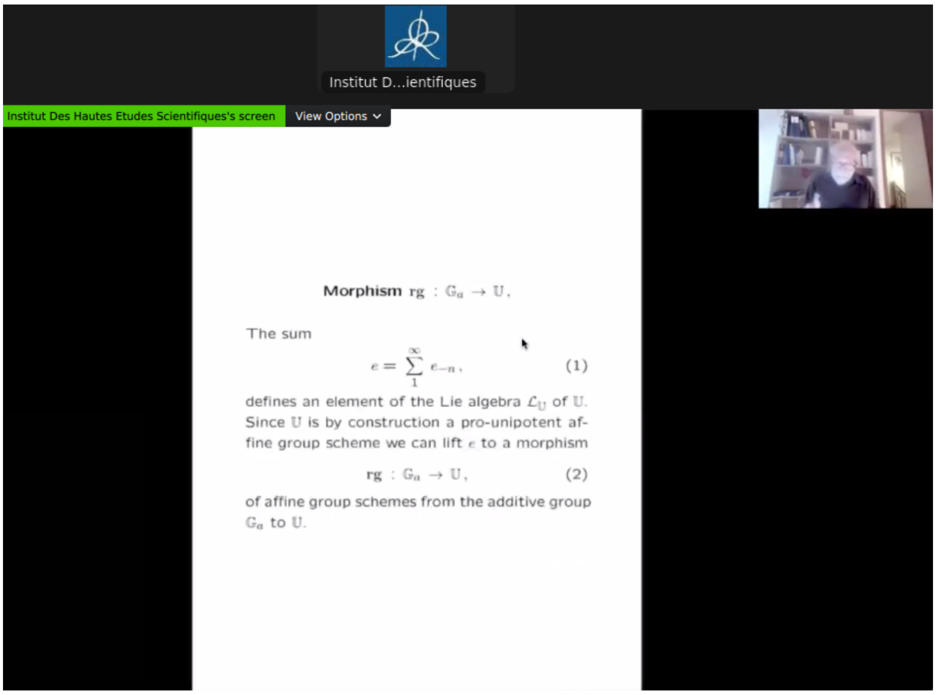


Et la partie qui est au-dessus de zéro, je l'appelle $\pi^{-1}(0)$. Je l'appelle ainsi et je parlerai ultérieurement du sens de $\pi^{-1}(Z)$, vous savez, en fonction de la constante, de la constante de Planck $\hbar$, mais ce qui arrive c'est qu'à cause de cette indépendance de la partie négative de la décomposition de Birkhoff pour de telles boucles, ce que vous avez c'est qu'elles sont associées, en fait, à ce qu'on appelle des connexions équi-singulières. Donc les connections équi-singulières sont des connexions plates, qui sont invariantes sous le groupe multiplicatif, mais qui sont telles que, lorsque vous les restreignez à une section, de Δ à B, de telle façon que ceci soit une section, une autre section, alors vous connaissez la singularité quand vous arrivez sur le point zéro, ce sont les mêmes. Je garantis cela. Donc alors, ce que nous avons trouvé est qu'en appliquant le formalisme Tannakien qui est une belle chose, vous savez, ce qu'il vous dit est que si vous avez ce qu'on appelle une catégorie Tannakienne, c'est une catégorie abélienne, mais ça a aussi une sorte de produit tensoriel, et ce que vous supposez maintenant c'est que cette catégorie a ce qu'on appelle un foncteur fibré. Donc elle a un foncteur qui va vers les espaces vectoriels ordinaires par exemple, quand vous recouvrez un corps, et alors vous regardez... on peut prouver abstraitement sous certaines conditions que cela définit un groupe affine algébrique qui est donné si vous voulez comme un foncteur d'un anneau arbitraire commutatif vers les groupes. Et le groupe correspondant est comme les automorphismes du foncteur fibre, quand vous le prenez sur l'anneau. Et alors ce que nous avons prouvé là, c'est que si vous prenez la catégorie des faisceaux plats équi-singuliers, alors elle s'avère être équivalente à la catégorie des représentations des dimensions finies d'un certain groupe affine algébrique qui est déterminé de manière unique. Et il s'avère que ce groupe est un produit semi-direct par le groupe multiplicatif qui agit au moyen de la graduation de la boucle, par la variation du nombre de boucles d'un certain groupe unipotent. Et ce groupe unipotent est déterminé de manière unique et c'est le groupe unipotent dont l'algèbre de Lie est engendrée librement par un générateur, ε_{-n} dans chaque degré n pour tout entier n.

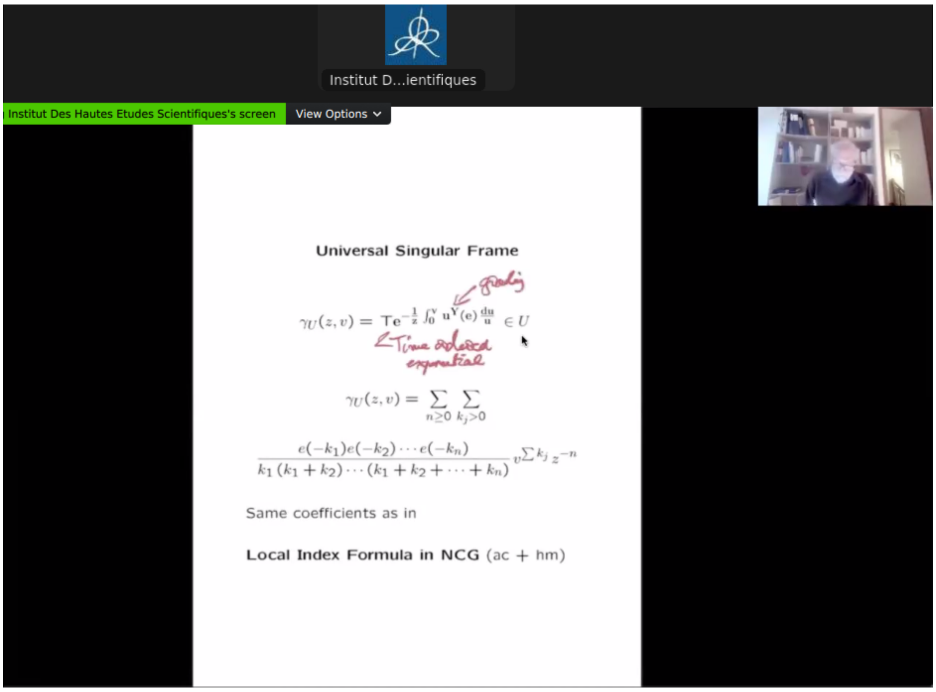
Maintenant je devrais juste mentionner en passant qu'un groupe similaire *apparaît effectivement* dans la théorie de Galois motivique mais non de manière canonique. C'est donc très illusoire de comprendre la relation. Maintenant pour aller un peu plus profondément dans ce qui se produit, comme je l'ai dit, vous savez que nous traitons des singularités irrégulières. Donc je veux dire, c'est très lié à la théorie de Ramis, je veux dire au tore exponentiel de Ramis...



et ce qui se passe c'est qu'on a besoin, pour écrire des formules, d'utiliser un outil qui est appelé l'exponentielle expansionnelle ou ordonnée en temps, et il y a à ce propos un beau papier d'Araki, remontant aux années 70, dans lequel vous savez je pense, il est dans les Annales de l'École Normale Supérieure, dans lequel il donne une belle théorie générale pour cette expansionnelle. C'est donc quelque chose qui est bien compris et c'est une exponentielle en temps ordonné et elle est très utile pour écrire les solutions des équations différentielles. Donc elle a du sens dans les algèbres de Hopf



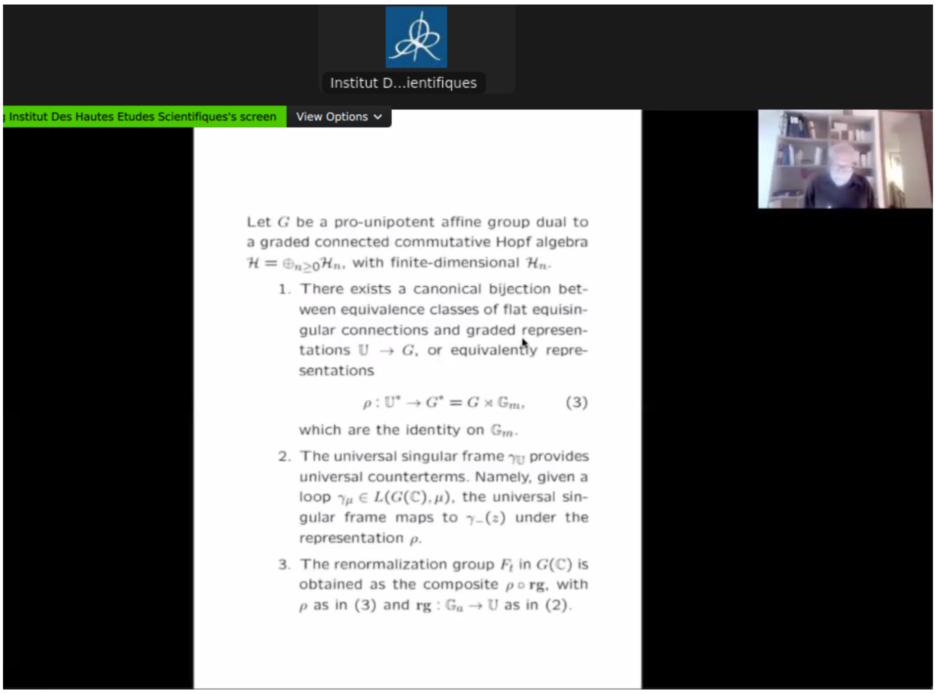
et il s'avère que derrière la scène, comme je vous l'ai dit tout à l'heure, il y a un certain morphisme canonique du groupe additif au groupe pro-unimpotent $\mathbb{U}$ que j'ai défini et qui, vous savez, sous-tend le résultat précédent, le théorème ici[5]. Donc ceci est le groupe sous-jacent $\mathbb{U}$ et je veux dire ce groupe, il est défini par cette formule, et comme nous le verrons un peu plus tard, il incarne exactement ce qu'on appelle le groupe de rénovation, qui est juste un sous-groupe du groupe que nous traitons, qui est plus riche parce que c'est un groupe hautement non-abélien.



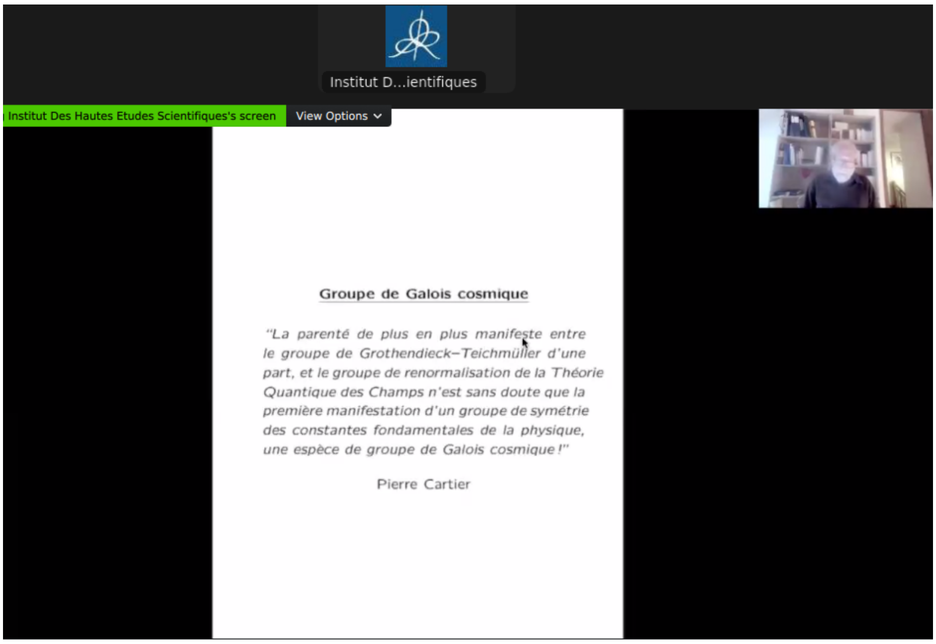
Donc il s'avère qu'il y a un objet qui est défini par un ordre temporel, c'est une exponentielle à ordre temporel, ce qui apparaît ici c'est la mise à l'échelle par le nombre de boucles, okay. Alors tout ce matériau fait sens et ce qui est marrant qui à ce moment-là n'a pas une vraie bonne explication, c'est

[5] Le théorème sur la page concernant les connexions plates équi-singulières.

que quand vous développez ce modèle singulier universel, j'expliquerai quel est son rôle, vous obtenez les mêmes coefficients que dans la formule de l'index locale que nous avions avec Henri Moscovici avec qui je travaillais quelques années avant. Mais cela n'a pas encore trouvé d'explication conceptuelle.



Maintenant le résultat principal est le suivant : il est que si vous prenez un groupe affine pro-unimpotent, dual d'une algèbre mise à l'échelle connectée commutative, exactement ce qui arrive en physique, grâce à l'algèbre de Hopf de Dirk, alors d'abord avant tout, il existe une bijection canonique entre les classes d'équivalence des connexions plates équi-singulières et les représentations mises à l'échelle de ce matériau universel que j'ai défini, okay, le groupe G (ou, de manière équivalente, bien sûr, vous pouvez faire un produit tensoriel par le groupe multiplicatif G_m correspondant à l'échelle). Maintenant le modèle universel singulier fournit des termes compteurs universels, c'est un fait fantastique. Et je veux dire, c'est relié, vous savez à ce qu'on appelle les relations de Gross-'t Hooft, notamment, étant donnée une boucle, le modèle universel singulier envoie automatiquement, à travers la représentation, ρ vers la partie négative de la décomposition de Birkhoff. Et finalement, le groupe de renormalisation, que les physiciens adorent, vous savez, qui est un sous-groupe à un paramètre du groupe assigné à l'algèbre de Hopf, il est obtenu comme la composition de la représentation avec le **rg** qui avait été défini précédemment comme un morphisme du groupe additif vers le $\mathbb{U}$.



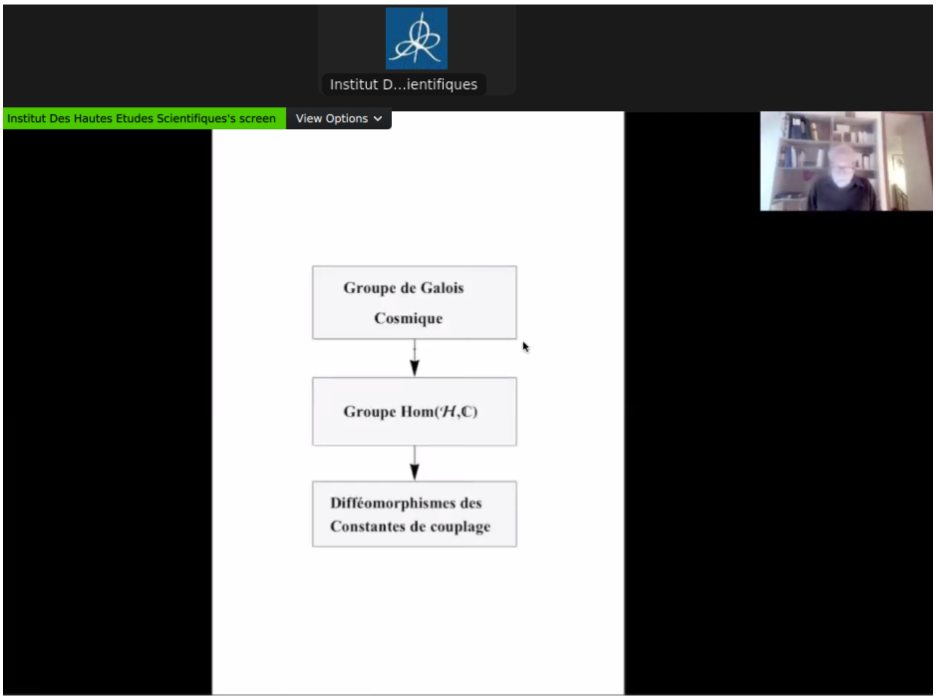
Maintenant, voyez-vous, on ne peut s'empêcher de citer Cartier parce que peut-être qu'il avait une motivation légèrement différente, mais malgré tout, il avait la vision juste, au sens où il a écrit ceci :

> *La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck-Teichmüller d'une part,...*

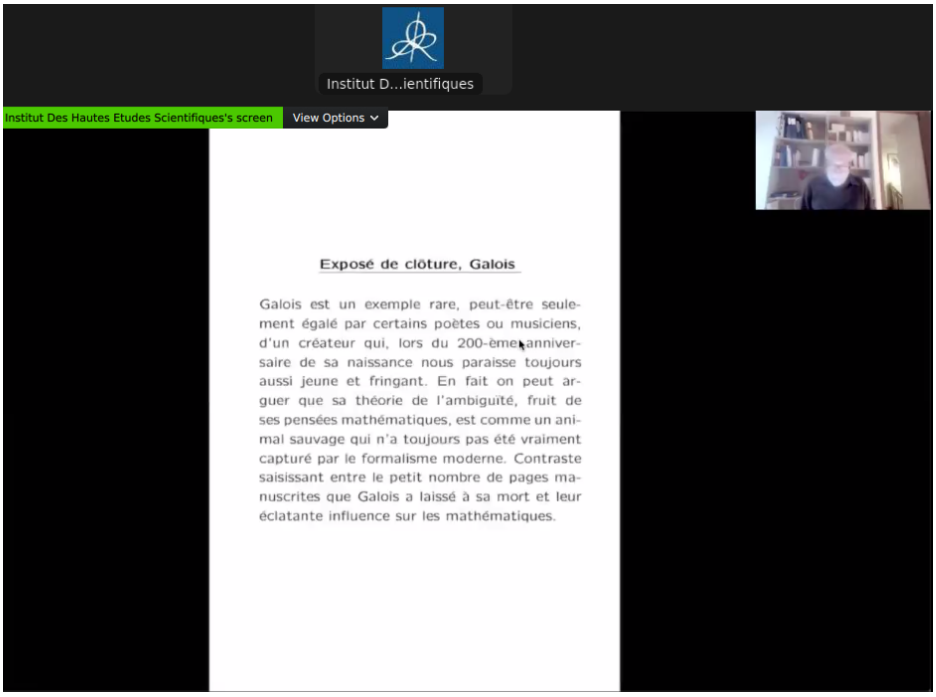
C'était une autre inspiration parce qu'elle provenait de problèmes de la Théorie des nombres,

> *et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique !"*

Alors quand avec Matilde nous avons trouvé ce groupe, je veux dire ce groupe qui venait de la catégorie Tannakienne etc., nous ne pouvions nous empêcher de l'appeler le groupe cosmique de Galois, vous savez. C'est vraiment ce qu'il est, parce que comme je l'ai dit précédemment, à partir du travail avec Dirk, quand nous agissons sur les constantes de couplage, ce groupe est vraiment envoyé sur le groupe d'une théorie donnée. Et en retour, il s'envoie vers les différents morphismes des constantes de couplage. Donc en fait, ce groupe cosmique de Galois agit exactement comme Cartier l'envisageait à peu près, il agit effectivement sur les constantes fondamentales, bien sûr, comme vous le savez très bien, je veux dire les constantes fondamentales de la physique,



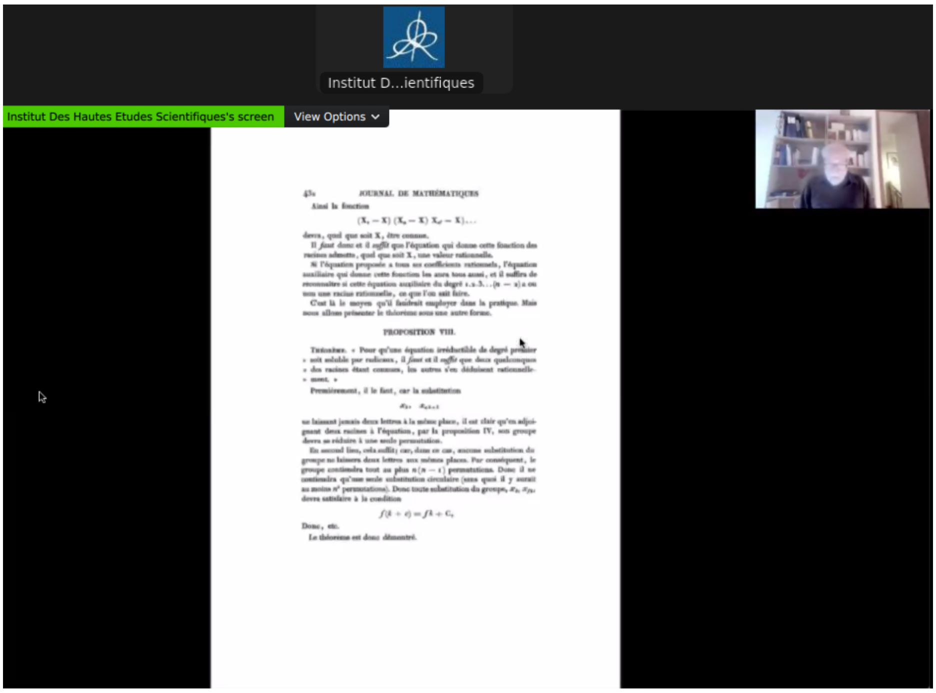
en fait les constantes fondamentales de la physique ne sont pas des constantes, ce sont des fonctions, elles dépendent de l'énergie d'échelle, donc c'est exactement ce qui a lieu ici. Maintenant, comment tout ceci me ramène-t-il à Galois ? Parce que l'idée derrière le groupe de renormalisation, l'idée derrière tout ceci, est que vous savez, quand vous faites de la physique, vous trouvez qu'il y a quelque chose de très insaisissable dans le processus de renormalisation qui est qu'il reste encore une ambiguïté, et cette ambiguïté est à lier aux idées fondamentales de l'ambiguïté telle que l'entend Galois. J'ai eu l'occasion de donner une conférence à propos de Galois, j'ai dit à cette occasion la chose suivante :



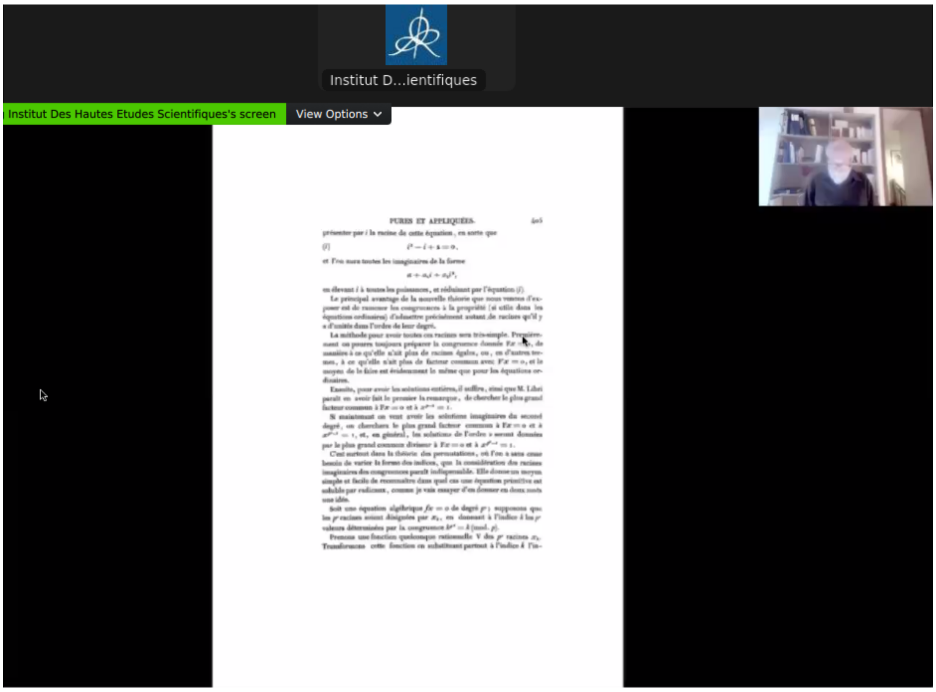
“Galois est un rare exemple, peut-être seulement égalé par quelques poètes ou musiciens, de créateur qui, lors du 200^{ième} anniversaire de sa naissance, apparaît toujours aussi jeune et fringant, je ne sais comment traduire cet adjectif en anglais. Et je continuerai

en disant que ce que l'on peut dire de sa théorie de l'ambiguïté, qui est le fruit de sa propre source mathématique, est comme un animal sauvage qui n'a jamais été capturé par le formalisme moderne."

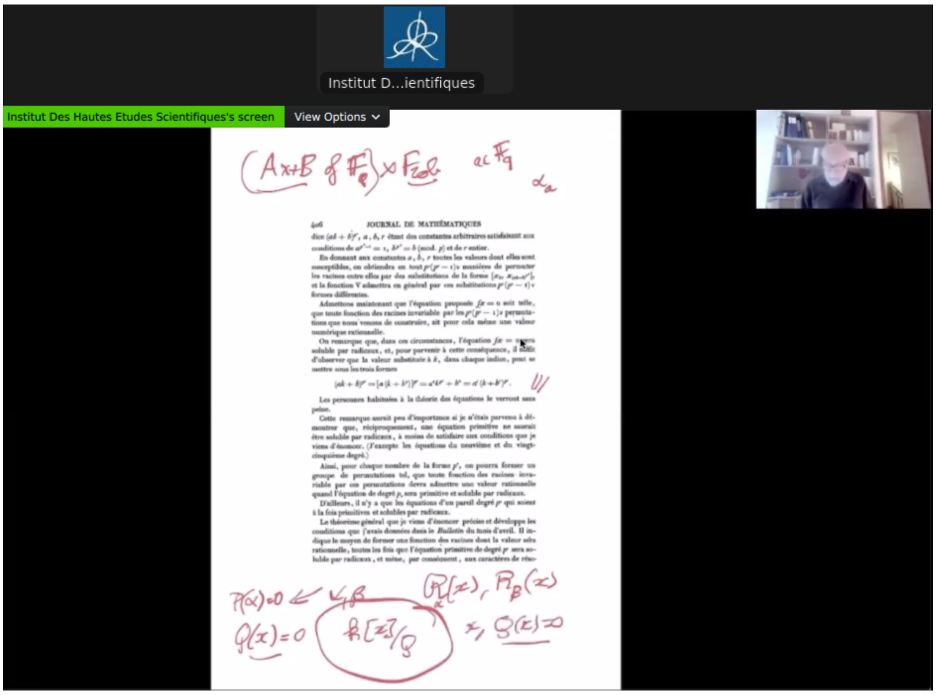
Grothendieck était très près de la capturer, vous savez, avec le formalisme Tannakien, et tout ça, mais je veux dire qu'il y a un contraste étonnant entre le petit nombre de pages que Galois a laissées à sa mort et son incroyable influence sur les mathématiques. Maintenant, vous savez, il y a des incompréhensions à propos de Galois parce que beaucoup de gens pensent que ce que Galois a fait a été d'inventer le groupe de Galois, et de comprendre les symétries et etc. Mais cela est très loin de la réalité de ce qu'il a fait. Ce qu'il a fait, si vous voulez, il y a toujours ce contraste entre la forme que prennent les choses et les choses qui sont très concrètes, qui sont derrière. Bien sûr, ce contraste est très présent dans la renormalisation. Mais il est également présent dans le travail de Galois.



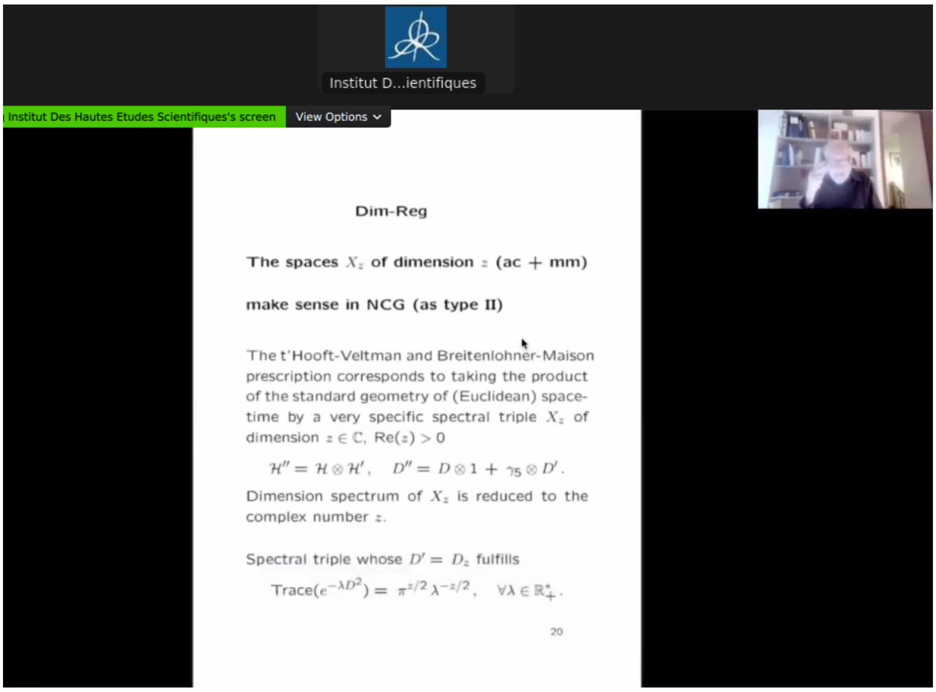
Et on doit savoir, pour apprécier le travail de Galois, que c'est à 17 ou 18 ans qu'il a écrit l'article dans lequel il définit un corps fini, que dans les pays anglo-saxons, on appelle des corps de Galois et qui en France s'appelle champs de Galois parce que le terme utilisé par les anglo-saxons ferait penser à son corps physique, et à sa mort, ce qui ne peut convenir. Mais ce qui est extraordinaire, c'est qu'il a énoncé son théorème incroyable à 17 ou 18 ans, et même aujourd'hui, si vous cherchez à le démontrer, vous aurez des problèmes à le faire même si vous pensez maîtriser la théorie de Galois.



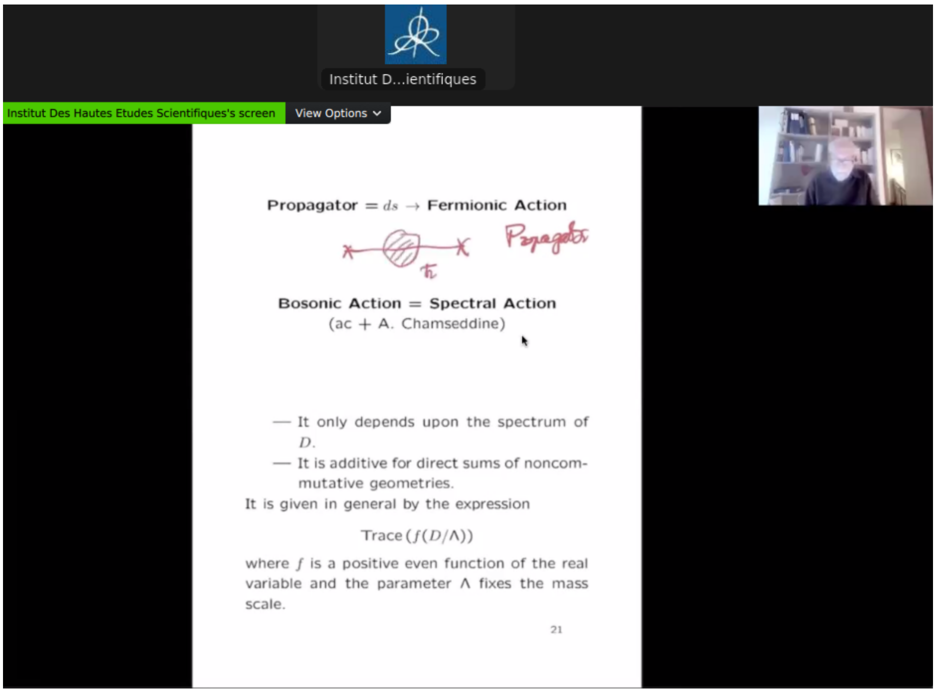
Quel est ce théorème que Galois a établi, le théorème est énoncé à peu près là, il dit en quelque sorte que si vous prenez ce qu'on appelle une équation primitive, alors pour que cette équation soit résoluble, il est nécessaire et suffisant que vous puissiez indexer ses racines par un corps fini F_q, okay, donc si vous voulez vous étiquetez les racines par des α_a où a appartient à F_q et le groupe de Galois doit être un sous-groupe de quoi ? du groupe affine, okay, le groupe $ax+b$ de F_q, okay, mais croisé par produit tensoriel avec les automorphismes de Frobenius, les puissances du Frobenius. Donc ceci est absolument époustouflant. Je veux dire, il est incroyable qu'il ait pu trouver ce résultat à cet âge, et de plus, vous savez, quand vous regardez attentivement l'article de Galois, vous trouvez ceci : quelle était sa motivation ? Sa motivation n'était pas celle de Lagrange de trouver des invariants, et etc., non, non, non, non, non : sa motivation était de trouver toutes les relations qui sont vérifiées qui lient les racines d'une équation donnée et je veux dire, ce que vous trouverez si vous allez plus profondément, vous trouverez que la manière dont il l'a fait a été de trouver une équation auxiliaire qui est d'un degré plus élevé telle que les racines de votre équation donnée, les racines comme α, β, etc., F_q le corps de Galois...



ainsi, par exemple, maintenant, alpha est un alpha de x, beta est un beta de x, et ce sont toutes des fonctions rationnelles, comme des polynômes, les équations doivent être des polynômes parce que x devrait être la solution d'une équation. Et maintenant vous savez, vous dites, "okay, c'est bien beau mais comment est-ce que je peux connaître x ?". Bon, comment connaissez-vous x ? Eh bien, x est la solution d'une autre équation, donc celles-ci étaient solution d'une équation $p(x) = 0$, désolé $p(\alpha) = 0$, okay. Et cet x est solution d'une équation de degré plus grand. Appelons cette équation par exemple $Q(x) = 0$. Donc vous demandez "okay, bon, vous avez remplacé celle-ci par celle-là ?! Mais qu'est-ce que vous y avez gagné ?". Eh bien, vous y avez gagné quelque chose d'énorme, parce que : comment résolvez-vous cette équation "Q(x)=0" ? Maintenant je le fais comme si j'étais Galois, l'élève de Picard-Vessiot : comment la résolvez-vous? Eh bien, vous prenez juste tous les polynômes sur le corps auquel vous vous intéressez, tous les polynômes $k[x]$ okay et vous divisez par q. Maintenant quand vous faites cela, bien sûr que x est une solution, et donc x satisfait $q(x) = 0$. Bon, c'est bien, oui, mais maintenant comment savez-vous que toutes les racines sont des fonctions rationnelles de ce x de telle façon que si vous voulez savoir s'il y a une relation que vous pouvez imaginer, une relation rationnelle entre les racines, vous le mettez dedans, et il la vérifiera (l'ordinateur pourra vous dire s'il la vérifie ou pas) non pas à epsilon près, non, je veux dire, qui vous le dise exactement, parce que ce que vous faites consiste à prendre cette fonction rationnelle de ces racines et vous le mettez dedans et vous vous demandez si oui ou non, le quotient est nul, peut-être si c'est un multiple de q. Maintenant cette manière formelle incroyablement puissante de résoudre une équation est au cœur d'un pouvoir qui est absolument incroyable entre les mains de Galois. Et en fait, ce que Galois a écrit, c'est que son problème était de trouver toutes les relations rationnelles existant entre les racines d'une équation, ce n'était pas de trouver des fonctions invariantes ou quoi que ce soit d'autre. Vous savez, vous avez, bien sûr, les relations triviales qui sont les fonctions symétriques mais ce que nous avons trouvé, c'est qu'en général, il y a d'autres relations et c'est cela qui a amené Galois au dit "groupe de Galois". Okay ? Okay !

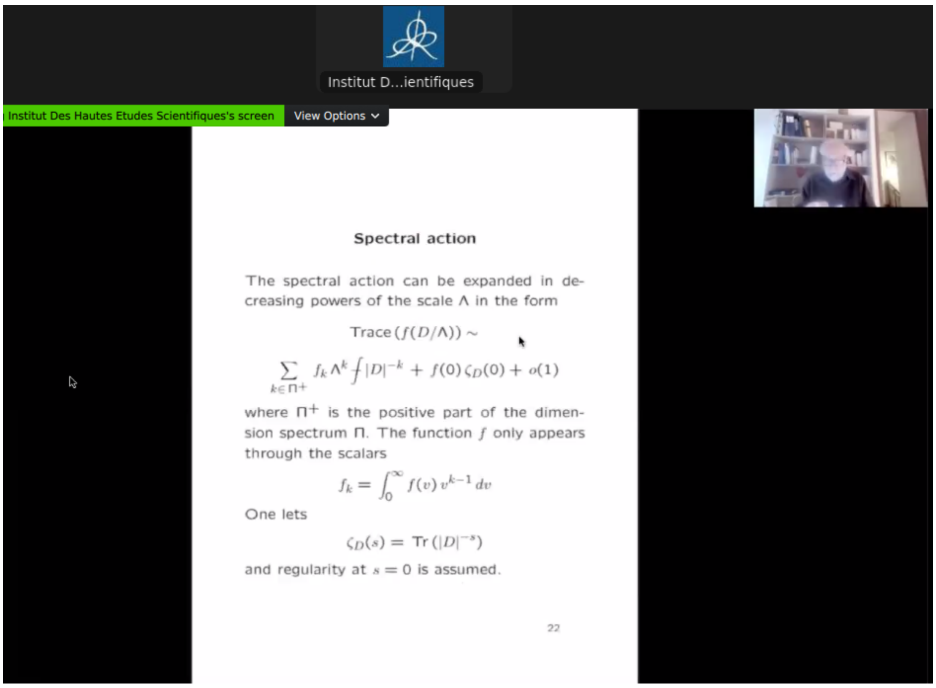


Donc maintenant, puisque il me reste très peu de temps, ce que je voudrais dire, vous savez, c'est vous raconter la fin de l'histoire en vous fournissant essentiellement quelques questions ouvertes. Donc il y a un fait que vous connaissez qui est, okay, que quand vous regardez ce modèle singulier universel, ce que ce modèle vous dit grossièrement, c'est que vous savez, quand vous écrivez que le epsilon tend vers zéro dans le bazar dim-reg, bon, nous ne devrions pas essayer d'atterrir dans le champ géométrique de manière utile. Je veux dire que le modèle universel singulier nous dit que nous devrions le suivre plutôt et en fait, nous devrions corriger la géométrie que nous avons, de telle façon voyez-vous que la renormalisation soit effectivement prise en compte par la géométrie. Maintenant, un petit pas en avant dans cette direction a été fait dans le livre avec Matilde, okay, bon, ce que nous avons fait c'est que nous avons donné une incarnation de l'espace de dimension z. C'est très rusé parce que c'est un truc de type 2 mais ce que nous avons trouvé, c'est qu'au niveau "une boucle", cela marche parfaitement bien. Notamment vous savez quand vous faites le truc t'Hooft-Veltman de la renormalisation et tout ça, vous devez gérer, à cause de la théorie de gauge et des propriétés chirales (l'anomalie chirale), vous devez gérer cette chiralité et il y a une recette qui est appelée la prescription de Breitenlohner-Maison. Et au niveau une boucle, cette prescription correspond au fait de prendre le produit de la géométrie standard par un triplet spectral très spécifique. Ici, je fais allusion à ce qu'est la géométrie non-commutative, je ne veux pas passer de temps à cela, je pense que vous le savez,

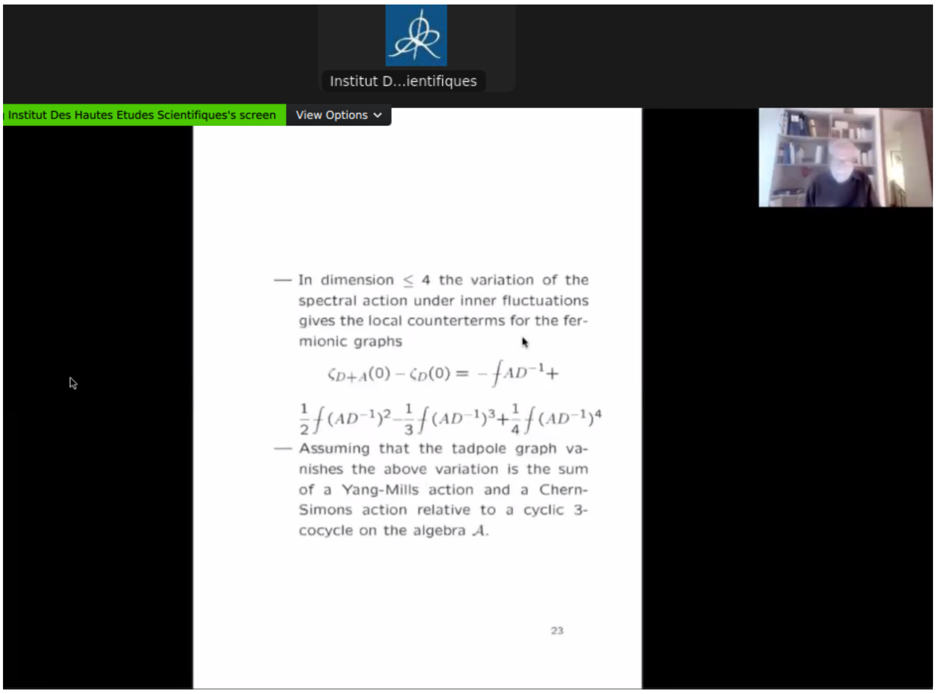


mais c'est ce sur quoi cette géométrie est basée... La géométrie elle-même est définie par le propagateur des fermions. Okay... les propriétés du propagateur, et c'est ceci qui est l'inverse du Dirac qui définit la géométrie. Et la beauté est que la théorie des champs quantiques peut déjà être prise en compte, au niveau une boucle, parce que ce propagateur est habillé par les champs usuels. Et donc, il y a des séries formelles dans $\hbar$. Maintenant, ce que nous avons fait, si vous voulez, en développant cette géométrie, avec Chamseddine et également avec Walter van Suijlekom, c'est que nous avons développé une action.

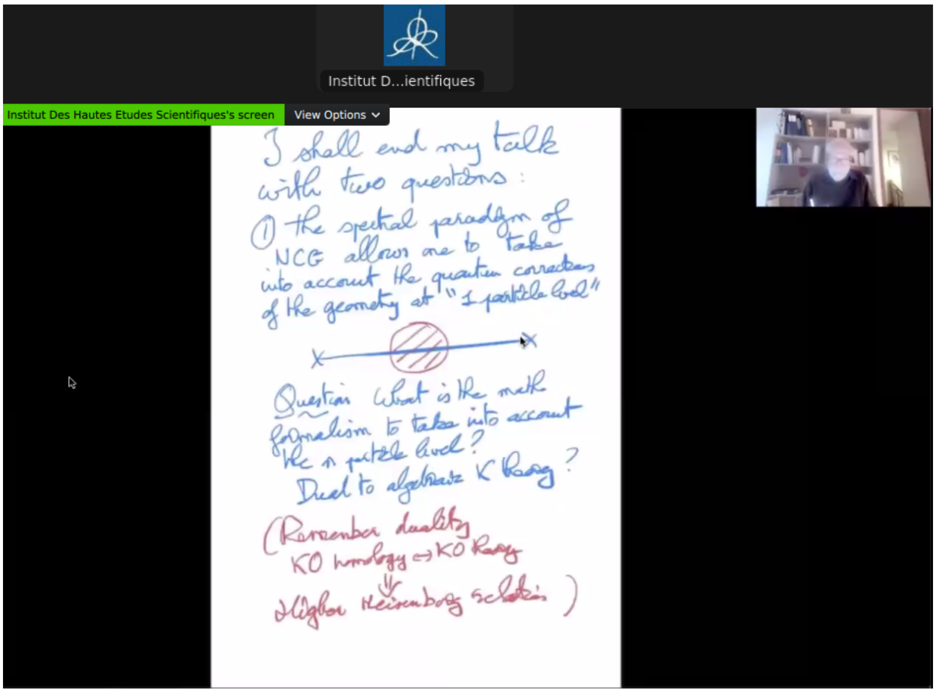
Donc maintenant, je ne vais plus traiter de quoi que ce soit de technique, je voudrais vous en donner une très spécifique, et cette action dépend vraiment de la géométrie seulement par le spectre de cet opérateur, je veux dire qui est l'inverse du propagateur. Donc elle est donnée par ce qu'on appelle l'action spectrale, etc.



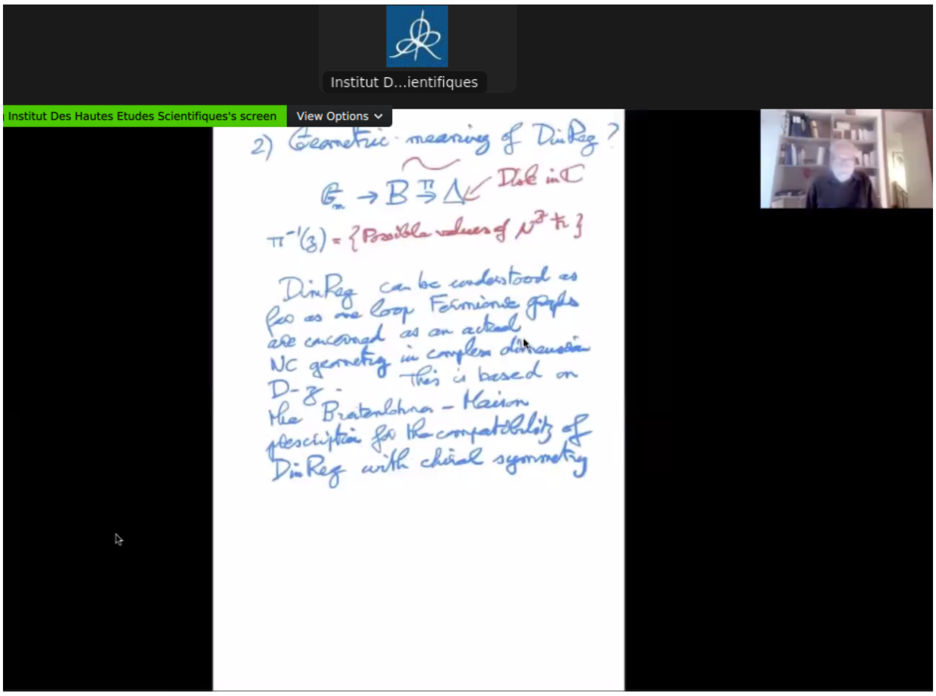
Cette action spectrale, je veux dire, vous donne dans son développement les termes importants qui interviennent dans l'action.



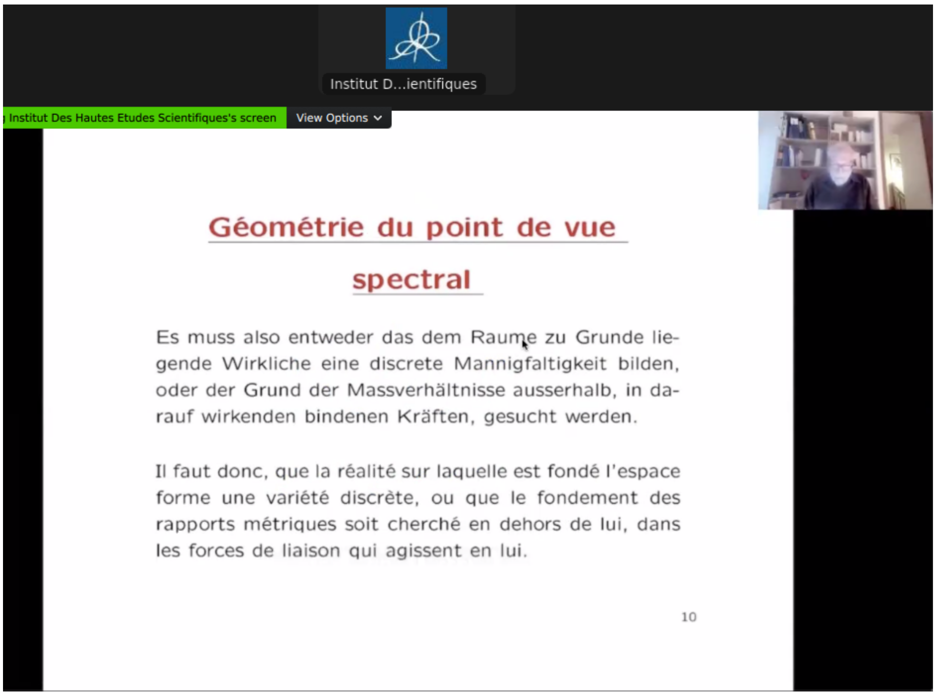
Et je veux dire de plus que cela vous autorise à commencer à calculer, quand vous regardez les fluctuations intérieures, et que vous commencez à calculer les différents termes que vous avez comme termes compteurs.



Maintenant je voudrais terminer cet exposé si vous voulez avec deux questions. Donc comme je l'ai dit, le paradigme spectral de la géométrie non-commutative permet de prendre en compte les corrections quantiques, comme je l'ai dit, vous savez, au niveau d'une seule particule. Maintenant il s'avère que la théorie quantique des champs nous apprend que, bien sûr, se restreindre au niveau d'une seule boucle ou au niveau d'une seule particule est un peu trop naïf. Et il y a une question fondamentale dont je ne connais pas la réponse, j'ai seulement quelques idées à son propos et qui est : "quel est le formalisme mathématique qui nous permettra de prendre en compte le niveau à n particules. Et alors *mon* idée est que c'est probablement le dual de la K-théorie algébrique de Quillen. Il y a donc cette théorie qui est très sophistiquée. La raison pour laquelle je dis cela est, vous savez, à cause des termes de Schwinger etc. De plus, dans ces dernières années, avec Chamseddine, Mukhanov et van Suijlekom, ce que nous avons fait, c'est que nous avons obtenu en analysant la K-homologie et la dualité entre la K-homologie et la KO-théorie, nous avons obtenu soit les relations de Heisenberg, ce qui vraiment, je veux dire, me rend très heureux parce que j'avais l'impression, qu'il n'y avait plus aucun problème avec la compréhension du groupe de gauge, et tout ça, qui apparaît dans le Modèle standard, ils sont forcés malgré vous par cette dualité. Et ce qui se passe c'est qu'au lieu de cela, au lieu d'être dans un truc très très arbitraire, nous sommes dans un truc qui à cause de cette dualité et tout ça, est celui qui peut être encapsulé par la recette non triviale la plus simple. Maintenant la seconde question est, comme je l'ai dit précédemment, quelle est la signification géométrique de dim-reg ?



Ici je mentionne, vous savez, que quand vous regardez cette fibration que j'ai mentionnée précédemment, vous savez que la fibre au-dessus de z qui est dans le disque ici, ce sont les valeurs possibles, c'est très étrange, ce ne sont pas celles de μ, ce sont les valeurs possibles de μ à la puissance z fois $\hbar$, où $\hbar$ est la constante de Planck. Maintenant, comme je le disais, vous savez, dim-reg a été compris jusqu'ici comme traitant de la famille des graphes à une boucle, et c'est basé sur le dim-reg etc., mais le rêve que j'ai est que quelqu'un soit capable de réconcilier notre compréhension du Modèle Standard couplé à la Gravité venant de la pure gravité sur une structure fine de l'espace-temps avec la renormalisation et que cette réconciliation, en quelque sorte, si vous voulez, correspondrait à une sorte de réalisation optimale de ce que Riemann avait dit dans sa leçon inaugurale,



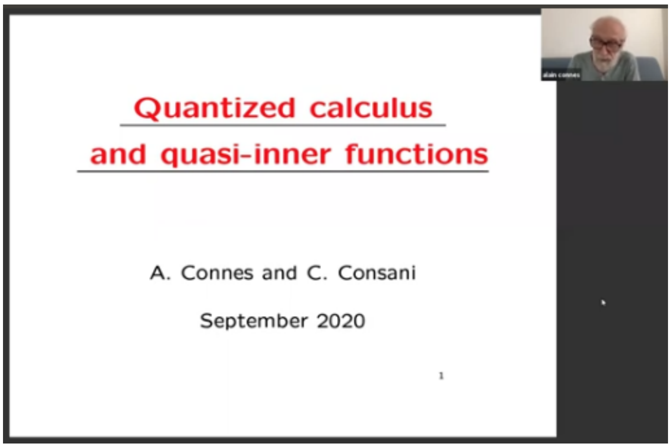
notamment que la véritable géométrie devrait être entièrement basée sur les forces qui sont impliquées aux très petites échelles.

Okay donc je terminerai sur ce point et je vous remercie de votre patience.

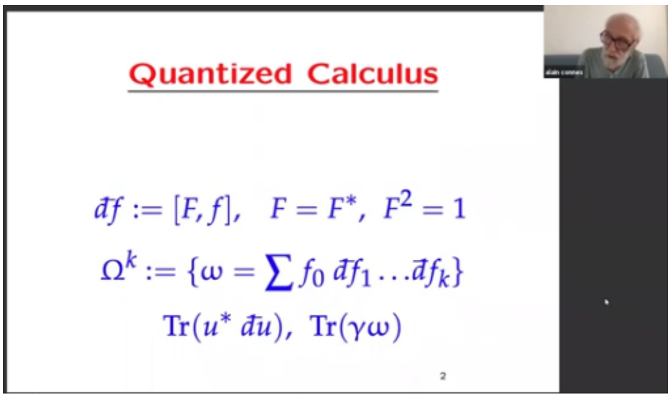
Calcul quantifié et fonctions quasi-intérieures
Alain CONNES

Introduction par Walter van Suijlekom du séminaire NCG.

Merci beaucoup, Walter, et en effet, pour moi, c'est un grand plaisir, vraiment, de donner cette conférence inaugurale pour le séminaire, et ce que je vais expliquer est quelque chose qui a à voir avec le calcul quantifié et qui est un travail conjoint avec Katia Consani. Le contenu est un article que nous avons posté sur l'arxiv en août de cette année, mais il traite aussi beaucoup, comme vous le verrez, d'un article précédent que nous avons mis en ligne plus tôt, vers juin de cette année.

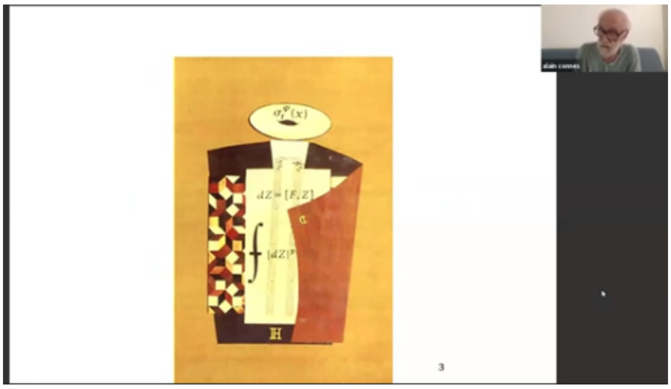


Ce dont je vais discuter, ce sera du lien précis entre le calcul quantifié et la théorie des nombres. Et par rapport au calcul quantifié... je veux vous donner comme une très courte introduction à ce calcul, et l'idée est très très simple. L'idée est la suivante... C'est qu'après tout, il y a un cadre dans lequel le calcul, l'infinitésimal, et beaucoup de choses... ont leur place, et qui vient de la mécanique quantique. Donc le scénario, si vous voulez, la scène, est quantique, dans le sens où vous avez un espace de Hilbert autour, et que tout ce que vous envisagez est en quelque sorte réalisé par des opérateurs dans l'espace de Hilbert.

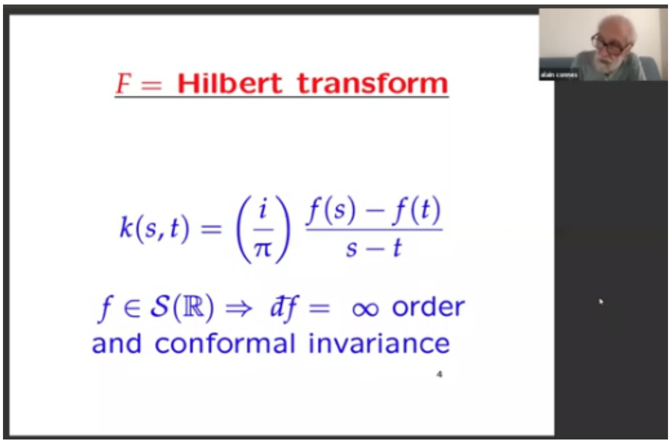


Cette vidéo peut être visionnée ici https://www.youtube.com/watch?v=mmbOQ6h1Qk8.
Transcription Denise Vella-Chemla, 5.12.2020.

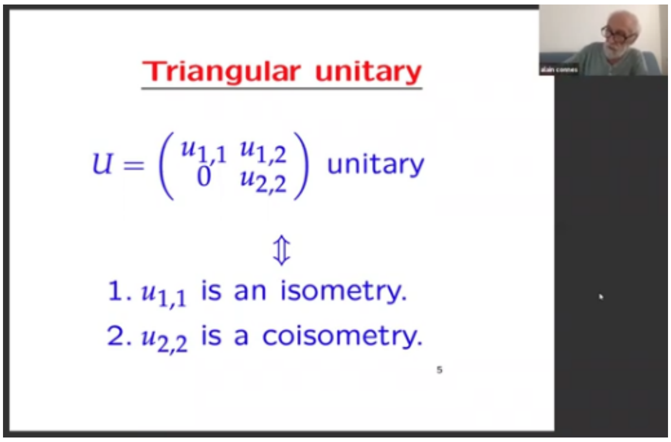
Maintenant, l'équation clé est l'équation qui définit la différentielle. Donc, si vous avez une fonction, pensez-y comme à une fonction mais c'est un opérateur, et vous définissez sa différentielle par le commutateur qui est un opérateur F. Et cet opérateur F est remarquablement simple en ce sens qu'il est auto-adjoint, unitaire et de carré 1. C'est donc un opérateur qui est donné comme deux fois une projection moins l'identité. Et le fait qu'il soit de carré 1 vous indique que lorsque vous prenez deux fois la fonction différentielle, vous obtenez 0. Vous pouvez donc discuter avec moi, vous pouvez dire "bien, maintenant, ce que vous dites est faux" sauf que lorsque vous prenez la différentielle 1-forme qui est déjà une différentielle, vous prenez le commutateur gradué. Donc, au lieu de prendre F commutateur F, vous prenez $FT + TF$. Et si vous faites cela, vous découvrirez que parce que F^2 est 1, le commutateur itéré est 0. Vous pouvez donc définir des formes différentielles. Et les formes différentielles ne sont que les opérateurs qui peuvent être écrits comme des combinaisons de produits de 1-formes et (bien sûr, vous pouvez mettre une fonction devant), mais vous pouvez également mettre cette fonction du côté droit car c'est un bimodule par construction. Maintenant, la beauté de cela est extrêmement simple et dès le début, vous obtenez des formules d'indice. Et la formule d'indice la plus simple est la formule d'indice qui vous donne un nombre d'enroulements d'une fonction sur S^1 comme trace de la différentielle quantifiée de u^*, u^* est le conjugué complexe de cette fonction de module 1, multiplié par la différentielle de u. Et plus généralement, lorsque vous avez affaire à un espace dont la dimension est paire et non impaire, vous devez utiliser, comme dans la théorie de Kasparov, vous devez utiliser un étalon Z_2, appelée petit gamma (γ) et la formule pour l'indice est encore une fois très très simple car vous intégrez la forme différentielle en prenant la notation trace même pour les formes différentielles. Donc tout cela est assez standard et si vous voulez juste... d'abord, laisse moi vous montrer



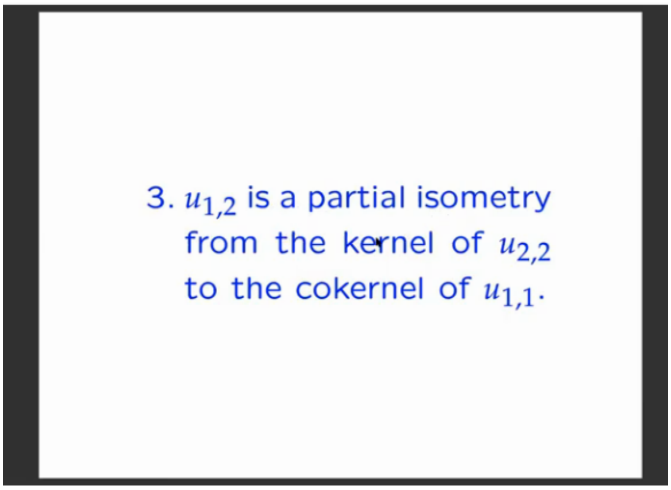
quelle était la couverture de mon livre parce que cette image dit que si vous regardez la différentielle dZ qui est égal à F commutateur Z ($dZ = [F, Z]$), c'est écrit juste au niveau du cou du personnage, mais si vous regardez un peu plus bas, ce que vous trouvez, c'est la chose suivante, que vous devez comprendre comme ceci : vous voyez, normalement, quand vous avez une fonction qui par exemple paramètre un ensemble de Julia ou quelque chose comme ça, par le théorème de recouvrement de Riemann parce que l'ensemble de Julia séparera le plan convexe en deux domaines, l'un simplement connexe, vous pourrez donc l'envoyer sur le disque, mais la fonction qui l'envoie sur le disque, qui envoie plutôt l'ensemble de Julia sur le cercle, est une fonction très discontinue, je veux dire que c'est une fonction qui n'est pas du tout différentiable, elle est continue, on ne se préoccupe pas du noyau de l'adjoint (join kernel ?), mais elle est extrêmement irrégulière, donc si vous voulez prendre sa différentielle comme distribution, cela aurait du sens, mais vous n'auriez aucun moyen de prendre sa valeur absolue et de l'élever à une puissance qui n'est pas un entier, et même un entier ne ferait pas l'affaire. Mais ici, ce que vous pouvez faire, vous pouvez prendre la différentielle quantifiée, l'élever à une puissance qui est un nombre réel, qui est la dimension extérieure de l'ensemble de Julia, et avec mes collaborateurs australiens, Sukochev, Zanin, et leurs collaborateurs, ce que nous avons fait, nous avons pu, ces dernières années, mettre sous une forme rigoureuse ce que j'avais décrit dans mon livre un peu à un niveau heuristique, à savoir le fait que ce type de formule vous donne la mesure conforme sur l'ensemble de Julia ou plus généralement sur la frontière des groupes quasi-fuschiens. Donc je veux dire que ce calcul a beaucoup de pouvoir. En fait, on devrait constamment garder à l'esprit de comparer ce calcul avec le calcul ordinaire et le calcul des distributions et ce que j'expliquerai aujourd'hui, c'est le rôle crucial de ce calcul par rapport à la fonction zeta de Riemann.



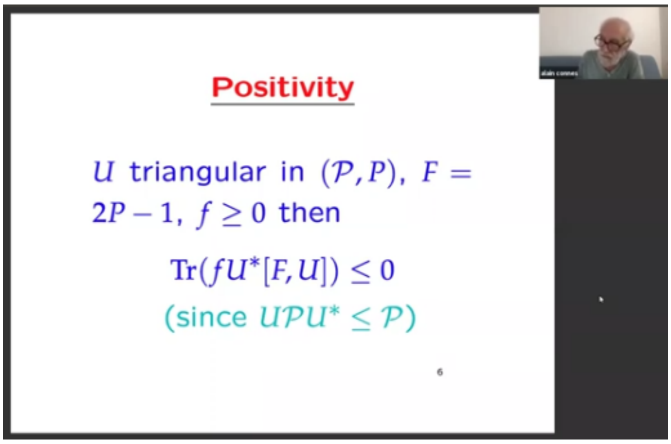
Je veux dire, quand vous prenez l'exemple le plus simple de ce calcul, vous regardez les fonctions sur la ligne, donc ce ne sont que des fonctions ordinaires d'un paramètre réel, vous voyez ces fonctions comme des opérateurs, dans L^2 de la droite réelle ($L^2(\mathbb{R})$), et quand on prend leur commutateur avec la transformée de Hilbert, vous découvrez que la différentielle quantifiée n'est plus seulement la différentielle habituelle, la différentielle habituelle dérivé, la dérivée est bien sûr les valeurs diagonales car c'est f de s moins f de t sur s moins t (c'est à dire $\left(i.e.\ \frac{f(s)-f(t)}{s-t}\right)$ à un facteur de normalisation près, mais ce qui est vraiment important, c'est que la régularité de la fonction régit en fait l'ordre de l'infinitésimal que vous avez sur le côté droit car après tout, la différentielle doit être infinitésimale. Et si la fonction est une fonction de Schwartz, l'espace, c'est un exercice que vous pouvez prouver de plusieurs manières, pour montrer que la différentielle quantifiée de la fonction est un infinitésimal d'ordre infini. L'ordre infini signifie que, si vous voulez, ce qui est assez sympa avec les infinitésimaux, c'est qu'ils ont un ordre. Donc par exemple si vous avez des valeurs propres de l'ordre de 1 sur n ($1/n$), quand n tend vers l'infini, alors l'infinitésimal a l'ordre 1. Si vous avez des valeurs propres qui décroissent très très très vite, alors l'infinitésimal a un ordre infini et c'est le cas ici. Une autre propriété très cruciale de ce calcul, même dans une dimension, est qu'il est conformément invariant. Par conformément invariant, je veux dire que si je remplace la ligne par le cercle, alors je pourrai obtenir un isomorphisme du calcul, à partir du calcul sur la ligne avec le calcul sur le cercle. Maintenant, vous pouvez discuter avec moi "D'accord, mais comment pouvez-vous relier la ligne avec le cercle ?". Eh bien, la ligne, si vous avez compacté par un seul point, c'est $\pi^1(\mathbb{R})$. Et comment le reliez-vous au cercle ? Eh bien, vous le rapportez comme des domaines dans le plan complexe, qui sont équivalents, donc vous voyez la ligne comme la limite du demi-plan supérieur et vous voyez le cercle comme la limite du disque-unité. Maintenant, les deux choses sont liées par une transformation conforme. Vous avez un peu à faire attention en définissant la transformation sur les vecteurs, pas sur les fonctions, car sur les vecteurs vous voulez que le produit interne de $L^2(\mathbb{R})$ se transforme en produit interne de $L^2(S^1)$. Alors vous devez introduire, vous savez, quelque chose qui ressemble à la racine carrée du dénominateur, quand vous prenez la transformation conforme. Le dénominateur est toujours au carré par construction. Alors vous faites ça et tout fonctionne bien. Et puis, on prouve que si vous êtes en $S(\mathbb{R})$, la différentielle est d'ordre infini, et que si vous êtes dans S^1, et que vous regardez une fonction dans $\pi^1(\mathbb{R})$, alors il s'avère que la fonction est lisse car à l'infini, elle se comporte très bien. Alors quand vous la regardez comme une fonction sur S^1, c'est une fonction lisse et quand vous regardez le calcul sur S^1, car c'est lié aux structures complexes, ce calcul qui est donné par ce f, f est le double de la projection moins 1 où là, la projection sera la projection sur l'espace de Hardy, H^2 du disque (i.e. $H^2(D)$). Donc en fait c'est très facile alors, très facile, c'est un exercice très facile de prouver que si vous avez une fonction $\mathbb{C}^\infty$ sur S^1, sa différentielle quantifiée est d'ordre infini. Il suffit de regarder le coefficient de Fourier qui doit se décomposer très rapidement. Donc, tout cela est très simple et cependant bon, il y a une caractéristique typique du calcul que nous verrons immédiatement qui est que, si vous regardez le calcul ordinaire, les différentielles ordinaires, les fonctions ordinaires, etc., elles ne seraient pas transparentes mais elles sont complètement transparentes avec ce calcul. Et ce que je veux expliquer c'est le fait que nous pouvons gérer la positivité. Nous allons donc avoir une prise en main immédiate de la positivité, de l'indice, si vous voulez, sur la chose que j'expliquais auparavant, la trace de U^*VU donc nous allons obtenir cette possibilité à cause du fait que lorsqu'on regarde les opérateurs unitaires,



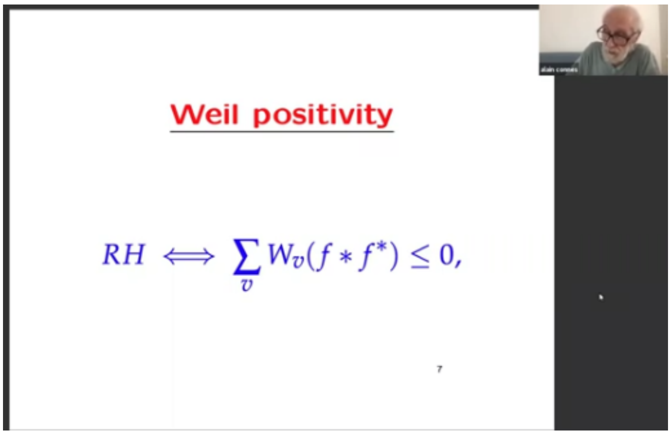
on peut se demander "quand on a une décomposition matricielle deux $\times$ deux d'un opérateur, qui est typique de ce qui se passe dans un calcul quantifié, que se passe-t-il si la matrice représentant l'unitaire est triangulaire ?" D'accord, je vais donc simplement énoncer un exercice simple que vous pouvez faire dans votre tête, quand je parle, c'est pour caractériser ces matrices 2×2 qui forment un opérateur unitaire mais qui sont triangulaires, il y a un zéro à la place $2, 1$. C'est un exercice très simple de montrer que c'est équivalent à trois choses, la troisième sera sur la page suivante. La première est que $u_{1,1}$ est une isométrie, donc $u_{1,1}^* u_{1,1}$ est égal à 1. La seconde est que $u_{2,2}$ est une co-isométrie. Donc $u_{2,2}u_{2,2}^*$ est égal à un.



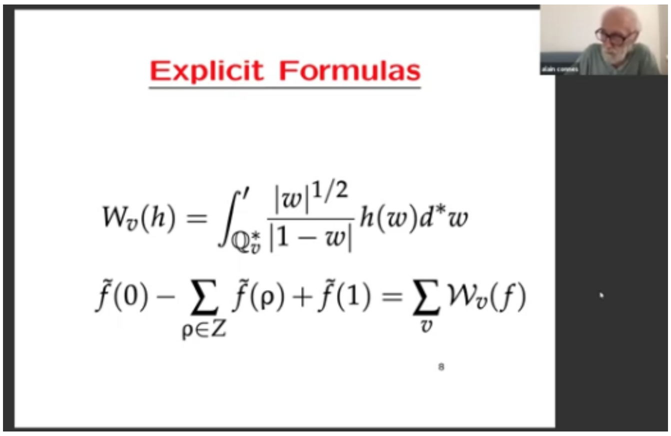
Et la troisième est que $u_{1,2}$, celui qui est hors de la diagonale, est une isométrie partielle qui va du noyau de $u_{2,2}$, rappelez-vous, $u_{2,2}$ est une co-isométrie donc elle pourrait avoir un noyau, au conoyau de $u_{1,1}$, encore une fois, $u_{1,1}$ est seulement une isométrie donc elle peut ne pas être surjective donc elle doit avoir un conoyau. Alors les conditions sont celles-ci, ce sont des conditions très simples, il est très facile de vérifier cet exercice, mais elles joueront un rôle clé dans ce que nous faisons. Et la raison pour laquelle elles joueront un rôle clé est que quand vous avez un tel unitaire triangulaire, par rapport au F du calcul quantifié, vous prenez le F, le F décompose l'espace de Hilbert en une somme de deux espaces de Hilbert, tout autre opérateur a une décomposition matricielle 2×2, et maintenant vous pouvez demander qu'elle soit triangulaire. Eh bien si c'est le cas,



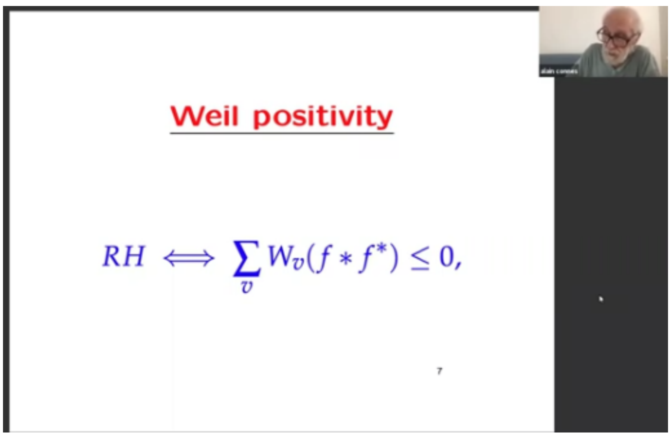
ce que vous trouverez, en deux minutes, vous constaterez que vous avez une positivité pour l'indice, et même une forme de positivité renforcée. La positivité de l'indice sera donc simplement le fait que la trace de $fU^*[F,U]$ est positive, je préfère la mettre négative comme vous le verrez plus tard. Alors je prends mon F pour être de la forme $2P-1$, il a un complément que j'appelle $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ est juste $1-P$) et maintenant que se passe-t-il ? J'affirme qu'il y a un fait de négativité qui est encore une fois très simple à vérifier qui est que la trace du produit de f par ce qui donne l'indice, à savoir la dérivée logarithmique de U, la dérivée logarithmique quantique, $U^*[F,U]$ sera négative. Ensuite, vous prouvez cela, eh bien, ce n'est pas un problème pour prouver que $U^*[F,U]$ est négatif. Tout d'abord, vous pouvez voir que $U^*[F,U]$ est auto-adjoint, car F est auto-adjoint, et vous conjuguez F et vous soustrayez, donc c'est auto-adjoint, mais alors ce que vous trouvez, c'est que pour cette projection $\mathcal{P}$ ce que vous trouvez est que l'$U\mathcal{P}U^*$ est inférieur à $\mathcal{P}$. Donc en jouant, vous trouvez que cet opérateur dans U^*F commutateur U (i.e. $U^*[F,U]$) est négatif. Mais le produit d'un opérateur positif par un opérateur négatif a une trace négative, on le sait. Je veux dire la trace du produit de deux opérateurs positifs est positive. Je veux dire, il faut s'en souvenir parce que c'est non seulement vrai que la trace d'un opérateur *positif* est positive, non, la trace du *produit* de deux opérateurs positifs est positive. Comment le prouvez-vous ? Eh bien, je veux prouver que la trace d'AB est positive, A et B sont positifs. Alors qu'est-ce que je fais ? Je prends la racine carrée de A. J'écris donc la trace de AB sous forme de trace de racine carrée de A fois B fois racine carrée de A. Et c'est bien sûr positif. Donc ça c'est fait. D'accord ? Donc c'est ce que nous avons, nous avons un type d'indice assez général, qui est un fait général sur les unitaires triangulaires. Et je préfère, comme je l'ai dit, l'écrire comme un fait négatif. D'accord. Maintenant, voici le premier point crucial.



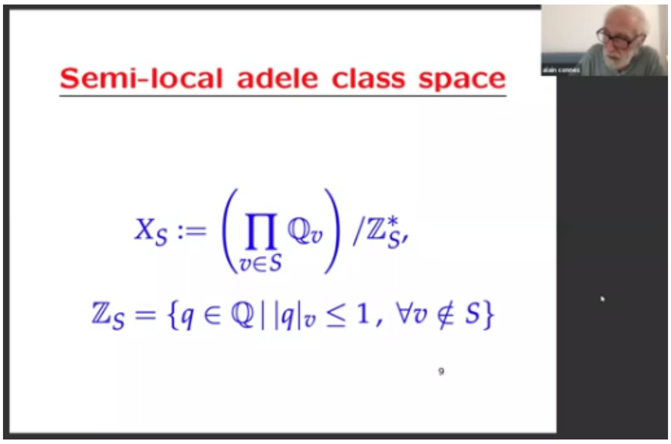
Le premier point crucial est que la conjecture de Riemann RH équivaut également à un état de négativité. Oh, vous pouvez dire positivité si vous aimez jouer, mais... et qu'est-ce que c'est que cette déclaration ? Cette déclaration, il nous a fallu beaucoup de temps pour vraiment non pas comprendre, car comprendre, vous pouvez comprendre une déclaration, c'est une chose très différente de l'avoir absordée. Alors je veux dire que c'est un fait que l'hypothèse de Riemann, même si c'est une hypothèse qui implique une infinité de nombres premiers, et qui concerne la distribution des nombres premiers, il s'avère qu'elle est équivalente à cette assertion et dans cette assertion, si vous considérez f comme à support compact, et que ??... , donc f est une fonction test, je vais bien expliquer ce que c'est, et ainsi de suite, mais le fait clé est que si f est à un support compact, le nombre de nombres premiers impliqués dans le côté droit est fini, ce qui est étonnant. C'est étonnant parce que l'équivalence de Weil vous dit que même si l'hypothèse de Riemann est quelque chose qui implique une infinité de nombres premiers, en fait, pour la prouver, il suffit de considérer un nombre fini de nombres premiers à la fois. Et c'est un si et seulement si. Cela dit que ce n'est pas une histoire de passage à la limite, vous savez, que vous allez le prouver pour un nombre fini de nombres premiers et ensuite... très bien, d'accord, non, c'est équivalent.



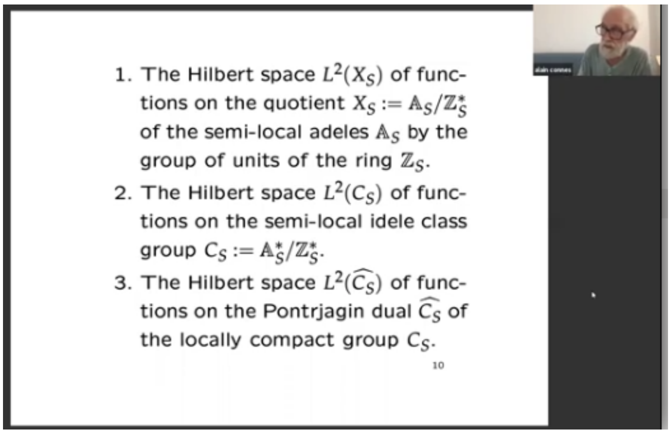
Et que sont ces W_v, eh bien, ils sont donnés dans ce qu'on appelle les formules explicites qui étaient certainement connues de Riemann. Elles sont appelées formules de Riemann-Weil. Maintenant, en termes modernes, bien sûr, d'accord, vous devez expliquer que ce sont des intégrales sur le groupe multiplicatif des champs p-adiques $\mathbb{Q}_p$ qui pour la place archimédienne est juste la ligne des réels et ensuite vous faites une intégrale. Cette intégrale est délicate à calculer, et elle l'est pour la raison suivante: la fonction de test n'a pas besoin de disparaître en le point 1. L'intégrale va donc en quelque sorte diverger en $w = 1$ et vous devez prendre de façon très précautionneuse une valeur principale. Donc une valeur principale, qu'est-ce que cela signifie, cela signifie que ce que vous faites est que vous soustrayez à h une fonction de choix qui a en fait la même valeur que h en 1 et puis vous vous déplacez un peu. Donc ce que j'ai écrit là est l'intégrale prime $\int'$, donc je veux dire, dans mon article en 98 j'ai beaucoup évolué là-dessus mais je veux dire d'accord, c'est bien défini, mais vous devez être extrêmement prudent lorsque vous travaillez avec, car si vous prouviez la positivité pour une mauvaise normalisation, vous n'auriez rien fait. Cette équivalence de Weil est basée sur ce qu'on appelle les formules explicites. Et ces formules explicites vous indiquent que si vous prenez la somme des transformées de Fourier (ici c'est une transformée de Mellin mais les deux sont liées) sur les zéros de la fonction zeta de Riemann, vous mettez un signe moins devant, vous ajoutez deux valeurs limites qui sont l'évaluation aux pôles de la fonction zêta de Riemann complète et qu'obtenez-vous, vous obtenez cette somme des contributions locales. Et à partir de là, vous pouvez déduire ce que je disais auparavant, à savoir que RH est équivalente à cette déclaration de négativité.



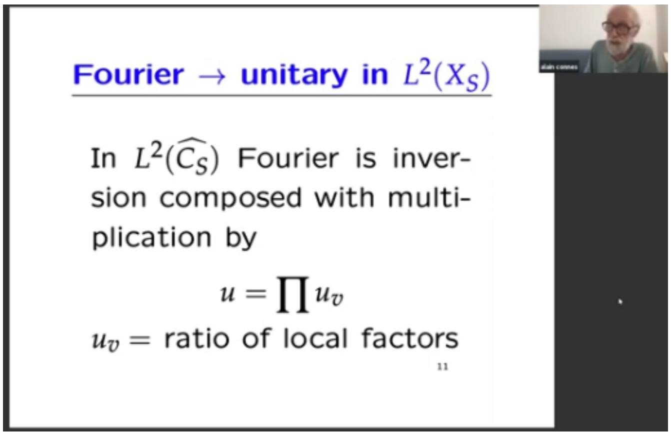
D'accord ? Mais maintenant quel est le lien ? Comme je l'ai dit, il y a cette caractéristique remarquablement frappante, par l'équivalence de Weil, qu'il suffit de regarder un nombre fini de nombres premiers. Et j'ai dit aussi, vous savez, ça il a fallu des années avant que l'on absorbe bien cette déclaration profondément. Et quand elle s'est ancrée plus profondément, je me suis rendu compte que ce que j'avais développé dans mon article en 1998



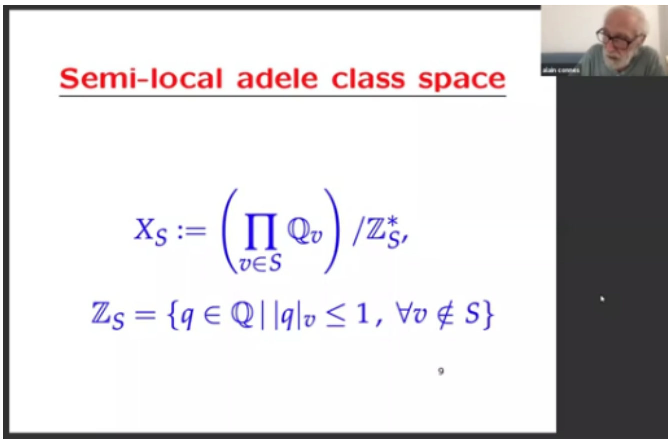
devrait jouer un rôle. Alors qu'est-ce que j'ai imaginé dans cet article de Selecta en 1998 ? Eh bien, j'avais conçu un espace global qui est l'espace des classes d'adèles et où, c'était bon, on pouvait trouver la réalisation spectrale et ainsi de suite. Cependant, cet espace global avait quelque chose d'extrêmement naturel et délicat. Et cela était dû au fait que lorsque vous regardez les adèles, le produit restreint du champ local sur toutes les places, et quand vous regardez les idèles, c'est la même chose, mais vous ne regardez que les éléments inversibles, puis il s'avère que lorsque vous les regardez tous les deux comme des groupes, vous regardez les adèles comme un groupe additif et les idèles comme un groupe multiplicatif, alors il s'avère que les mesures de Haar pour ces deux groupes sont singulières l'une par rapport à l'autre et cela rend la chose extrêmement délicate et compliquée. Mais cette pathologie si vous voulez, cette difficulté ne se pose pas lorsque vous prenez un produit fini. Et ce produit fini n'est pas l'adèle complet, mais il ne prend qu'un nombre fini de places. J'appelle S cet ensemble fini des places qui contient le lieu archimédien, et je prends maintenant le produit des champs locaux sur cet ensemble. Et je vais le diviser par ce qui devrait le diviser s'il était infini et je devrais le diviser par les nombres rationnels, les nombres rationnels multiplicatifs, mais je le divise par les éléments inversibles dans un certain anneau qui est associé à l'ensemble S et pour rendre la chose très concrète, permettez-moi de prendre S comme constitué de la place archimédienne et du nombre premier 2. Alors quel serait l'anneau $\mathbb{Z}_S$? Eh bien, ce serait l'anneau de tous les nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2. Vous voyez, je veux dire, quand vous prenez des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2, vous pouvez les ajouter, vous avez toujours un dénominateur qui est une puissance de 2 et vous pouvez les multiplier. Alors vous obtenez un anneau. Maintenant, dans cet anneau, tous les éléments ne sont pas inversibles, les éléments qui sont inversibles ne sont que les puissances de 2, plus ou moins. Donc, ce fait que je mentionne se généralise, et maintenant nous allons atteindre le cœur de la géométrie non-commutative car lorsque vous divisez le produit de ces champs $\mathbb{Q}_v$ par le groupe multiplicatif des éléments inversibles de cet anneau $\mathbb{Z}_S$ (soit $\mathbb{Z}_S^*$), dès que vous avez plus de trois places disons, c'est un espace non-commutatif. Vous pouvez comprendre pourquoi c'est un espace non commutatif, parce que, par exemple, si je divisais $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_3$ par des puissances de 2 et 3, vous verriez que la façon dont ils agissent sur la ligne réelle divise la ligne réelle par des puissances de 2 et 3, et bien sûr, c'est un espace non-commutatif. Mais le fait étonnant est qu'au niveau de la théorie de la mesure, ce n'est pas un espace non-commutatif. En d'autres termes, cet espace X_S, comme vous le savez, en géométrie non-commutative, on regarde toujours un espace avec plusieurs paires de lunettes. Et la théorie qui a les verres de lunettes les plus grossiers est la théorie de la mesure. En d'autres termes, ce que nous faisons, c'est que nous prenons notre espace et nous le regardons du point de vue de la théorie de la mesure, ce qui signifie que nous pouvons négliger les ensembles de mesure 0. Lorsque nous faisons cela, il s'avère que l'espace des classes d'adèles semi-local est un espace standard. Pourquoi ? Parce que la mesure est portée par l'idèle. C'est-à-dire que la mesure est portée par les éléments dans le produit des champs locaux qui correspondent à des éléments inversibles, car les autres sont de mesure 0. Vous voyez si l'un des éléments est nul, il n'est pas inversible dans le champ local, alors il sera de mesure 0 pour la mesure de Haar additive. Donc en fait ce que nous trouvons, qui est totalement différent de l'aspect global, c'est que dans l'aspect semi-local, pour la théorie de la mesure, c'est parfait. Donc le fait que ça soit parfait du point de vue de la théorie de la mesure nous permet d'avoir un espace de Hilbert parfait.



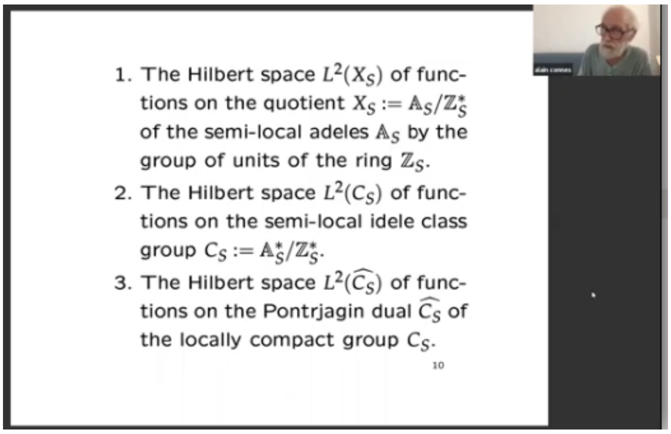
Donc l'espace de Hilbert L^2 de cet espace quotient X_S (i.e. $L^2(X_S)$), car les mesures sont les mêmes, c'est-à-dire qu'elles sont équivalentes, a un sens parfait, et il peut être défini, d'accord, vous pouvez définir le produit interne, comme vous le feriez dans le cas global, mais d'accord, tout va bien, et il s'avère qu'il est canoniquement isomorphe, mais l'isomorphisme n'est pas trivial, à l'espace de Hilbert des fonctions sur le groupe de classes d'idèles semi-local, qui est un groupe multiplicatif, et qui est le quotient des éléments inversibles dans les adèles, qui sont les idèles,, divisés par $\mathbb{Z}_S^*$. Et enfin, c'est aussi isomorphe à ce que vous obtenez en prenant le groupe $\widehat{C_S}$ et vous prenez son dual de Pontrjagin. Bien sûr vous savez, il est toujours vrai que lorsque vous prenez L^2 d'un groupe localement compact, il est isomorphe au L^2 de son dual de Pontrjagin. Vous pouvez donc le faire ici. Vous devez garder à l'esprit que vous avez trois espaces de Hilbert. Ils sont tous les trois isomorphes, mais les isomorphismes sont très significatifs et non triviaux. Et chaque fois que vous pensez à l'un d'entre eux, vous devez penser à sa signification. Puis, vous serez surpris par la traduction. Donc, ce qui joue le rôle absolument fondamental se déroule en fait dans le premier. Parce que vous pourriez dire “ok pourquoi considèrent-ils ces trois, euh, comment dire, ces trois incarnations, ces trois avatars du même espace Hilbert ?”, eh bien... regardez le premier, qui est le quotient des adèles par $\mathbb{Z}_S^*$, il s'avère que la transformée de Fourier



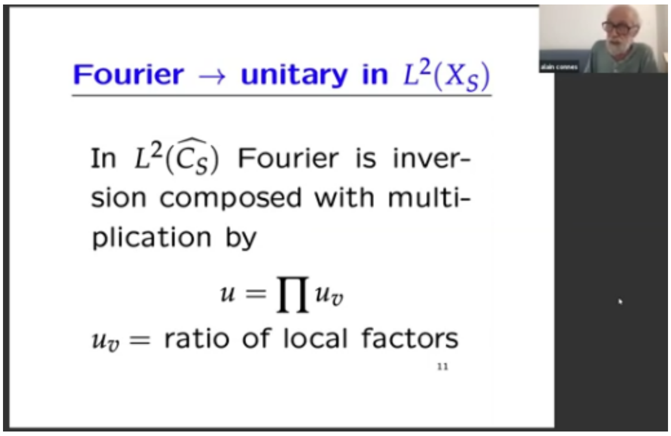
définit l'unitaire dans cet espace. Quelle est la transformée de Fourier ?



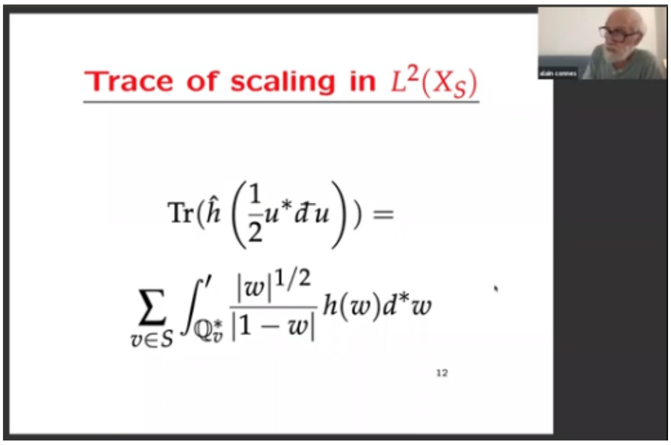
Eh bien la transformée de Fourier, ce que vous faites c'est que vous prenez la transformée de Fourier sur chaque champ local $\mathbb{Q}_v$ et ensuite, parce que le produit intérieur est en quelque sorte divisé par $\mathbb{Z}_S^*$, vous devez prouver, cela nécessite un peu de travail, que la transformée de Fourier passe au quotient. D'accord, vous pouvez le prouver. Mais la transformée de Fourier est vraiment le produit tensoriel de la transformée de Fourier à chaque place, et il est remarquable que cela passe au quotient. Alors ça passe au quotient, et quand ils sont dans le quotient,



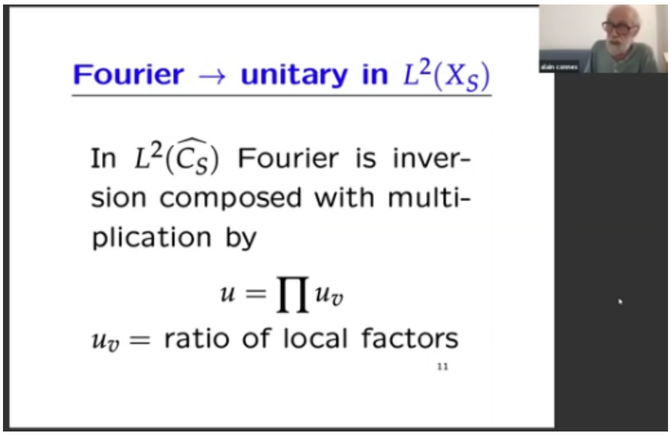
alors ce que vous pouvez faire, c'est que maintenant vous pouvez jouer au jeu du passage d'un espace de Hilbert à l'autre et comprendre ce que cela devient. Maintenant je suppose que je n'ai pas besoin de rappeler le travail de Tate sur l'équation fonctionnelle locale. Alors, ce que Tate a fait, il a montré que vous savez, si vous considérez un champ local, donc n'importe lequel des $\mathbb{Q}_v$, cela pourrait être $\mathbb{R}$, et si vous considérez la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}$, pensons à propos de la transformée de Fourier et j'espère pouvoir vous apprendre quelque chose que vous ne savez pas mais c'est très bien connu, que si vous prenez la transformée de Fourier sur la ligne réelle, alors quand vous prenez la transformée de Fourier d'une fonction qui est mise à l'échelle, elle est mise à l'échelle par exemple par φ, d'accord, alors vous obtiendrez la même fonction, comme la transformée de Fourier de la fonction originale, sauf que vous redimensionnez de $\frac{1}{\varphi}$. D'accord, il y a un facteur de mise à l'échelle mais laissez-moi ignorer cela. Donc, si vous pensez à cela, vous réfléchirez et vous direz, d'accord, Qu'est-ce que ça veut dire ? Cela signifie que si je compose ma transformée de Fourier avec l'inversion de la variable, donc je remplace la variable x par $\frac{1}{x}$, alors ce qui se passe, c'est qu'après tout, si je redimensionne ma variable qui était à partir de, puis je compose l'inversion avec la transformée de Fourier, je remets à l'échelle par la même quantité. Qu'est-ce que cela dit, pour les algébristes fondamentaux ? Ça dit que le groupe de mise à l'échelle commute avec l'inversion composée à la transformée de Fourier. Mais le groupe de mise à l'échelle, quand vous considérez l'algèbre de von Neumann qu'il engendre, il engendre une algèbre abélienne de von Neumann maximale en L^2. Donc, si quelque chose commute avec la mise à l'échelle, alors il doit s'agir d'une mise à l'échelle. Eh bien, ça ne doit pas être la mise à l'échelle par un seul élément mais la mise à l'échelle par une convolution de mises à l'échelle. Alors quand on applique ça, on trouve que localement, pour chaque place v, la transformée de Fourier composée avec l'inversion est en fait donnée par une mise à l'échelle par une certaine fonction, et cette fonction a été étudiée par Tate, et cette fonction est le rapport des facteurs locaux. Alors maintenant, le miracle si vous voulez de l'espace des classes d'adèles semi-local est que la même chose est vraie lorsque vous prenez maintenant le produit fini de ces champs locaux, mais vous divisez par ce groupe, puis ce qui se passe, encore une fois



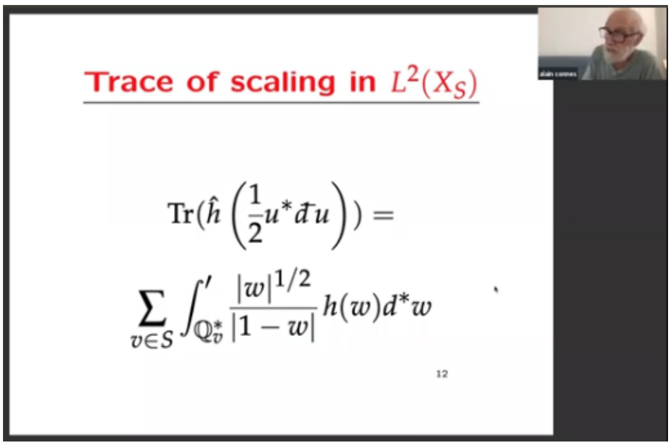
c'est que la transformée de Fourier composée avec l'inversion est en fait donnée, quand on passe au dual, donnée par une mise à l'échelle mais dans le groupe dual, la mise à l'échelle devient multiplication. C'est donc une multiplication par un produit de termes. D'accord. Alors c'est ce que nous avons. Et sans l'espace des classes d'adèles semi-local, vous obtiendriez un seul u_v mais vous n'obtiendriez jamais leur produit. Alors, comment utilisez-vous ce produit ?



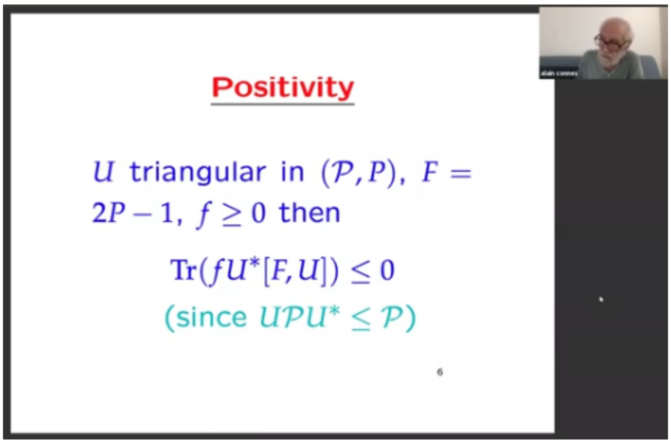
Vous utilisez ce produit car maintenant vous pouvez le combiner avec le calcul quantifié, et vous obtenez une formule pour la formule explicite de Weil, qui est maintenant exprimée dans les termes du calcul quantifié. Alors, quelle est cette formule ? Sur la deuxième ligne, vous avez les termes qui interviennent avec ces valeurs principales très précises dans la formule de Weil et ce que vous avez de l'autre côté. Et qu'avez-vous de l'autre côté, vous avez le même type d'expression dont je prétendais que nous avions un contrôle sur leur positivité ou sur leur négativité précédemment, à savoir que c'est une trace de la transformée de Fourier de la fonction h fois la différentielle quantifiée, ok il y a un facteur de $\frac{1}{2}$, ok, très bien, et quel est le $u^* đ u$, c'est exactement l'expression que j'utilisais pour l'indice. Et quel est le u, eh bien le u est le 1 que nous avions avant,



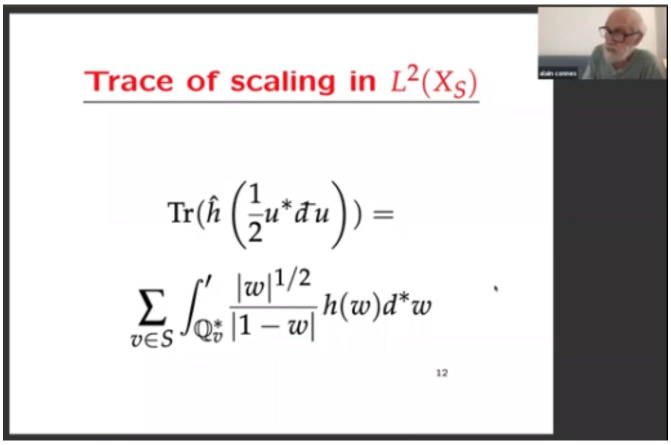
c'est le produit des u_v.



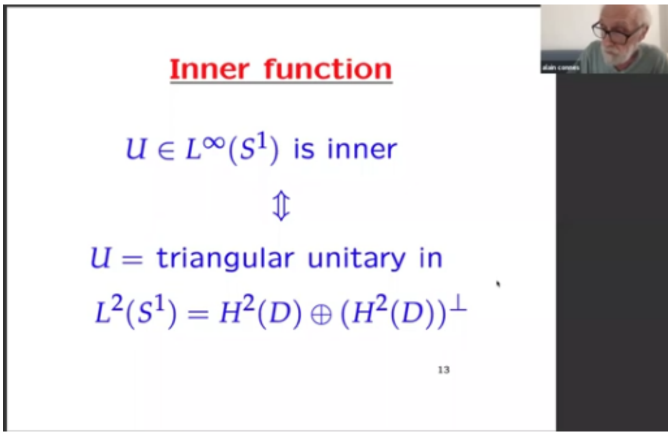
Maintenant vous savez, c'est bien sûr la formule de trace semi-locale que j'avais prouvée dans mon article en 1998. Mais j'ai toujours été intrigué par le fait que cette formule de trace semi-locale vous donnait une somme sur les places. Pourquoi était-ce déroutant ? C'était déroutant car après tout, vous prenez le produit des $\mathbb{Q}_v$, le produit des champs locaux, donc lorsque vous prenez un produit de champs locaux, vous vous attendez à ce que la trace vous donne un produit, pas une somme. Alors pourquoi délivre-t-elle une somme ? Elle délivre une somme car ce $u^* đ u$ est comme une dérivée logarithmique, vous voyez, u est un unitaire et quand vous prenez $u^* đ u$, vous êtes vraiment comme en train de calculer une dérivée logarithmique. Maintenant la dérivée logarithmique d'un produit, bien sûr, il faut faire attention car les choses ne commutent pas, mais c'est bon, je veux dire, vous pouvez jouer, quoi vous trouvez que la trace de ce produit fournit la bonne formule pour Weil mais elle a exactement le même aspect que ce que nous avions rencontré lorsque nous parlions de ces unitaires, à savoir exactement le même aspect que cette trace sur



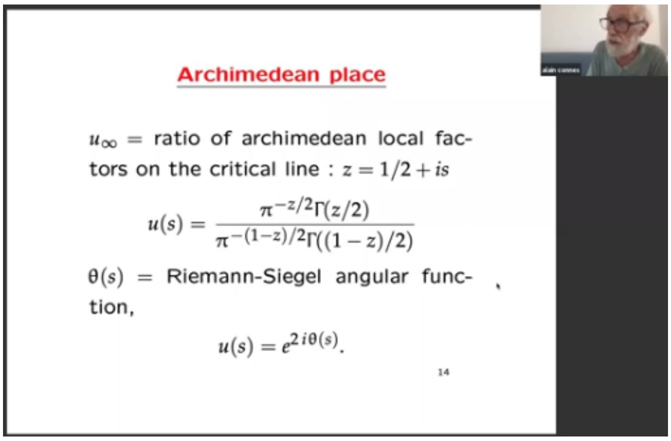
f fois $U^*[f, U]$ qui était négatif. Nous sommes donc très intéressés par cela dans le sens où



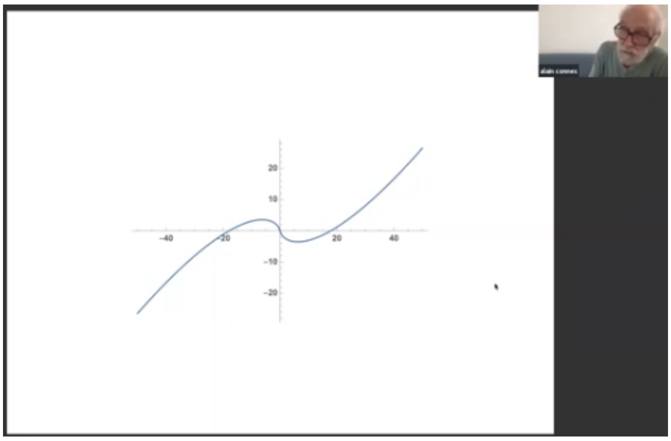
cela montre clairement qu'il existe un lien entre la négativité de Weil que nous voulons prouver et la sorte de formules d'indice que nous connaissons très bien, en géométrie non-commutative, et qui, vous savez, entre directement lorsque vous regardez le calcul quantifié. Alors vous savez, on dirait, "d'accord, bien", et c'est en fait ce qu'on aurait dû essayer depuis le tout début. Après tout, ça aurait pu être les unitaires donnés par Tate, parce qu'après tout nous regardons le produit d'unitaires je veux dire, ça pourrait être triangulaire parce que nous devons les regarder un par un, car il est vrai qu'un produit de matrices triangulaires est triangulaire. Alors ok, vous pouvez regarder ce qui se passe



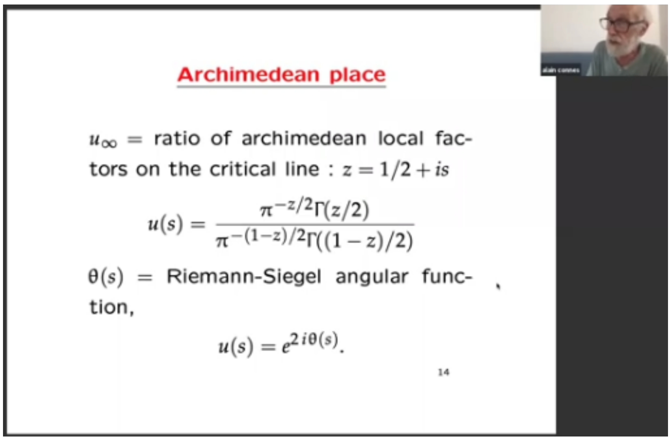
qu'est-ce que cela signifie, que la matrice unitaire est triangulaire pour le calcul quantifié ? Et en fait, ce que vous découvrez, c'est qu'il existe une théorie existante, qui est due à Beurling et Hardy et à plusieurs autres personnes qui vous disent que si vous prenez une fonction qui est dans $L^2(S^1)$ qui est unitaire, vous trouvez, c'est ce qu'on appelle une fonction intérieure si et seulement si l'unitaire correspondante est triangulaire dans la décomposition de $L^2(S^1)$ selon le calcul quantifié naturel, et notamment qu'elle a à voir avec l'espace de Hardy pour le disque ($H^2(D)$) et son complément orthogonal ($H^2(D)^\perp$). Bon alors c'est un exercice simple et je vous recommande de regarder dans le livre de Rudin et de comprendre le lien avec la positivité et tout ça. Tout est transparent quand on pense en ces termes. Alors d'accord, alors bien sûr, vous pouvez dire "OK, je vais essayer de voir,



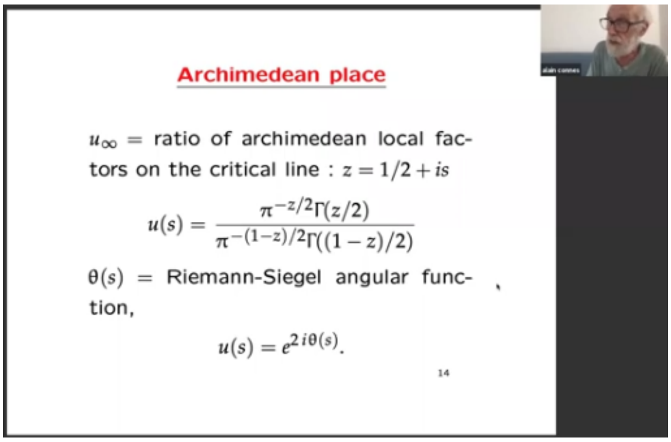
si, à l'endroit archimédien qui est la première chose dont vous avez besoin, s'il est vrai qu'il s'agit d'une fonction intérieure...". Alors, quelle est la fonction ? La fonction est le rapport des facteurs locaux selon Tate, donc ce rapport des facteurs locaux est le suivant. Le facteur local à l'∞ est est pi puissance moins z sur 2 fois gamma de z sur 2 et il faut diviser par ce que serait son complexe conjugué sur la droite critique, ce qui revient à remplacer z par $1-z$ (i.e. $u(s) = \dfrac{\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2}\Gamma((1-z)/2)}$). Ceci est donc une fonction. Cette fonction au début, vous ne l'affichez que pour la droite critique, mais vous devez voir la droite critique comme une limite du demi-plan, et c'est la limite du demi-plan qui se trouve à sa gauche. Vous pouvez maintenant calculer cette fonction. Cette fonction n'est pas difficile à calculer et elle est donnée par le exponentielle de $2i\theta\, s$ où $e^{2i\theta(s)}$ où $\theta(s)$ est ce que l'on appelle la fonction angulaire de Riemann-Siegel. Cette fonction angulaire de Riemann-Siegel est très importante car lorsque vous regardez la fonction zeta de Riemann sur la droite critique, ce n'est pas une vraie fonction. Pour en faire une vraie fonction sans changer son module, il faut la multiplier par l'exponentielle de $i\theta(s)$ où $\theta(s)$ est la fonction angulaire de Riemann-Siegel et ici vous obtenez le double à cause de ce que j'ai dit auparavant. Eh bien, il pourrait y avoir un signe, d'accord. Maintenant, ce qui se passe, c'est que lorsque vous regardez cette fonction de Riemann-Siegel, elle a ce graphe,



vous découvrez que cela ne peut pas être une fonction intérieure, la précédente ne peut pas être une fonction intérieure car une fonction intérieure aurait une dérivée toujours du même signe, toujours positive. Donc, quand vous regardez cette fonction, vous découvrez que ce n'est pas le cas, Xian-Jin, vous savez, un très bon mathématicien chinois avait proposé une idée qui était liée à cela mais j'ai trouvé que cela ne pouvait pas fonctionner car cette fonction n'est pas monotone, d'accord, Xian-Jin Li. Alors ce qui s'est passé, c'est qu'alors vous dites "d'accord, c'est dommage, on ne peut pas utiliser ces unitaires triangulaires et tout ça."

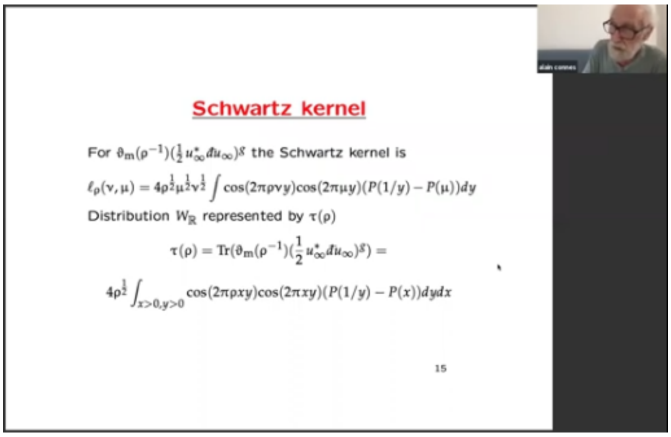


Et ce que nous verrons, et c'est le sujet de mon discours aujourd'hui, c'est que heureusement, il existe une belle théorie des



fonctions quasi-intérieures, et avec cette théorie des fonctions quasi-intérieures, cela réparera le fait que cette fonction n'est pas intérieure. Et j'expliquerai que dans les deux papiers avec Katia en particulier dans l'article de juin, nous avons pu atteindre l'objectif de prouver cette positivité de Weil pour le lieu seul archimédien, ce qui bien sûr est très loin de l'objectif global, ou l'objectif du nombre fini qui suffirait, mais cependant, maintenant, nous avons vraiment la raison fondamentale pour laquelle la positivité de Weil devrait être vérifiée.

Pour montrer comment nous l'avons compris,

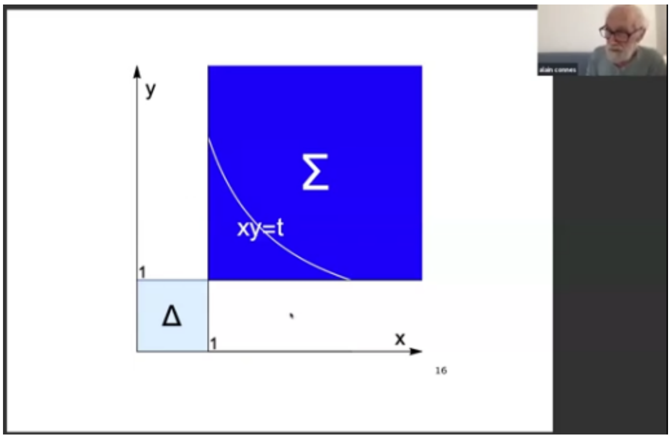


ce que nous avons fait dans le premier article, c'est parce que Katia a toujours insisté sur le fait que nous devrions toujours avoir à la fois une compréhension analytique et une compréhension géométrique, et si vous voulez obtenir la signification géométrique du calcul que je faisais en 1998, il faut passer à la géométrie non pas en regardant l'opérateur mais en regardant le noyau de Schwartz de cet opérateur. Donc, quand vous regardez ce qui se passe dans la formule de trace semi-locale, l'opérateur qui entre est l'opérateur, vous n'avez pas à comprendre en détails ce que c'est, c'est cet opérateur ici[1]. Voici la différentielle quantifiée[2], et voici l'opérateur de mise à l'échelle[3]. Et vous regardez le noyau de Schwartz de cet opérateur, et vous pouvez le calculer. C'est un opérateur très malin. Et quand vous le calculez, ce que vous trouvez, tout d'abord, vous trouvez que vous pouvez re-prouver la formule de trace semi-locale en utilisant cet opérateur, nous sommes ici dans la place archimédienne, mais vous découvrez quelque chose qui est évident sur le plan visuel

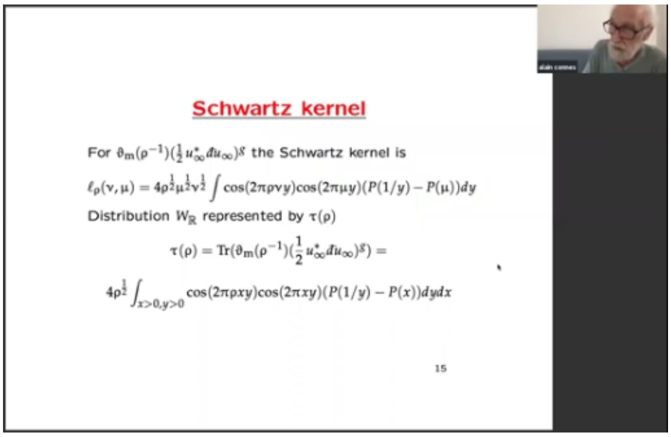
[1]entourant $\frac{1}{2}u_\infty^* \,\mathrm{đ}\, u_\infty$.

[2]entourant $\left(\frac{1}{2}u_\infty^* \,\mathrm{đ}\, u_\infty\right)^g$.

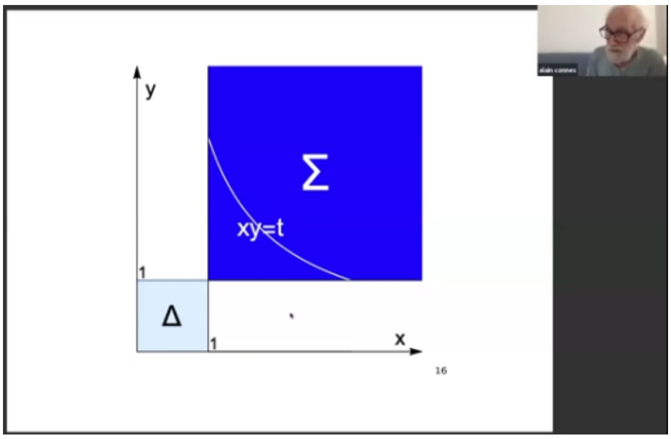
[3]entourant $\theta_m(\rho^{-1})$.



car ce qui se passe, c'est que la différentielle quantifiée, quand on fait les choses géométriquement, il est donné par le commutateur avec la projection



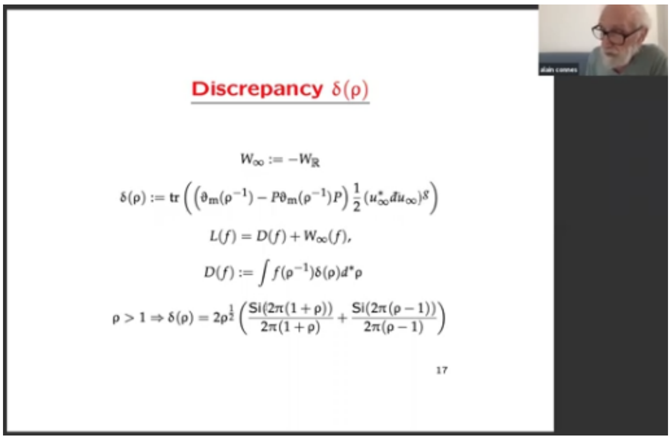
mais cette projection[4] n'est plus la transformation de Hilbert ou quelque chose de compliqué comme ça, c'est juste la projection sur les éléments qui sont plus grands que 1 *(il rit)*. Donc, quand vous considérez le commutateur et quand vous faites un changement de variables, vous trouvez que



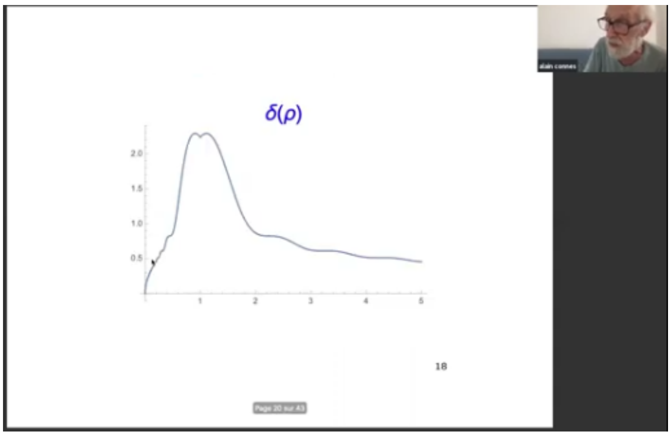
lorsque vous écrivez le commutateur, il ignorera les régions qui ne sont pas dans le petit carré et dans le grand carré. Et quand vous calculez ce qui se passe avec le grand carré, vous constatez que la positivité de Weil ou si vous voulez les choses que vous voulez sont évidentes, là, parce que vous pouvez les écrire en termes de projections et ainsi de suite. Et donc le nouveau sens est le petit

[4]entourant $P(1/y)$

carré. Alors quand vous voyez ça géométriquement, vous êtes obligé de définir ce que nous appelons l'écart.



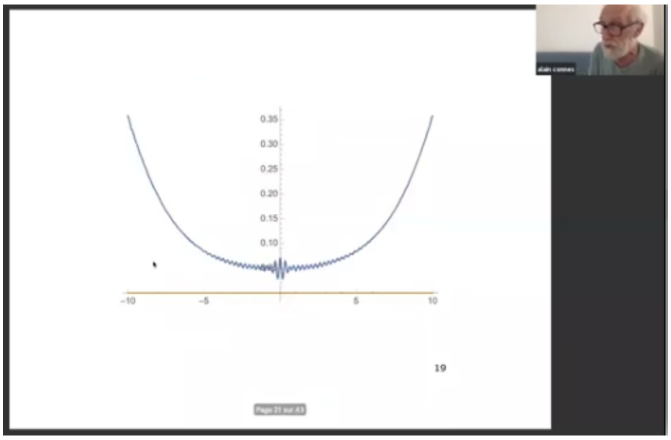
L'écart est ce qui est dû au petit carré Δ et vous pouvez écrire une formule pour cet écart, d'accord, vous n'avez pas à vous perdre dans la formule, mais l'écart est quelque chose qui est vraiment une fonction en fait, ce n'est même pas une distribution, on l'appelle $\delta(\rho)$ et quand on définit la fonctionnelle qui est donnée par ce $\delta(\rho)$, nous avons pu la calculer, cette fonction, et pour ρ plus grand que 1, elle est donnée par une formule explicite. C'est donc une vraie fonction et le symbole que l'on voit ici[5] est appelé le sinus intégrale. C'est donc l'intégrale de 0 à x de sin x sur x fois dx (c'est-à-dire $\frac{\sin x}{x}$ dx). Cela a du sens car il se comporte bien en 0 et c'est une fonction connue, vous pouvez l'avoir sur l'ordinateur sans aucun problème. Et quand vous tracez cette fonction parce que cette égalité avec le Si et ainsi de suite n'est vraie que pour ρ supérieur à 1 mais la fonction est symétrique. Si vous changez ρ en ρ inverse (i.e. $\frac{1}{\rho}$), elle ne change pas, et son graphe est de cette forme.



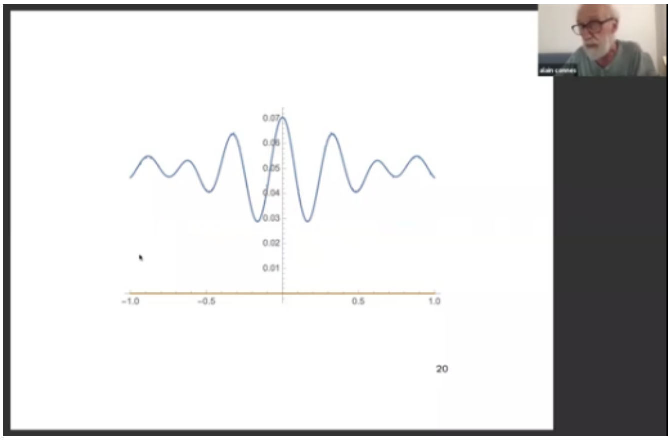
Vous obtenez une fonction qui a ce graphe. Et il s'avère que cette image particulière de ce graphe qui a cette singularité ici[6] jouera un rôle plus tard. Mais une fois que vous avez cette fonction, vous pouvez vous dire "oh mon Dieu !". Maintenant, ce qui se passe, c'est que théoriquement, nous pouvons prouver que si nous ajoutons la distribution de Weil à la place archimédienne, cette nouvelle distribution, ce nouveau $D(f)$ devrait être positif. Bien. Que signifie être positif ? être positif signifie que lorsque vous passez à la transformée de Fourier, la transformée de Fourier est

[5] dernière ligne, page 17.
[6] montrant une singularité pour $x = 1$.

une transformée positive, c'est tout ce que cela signifie. Alors ce que nous avons fait... Nous avons utilisé l'ordinateur ; avec l'ordinateur, nous avons calculé la transformée de Fourier de cette fonction $\delta(\rho)$, d'accord. Et nous avons essayé de voir si dans ce que nous avions obtenu, la dérivée de la fonction angulaire de Riemann-Siegel serait positive. Et voici le graphe que nous avons obtenu.

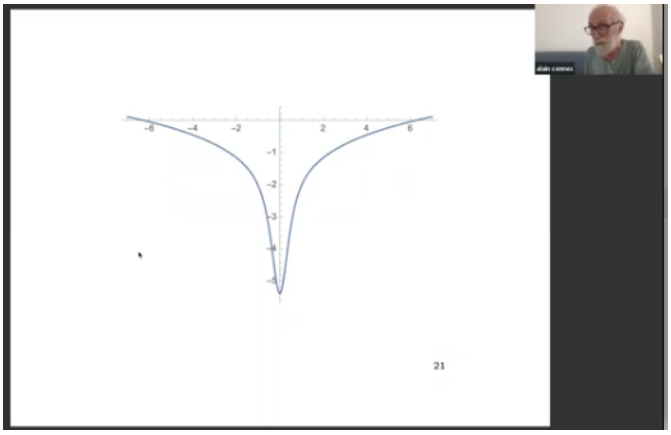


Quand vous voyez ce graphique, je l'ai appelé quelque chose comme les portes de l'enfer, ça, vous savez parce que regardez la valeur qui est ici[7], c'est une très petite valeur, et elle doit être supérieure à 0. Et quand vous regardez, quand vous faites un zoom, pour voir ce qui se passe près de 0, c'est ce que vous voyez.

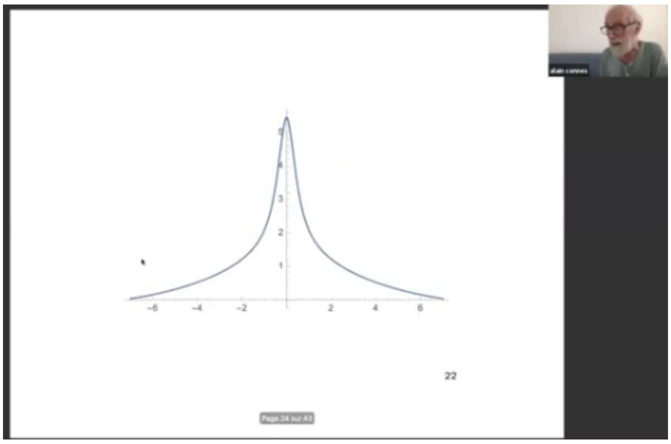


Vous voyez donc que la somme de ces deux choses, la somme de la dérivée de la fonction de Riemann-Siegel (deux fois la dérivée), plus cette fonction est en fait positive, mais il y a mieux pour ressentir ce qui se passe, vous prenez l'opposée de la fonction Riemann-Siegel, cela vous donne ce graphe

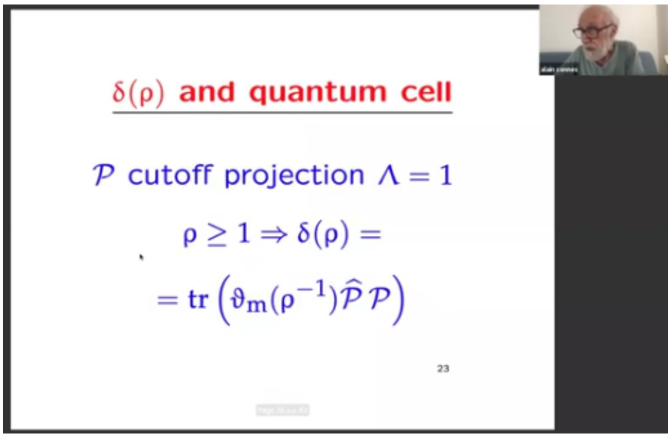
[7] montrant la valeur sur l'axe des y.



c'est un graphe qui est exactement comme ça. Et maintenant, quand vous regardez la transformée de Fourier de l'écart de cette fonction $\delta(\rho)$, c'est le graphe que vous voyez:

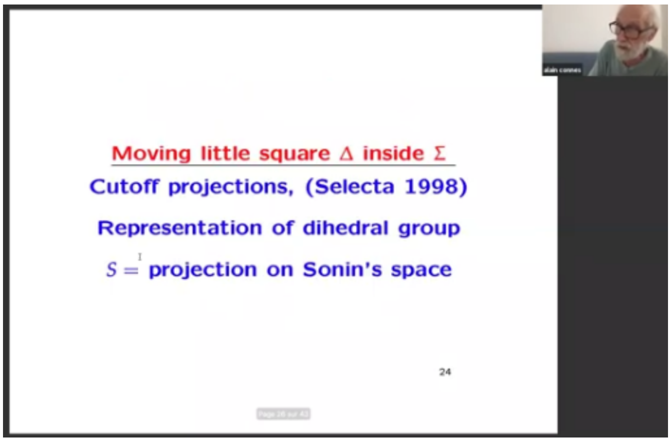


alors, *(rires)* cela signifie que ce graphique est presque... qu'il compense exactement la négativité de l'autre. Alors bien sûr, il faut prouver théoriquement que la somme est positive et ainsi de suite, c'est fait, pas de problème, et ensuite il faut contrôler cette fonction $\delta(\rho)$.

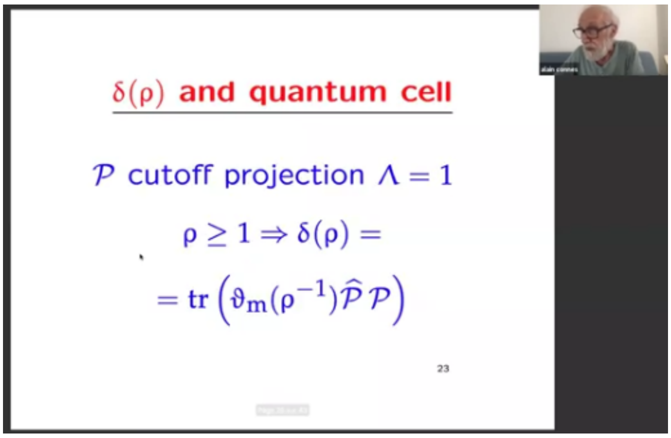


Or, ce que nous avons prouvé dans l'article de juin avec Katia, c'est que lorsque nous avons examiné cette fonction $\delta(\rho)$, c'est en fait lié à la cellule quantique, à savoir à quelque chose que j'avais défini dans mon article en 98 qui est la projection de coupure pour la valeur de la coupure qui est 1. Et donc pour ρ plus grand que 1, ce $\delta(\rho)$, cet écart, n'est en fait que la trace du rapport d'échelle multiplié par $\widehat{\mathcal{P}}\mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est la projection sur cette projection de coupure, et $\widehat{\mathcal{P}}$ est la transformée de Fourier. D'accord.

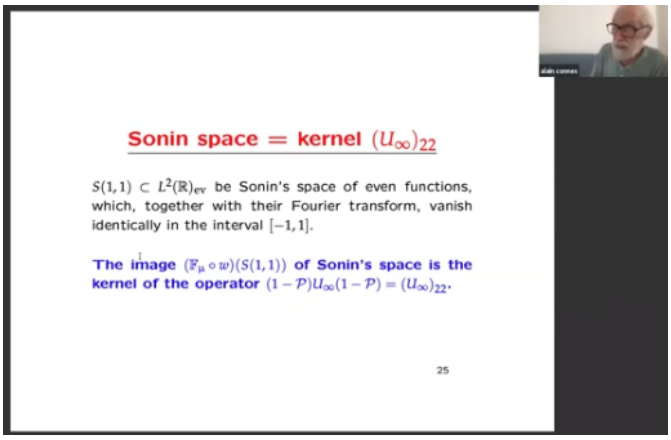
Donc, si vous voulez, il y a tout un travail qui est fait, ce que nous avons fait dans ce papier, c'est la chose suivante, c'est-à-dire que lorsque vous avez une paire de projections, dans l'espace de Hilbert, eh bien, vous savez, vous vous sentez très bien. Parce qu'une paire de projections, c'est la même chose qu'une représentation du groupe diédral,



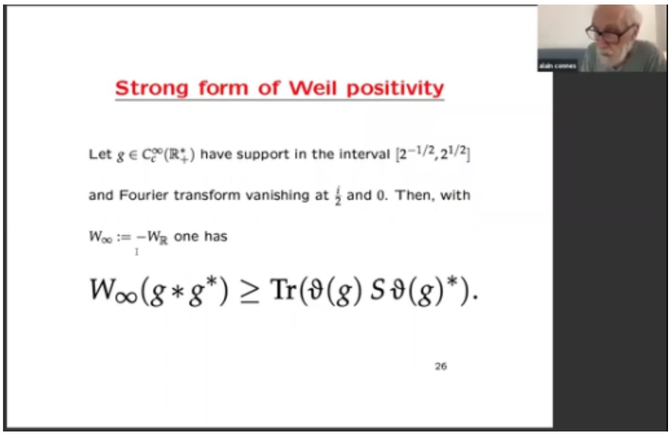
et les représentations des groupes diédraux, elles sont juste données... les représentations irréductibles sont données par un angle. Et de plus, pour ces projections de coupure dans l'article Selecta, j'avais utilisé la théorie qui était connue, qui est la théorie due à Slepian et à plusieurs autres personnes, qui vous permet de calculer cet angle, et de calculer les valeurs propres, ainsi cela vous permet de comprendre la situation. Mais dans la situation, il y a quelque chose d'étonnant qui se passe, c'est que lorsque vous regardez les projections $\mathcal{P}$ et $\widehat{\mathcal{P}}$,



dans $L^2(\mathbb{R})$ prenons donc des fonctions paires, donc $\mathcal{P}$ est une projection sur des fonctions qui ont un support entre -1 et 1, et $\widehat{\mathcal{P}}$ est la transformée de Fourier, maintenant il s'avère que ce n'est pas vrai que $\mathcal{P}$ et $\widehat{\mathcal{P}}$ génèrent tout l'espace de Hilbert. Il existe un sous-espace orthogonal à la fois à $\mathcal{P}$ et à $\widehat{\mathcal{P}}$. Ce sous-espace est bien connu, on l'appelle l'espace de Sonin et cet espace de Sonin est formé des ℓ^2-fonctions qui s'annulent identiquement sur $[-1,1]$ et dont la transformée de Fourier s'annule aussi identiquement sur $[-1,1]$. Et il est de dimension infinie. D'accord. Alors vous regardez, vous regardez, et que trouvez-vous ?



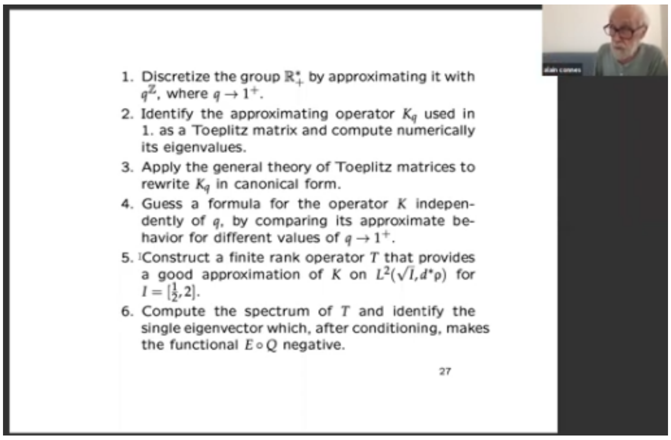
Vous trouvez qu'en fait, cet espace de Sonin était déjà parfaitement là dans la décomposition de ce facteur local U_∞ dans le découpage du calcul quantifié, c'est-à-dire qu'il s'avère que cet espace de Sonin est juste le noyau du $(U_\infty)_{22}$. Je vous rappelle donc que si nous avions eu un opérateur triangulaire, le noyau de $(U_\infty)_{22}$ aurait été une clé[8], car $(U_\infty)_{22}$ aurait été une co-isométrie et son noyau ici, il s'avère que c'est un simple exercice de démontrer que c'est exactement l'espace de Sonin.



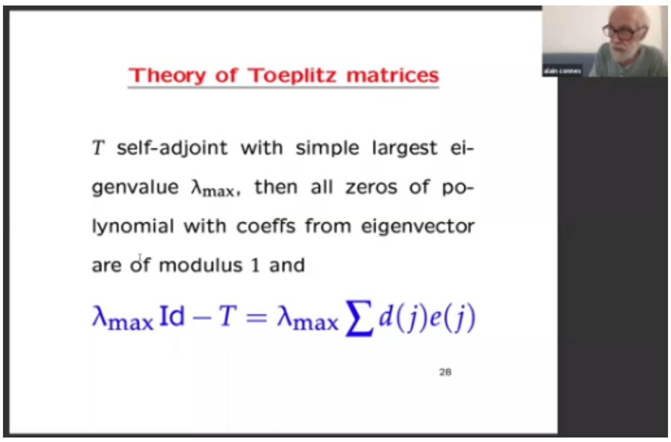
Et ce que nous avons prouvé avec Katia dans l'article de juin, c'est qu'il existe en fait une forme beaucoup plus forte de la positivité de Weil qui vous dit que lorsque vous prenez la fonctionnelle de Weil, que vous voulez prouver comme étant positive, et lorsque vous l'évaluez sur les éléments positifs $g * g^*$, alors elle s'avère être plus grande que, je veux dire dans certaines conditions aux limites, que la trace de $\theta(g) \times$ l'espace de Sonin $\times \theta(g)^*$. Et bien sûr, le côté droit est évidemment positif. Mais la morale de l'histoire est que la racine de la positivité de Weil est donnée par l'espace de Sonin.

Je ne veux pas passer trop de temps car il m'en reste peu mais vous voyez, ce qui se passe, c'est que la preuve de cette inégalité est très très impliquée là-dedans dans le sens où la première chose que vous faites est

[8] ?

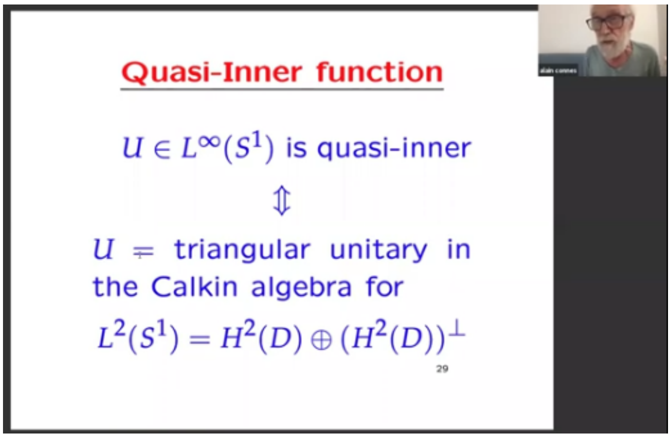


que vous utilisez la paire de projections pour déplacer le petit carré Δ - et vous pouvez écrire une formule pour cet écart - dans le grand carré. Et puis vous trouvez que ce qui reste, c'est l'espace de Sonin. Et puis, quand vous travaillez avec ce qui reste, vous devez prouver l'inégalité, et pour prouver l'inégalité, ce que vous faites, c'est que vous utilisez une technique qui a beaucoup de sens conceptuel, c'est-à-dire que vous remplacez $\mathbb{R}^*$, d' abord en le discrétisant, en le remplaçant par q^z, et vous laissez q tendre vers 1^+. Vous savez que c'est l'histoire de $\mathbb{F}_q$ tendant vers $\mathbb{F}_1$ et ainsi de suite. Mais alors, ce que vous découvrez, c'est que vous pouvez approximer l'opérateur que vous ne connaissez pas par un opérateur approximant qui dépend de q mais qui se trouve être une matrice de Toeplitz. Maintenant, par un heureux hasard, à l'époque où nous faisions ça avec Katia, je collaborais avec Walter, vous savez, sur la généralisation de la géométrie non-commutative à un modèle beaucoup plus large de l'espace d'opérateurs et tout ça, et nous devions nous focaliser en particulier sur les matrices de Toeplitz. J'ai donc appris la théorie des matrices de Toeplitz juste à ce moment-là, et il s'est avéré que cette théorie des matrices de Toeplitz était une sorte de théorie prêt-à-porter à appliquer dans notre cas avec Katia qui est que nous avons pu grâce à cette théorie générale des matrices de Toeplitz deviner à partir du cas de q tendant vers 1 quelle était la forme fermée d'un opérateur qui serait en fait effectivement de rang fini et qui serait une parfaite approximation de l'opérateur K. Je devrais dire aussi d'aussi loin que la puissance du calcul quantifié est concernée que le rôle de Δ est un peu comme une différence infinitésimale entre Weil et quelque chose dont nous savons que c'est positif. Donc l'idée que les opérateurs compacts et les infinitésimaux jouent ici un rôle crucial car vous dites “bon d'accord, vous savez, si ce petit écart et ainsi de suite était nul, nous aurions terminé” ; nous n'avons pas fini mais nous avons affaire à quelque chose de compact. Alors d'accord, je ne veux pas trop entrer dans les détails mais alors ce que nous avons découvert si vous voulez

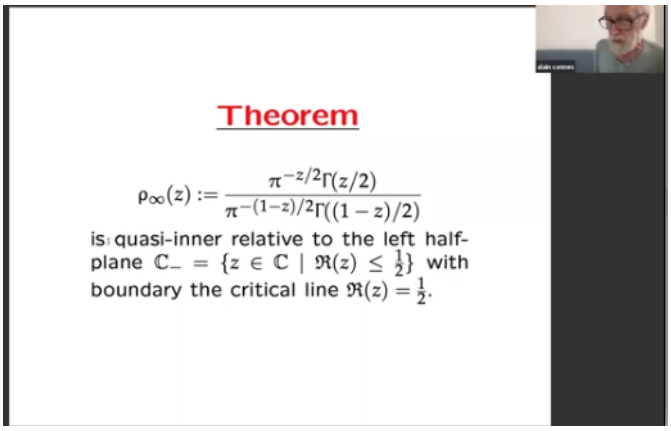


Oui, je devrais dire un mot sur ces matrices de Toeplitz qui devrait vous en dire long, c'est que *(riant un peu)*, il existe une sorte de version bébé de RH pour les matrices de Toeplitz qui est la suivante. Si vous prenez une matrice de Toeplitz auto-adjointe, et si vous prenez sa plus grande valeur propre, eh bien, supposons qu'elle est isolée, alors, il s'avère qu'il existe un polynôme associé au vecteur qui représente cette plus grande valeur propre. Et *(riant un peu)*, c'est un théorème général un peu étonnant que tous les zéros de ce polynôme sont de module 1. C'est donc un fait que nous avons utilisé, dans notre travail avec Katia, pour approximer, pour trouver une limite lorsque q tend vers 1, et ainsi de suite.

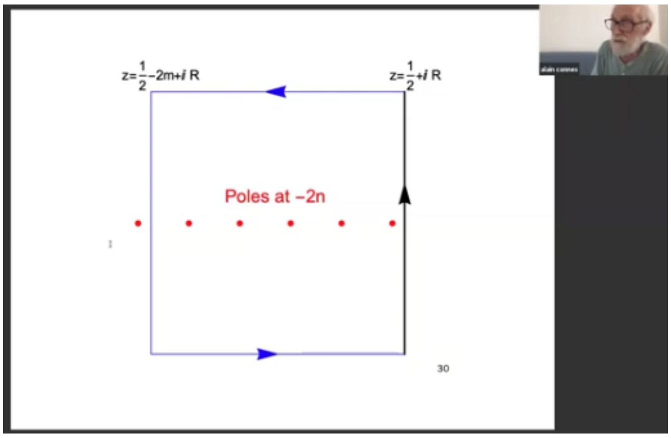
Mais si vous voulez, la chose principale



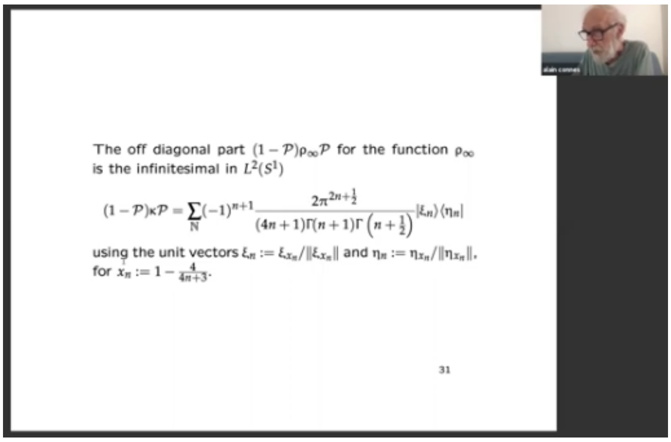
que nous avons découverte peut être encapsulée dans une définition générale. Ce que nous avons constaté, c'est qu'en fait même si cet unitaire U_∞ n'est pas une fonction intérieure, c'est une fonction quasi-intérieure au sens suivant, au sens où quand on regarde la matrice correspondante, la matrice unitaire, elle n'est pas triangulaire, mais lorsque vous regardez dans l'algèbre de Calkin, elle devient triangulaire. Maintenant *(riant)* je veux dire, si vous connaissez les opérateurs, cela signifie que l'opérateur de Haenkel correspondant est compact. Cela équivaut à dire ça. Maintenant *(rires)* bien sûr, cette fonction ne pouvait pas être intérieure, et elle ne pouvait pas être intérieure, parce qu'elle est définie par cette formule



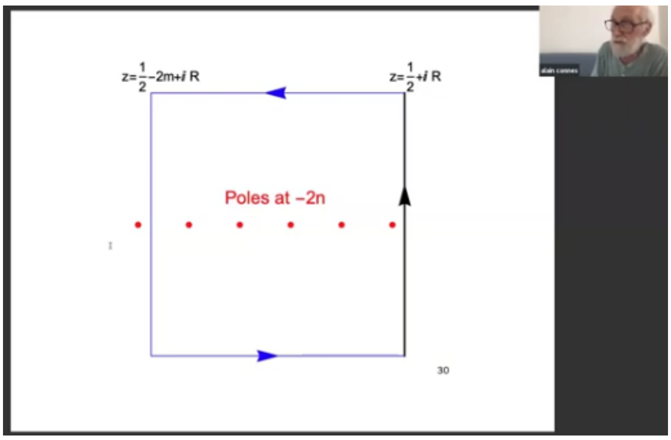
et quand vous regardez cette formule, cette fonction a de nombreux pôles à l'endroit où elle devrait être holomorphe.



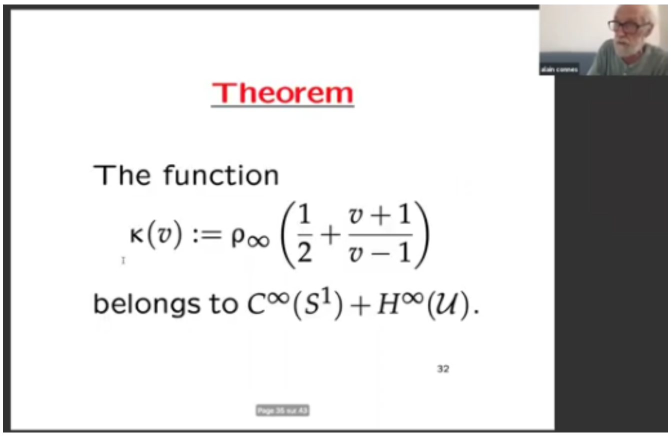
Cela ne peut donc pas être une fonction intérieure. Elle n'est pas holomorphe. Mais si vous travaillez dessus, si vous travaillez suffisamment sur elle, alors vous découvrez que vous pouvez utiliser la formule de Cauchy si vous voulez calculer les coefficients de Fourier négatifs qui devraient normalement être nuls si elle était intérieure. Alors vous faites ça. Vous utilisez la formule de Cauchy pour calculer ces coefficients de Fourier, et à l'aide de cette formule de Cauchy, ce que vous trouvez c'est qu'il y a une belle expession, une expression fermée, pour la partie qui devrait être nulle si la fonction était intérieure.



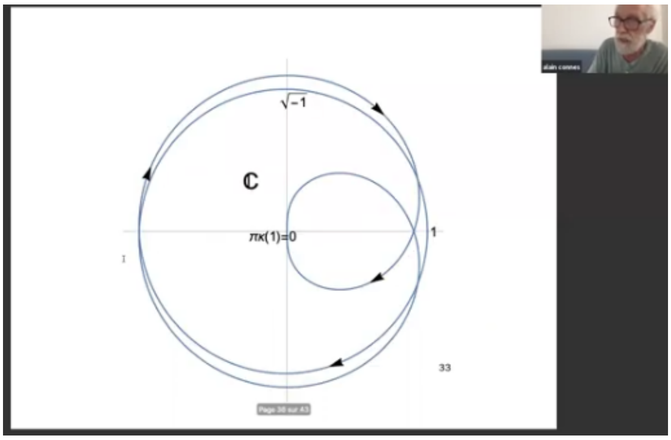
Et regardez cette formule pour cet opérateur, je veux dire. Donc, l'opérateur est $(1-\mathcal{P})\kappa\mathcal{P}$ (κ c'est parce que j'ai changé la variable). Mais regardez la somme que je veux dire. Sur le côté droit, vous avez un opérateur de rang 1, qui est le Dirac bra et ket si vous voulez, ξ_n et η_n qui sont tous deux des vecteurs unitaires mais regardez le coefficient.



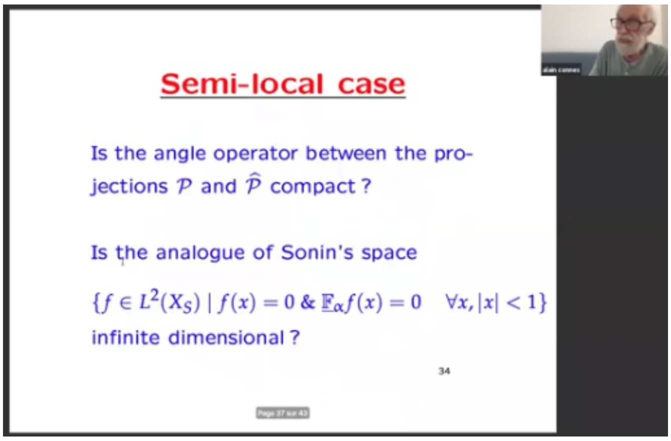
Le coefficient tend vers 0 à une vitesse fantastique, car c'est comme 1 sur Γ fois Γ (i.e. $\dfrac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}$). D'accord, c'est un produit de deux fonctions gamma. Donc, cela ne vous dit pas seulement que c'est un infinitésimal, je veux dire, ça aurait pu être un infinitésimal décroissant comme une exponentielle, non, c'est un infinitésimal de décroissance incroyablement plus rapide, c'est microscopique, presque rien, d'accord. Alors maintenant la question qui se pose et j'arrive à la fin, la question qui se pose est "Que se passe-t-il...?" *(en mettant une autre diapositive)*



En passant, je veux juste mentionner qu'il existe des théories générales sur les opérateurs de Haenkel et etc., et nous sommes capables de décomposer cette fonction comme une somme d'une fonction lisse et d'une fonction holomorphe. C'est bon, c'est connu de tout le monde, et ok, elle a une certaine forme.

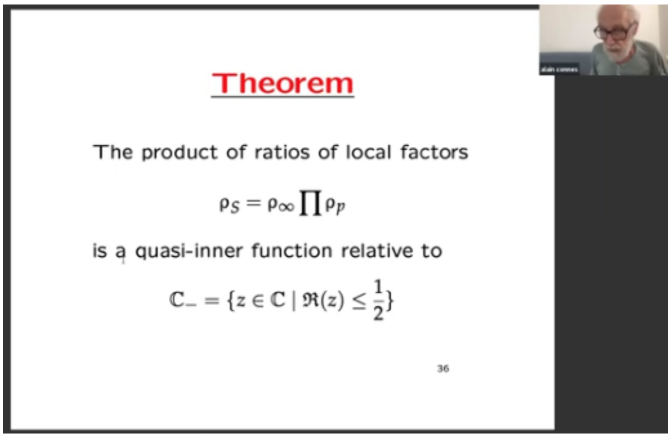


Mais la question évidente est "d'accord, tout ce que vous avez fait, c'est seulement pour la place archimédienne. Et alors que se passe-t-il dans le cas semi-local ?".

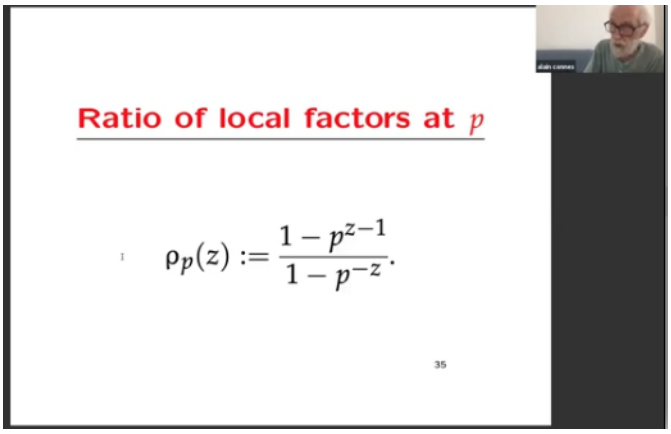


Et il y a deux questions évidentes. La première question, bien sûr, les projections $\mathcal{P}$ et $\widehat{\mathcal{P}}$, elles continuent à exister. La première question est “est-il toujours vrai que l'opérateur d'angle entre les projections $\mathcal{P}$ et $\widehat{\mathcal{P}}$ soit compact ?” car si c'est vrai, vous pourrez imiter la méthode qui a été utilisée dans le cas archimédien. Et deuxième question, eh bien, il y a un analogue évident à l'espace de Sonin, c'est-à-dire que vous pouvez prendre des fonctions dans $L^2(X_S)$ qui disparaissent dans l'intervalle unité, eh bien l'intervalle unité est un petit peu plus délicat à définir, il faut utiliser le module, et les fonctions dont les transformées de Fourier y disparaissent également, et c'est vrai que cet espace est de dimension infinie. Là, il n'y a que deux questions, là, devant nous. Et ce que nous avons prouvé avec Katia...

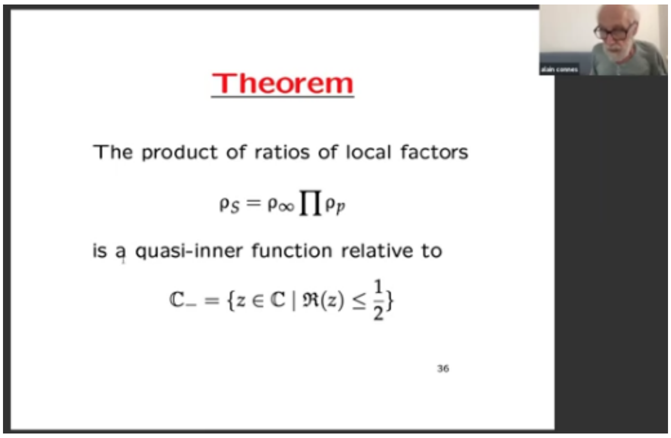
Au fait, les facteurs locaux pour les nombres premiers sont beaucoup plus simples que les facteurs locaux à la place archimédienne. Ils sont donnés par cette formule,



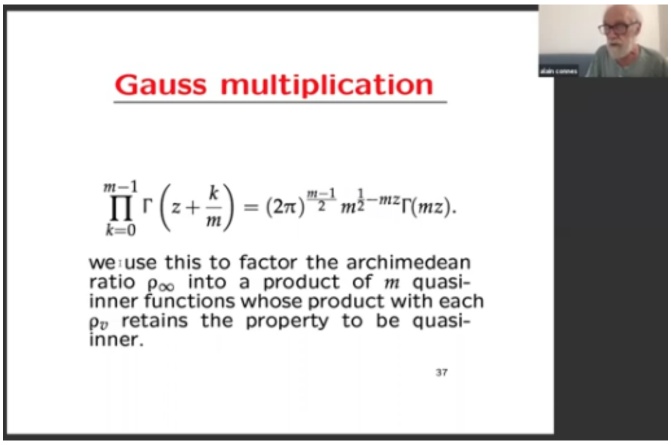
et le théorème que nous avons prouvé avec Katia, nous avons prouvé que si vous prenez un facteur local



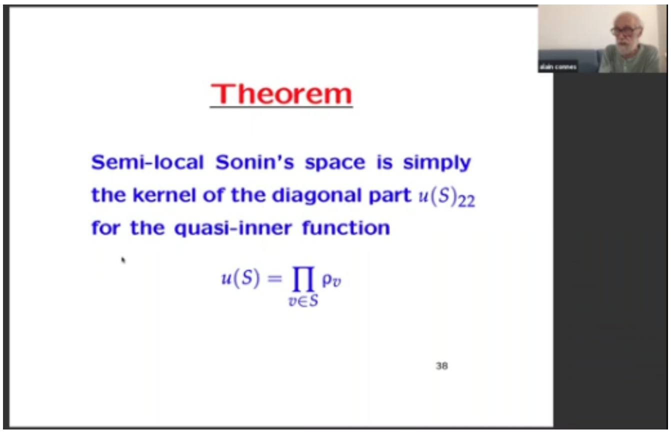
à un premier, il n'est pas vrai que cette fonction soit quasi-intérieure. Alors c'est un point, quand vous voyez ça, vous vous dites "Oh mon Dieu, ils vont tout gâcher", non, ils ne le font pas, car quand vous prenez leur produit,



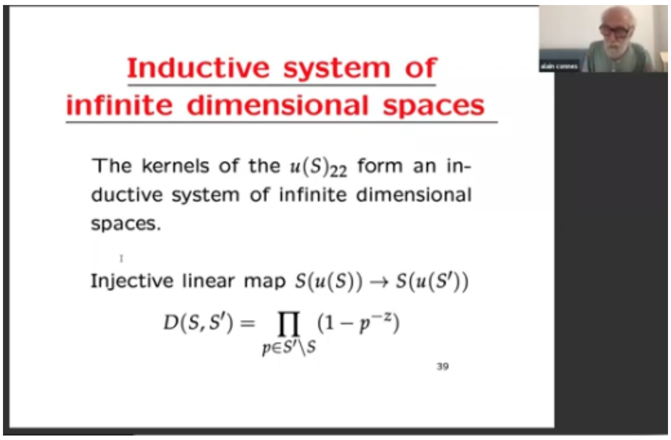
par les facteurs locaux à l'infini, donc si vous prenez le produit des facteurs locaux à l'infini par un nombre fini (de facteurs locaux) du rapport des facteurs locaux aux places finies, alors c'est une fonction quasi-intérieure. Et la manière dont on l'a prouvé est très rusée, car la non-commutativité de l'espace entre en jeu et le fait qu'elle entre en jeu advient dès que vous avez plusieurs nombres premiers. Si vous avez un seul nombre premier, pas de problème. Mais quand vous avez deux nombres premiers, ce qui se passe, c'est que lorsque vous regardez les pôles, le fait que les puissances de 2 peuvent être très proches des puissances de 3 (vous savez $2^{19} \approx 3^{12}$), cela entre pour tout gâcher quand vous essayez de faire la somme sur les pôles. Donc, la manière dont nous avons prouvé ce théorème, nous avons utilisé le théorème de multiplication de Gauss



pour factoriser le rapport archimédien ρ_∞ en un produit de m fonctions quasi-intérieures qui ont à peu près le même goût que ce que vous obtenez pour ρ_∞ et ensuite, nous distribuons ces fonctions quasi-intérieures à chacun des nombres premiers et parce que le produit des fonctions quasi-intérieures est encore une fonction quasi-intérieure, nous obtenons le résultat.



Donc je finirai avec deux assertions. La première assertion est que, vous savez, comme je le disais, il y a la définition de l'espace de Sonin semi-local, mais il s'avère *(riant)* que l'espace de Sonin semi-local est simplement le noyau de la partie $2, 2$ de la fonction quasi-intérieure qui est définie par ce produit. Rappelez-vous que si l'unitaire était triangulaire, alors la partie $2, 2$ aurait été une co-isométrie. Donc maintenant, c'est seulement quasiment cela, si vous voulez, comme ça, mais vous pouvez tout de même regarder ce $u(S)_{22}$. Il s'avère être l'analogue de l'espace de Sonin semi-local. Mais maintenant la question qui émerge est “okay, c'est bien, cet espace est-il de dimension infinie ?” Cela n'est pas évident du tout. Si l'unitaire était triangulaire, oui, mais il est seulement triangulaire dans l'algèbre de Calkin, et donc est-il vrai que ce noyau de ce $u(S)_{22}$ est de dimension infinie ? Je finirai donc là-dessus. C'est ce que nous avons trouvé cet été et il s'avère que c'est une fonction remarquable qui va vers l'espace de Sonin, définie comme ci-dessus dans une colimite, dans un système inductif



et la fonction linéaire injective qui va lorsque vous augmentez l'ensemble des places, par exemple, si vous avez un premier, il y a une sorte de fonction complètement évidente *(presque en riant)* qui s'avère envoyer l'espace de Sonin pour S vers l'espace de Sonin pour S augmenté (S'). Et cette fonction est simplement une multiplication par le produit des $(1 - p^{-z})$. Ce ne sont pas les facteurs locaux, ce sont les espaces de Hilbert pour les facteurs locaux, pour les éléments qui n'appartiennent pas à S mais qui appartiennent à S'. Donc, si vous voulez, maintenant, nous sommes dans la situation avec Katia dans laquelle notre tâche est de pouvoir faire, pour le cas semi-local, ce que nous avons fait pour le cas local. Nous ne disons pas, vous savez, c'est faisable, ce sera certainement difficile, mais d'une manière ou d'une autre, nous avons les ingrédients analytiques prêts pour cela et ce que nous projetons de faire, c'est de mettre en action la partie géométrique, la partie géométrique qui était si précieuse dans le cas de la place archimédienne, car elle nous a donné la petite place, et la grande place, et elle nous a donné si vous voulez la compréhension de l'écart et le contrôle de l'écart, et ainsi de suite. Mais j'espère que je vous ai donné un avant-goût du fait que vous savez, le calcul quantifié, même si on pourrait essayer de le réduire au calcul, non, c'est beaucoup plus puissant, et il y a un lien incroyablement ténu entre ce calcul et le problème de Weil, simplement parce que la formule de l'équation fonctionnelle de Weil peut être si simplement et directement exprimée en termes de calcul quantifié.

Okay, je m'arrêterai ici.

(Applaudissements virtuels).

Transcription d'une conférence donnée par Alain Connes "Dualité entre formes et spectres", donnée au Collège de France, le 13.10.2011
La conférence est visionnable ici :
http://www.college-de-france.fr/site/colloque-2011/symposium-2011-10-13-10h15.htm

Alors donc, mon exposé va se concentrer sur la dualité qui existe entre les formes et leur spectre, c'est à dire, si vous voulez, la gamme qui est associée à une forme. Ça, bien sûr, ça répond partiellement à la question de la relation entre les formes et le temps, puisque les vibrations d'une forme se déroulent dans le temps.

Et je commencerai mon exposé en expliquant pourquoi il est absolument fondamental de se poser la question suivante "comment est-ce qu'on peut définir des invariants d'une forme ?". Si vous avez une forme au sens très naïf du terme ? Vous pouvez parler de son diamètre, vous pouvez parler de sa taille et de son volume, des choses comme ça, mais bien sûr, pour arriver à donner entièrement une forme. Il faudrait, il faut des invariants beaucoup plus subtils que ça.

Et parmi ces invariants, il y a justement les fréquences, la gamme possible produite par une forme, c'est de ç dont on va parler. Et ensuite, on veut non seulement savoir comment caractériser une forme, mais on veut aussi savoir comment caractériser la position d'un point par rapport à cette forme. Et ce qu'on verra, c'est qu'en gros, si vous voulez, un point, il est caractérisé par un accord, des notes, dans cette gamme. Donc, pour vous présenter les choses de manière un peu naïve. Donc, on parlera des vibrations, des formes, je vous ferai entendre des formes simples et ensuite, par référence à un fameux article de Mark Kac dans les années 60, qui demandait "Est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?", on parlera d'un invariant additionnel qui permet de compléter le tableau, c'est-à-dire qui permet, si on le connaît, de connaître la forme. Et enfin, je terminerai, je tiens beaucoup à cette petite addition, parce qu'en préparant mon exposé, je me suis aperçu que j'avais essayé de jouer *Au clair de la Lune* sur la gamme qui est produite par les formes les plus simples, comme une sphère ou des choses comme ça. Et je me suis aperçu que ça donnait un résultat qui n'était pas bon du tout. Et je me suis aperçu qu'en fait, la gamme, la vraie gamme musicale, celle qui est sensible à l'oreille, eh bien, il n'y a pas une forme simple à laquelle elle correspond, c'est à dire une forme dont les fréquences correspondent à la gamme musicale telle qu'on la connaît. Et je me suis amusé à chercher un objet et il y a un objet vraiment très intéressant qui semble répondre à la question et dont je parlerai à la fin, qui est la sphère quantique.

Donc, c'est ça le programme.

Et alors ? Donc, pour commencer, on va essayer de réfléchir de manière intrinsèque à la notion de forme ou à la notion de position par rapport à une forme, en se posant une question qui est une question très simple et qui est “où sommes nous ?”.

Voyez, à cette question, vous pouvez répondre “on est au Collège de France, dans l’amphi Marguerite de Navarre”. Mais si vous voulez transmettre cette information à une autre civilisation, ce sera inaudible.

Comment est ce que nous pouvons transmettre là où nous sommes de manière intrinsèque ? Alors, bien sûr, les hommes ont essayé et ils ont envoyé la sonde Pioneer dans l’espace. Et sur cette sonde, ils ont donné un certain nombre d’informations. Quelles sont ces informations ?

Bon, ils ont bien sûr montré à quoi ils ressemblaient. Ça, c’est le dessin qui est là.

Ils ont également donné un petit aperçu du système solaire. On voit, en bas, le soleil, on voit une première planète Mercure. On voit une deuxième planète, Vénus. On voit la troisième dont la sonde est partie. C’est pour ça qu’ils ont mis le petit dessin, et ainsi de suite.

Mais il est bien évident que pour le moment, vous avez une information qui est quasi nulle parce qu’il va exister une infinité de systèmes planétaires qui auront à peu près la même allure. Et donc, en fait, vous ne saurez absolument pas où vous êtes.

Alors, en fait, il y a dans le dessin qu’ils ont envoyé quelque chose qui est beaucoup plus intéressant, beaucoup plus cryptique et beaucoup plus informatif, et qui est ce qui est au milieu, à gauche, vous voyez.

Et qu’est ce que c’est ?

Ce sont les directions à partir du Soleil par rapport à 14 pulsars et au centre de la galaxie. Et en plus, ils ont indiqué pour chacune de ces directions la fréquence correspondante. Alors on verra que ça, c’est très, très, très proche de la réponse qu’on va obtenir à partir d’une réflexion mathématique abstraite sur le problème abstrait. Et le problème abstrait, il peut se formuler de la manière suivante, il peut se formuler sous la forme de deux questions, excusez-moi, de temps en temps, je mettrai des transparents en anglais parce que je sais qu’il y a une traduction simultanée et j’en profite, donc, pour mettre quelques transparents en anglais, la traduction en français, je vous la donne : donc, la première question, c’est peut-on trouver des invariants complets d’espaces géométriques ou, si vous voulez, de formes, de manière plus générale ?

Et deuxièmement, peut-on spécifier de manière invariante où est un point par rapport à une forme ? Alors la chose qui est essentielle, là, on le voit bien dans l'exemple que je vous ai donné quand on veut donner notre position par rapport à l'univers, voyez quelqu'un de très savant, vous dirait. “Mais pour donner votre position dans l'univers, il suffit de donner vos coordonnées par rapport à un système de référence.”. Oui, mais où est l'origine du système de référence ?

Il faut bien que vous disiez où elle est. Et pour faire ça, vous avez exactement le même problème que dans le problème de départ. Et ainsi de suite. Donc vous voyez, ce n'est pas du tout quelque chose de simple. Ce n'est pas du tout évident. On pourrait vous dire oui, je connais la relativité générale. Je sais qu'un point est spécifié par ses coordonnées, tout ça. Mais ces réponses sont nulles et non avenues par rapport au côté invariant et intrinsèque du problème.

Alors, la chose importante, donc, la chose importante, c'est qu'en fait, à une forme, donc, correspond toute une série de invariants, déjà. Et ces invariants, c'est, si vous voulez, la gamme de la forme, alors c'est là qu'on va voir si le son marche, j'espère qu'il va marcher. Donc, on va faire un petit essai. Ce matin, quand je me suis réveillé, mon ordinateur avait rebooté et donc il n'y avait plus rien qui marchait. Et comme le programme prend très longtemps à se mettre en route, j'étais vraiment effrayé. On va voir si ça marche. Ça marche, donc on entend le son, alors je vais commencer par la forme la plus élémentaire, la forme la plus élémentaire qui soit, c'est l'intervalle.

Si vous voulez, c'est une corde qui va vibrer, comme une corde d'un violon, et elle va vibrer. Elle va avoir un son fondamental. Et puis, elle va avoir les multiples de ce son, comme vibrations. La gamme correspondante va être extrêmement simple.

Et on va s'amuser à jouer un peu avec cette gamme. D'accord, donc, si je fais ça. *(Il clique sur des boutons numérotés de 1 à 20 et on entend les sons associés.)* Ça paraît bizarre, le 7. Eh bien, je prétends que si vous essayez sur cette gamme-là de jouer *Au clair de la lune*, la première note, ça doit être 131.

Donc vous voyez que ça a l'air... Naïvement, on se dit “Mais ça, c'est la gamme ! Bien sûr ! Puisque ce sont les multiples d'un nombre entier...”. Non, ce n'est pas vrai. Ce n'est pas vrai du tout. Grosse erreur. Première erreur naïve qu'on ferait. Alors, ça, c'est pour l'objet le plus simple. Un objet un petit peu plus compliqué mais quand même, cet objet, si vous voulez. Il a un spectre extrêmement simple. Quand on veut visualiser les fréquences, on peut les représenter sous leur forme visuelle, c'est-à-dire sous leur forme à partir du spectre. Et puis, on peut aussi les représenter sous forme d'un graphe. Le graphe est intéressant parce qu'on verra la multiplicité d'une valeur propre dans un graphe. Alors maintenant, passons à une forme qui est déjà plus évoluée, qui est le disque.

Alors, le disque, qu'est-ce que cela veut dire ? Les sons produits par le disque, ça veut dire vous prenez un tambour rond, vous tapez sur ce tambour. Il va y avoir un son fondamental. Il va y avoir exactement comme dans le cas de la corde vibrante. Il va y avoir des harmoniques, il va y avoir d'autres sons. Donc le tambour va produire toute une série de sons qui ne seront plus du tout aussi simples que les entiers dont j'ai parlé tout à l'heure, et qui vont vous donner une gamme.

Et cette gamme va être quand même extrêmement informative sur le tambour, c'est à dire que la note la plus basse va vous donner le diamètre, va vous donner immédiatement une mesure de diamètre. Et puis le comportement, par exemple, des notes beaucoup plus grandes, va vous donner la taille du tambour, etc., etc.

Alors je vous donnerai à la fin une bibliographie. Je veux dire, pour tous les mathématiciens qui ont été impliqués dans ce genre de truc, mais je ne vais pas du tout vous dire "ceci est dû à x ou bien ceci est dû à y. Je vous donnerai la bibliographie à la fin, mais écoutons un petit peu le tambour.

(Les clics ne produisent aucun son.) Alors là, j'ai pas mis de sons justement, donc j'ai pas mis de temps parce que il y a des sons qui sont très aigus, regardons simplement comment il vibre pour le moment.

D'accord, vous voyez, j'espère. Vous voyez comment il vibre : à chaque fois que vous avez une image comme ça. Le dessin n'est pas du tout aussi simple qu'il pourrait paraître, parce que les fonctions qui sont impliquées sont ce qu'on appelle les fonctions de Bessel. Et si vous voulez, justement, lorsqu'on tape plus ou moins, à un endroit suffisant sur le tambour, etc. On va le faire vibrer. Selon l'une de ses fréquences harmoniques. On va les écouter, écoutons-les. Alors, on peut les calculer. Ce sont des nombres qui ne sont pas du tout triviaux. Ce ne sont pas du tout des nombres comme les entiers. Ce sont des zéros d'une fonction qui est assez compliquée qu'on appelle la fonction de Bessel, qui sont paramétrés par deux entiers et qu'on peut calculer. On peut les calculer avec autant de décimales qu'on veut. Mais ce ne sont pas des nombres simples et c'est ça la gamme du disque. Donc, le disque a une gamme comme ça.

Je vous montre les premières notes. Il a un spectre qui est comme ça et maintenant, on va l'entendre. *(AC fait varier les valeurs des deux curseurs, et on entend des notes plus ou moins aigues, et on voit en même temps, le cercle coloré en dégradés de bleus, avoir des divisions colorées radiales et angulaires plus ou moins nombreuses.).*

Alors, j'espère que ce n'est pas une note trop aiguë. Parce que je ne voulais pas vous faire entendre de notes trop aigues..., j'ai été gentil, je n'ai pas mis de notes trop aigues. Ça continue bien sûr, autant qu'on veut, etc.

Et alors on obtient ainsi vous voulez, donc, un spectre qui est le spectre du disque qui ressemble à ça, donc il continue indéfiniment, il continue indéfiniment.

Et vous voyez bien sûr qu'il ne ressemble en rien du tout au spectre qu'on avait tout à l'heure pour l'intervalle. Alors maintenant, allons un petit peu plus loin.

Prenons un objet toujours de dimension 2, prenons un objet qui est un carré maintenant. C'est comme si vous preniez un morceau de peau, que vous tendiez ce morceau entre si vous voulez un cadre, comme ça, carré, et vous tapez dessus.

Et maintenant, les vibrations que vous obtenez ont l'allure suivante. Ça va faire le bruit deux fois avant de donner ce qu'il faut. On va monter un petit peu plus haut. *(Sons du carré)*. Bon, alors on voit à nouveau un spectre, le spectre ressemble à ça.

Il est très, très différent de ce qui se passait dans le cas du disque, parce que si vous voulez pour le cas du carré, ce n'est pas très difficile de faire le calcul. On s'aperçoit que les fréquences correspondantes sont les racines carrées des sommes de deux carrés, donc les nombres de la forme racine de n^2 plus m^2. Donc ça, c'est quelque chose qui est très simple à comprendre, qui est beaucoup plus simple à comprendre que les nombres qui intervenaient pour le disque. Ils sont très différents, ils sont très différents, mais ils ont, si vous voulez la même sorte de répartition à l'infini. On peut changer la couleur si on veut. Mais maintenant, venons-en à la sphère, donc, tout ça, ce sont des formes de dimension 2 et a priori, ce sont des formes très banales.

Quand je parle du disque, quand je parle du carré ou quand je parle de la sphère, je veux dire le titre du colloque, c'est *La vie des formes*. Donc, il faut les faire vivre. Et pour les faire vivre, il faut les faire vibrer.

Et à partir du moment où on les fait vibrer, on s'aperçoit que, bien que ce soit des formes qui ont un air extrêmement simple, extrêmement banal, extrêmement élémentaire, lorsqu'on les fait vibrer, les vibrations elles-mêmes décorent ces formes de manière extrêmement harmonieuse et extrêmement non triviale. Alors, si on prend la 2-sphère, si on prend la sphère ronde, son spectre, cette fois, est très, très simple. C'est aussi formé des entiers, exactement comme dans le cas d'une corde.

Mais ces entiers apparaissent cette fois avec une certaine multiplicité, c'est à dire que ce n'est pas exactement des entiers. C'est plus exactement racine de $J(J+1)$. C'est pratiquement un entier, donc ça ressemble énormément à ce qui se passait dans le cas du cercle ou de l'intervalle. Mais ils apparaissent avec une multiplicité.

Alors maintenant, si on prend la sphère, alors là, j'ai peur que ce soit trop aigu.

Voyez ce qui se passe, c'est que si je prends par exemple le Spin=6, il y a un certain nombre de fréquences, comment dire, de ce qu'on appelle des fonctions propres qui existent, mais qui ont exactement la même, la même fréquence.

Comment dire ? Les formes sur la sphère sont différentes, le son qu'on entend est le même. Et ça, c'est ce qu'on appelle la multiplicité spectrale, c'est à dire que dans le spectre, ce qui va se produire, c'est qu'on va avoir la même valeur, mais elle va se produire plusieurs fois. Donc, c'est ce qui se produit pour la sphère... Ala fin, j'y reviendrai pour la forme musicale, ça, on verra ça plus tard.

Donc maintenant, je vais passer au déroulement normal à partir du pdf. Donc je vais faire ça.

Donc on a ces deux questions, on a ces deux questions, de définir un invariant complet d'une forme.

Alors en fait, on sait depuis un article fameux de John Milnor dans les années 60, que le spectre d'une forme ne suffit pas à caractériser cette forme.

C'est un merveilleux article de mathématiques. C'est un des rares articles de mathématiques qui n'a qu'une page. Et ce qu'a fait Milnor, c'est quelque chose de remarquable. Il a utilisé un résultat de Witt pour voir qu'il existe des tores, ces tores sont de dimensions assez grandes, ce ne sont pas des tores de dimensions basses. Mais il existe des tores, qui sont différents géométriquement, mais qui ont exactement la même gamme de manière identique. Et ça, ça vient d'un résultat de théorie des nombres. Parce que, bien sûr, la gamme associée à une forme avec toute sa subtilité, comme on vient de le voir dans les exemples que je vous ai montrés, cette gamme a bien sûr une relation très profonde avec l'arithmétique, l'arithmétique au sens le plus naïf, l'arithmétique de la première gamme de tous ces entiers.

Mais en gros, à chaque forme est associée une arithmétique, et c'est l'arithmétique de la gamme qu'elle nous donne de manière naturelle par les sons qu'elle produit.

Alors donc, ce qui est très, très intéressant, c'est que comme j'expliquerai donc, l'invariant qui manquait par rapport à l'invariant spectral, c'est un invariant dont on verra qu'il est relié, en fait, à ce que les physiciens appellent la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Et c'est un invariant qui mesure en fait un angle entre deux algèbres et qui généralise un peu ce que faisaient les physiciens lorsqu'ils regardent ce qui se passe avec les quarks. Et ça, j'en parlerai.

Mais ne vous inquiétez pas du tout du côté technique de cette page. Donc, on a vu les vibrations du disque.

On a vu des exemples de vibrations des disques, on a vu les fréquences propres du disque qui, comme je vous le disais, ne sont pas si simples qu'elles n'en ont l'air. On a vu son spectre avec le début du spectre. On a vu, maintenant, je mets plus de fréquences propres pour le disque et vous voyez que ça commence à avoir une allure. Cette courbe là, elle commence à avoir l'allure de quoi... elle commence à avoir l'allure d'une parabole. Et plus on va rajouter de fréquences, plus on va aller à hautes fréquences, plus elle va ressembler à une parabole. Voyez si vous prenez le disque où les valeurs propres sont difficiles à calculer, la gamme est difficile à calculer, mais si vous regardez la gamme, mais maintenant de très loin, c'est-à-dire vous regardez les hautes fréquences et vous mettez toutes ces fréquences ensemble, vous voyez que ça, ça ressemble de plus en plus à une parabole et il y a un fameux théorème d'Hermann Weyl qui date des années 30 et qui dit que cette parabole a un invariant, si vous voulez, qui est comment elle est angulée ou pas, cet invariant donne exactement dans le cas des surfaces, dans le cas des formes de dimension 2, donne exactement la surface de la forme, d'accord. Donc vous voyez, on peut mesurer l'aire de la forme de dimension 2 simplement en regardant cette parabole. Ça, c'est ce qu'a démontré Hermann Weyl.

Alors on a vu également ce qui se passe pour le carré. Je vous avais montré les quelques vibrations du carré tout à l'heure. Le spectre du carré, comme je le disais, est extrêmement simple. Ce sont les nombres qui sont les racines carrées de n^2 plus m^2. C'est ça, les vibrations du carré.

Bien sûr, je ne veux pas vous embêter avec des formules mathématiques, mais ça, ça vient de l'équation de Helmholtz, on regarde le laplacien, et on regarde l'équation des ondes.

Donc le spectre du carré, on regarde les fréquences propres du carré, voyez, elles ressemblent un petit peu, de loin, à ce qui se passait tout à l'heure pour le disque. On regarde hautes fréquences, on regarde hautes fréquences, ça oscille un peu. Et puis, on va regarder maintenant très hautes fréquences, très hautes fréquences, vous voyez, c'est incroyable, on voit vraiment une parabole, ça se distingue à l'œil nu, absolument une parabole. Cette parabole, justement, son invariant, c'est l'aire du carré.

Alors, on regarde la sphère aussi. Le spectre de la sphère, comme je le disais, c'est pratiquement les entiers, ce sont les nombres de la forme racine carrée de $J(J+1)$.

Voilà si vous regardez les fréquences propres de la sphère, ça vous donne ça, les fréquences propres de la sphère ? *(On voit une parabole, mais elle a comme des marches d'escalier.)* Pourquoi ça a l'air comme ça, par étages ? Eh bien, c'est parce que justement, vous avez la même fréquence qui va se répéter un tas de fois. D'accord, donc, c'est quelque chose qui est par étages comme ça.

Alors vous vous dites "Mais ça, ça n'a pas l'air du tout d'une parabole.".

Ça n'a pas trop l'air d'une parabole, mais c'est parce que vous ne regardez pas assez les hautes fréquences. Et si maintenant vous regardez à beaucoup plus hautes fréquences, vous voyez qu'il y a encore des petits étages, bien sûr.

D'accord, mais ça ressemble de plus en plus à une parabole et ça va vous donner l'aire de la sphère. D'accord.

Bon. Alors, qu'est-ce que ceci a à voir avec le problème qu'on avait au départ, donc qui était le problème de dire où nous sommes de manière précise ?

Si on veut dire où nous sommes. Il faut dire deux choses :

Il faut dire dans quel univers nous sommes et à quel point de cet univers nous sommes d'accord. Pour dire dans quel univers nous sommes en fait, ce que je prétends, c'est que ce qu'il faut donner, ce sont justement les fréquences de vibration de cet univers, la première chose à donner. Et comment donc on le fait ? On le fait si vous voulez, il y a une chose très intéressante qui se produit, c'est que lorsqu'on part au niveau de Mark Kac, et au niveau de "Est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?, etc.", on se préoccupe de l'équation des ondes et on se préoccupe de ce qu'on appelle un opérateur que les mathématiciens appellent le laplacien, qui s'appelle le laplacien, qui s'appelle Δ, mais lorsqu'on écrit l'équation des ondes, si vous voulez, en fait, on écrit cette équation sous la forme delta d'une fonction plus k deux fois f égale 0. *(AC écrit au tableau $\Delta f + k^2 f = 0$.)*

Ça, c'est l'équation de Helmholtz. Et lorsqu'on écrit cette équation de Helmholtz, on voit que le nombre k qui apparaît, ça va être, si vous voulez, ce qu'on appelle des valeurs propres de $-\Delta$, mais ça n'est pas k, car c'est k^2 qui est une valeur propre de $-\Delta$, et donc en fait, le nombre k qui apparaissait, dans tous les exemples que je vous ai donnés, c'est un nombre qui est valeur propre de la racine carrée de $-\Delta$.

Alors Δ, c'est ce qu'on appelle un opérateur différentiel elliptique et sa racine carrée, c'est pas quelque chose de très joli.

Et alors heureusement, il y a un physicien, qui est Paul Dirac, qui a trouvé un moyen d'extraire une racine carrée de l'opposé du laplacien de manière esthétique et de manière telle que ce soit un opérateur différentiel. C'est ce qu'on appelle l'opérateur de Dirac.

Alors, ce qui fait que dans tous les exemples que je vous ai donnés, en fait, c'est beaucoup plus naturel et important de donner pour une forme géométrique, de donner non pas le spectre du laplacien, ça ferait pas de différence pratiquement pour tous les exemples que je vous ai donnés mais de donner le spectre de l'opérateur de Dirac. Donc ça, c'est une chose très importante. Bon, c'est la première chose, c'est à dire que ce qu'on va regarder, en gros, c'est une racine carrée de Δ, donc ça ne va pas changer beaucoup. Donc on va, on va donner l'ensemble de ses valeurs propres. On va donner sa gamme. Si vous voulez. Et maintenant, ce qui est assez extraordinaire, c'est qu'il y a moyen de trouver un invariant complémentaire de cette gamme.

Et en gros, cet un invariant complémentaire, ça va être une prescription, on va donner les accords possibles sur cette gamme.

On va donner un ensemble d'accords possibles, mais l'origine, l'origine de cet invariant : il vient de la physique, de la physique et de ce qu'on appelle en physique... Si vous voulez, en physique, il y a des phénomènes assez compliqués qu'on appelle les interactions faibles et dans l'interaction faible, les gens se sont aperçus qu'il y avait ce qu'on appelle des courants qui permettaient de changer de "*flavor*", c'est à dire de famille. C'est à dire que, par exemple, pour les quarks, vous avez les quarks qu'on connaît qui sont les up and down, qui sont les quarks principaux, qui forment les neutrons, les protons, etc.

Mais vous avez d'autres quarks, il y a deux autres familles de quarks. Eh bien, il y a des interactions en physique qui permettent de changer..., qui permettent de passer d'une famille de quarks à une autre famille de quarks, c'est ce qu'on appelle "flavor changing neutral current", et les physiciens ont compris que ce qui mesurait si vous voulez, ces courants qui permettent de changer de famille, c'était en fait un angle entre deux algèbres commutatives, mais très simple dans leur cas. Ça a d'abord été trouvé par Cabibbo, puis ensuite par Kobayashi et Maskawa. Et c'est ce qu'on appelle la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Et ce que ça fait, c'est que ça mesure, si vous voulez, en fait, l'angle entre deux algèbres. Et ce qui est assez extraordinaire, c'est que bon, en fait, ce sont des algèbres dans un espace de dimension 3. Donc c'est quelque chose de très simple. Et pourtant, un nombre complexe apparaît et c'est ça qui a fait la violation de ce qu'on appelle CP en physique.

Alors maintenant, ce qui est tout à fait amusant, c'est que si on généralise cette idée, on obtient une solution au problème de tout à l'heure, c'est-à-dire qu'on obtient un autre invariant qui n'est pas seulement le spectre de l'opérateur de Dirac. Donc, le premier invariant, si vous voulez, c'est le spectre de l'opérateur de Dirac.

C'est très important *(AC écrit Spec D à la craie au tableau.)*. C'est la gamme, si vous voulez. D'accord. Bon, mais il y a un deuxième invariant. Et quel est ce deuxième invariant ? Eh bien ce deuxième invariant, c'est aussi un angle.

Ce n'est pas un nombre, c'est un angle, c'est un angle. C'est une notion beaucoup plus compliquée. C'est un angle entre deux algèbres. Alors il y a l'algèbre des fonctions de l'opérateur de Dirac.

Ça veut dire que vous regardez tous les opérateurs qui sont diagonaux dans la même base que l'opérateur de Dirac, qui est la base des fonctions propres et une autre algèbre, qui est l'algèbre des fonctions sur l'espace dans lequel vous êtes, sur la forme dans laquelle vous travaillez.

Et alors, il y a un merveilleux théorème de von Neumann qui date d'années, d'il y a très, très longtemps et qui dit que la représentation de cette algèbre dans l'espace de Hilbert est indépendante de la forme que vous choisissez. C'est à dire que si vous prenez n'importe quelle forme, soit une sphère, un disque, une forme de dimension plus élevée, etc., eh bien, l'algèbre des fonctions va agir toujours de la même manière dans l'espace de Hilbert.

Donc, la seule chose qui va manquer pour compléter le tableau, ça va être la position relative de ces deux algèbres et la position relative de ces deux algèbres, en fait, elle est spécifiée par une série d'accords.

Bon, c'est une série continue d'accords, qui sont formulés sur la gamme et maintenant donc, ce qui se produit, c'est que... donc, on a ces deux invariants et comment doit-on interpréter un point, donc un point en fait, si on regarde de ce point-de-vue-là, un point, il est donné par des corrélations entre des fréquences différentes. Alors, vous pouvez penser à ces corrélations, ce sont des nombres complexes. Mais vous pouvez exactement penser à ces corrélations entre des fréquences différentes comme un accord. Un accord, on prend un accord entre ces notes et c'est ça, un point, c'est ça, d'accord. Donc réfléchissez dans votre tête, et gardezqu' un objet géométrique, une forme géométrique est donnée par sa musique, par sa gamme, et elle est donnée par sa gamme et l'ensemble des points est donné par l'ensemble des accords possibles et un point est donné par un accord.

Bon, alors donc si on continue, de ce point-de-vue-là, on s'aperçoit (on peut baisser la lumière, là, c'est bon).

Donc on s'aperçoit que c'est assez étonnant de voir à quel point ce point-de-vue dont je viens de parler est proche en fai t de la réalité physique. Pourquoi ?

Parce que maintenant, l'homme a évolué, peut être par sélection naturelle, suffisamment pour pouvoir regarder l'univers. Il a un œil. Cet œil, c'est Hubble. Son œil actuel, c'est le télescope Hubble. Avec ce télescope, l'homme regarde l'univers. Je vous conseille à tous de tous les matins vous brancher sur le site de la NASA qui donne chaque matin une image nouvelle. C'est fait à un rythme quotidien et chaque jour, vous pouvez regarder l'univers et vous aurez une image différente de l'univers.

Et ce qui est étonnant, ce qui est vraiment étonnant, c'est que l'information qui nous vient de l'univers, elle est spectrale. Et non seulement cette information nous renseigne, par le spectre, sur la composition des étoiles très, très lointaines ou des nuages intergalactiques, etc., simplement par leur spectre, mais en plus, elle nous renseigne sur leur origine. Et comment nous renseigne-t-elle sur leur origine ? Parce que par effet Doppler, plus les choses sont distantes, plus il y a ce qu'on appelle le redshift, alors le redshift, naïvement, si vous êtes très naïf, vous pensez que le redshift, vous allez prendre le spectre et vous allez le décaler comme ça par une translation. Mais ce n'est pas vrai. Le redshift, c'est une multiplication. Ce n'est pas un décalage, c'est une multiplication. C'est à dire qu'on prend toutes les fréquences et on les multiplie par un même nombre. Et ce qui est vraiment étonnant dans le redshift, c'est que maintenant, on observe, on observe... Alors pourquoi est-ce qu'on sait que c'est la même chose qu'on voit ? Eh bien, par le fait que la gamme est la même.

Elles se ressemblent, bien sûr. Donc, vous voyez bien qu'à gauche, vous allez avoir une certaine disposition dans la gamme. Elle va se retrouver à droite, mais elle ne va pas se retrouver au même endroit et elle va se retrouver décalée, mais pas décalée par une translation, décalée par une homothétie, c'est-à-dire qu' on multiplie tous les nombres par quelque chose. Et ce qui est extraordinaire, c'est que c'est grâce à ce shift qu'on peut remonter dans le temps. On mesure maintenant des redshifts qui sont de l'ordre de 10, mais en fait, on s'attend à des redshifts de l'ordre de 1000, etc., etc., et qu'ils correspondent, bien sûr, à des temps de plus en plus reculés.

Donc, c'est vraiment étonnant, c'est vraiment étonnant que ce point de vue sur les formes soit aussi proche du point de vue que les mathématiques abstraites suggèrent sur les formes.

Et d'autre part, il y a une autre chose qui est extrêmement importante, c'est que, bien sûr, nous ne pouvons pas nous déplacer pour le moment, mais sans doute pour toujours vers d'autres galaxies. Et donc, c'est un acte de foi que nous faisons, de savoir que ces choses-là existent quelque part. Et cet acte de foi, il vient précisément du fait des corrélations qu'il y a entre les différentes fréquences et l'image que je vais vous montrer maintenant, c'est une image de la Voie lactée.

Mais c'est une image qui n'est pas du tout prise dans le visible. C'est une image qui est prise dans des longueurs d'ondes qui sont totalement invisibles. D'accord, alors, c'est absolument hallucinant et incroyable que justement, il y a tellement de corrélations entre ces différentes fréquences qu'en fait, ces images sont compatibles. Et voilà une image, donc, de la Voie lactée, prise dans des fréquences qui ne sont absolument pas visibles, mais qui, justement, sont corrélées avec les images dans le visible et nous assurent donc qu'il y a bien là une cohérence, d'accord.

Alors maintenant, quand je préparais cet exposé, j'ai mis un temps fou à préparer cet exposé. Pourquoi ? Parce que bon, bien sûr, on m'avait donné une règle qui était qu'il ne fallait pas montrer d'images comme celle-là qui n'ait pas été approuvée par l'auteur de l'image, etc. Alors, je m'étais dit “ça, peut être j'y arriverai.”.

Mais par contre, je ne l'avais pas pour toutes les autres images que je voulais montrer sur les sphères. Donc, je me suis collé à le faire à l'ordinateur et ça m'a pris beaucoup de temps. Et puis, à un moment donné, je voulais me relaxer un peu et je me suis dit “Oh ben, je vais jouer *Au clair de la lune*, je vais jouer *Au clair de la lune* sur la gamme de l'objet le plus simple, c'est à dire la corde vibrante.

J'ai essayé et c'est là que je me suis aperçu que la première note qu'il fallait que je fasse, c'était 131. Je me suis dit “Il y a quelque-chose de bizarre.”.

Donc, je me suis posé le problème. Je me suis posé le problème de trouver une forme musicale.

Alors, qu'est ce que j'entends par là ? Eh bien, j'entends par là que quand vous faites de la musique, on va le voir tout de suite, quand vous faites de la musique, en fait, c'est pas du tout les entiers 1, 2, 3, 4, 5, etc., comme fréquences qui sont utilisées ? Absolument pas, ce sont les puissances d'un même nombre, les puissances d'un même nombre, c'est à dire on a un nombre q. Et on regarde les nombres q^n, c'est ça qui compte, parce que ce sont les rapports entre fréquences qui comptent. Et la merveille qui fait que la musique du piano existe, qu'on appelle *Le clavecin bien tempéré*, etc., c'est le fait arithmétique qui existe, qui fait que si on prend le nombre 2 à la puissance un douzième, si vous prenez la racine douzième de deux, c'est très, très proche de la racine dix-neuvième de trois.

Voyez, j'ai donné ces nombres-là. Vous voyez que la racine douzième de 2, c'est 1,059..., etc. La racine dix-neuvième de trois, c'est 1,059... D'où vient le 12 ?

Le 12 vient du fait qu'il y a 12 notes lorsque vous faites la gamme chromatique. Et le 19 vient du fait que 19, c'est 12+7 et que la septième note dans la gamme chromatique, c'est la gamme qui vous permet de transposer. Alors, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que passer à la gamme d'au-dessus, c'est la multiplication par deux et l'oreille est très sensible à ça. Et transposer, c'est la multiplication par trois, sauf qu'on revient à la gamme d'avant, c'est à dire qu'on multiplie par 3/2, d'accord.

Bon, c'est ça la musique, bien connue maintenant, à laquelle l'oreille est sensible, etc. D'accord. Mais... il y a une question évidente ! C'est "existe-t-il un objet géométrique dont la gamme nous donne la gamme qu'on utilise dans la musique ?". C'est une question absolument évidente.

Si vous regardez ce qui se passe, comme ce sont les puissances de q, vous vous apercevez que la dimension de l'espace en question est forcément égale à 0. Pourquoi ? Parce que tout à l'heure, je vous avais montré ses limites. *(s'interrompt pour dire à quelqu'un "J'arrive.")*. Donc, je vous avais montré *(s'interrompt pour dire à la personne "J'en ai encore pour 5 mn.")*. Je vous avais montré tout à l'heure que les objets avaient une gamme qui ressemblait à une parabole quand ils étaient de dimension. 2. Quand un objet est de dimension plus grande, ça va être un truc un petit peu plus compliqué qu'une parabole.

Par exemple, si c'est en dimension 3, ça va être $y = x^{\frac{1}{3}}$, d'accord, mais ici, c'est pas du tout un truc qui est rond comme une parabole comme ça *(AC dessine une parabole en l'air)*. C'est quelque-chose qui pffuiittt ! *(AC fait le geste d'une exponentielle en l'air.)* qui fout le camp en l'air comme ça. Et ce que ça vous dit, c'est que l'objet en question doit être de dimension 0. Donc, vous vous dites, "un objet de dimension 0, qu'est ce que ça veut dire ? etc. Bon.".

Eh bien, quand vous développez la géométrie, ce que j'ai fait pendant des années et des années, du point de vue spectral et ce qu'on appelle la géométrie non-commutative, etc., eh bien, vous apercevez en fait que ces objets existent avec une petite nuance, c'est que l'algèbre qui va être, qui va intervenir ne va pas nécessairement être commutative.

Et la merveille des merveilles, c'est que je me suis aperçu, en préparant mon exposé, qu'il existait un objet bien connu des mathématiciens, qui font de la géométrie non-commutative ou des choses quantiques, qui marche pour cette chose-là et qui vous donne la bonne gamme.

Et qu'est ce que c'est que cet objet ? Ce n'est autre que ce que l'on appelle la sphère quantique S^2 indice q. Alors, cet objet donc est un objet plus délicat. Il a été considéré en particulier par ces trois noms *(sur le transparent sont notés les noms Poddles, Brain et Landi)*. Il a un spectre, il a un spectre. Et ce spectre ? Si vous choisissez bien le nombre q, il va correspondre exactement au spectre musical.

Alors, je reviens donc maintenant à mes expérimentations et je termine là-dessus. Donc je vais essayer. J'espère que ça va marcher. Alors on va revenir à l'expérimentation. Donc, on avait fait la sphère et maintenant, on recherche cette forme musicale qui va être de dimension 0. Bon, alors on va essayer de jouer *Au clair de la lune.* Comme je suis fatigué, je vais sûrement me tromper. Mais c'est pas grave. Alors voyez. *(AC revient à un spectre arc-en-ciel et joue* Au clair de la lune *sur un clavier de bouton indicé par les entiers, 25-25-25-27-29-27-25-29-27-27-25. 27-27-27-27-24 se trompe, joue un si au lieu d'un la, rires, se reprend, etc... applaudissements et extase !).*

Alors maintenant, ce qui est absolument extraordinaire avec cette gamme, c'est... Est-ce-que quelqu'un peut me donner un chiffre, au dessus de 10 quand même ? *(On voit Jean-Pierre Changeux qui attend positionné au bureau pour donner son propre cours.)*

13, très bien. Eh bien, je vais voir, je vais ré-essayer, mais je ne promets rien, de vous jouer *Au clair de la lune* en partant de 13 *(AC joue 13-13-13-15-17-15-13-17-15-15-13...)*

(Au moment de chercher la note la plus basse écartée des autres, AC dit "Alors il ne faut pas que je me trompe, là, sinon vous allez m'engueuler...". Ré-applaudissemets.)

Je terminerai en disant la chose suivante, si vous voulez, c'est que "rien n'est trop beau pour être réalisé dans la Nature". Récemment, le prix Nobel de chimie a été décerné à un chimiste qui a découvert les quasi-cristaux, qui ont une merveilleuse histoire mathématique, dans la Nature. Ce que j'espère, c'est qu'un jour, on trouvera la sphère non-commutative S_q^2 dans la nature et qu'on pourra l'utiliser comme instrument de musique, et ce sera un instrument merveilleux parce qu'il ne se désaccordera jamais. Voilà. Merci.

(Applaudissements).

Un entretien avec Alain Connes

1 La géométrie non commutative

Le sujet qui m'a occupé pendant toutes ces années est très, très loin d'être épuisé. C'est un sujet qui commence par la découverte de Heisenberg. C'est une découverte de physique dans les années 25, 1925 bien sûr, et ce qu'a découvert Heisenberg, c'est quelque chose de tout à fait extraordinaire. Il a découvert que lorsqu'on fait de la physique avec des systèmes microscopiques, eh bien, on ne peut plus faire des calculs comme on y est habitué, c'est à dire faire ce qu'on appelle de l'algèbre commutative.

On ne peut plus utiliser la commutativité. Alors, la commutativité, ça veut dire que si vous écrivez mc^2, ou c^2 fois m, c'est la même chose, mais lorsqu'on fait de la physique quantique, on ne peut pas. Et donc, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire qu'il est essentiel aussi, autant pour la physique que pour les mathématiques, de comprendre des espaces plus subtils qui sont les espaces non commutatifs. Alors si c'était seulement... si la géométrie non commutative était seulement une généralisation de la géométrie à des espaces dans lesquels les cordonnées ne commutent pas, ça ne serait pas très intéressant.

Ce que j'avais découvert dans ma thèse, c'était que, justement, une algèbre non commutative par la simple non commutativité engendre son propre temps, c'est à dire évolue avec le temps. C'est quelque chose qui est difficile à expliquer, mais qui a une profondeur, c'est-à-dire qu'en gros, on peut la résumer sous la forme suivante. On peut dire si vous voulez que l'algèbre commutative est statique, elle ne bouge pas et l'algèbre non commutative évolue. Alors il faut bien comprendre que quand on parle d'algèbre non commutative, de coordonnées qui ne commutent pas, etc., on pourrait penser, de manière un peu simpliste si vous voulez, que c'est une abstraction mathématique qui n'a rien à voir avec nos habitudes, etc. En fait, ce n'est pas du tout le cas parce que, justement, la non commutativité, on est extrêmement familier avec ça parce que lorsqu'on écrit, avec des lettres, lorsqu'on écrit des mots, des phrases, etc., on doit bien sûr faire attention à l'ordre des lettres. Dans le langage écrit, on ne peut pas permuter les lettres.

Si on s'amuse à permuter les lettres, on obtient ce qu'on appelle une anagramme. Et évidemment, à ce moment-là, on peut avoir deux ensembles de lettres qui sont les mêmes dans le cadre commutatif, mais qui ont des significations totalement différentes dans le cas non commutatif. L'exemple qui a été l'occasion d'un livre qu'on a écrit récemment avec Jacques Dixmier et mon épouse, c'est si vous voulez, cette anagramme magnifique qui est dû à Jacques Perry-Salkow et qui est, justement, *"l'Horloge des anges ici-bas"*, qui a à voir avec le temps et l'anagramme de ça, c'est *"Le boson scalaire de Higgs"*.

Donc, on voit bien que si on regarde seulement la partie commutative, si vous voulez, de ces deux phrases, elles sont les mêmes, mais par contre, elles ne sont pas du tout les mêmes, elles n'ont pas du tout le même sens. Le quantique, la grande découverte de Heisenberg, c'est que, justement, il faut faire attention. La manière dont cette géométrie non commutative a évolué, et c'est pour ça qu'elle est très, très loin d'être épuisée, c'est que, d'une part, il y a un lien très, très fort avec la physique. Alors ça, je l'ai développé pendant de nombreux cours, avec mes collaborateurs, etc. Donc, il y a un lien avec le fait que c'est justement le formalisme de la mécanique quantique qui permet de comprendre comment des variables continues peuvent coexister avec des variables discrètes, et comment on peut reformuler la géométrie, la géométrie riemannienne, sous une forme qui est bien plus compatible avec le quantique que ne l'est la relativité générale.

Donc, ça, c'est tout un domaine, c'est tout un domaine qui est encore ouvert, qui est loin d'être épuisé. Il y a eu de gros progrès. Et puis il y a eu un autre épisode extrêmement exaltant qui s'est produit, c'est que si vous voulez, cette géométrie non commutative, justement, permet d'encoder des espaces qui, normalement, pour les mathématiciens, apparaissent comme des espaces très, très singuliers. Ce sont des espaces quotients, mais ce sont des espaces qu'on rencontre en mathématiques en fait, très, très souvent, les gens ne s'en rendent pas compte parce que dès qu'on prend ce qu'on appelle en mathématique une limite inductive, on va tomber sur un espace qui est de cette nature, parce qu'elle est définie comme un espace quotient. Et l'idée, si vous voulez l'idée fondamentale, c'est que lorsqu'on prend un quotient qui est difficile à prendre, il ne faut pas le regarder comme un ensemble. Mais il faut le regarder comme un

Interview d'Alain Connes, Professeur titulaire de la Chaire d'Analyse et Géométrie au Collège de France ; Alain Connes est interrogé en mars 2014 par Sophie Bécherel. Ont également participé au projet de réalisation de cet entretien Cécile Barnier et Sophie Chéron ; le projet a été financé par la Fondation Bettencourt-Schueller ; entretien visionnable ici : https://www.college-de-france.fr/site/alain-connes/Entretien-avec-Alain-Connes.htm.

espace non commutatif où la non commutativité vient du fait qu'on va identifier entre eux des points qui sont distincts et donc on va avoir des flèches, etc. Et c'est ça qui rend la chose non commutative.

Alors il y a eu un épisode tout à fait... qui est loin d'être terminé bien sûr, c'est en fait qu'un espace fondamental pour la théorie des nombres, qui est relié aux nombres premiers en fait, est relié à un espace non commutatif. Alors il y a un très, très long développement qui s'est fait, qui a correspondu à beaucoup de cours que j'ai faits, etc. mais qui continue à évoluer.

Et maintenant, on a trouvé avec Katia Consani, on a trouvé très, très récemment qu'en fait, il y avait un objet de géométrie algébrique très, très pur qui fait intervenir seulement les entiers avec les trois opérations de *inf* de deux nombres, de la somme de deux nombres et leur produit, mais qui fait intervenir deux concepts fondamentaux, le concept de topos, qui est dû à Grothendieck et le concept d'algèbre de caractéristique 1. Ça, c'est encore une autre histoire.

Cet objet fait qu'on a exactement le parallèle avec ce qu'avait fait André Weil en géométrie algébrique, justement pour s'occuper d'un problème fondamental en caractéristique finie.

Ce que vous nous dites là semble démontrer que les mathématiques engendrent d'autres mathématiques.

Oui, mais ce n'est pas qu'elles engendrent, non. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est que j'ai toujours eu cette longue discussion avec Jean-Pierre Changeux. Et ce n'est pas qu'on engendre, non, c'est comme si..., mais laissez moi vous expliquer pourquoi ce n'est pas qu'on engendre. C'est exactement comme si on disait que Christophe Colomb avait engendré l'Amérique. Tout le monde rigolerait. Bon, ben, le mathématicien, c'est pareil. Le mathématicien ne va pas engendrer. Il va découvrir et il va découvrir un nouveau pan des mathématiques. Soit parce que si vous voulez, ces mathématiques viennent de la physique. Et bien sûr, je crois que c'est Hadamard qui en a le mieux parlé, si vous voulez : les mathématiques viennent de la physique du fait qu'elles ont à voir avec la réalité extérieure, elles ont un goût particulier. Elles ont une force particulière, mais ce n'est pas du tout quelque chose qu'on engendre, non.

2 La recherche mathématique

On essaye de comprendre. On essaye de comprendre la réalité physique, bien entendu, et on essaye de comprendre la réalité mathématique. C'est quelque chose qui est très, très obscur, très difficile à comprendre. Et la manière que l'on a d'essayer de comprendre, c'est d'élaborer, alors là, on invente effectivement des concepts. Ces concepts sont très précis. Par exemple, j'ai parlé du concept de topos dû à Grothendieck. Ce sont des concepts très précis.

Ce ne sont pas des choses vagues, ce sont des choses très, très précisément définies. Et ce qui est extraordinaire, si vous voulez, c'est qu'un des rôles souvent méconnu des mathématiques, c'est celui d'engendrer des concepts. Et ces concepts, au départ, vont être des concepts purement mathématiques. Mais graduellement, ils vont s'insérer dans le quotidien que nous partageons tous. Un exemple très frappant, c'est le concept de fonction, vous savez, le concept de fonction n'est pas quelque chose qui est évident pour le grand public, etc.

Mais quand on parle par exemple du ralentissement de la croissance du chômage ou de choses comme ça, ça correspond à des propriétés mathématiques très précises, définies sur des fonctions. Et donc, on a là un exemple frappant d'un concept qui vient des mathématiques et qui, graduellement, graduellement, va s'inscrire dans le bagage commun de la civilisation. Et une des raisons pour laquelle il pourra s'inscrire, c'est que maintenant, on n'a pas seulement l'imprimerie, l'écriture, on a aussi les ordinateurs.

Et l'ordinateur ne va pas être seulement capable de transmettre des mots, de transmettre des chiffres. Il va être capable, justement, de transmettre des fonctions, c'est à dire qu'on va pouvoir voir sur son écran d'ordinateur le graphe d'une certaine fonction, etc. Et on va pouvoir comprendre qualitativement les propriétés de ces fonctions et la pertinence des concepts mathématiques.

3 Entre réalité physique et mathématiques pures

Il y a toujours un équilibre et justement, mon équilibre... si vous voulez, on ne peut avancer que si on marche sur deux pieds. Mon équilibre, c'est entre d'un côté la physique, bien entendu, que je n'abandonne jamais, parce qu'il y a cette essence de la physique quantique, justement, qui, comme je le disais si vous voulez, permet cette coexistence du continu et du discret qui est magnifique et d'un autre côté, il y a la géométrie algébrique, la théorie des nombres, etc.

Je parlais par exemple des topos. Grothendieck a écrit sur les topos que justement, c'était *"le lit à deux places qui permet les épousailles entre le discret et le continu"*. Donc, bien que ce soit une approche très différente, ce n'est pas totalement disjoint.

Donc il y a cet équilibre entre les deux et bon, la physique, bien sûr, se heurte à l'expérimentation. Les mathématiques se heurtent aussi, d'une certaine manière, à une expérimentation. J'utilise énormément l'ordinateur, j'utilise énormément de vérifications sur ordinateur, même pour des choses qui paraîtraient impossibles à regarder sur l'ordinateur. Et là, on se heurte à une vraie réalité. On se heurte à quelque chose qu'on ne peut pas modifier. On veut savoir si quelque chose est vrai ou pas, on fait des tests, on regarde tout ça.

Bon, ben, c'est un peu comme un physicien qui va faire des expériences et regarder si son idée est correcte ou s'il faut la corriger. Bon donc, il y a ces deux pans de mon travail, si vous voulez, et il n'y a pas un pan qui a pris le pas sur l'autre, ils sont toujours restés très équilibrés.

Certains disent quand même que votre géométrie non commutative, elle est un pont entre la mécanique quantique et la physique classique. Pourquoi ?

Oui. Si vous voulez, ce qu'il y a... ce n'est pas vraiment un pont entre la mécanique quantique et la physique classique. Non, le pont entre la mécanique quantique et la physique classique, c'est ce qu'on appelle la déquantification. C'est toute une histoire, ça relie à la caractéristique 1 dont je parlais tout à l'heure. Mais c'est autre chose. En fait, la géométrie non commutative, non, c'est plus un pont entre le quantique et la géométrie et le fait que, justement, notre géométrie à laquelle nous sommes habitués, celle de Descartes, s'applique parfaitement à la physique classique, mais ne s'applique pas à la physique quantique.

La physique quantique oblige à repenser la géométrie. C'est exactement mon travail. C'est exactement ce que je fais, ce qu'on a fait avec mes collaborateurs, c'est de montrer que le lagrangien[1], qui est extrêmement compliqué, et qui contient à la fois, la gravitation, et la mécanique quantique, le lagrangien de la mécanique quantique, ce lagrangien, se comprend de manière incroyablement simple et conceptuelle lorsqu'on a les outils de la géométrie non commutative. Mais c'est encore un lagrangien, il faut comprendre ça, qui est au niveau classique, c'est-à-dire qu'il n'est pas encore quantifié. Alors, on sait qu'on est sur la bonne voie parce que ce lagrangien qui a l'air incroyablement compliqué, il prend quatre heures pour le mettre en formules.

Un lagrangien, on peut résumer ça comme une formule ?

Un lagrangien, c'est une formule, mais en gros, si vous voulez pour vous expliquer ce que c'est qu'un lagrangien, il faut comprendre le principe d'action le plus simple, qui est ce qu'on appelle le principe de Fermat, et je peux vous l'expliquer en trois mots. Le principe de Fermat, c'est le principe qui dit que la lumière va suivre le chemin qui sera le plus court en temps pour elle. Alors, vous pouvez faire une analogie avec... Supposez que vous soyez en banlieue, que vous vouliez aller à l'intérieur de Paris, par exemple.

Ok, eh bien, à ce moment-là, si vous savez qu'il y a de grands grands embouteillages dans Paris, ce que vous allez faire, c'est que vous allez atteindre le point de la circonférence de Paris. Qui sera le plus proche du point que vous voulez atteindre ? Peu importe que vous n'alliez pas en ligne droite. Et ça, c'est exactement ce qu'on appelle le principe de réfraction de la lumière. D'accord ? Donc, le principe de Fermat vous dit qu'il y a un principe qui consiste à minimiser le temps de parcours, ok ? Alors les physiciens ont agrandi ce principe à des choses beaucoup plus générales. Ils l'ont agrandi à toute la physique et lorsqu'on l'agrandit à toute la physique, le principe d'action, c'est justement ce qu'on appelle le lagrangien. D'accord ? Et

1. Le lagrangien d'un système dynamique est une fonction des variables dynamiques qui permet d'écrire de manière concise les équations du mouvement du système.

il contient toute la physique parce qu'il contient à la fois la gravitation et il contient aussi le lagrangien de la mécanique quantique. Mais on est encore au niveau classique, comme on dit. Il faut encore quantifier ça.

Et alors, ce qu'on s'est dit avec mes collaborateurs, c'est que quantifier quelque chose que l'on ne comprend pas, c'est un peu illusoire. Et donc, ce qu'on a fait, c'est qu'on a compris ce lagrangien classique, comme étant le lagrangien d'Einstein, c'est à dire la gravitation pure, mais sur un espace un petit peu plus subtil que l'espace, qui est simplement le continu auquel on est habitué et l'espace qu'on a trouvé, c'est un espace qui est précisément un mélange entre le continu et le discret, et ce mélange ne peut se produire qu'à travers le non commutatif.

Et ça vous donne quoi, d'avoir trouvé ça ?

Ça nous donne d'abord un plaisir esthétique formidable, le fait qu'un lagrangien, qui normalement prend quatre heures à être transcrit en LaTex sur un fichier, peut s'écrire sous la forme d'une toute petite formule. Et cette toute petite formule est encore plus simple que la formule d'Einstein, puisque c'est une formule qui ne fait que compter le nombre de valeurs propres de l'élément de longueur en géométrie non commutative, qui sont plus grandes qu'une longueur donnée. Donc, c'est quelque chose d'incroyablement simple et c'est quelque chose si vous voulez, qui dit justement que l'élément de longueur en géométrie non commutative est quelque chose de totalement différent de l'élément de longueur classique. L'élément de longueur classique, vous savez, c'était le mètre-étalon dont on nous parlait lorsqu'on était étudiants et on nous disait "L'élément de longueur... Le mètre-étalon est déposé au Pavillon de Breteuil", etc. Et il y avait toute une histoire qui expliquait la création de ce mètre-étalon avec Delambre et Méchain qui avaient été envoyés, les arpenteurs qui avaient été envoyés entre Dunkerque et Barcelone pour mesurer, etc.

Et alors ? Il s'est produit justement dans les années 1920 un épisode extraordinaire qui est exactement le même au niveau de la physique que le changement de paradigme que nous proposons pour la géométrie non commutative. Cet épisode, c'est le suivant. Il y avait un congrès, pas d'arpenteurs, mais du système métrique. Donc, les gens étaient réunis et parmi eux, il y en a un qui a levé le doigt pendant la réunion et il a dit "Je suis désolé de vous apprendre une mauvaise nouvelle, mais l'unité de longueur change de longueur.". Imaginez, le mètre change de longueur. Alors c'est très, très embêtant, si vous voulez, on a une unité de longueur qui change de longueur.", alors les autres lui ont demandé. "Bon, d'accord, c'est très bien, mais comment est-ce que vous savez ça ?" Il a dit "Écoutez, j'ai pris le mètre-étalon qui est au Pavillon de Breteuil, etc. Et je l'ai mesuré par rapport à la longueur d'onde du krypton et je me suis aperçu qu'il changeait de longueur".

Bon, alors, catastrophe, etc. On ne peut pas prendre un élément de longueur qui change de longueur, alors graduellement, les physiciens ont réfléchi, etc.

Et ils ont compris qu'en fait, il fallait prendre comme unité de longueur, ce qui avait permis de voir que l'ancienne unité de longueur avait changé. Donc, ils ont pris une unité de longueur qui est spectrale. Ensuite, ils ont remplacé le krypton par le césium.

Et il est bien évident que si l'on veut unifier le système métrique, admettons dans la galaxie, il faudra donner quelque chose de convaincant.

Si on dit aux gens "si vous voulez mesurer votre lit, il faut que vous veniez au Pavillon de Breteuil, etc." Bon, ça ne sera pas très convaincant. Si, par contre, on leur dit "écoutez, vous prenez l'hydrogène. Vous prenez le spectre de l'hydrogène. Il y a une certaine raie spectrale qui a une certaine forme et vous prenez sa longueur d'onde comme unité de longueur". C'est formidable. Et bien le changement qui permet de passer de la géométrie classique à la géométrie non commutative est exactement le même, c'est à dire qu'en géométrie non commutative, l'élément de longueur est spectral, il est donné par l'inverse de ce qu'on appelle l'opérateur de Dirac et il est donné par ce que les physiciens appellent le propagateur des fermions, c'est à dire quelque chose qu'ils écrivent toujours comme un infinitésimal. Donc, il y a là si vous voulez une coïncidence qui est extrêmement, extrêmement forte, et qui dit qu'il y a une évolution de la géométrie qui passe justement d'un formalisme entièrement classique, entièrement commutatif à un formalisme qui cadre avec le non commutatif, mais qui aussi est spectral, qui devient spectral.

Pourquoi dites-vous que vous n'en avez pas fini... ?

On n'en a pas fini, mais non. On en est au tout début, si vous voulez, on en est au tout début. D'abord parce que bon, effectivement, il faudrait passer au niveau quantique pour la géométrie de l'espace-temps, c'est à dire quantifier ce lagrangien dont je parlais, mais aussi dans la compréhension, par exemple, de la géométrie qui sous-tend les nombres premiers, on est encore bien loin du compte. On a trouvé récemment donc, l'objet qu'on cherchait depuis une quinzaine d'années.

C'est ce que je disais. C'est un objet de géométrie algébrique, mais qui utilise des notions très sophistiquées puisqu'il utilise à la fois les topos et la caractéristique 1.

Mais d'un autre côté, lorsqu'on donne la définition, la définition est d'une simplicité bouleversante, si vous voulez, donc, c'est sûrement la bonne définition. Mais ensuite, il faut développer l'analogue de la géométrie algébrique qui avait été développée en caractéristique finie, il faut la développer en caractéristique 1, il faut développer une cohomologie qui remplace la cohomologie de Weil, etc. Donc, vous voyez, il y a tout un programme qui est là, qui est devant nous.

4 Les outils du mathématicien

On a une chance inouïe en mathématiques, c'est qu'un mathématicien confronté à un problème très difficile, qu'est ce qu'il fait ? En général, le problème est trop difficile pour l'attaquer frontalement. Donc il y a une méthode. Il faut savoir, par exemple, que si je vous dis "on prend une tablette de chocolat qui a 4 d'un côté, 8 de l'autre. Combien faut il de fois la couper en deux pour que finalement, elle soit réduite en petits carreaux ?". Vous allez me dire c'est très, très compliqué, etc., d'accord.

Eh bien, l'idée du mathématicien, c'est immédiatement de généraliser le problème. C'est à dire qu'au lieu de dire une tablette de chocolat de 4 fois 8, il va dire une tablette de chocolat de n fois m, où n et m sont deux entiers. Et puis après, il va prendre les plus petites valeurs de n et m. Par exemple, il va prendre $n = 1, m = 2$. Il va prendre 2 carreaux. OK, on coupe en une fois, ça marche. D'accord.

Et puis après, il va s'amuser à regarder des cas plus simples, mais de plus en plus compliqués. Et au bout d'un moment, parce qu'il aura résolu les cas les plus simples qui sont faciles, la difficulté va croître comme un escalier. Et à travers cet escalier, à un moment donné, il dira "Ah voilà, ça y est, j'ai compris !", et il aura compris l'idée générale. D'accord. Donc, c'est ça l'essence des mathématiques. Et si vous voulez, il y a une chose formidable, c'est qu'en général, lorsqu'on regarde les petits cas, les cas plus simples, eh bien, ensuite, on va pouvoir procéder par analogie.

Et l'analogie est un outil des mathématiciens qui, pour le moment, échappe totalement à l'ordinateur parce que l'analogie n'est jamais exacte. L'analogie, c'est quelque chose...

C'est de l'intuition ?

Non, ce n'est pas de l'intuition. L'intuition, c'est autre chose. L'analogie, c'est quelque chose qui consiste à dire que l'on va transplanter des méthodes qui ont marché dans un cas, à un autre cas. Et bien sûr, ça ne sera pas exactement la même chose. Il faudra prendre... c'est comme si vous preniez une petite fleur, vous la transplantez ailleurs, si vous voulez, il faut qu'elle reste vivante, mais la terre sera différente, elle sera dans un contexte différent, etc.

Cette idée de la transplanter, est-ce que ça, c'est de l'intuition, de se dire "tiens, je vais prendre cet outil-là, et je vais l'amener là ?

Oui, bon, c'est vrai, si vous voulez que dans les mathématiques, il y a une part non négligeable d'intuition qui est très, très difficile à définir.

5 L'intuition

C'est vrai, c'est parfaitement vrai que dans certaines situations, certaines situations où on a un problème très difficile, etc., on arrive à avoir une intuition. Mais cette intuition, si quelqu'un vous demandait

“Est-ce que tu peux me dire,...Là, qu’est ce que tu veux ? Qu’est ce que tu fais ?” Etc. On serait incapable de le dire, on serait incapable de le dire, parce que c’est une intuition qui n’est pas encore rationalisée et qui, si on essayait artificiellement de la rationaliser, s’évaporerait.

Et ça, c’est quelque chose de très, très difficile à comprendre. C’est quelque chose qui est très difficile à formaliser et qui rend le travail du mathématicien très difficile, c’est que c’est un travail entièrement, purement rationnel, si vous voulez...

Ni linéaire.

Ni linéaire, absolument pas linéaire, c’est-à-dire qu’il y a des périodes, souvent assez longues, dans lesquelles il y a une espèce d’incubation. Hadamard en a parfaitement parlé, je ne vais pas répéter ce qu’il disait, mais il y a une période d’incubation qui est souvent longue, et qui demande justement de pas être trop rapide intellectuellement, parce que si on est trop rapide intellectuellement, on va facilement trouver des raisons qui font que ça ne va pas marcher.

Mais c’est une erreur souvent de croire ça parce qu’il faut laisser les choses lentement évoluer. Il faut être extrêmement patient, mais en même temps, il faut être exactement comme une bête sauvage aux aguets, c’est-à-dire tout en étant patient, rester complètement en éveil et être capable, justement, si on voit quelque chose qui a l’air de marcher, là, il faut sauter. Bien sûr, il ne faut pas être endormi. Il ne faut pas attendre que ça tombe du ciel comme ça.

En ce moment, quelle est la bête que vous traquez ?

Eh bien la bête qu’on traque, là, c’était ce que je vous disais, c’est sur la théorie des nombres, etc. Ce qui s’est passé avec Katia Consani, justement, c’est qu’on a eu l’impression qu’il y avait un certain nombre de pièces du puzzle, de cet immense puzzle qui sous-tend les nombres premiers qui sont tombés en place. Alors bon, c’est une avancée, c’est une avancée, mais c’est une avancée qui peut paraître trop naïve, etc., d’un certain côté, mais pour nous qui comprenons l’essentiel des éléments qui composent ce puzzle, ça a été vraiment une révélation.

Bien sûr, on est très, très loin du but. On est encore très, très loin du but, mais ça permet, si vous voulez, de se raccrocher à toute la panoplie d’outils, de notions qui ont été développés par les géomètres algébristes, donc d’abord André Weil, puis Serre, puis Grothendieck. Et donc, ça nous donne une espèce de programme de travail. Et ça, c’est formidable. Ça, c’est formidable. Je vous dirais qu’il y a plus de plaisir à avoir un programme de travail, à savoir qu’on va s’embarquer dans ce programme de travail, c’est un peu comme le marin qui s’embarque pour de longs périples, etc., il y a plus de plaisir à ça que de terminer quelque chose, parce que c’est ouvert, et ça, ça ouvre quelque chose.

6 La réalité mathématique

À plusieurs reprises, vous parlez de la réalité mathématique, mais expliquez-la nous, parce qu’elle nous est étrangère

Le problème, si vous voulez, c’est que les mathématiques ne sont pas quelque chose que l’on peut comprendre, où l’on peut lire sans en faire. En cela, les mathématiques sont très différentes d’autres sujets. Mais la réalité mathématique, c’est quelque chose d’incroyablement concret, c’est aussi concret qu’une chaise, si vous voulez, qu’on peut toucher. Mais je n’essaierai pas de vous donner des exemples d’arithmétique, parce que c’est trop simple. Mais par exemple, prenons la géométrie, si vous voulez, si vous prenez la géométrie euclidienne ordinaire, je peux vous donner un énoncé. Et puis vous pouvez, après, chercher à comprendre, chercher à voir si c’est vrai ou pas. Et je vous donne un exemple. C’est ce qu’on appelle le théorème de Morley. C’est un magnifique théorème. C’est un théorème qui vous dit que de tout triangle émerge un triangle équilatère. Alors, comment il émerge ? Il émerge de la manière suivante : vous prenez le triangle et vous prenez chaque angle du triangle et vous le coupez en trois, trois parties égales, d’accord ? Alors vous obtenez comme ça des droites. Vous intersectez ces droites, ça va vous donner trois points. Eh bien, ces points sont les trois sommets d’un triangle équilatère, quel que soit le triangle dont vous parlez. Donc, c’est incroyable, c’est incroyable. Alors vous pouvez me dire “mais non, ce n’est pas vrai !". Et moi, je vais vous donner la démonstration que c'est vrai et on touche la réalité mathématique.

Alors en fait, on la touche aussi de manière extrêmement concrète avec les ordinateurs, c'est à dire que bon, on peut... on peut se poser la question de savoir à partir de quel moment on se convainc qu'une chose est vraie, mais on se convainc d'une chose est vraie de deux manières différentes. Il y a une manière expérimentale. C'est exactement comme en physique, c'est à dire que bon, il peut y avoir un énoncé, je ne sais pas, sur des formes modulaires.

Mais l'ordinateur est tellement puissant, tellement fort, si vous voulez, qu'il est capable, justement, de calculer des exemples. Et si on vérifie sur suffisamment d'exemples que ça marche, on est convaincu que c'est vrai. Ce n'est pas du tout la même chose que de trouver une démonstration. Mais il faut bien comprendre que c'est un peu comme la réalité physique et c'est une réalité qui est là, qui est tangible et qu'on peut explorer. On peut l'explorer directement. On peut l'explorer par la pensée, c'est bien mieux et on peut aussi l'explorer par l'ordinateur. Et elle est présente tout le temps. Elle n'est pas comment dire, on ne peut pas la toucher comme on touche la réalité physique. Mais peu importe, elle est tout aussi réelle. Elle est tout aussi fondamentale que celle-là. Je reprends l'exemple du théorème de Morley, si vous voulez, ce qui va enlever le doute complètement, c'est de donner une démonstration algébrique. Elle existe. Il existe une démonstration purement algébrique du théorème de Morley.

Et alors, une fois qu'on a trouvé cette démonstration, c'est formidable, ça veut dire que d'abord, ça marche dans tous les cas, bien sûr, parce que c'est purement algébrique et en plus, non seulement ça marche dans tous les cas, mais la figure géométrique qu'on a, elle va utiliser ce qu'on appelle le corps des nombres complexes. Mais la démonstration algébrique va marcher pour tout corps, donc c'est quelque chose de formidable parce que ça veut dire qu'à partir justement d'une image géométrique et d'une intuition géométrique, eh bien, on a trouvé une formulation algébrique qui est beaucoup plus générale. Et donc, on a franchi un pas, on a franchi un pas justement par cette espèce de communication, si vous voulez, entre d'un côté une intuition géométrique et de l'autre côté, une intuition algébrique, qui est une formulation algébrique des choses et qui est beaucoup plus puissante d'une certaine manière. Mais il y a toujours un aller-retour, c'est-à-dire que certains mathématiciens ont une vision géométrique des choses, ont des images, des images mentales, d'autres ont une compréhension algébrique des choses, c'est-à-dire une manipulation dans le temps, à l'inverse d'une manipulation géométrique, d'une comprehension géométrique.

7 La géométrie non commutative engendre son propre temps... (?)

J'aimerais creuser une phrase que je n'ai pas comprise : "la géométrie engendre son temps".

En gros, la manière dont le temps apparaît, c'est qu'en géométrie, lorsque les choses ne commutent pas, ab est différent de ba, d'accord. Mais il y a une équation qui se produit que je vais ultra-simplifier, bien sûr, qui est que ab n'est pas égal à ba, mais est égal à b, multiplié par a transformé par le temps, mais pas par le temps réel qu'on connaît, mais par le temps imaginaire. Donc, ce qu'il faut retenir, c'est que ab n'est pas égal ba, mais est égal à b fois a transformé par le temps imaginaire et ensuite par ce qu'on appelle le prolongement analytique, eh bien, on arrive à un temps réel. Donc, c'est ça l'idée fondamentale, si vous voulez. Alors au départ, c'était une idée qui a été développée par les physiciens qu'on appelle Kubo-Martin-Schwinger (KMS), puis par d'autres physiciens Hugenholtz-Winnink-Haag. Et puis par Tomita, un mathématicien japonais, et Takesaki.

Et puis moi, j'ai travaillé dans ma thèse avec Jacques Dixmier là-dessus et j'ai fait justement, à un moment donné, une trouvaille vraiment qui était fondamentale, qui était que, alors qu'on avait l'impression que cette évolution dans le temps dépendait d'un choix particulier, d'un état, j'avais trouvé qu'elle n'en dépendait pas, par ce qu'on appelle "modulo les automatismes intérieurs près". Alors ça a donné toute une foultitude d'invariants des algèbres en question, et ça a permis de les classifier, ça a permis d'avancer considérablement, mais il y avait comment dire... Il y avait un message philosophique que j'avais ressenti à travers mon intuition, bien sûr, dans cette découverte et que j'avais pendant des années été incapable de relier à la physique, jusqu'au jour où j'ai rencontré un physicien un peu par hasard. Et c'est Carlo Rovelli.

Et en discutant avec lui, si vous voulez, je me suis aperçu que... on s'est aperçu tous les deux que lui avait eu une idée semblable, mais il n'avait pas les outils mathématiques qui permettaient de mettre ce cadre sur pied. Et en plus, lui, il l'avait fait dans ce qu'on appelle le cadre semi-classique, c'est à dire pas encore quantique. Et donc, en mettant les choses ensemble, eh bien, on a compris, si vous voulez, que cette équation, cette génération du temps par le non commutatif avait probablement un rôle fondamental en physique qui n'est pas encore totalement établi.

8 Faire admettre la portée d'une découverte

Un des prétextes, comment dire, d'un livre qu'on vient d'écrire, qui s'appelle *Le théâtre quantique*, justement avec mon professeur de thèse Jacques Dixmier et avec mon épouse Danye Chéreau, c'est précisément, si vous voulez, de faire passer cette idée dans le grand public, parce que bon, finalement, moi, j'y tiens énormément à cette idée et la faire passer à travers un message qui est ludique, si vous voulez, dire ce message à traverse une histoire qui raconte les épisodes de la vie d'une chercheuse, de l'héroïne, etc.

Et vous diriez que là, en ce moment, on est à une période charnière, justement, sur cette notion de temps.

Vous savez, je ne sais pas, parce qu'il faut bien comprendre que dans le domaine dans lequel je travaille, si vous voulez, il y a deux niveaux. Il y a un niveau qui est le niveau vraiment de la recherche, de comment les choses se passent, comment elles évoluent. Et puis, il y a un niveau sociologique. Et le niveau sociologique, c'est dans quelle mesure ces choses là vont passer dans la communauté scientifique. Et évidemment, ce sont deux choses qui sont disjointes, bien sûr, d'accord.

Mais bon, je ne peux pas dire que je me sois beaucoup préoccupé pendant ma carrière du niveau sociologique. Donc bon, alors c'est un peu à la traîne toujours...

Vous ne pouvez pas vous prononcer

Non, pas vraiment, non, disons que c'est un peu à la traîne, c'est vrai. Des fois, c'est exaspérant parce qu'on voit les gens qui ne comprennent pas, etc. On voit d'autres théories qui occupent le devant de la scène de manière un peu indécente, mais c'est comme ça. Donc, je veux dire, on a souvent fait... Quand on travaille, on a le choix. Soit on travaille vraiment, soit on se répand pour dire... soit on communique. Bon, c'est difficile, c'est très, très difficile de faire les deux choses en même temps. C'est presque contradictoire. Pourquoi ? Parce que quand on travaille vraiment, c'est une occupation de tous les instants et on a très, très peu de temps libre, en fait. Pour le reste.

On travaille seul ?

Non, non, non. On a absolument besoin des autres. Moi, je vais dire, j'ai toujours eu des collaborateurs, soit en physique, surtout, par exemple, mon collaborateur Chamseddine et bon, en ce moment pour la théorie des nombres avec Katia Consani. Donc, c'est essentiel d'avoir des collaborateurs, justement, ne serait-ce que bon, d'abord, ils apportent des idées nouvelles, bien entendu, mais surtout aussi, je dirais, pour ne pas être complètement seul, parce qu'il y a évidemment des moments très difficiles. Il y a évidemment des moments, des longues, longues périodes dans lesquelles rien ne se produit. Et si on était seul, on n'aurait peut-être plus tendance à se décourager que si on travaille plus dur. Ça, ça joue un rôle très, très important.

9 L'intensité des cours au Collège de France

J'ai un public, assez varié, très varié, qui vient régulièrement à mes cours et il y a un contact très fort qui s'établit avec le public.

Donc c'est vraiment, vous, la recherche en train de se faire...

Ah oui ! Et je dois dire que, comment dire, le leitmotiv du collège qui fait son originalité, ça, ça crée justement pendant les mois qui sont les mois de cours du Collège, une période extraordinaire, une période extraordinaire. Pourquoi ? Parce que les bonnes années, ça n'arrive pas tout le temps. Les bonnes années, en gros, deux semaines avant le cours, je sais de quoi je vais parler. En gros, j'ai le sujet, d'accord, mais je n'ai absolument pas les détails. Et en gros, ce que je fais, c'est que je m'arrange pour avoir deux semaines d'avance, c'est à dire que je sais en gros ce que je vais faire dans le cours suivant. Et puis, je travaille sur le cours d'après. Donc, je cherche sur le cours d'après et c'est une période de recherche d'une intensité absolument incroyable. Pourquoi ? Parce qu'on sous-estime souvent le fait qu'en mathématiques, si vous voulez comprendre les choses, on peut avoir l'impression d'avoir compris. Mais il y a toujours un bénéfice extraordinaire à aller dans le moindre détail et à, comment dire, à exhiber toutes les facettes d'une notion, etc. Parce que...

Vous êtes perfectionniste

Être perfectionniste, parce que ça va engendrer des choses. Et je m'en suis encore aperçu en préparant le cours de cette année parce que c'est justement à travers toute l'élaboration du cours, etc., que l'objet de géométrie algébrique est apparu. Donc, ce que je veux dire, c'est que c'est une période très intense, très dure, très dure, parce que c'est dur physiquement, par exemple. Il m'arrive souvent d'avoir des manifestations physiques, si vous voulez de la tension, pendant la période du cours, au moment du début, etc. Mais c'est extrêmement productif parce que c'est la période où je travaille le plus, etc.

Mais c'est concentré, vous ne pouvez pas faire ça tout le temps, évidemment. Si on faisait ça tout le temps, on serait complètement lessivé, raplapla, etc.

C'est peut-être là, le secret de votre foisonnement...

Oui, absolument. Absolument. Parce que si vous voulez souvent, je me suis dit "Bon, peut-être si j'étais resté au CNRS...", etc. Mais ça dépend. Bien sûr, chaque mathématicien est un cas particulier et si vous voulez, il faut trouver l'équation qui va lui permettre de marcher.

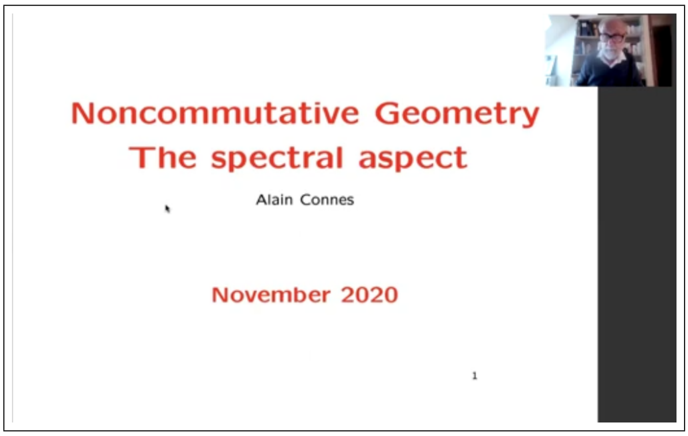
Mais finalement, dans mon cas en particulier, la motivation qu'il y a au Collège qui consiste à dire que chaque cours doit être un cours sur quelque chose d'original qui est en train de se faire, à la limite qui n'est pas publié, mais qui est vraiment en train de se faire. Mais cette motivation, je la trouve formidable. Je la trouve formidable. Il y a des années, effectivement, où c'est beaucoup plus difficile ou beaucoup plus embêtant, mais c'est comment dire, c'est très, très bien dosé. C'est à dire que si vous voulez, c'est pas comme si j'avais 6 mois de cours, ce serait trop. Mais cette période de cours qui dure entre 2 et 3 mois. Si vous voulez, c'est parfait parce que c'est très bien dosé et ça oblige à une certaine discipline. Ça oblige justement à rester tout le temps, tout le temps, tout le temps un peu inquiet, un peu sur le fil.

Et jamais, jamais se dire "bon, bah ok, maintenant je suis vieux, etc.". On ne peut pas agir, on ne peut pas. Parce que bon, bien sûr, il faudra que je m'arrête à un moment donné. Mais on ne doit absolument pas faire ça parce que si on fait ça, justement, on ne sera pas capable de faire le cours.

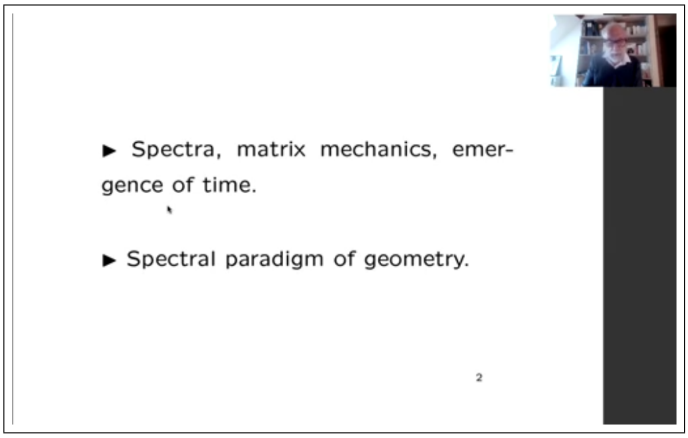
10 Le doute

Le doute, vous savez, dans le livre, le livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, commence par cette exposition à Venise qui s'appelle *L'éloge du doute*. Le doute est présent tout le temps. Le doute est présent à quatre heures du matin, lorsqu'on se réveille la nuit et qu'on se dit "Est-ce que je n'aurais pas fait une erreur là, etc.". Et qu'on commence à vérifier. Donc le doute est présent tout le temps, mais je rajouterai quand même que de temps en temps, de temps en temps, ça arrive rarement, mais ça arrive, heureusement, il y a des moments où le doute s'évapore. Et justement, j'ai douté pendant des années et des années que l'espace que j'avais trouvé en 1996 pour les nombres premiers était le bon. Et ce qu'on a trouvé récemment avec Katia Consani lève ce doute. C'est sûrement le bon espace, donc, c'est merveilleux que de temps en temps, il y ait, vous voyez, comme ça, un moyen de lever le doute. Alors bien sûr, on peut dire : "Bon, eh bien, tu as levé le doute pour toi, lève-le pour les autres.". Comme le but de tous ces développements, si vous voulez, c'est très, très difficile, bien sûr, ce n'est pas immédiat. Mais pour nous, c'est très, très important de lever le doute, même ponctuellement, si vous voulez, comme ça, sur une notion aussi importante.

Géométrie non-commutative, l'aspect spectral
Alain CONNES
23.11.2020



OK, alors laissez-moi commencer par dire que je suis vraiment reconnaissant de cette opportunité de parler de la géométrie non-commutative. Et je me concentrerai sur l'aspect spectral du sujet. Donc d'une manière ou d'une autre, je vais commencer par expliquant l'origine.

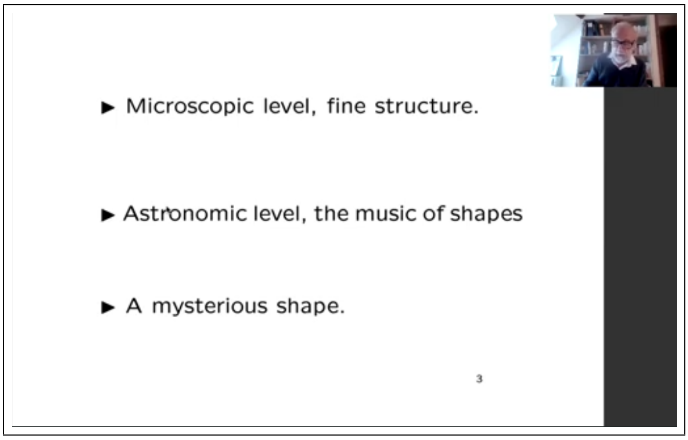


L'origine, ce sont des spectres, comment ceux qui ont conduit Heisenberg à la mécanique matricielle et à l'émergence du temps, comme je l'expliquerai, qui sont liées aux idées de von Neumann. Maintenant, le point suivant sera le paradigme spectral, le nouveau paradigme qui vient du traitement des espaces non-commutatifs, qui est spectral. Et cela sera analysé et expliqué à deux niveaux. D'abord au niveau microscopique, cela donnera la structure fine de l'espace-temps au niveau euclidien. Et au niveau astronomique, cela révélera la musique des formes. Et je finirai par exposer une forme mystérieuse qui est liée à un travail récent avec Katia Consani.

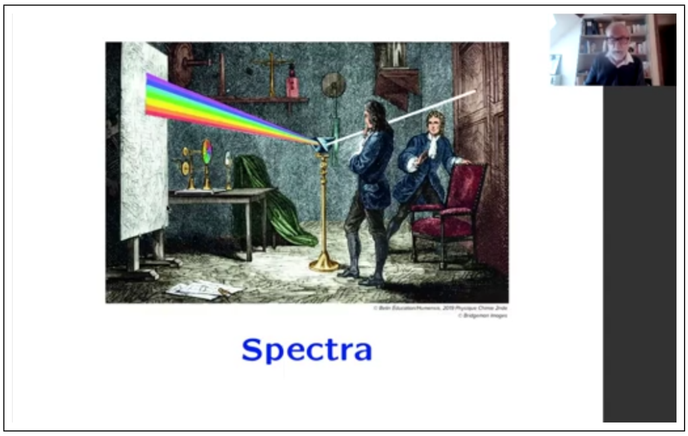
Conférence donnée à distance dans le cadre du cycle de conférences de l'Université de Harvard "Lecture series Mathematical Science Literature",

Vidéo visionnable ici https://youtu.be/AwVRss0F6zI.

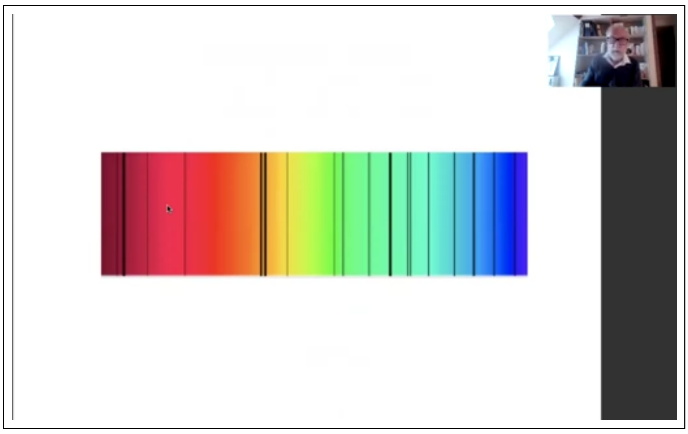
Transcription Denise Vella-Chemla, décembre 2020.



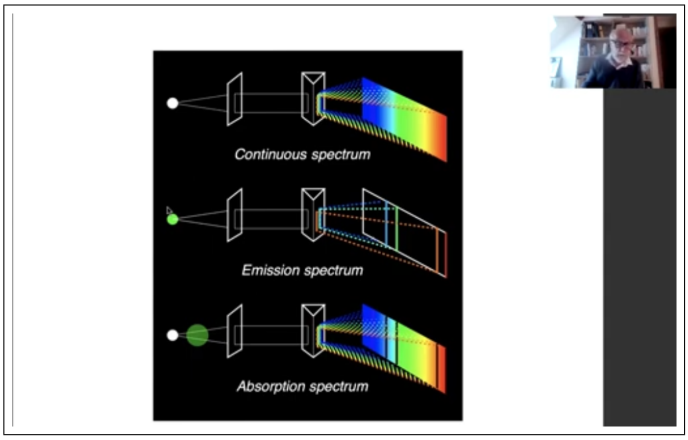
Alors laissez-moi commencer par le bon vieux temps. Cette image représente ce qui s'est passé par exemple lorsque Newton a décomposé un rayon de lumière provenant du soleil en le laissant passer à travers un prisme.



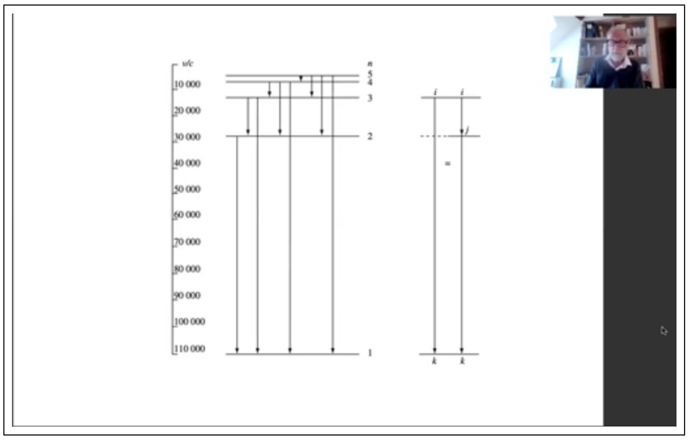
Et on obtient l'arc en ciel. Ce qui est vraiment intéressant à propos de cet arc-en-ciel, c'est que quand on regarde cela très attentivement, on découvre qu'il manque des lignes,



il y a des lignes sombres. Au début, un tel spectre a été découvert pour le sodium. La vraie découverte a été faite par Fraunhofer au début du $19^{\text{ème}}$ siècle. Il a trouvé environ cinq cents de ces lignes sombres qui sont maintenant comprises comme des lignes d'absorption, dans le sens où ce qui se passe, c'est que lorsque la lumière traverse un corps chimique comme dans le voisinage du soleil, la présence de ces corps chimiques a une conséquence qui est que le type de signature des corps chimiques apparaît en négatif, à travers ces lignes sombres. D'une manière ou d'une autre, quelques années plus tard

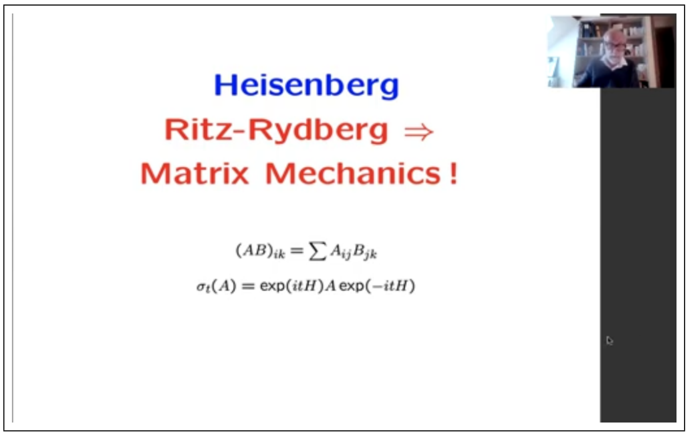


vers 1860, ce que Bunsen et Kirchhoff ont découvert, c'est qu'en fait on pouvait obtenir les mêmes lignes mais alors sous forme de lignes lumineuses sur fond sombre, c'est si vous voulez le négatif du spectre précédent et après cela, ils ont pu identifier un grand nombre des lignes qui avaient été identifiées en tant que raies d'absorption de Fraunhofer, ils ont pu identifier la plupart d'entre elles comme provenant de corps chimiques. Cela signifie donc que chaque corps chimique a une sorte de code-barres qui est sa propre signature. Et ce qu'ils ont trouvé également, c'est qu'il y avait quelques-unes de ces lignes qui ne concernaient en fait aucun corps chimique qui était connu sur Terre, ils ont donc inventé un nouveau corps chimique qu'ils ont appelé Hélium, en l'honneur du Soleil, bien sûr, et ce qui est étonnant, c'est qu'au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, il y a eu une éruption du Vésuve et les gens ont fait une analyse spectrale de la lave sortant du volcan et étonnamment, ils ont constaté que le spectre d'émission correspondant était exactement constitué des lignes manquantes trouvées auparavant et cela correspondait à l'Hélium. Et, bien sûr vous le savez, maintenant, l'Hélium est utilisé sur Terre. Ceci est clairement une caractéristique du fait que les corps chimiques ont leur propre code-barres.



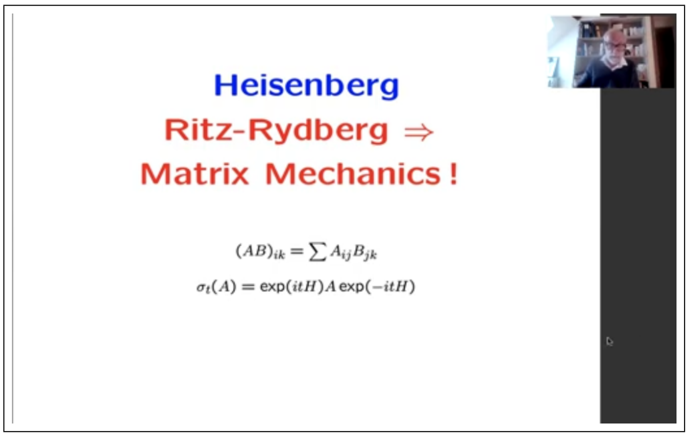
Maintenant, ces codes-barres ont été étudiés par des physiciens et ce qui se passe, c'est qu'ils ont une propriété tout à fait remarquable de compatibilité qui est que certaines de ces lignes, lorsque vous les exprimez en termes de fréquences, vous devez faire très attention de les exprimer en termes de fréquence et pas en termes de longueurs d'onde, certaines d'entre elles s'additionnent. Et pour comprendre comment elles s'additionnent, c'est Ritz-Rydberg qui a trouvé ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg, et l'idée est que ces lignes sont indexées non pas par un indice mais par deux indices, ce pourrait être des lettres grecques, comme vous le souhaitez, et le fait est que le principe de Ritz-Rydberg vous dit que la ligne d'indices $\alpha\beta$ se combinera avec la ligne d'indices

$\beta\gamma$, donc je veux dire que le deuxième indice de la première ligne doit être le premier indice de la deuxième ligne, puis en se combinant, elles vous donnent la ligne correspondant à $\alpha\gamma$. Maintenant ça, ce principe de combinaison Ritz-Rydberg a eu une conséquence étonnante entre les mains de Heisenberg



et ce qu'Heisenberg a découvert, c'est que grâce à ce principe, il faisait des calculs quand il était seul

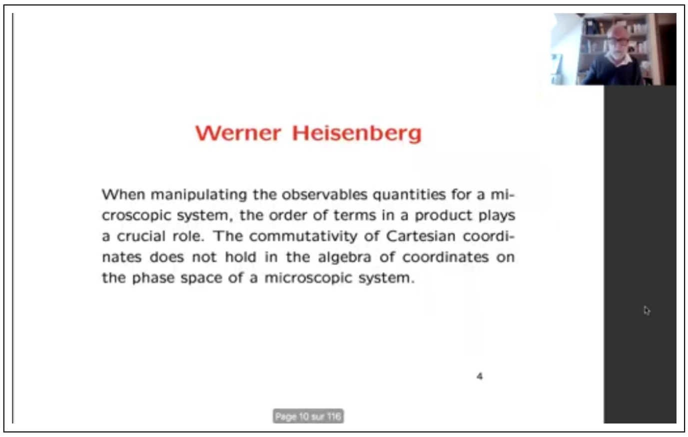
à Helgoland où il avait été envoyé parce qu'il était allergique, il avait été envoyé par son université, car il n'y avait pas de remède à ce moment-là, sauf d'envoyer des gens dans un endroit où il n'y avait aucune source de pollen. Donc il était là et il avait tout le temps qu'il voulait pour travailler et à un moment donné, pendant une nuit, je pense qu'il était près de quatre heures du matin, il avait prouvé que l'énergie est conservée[1],



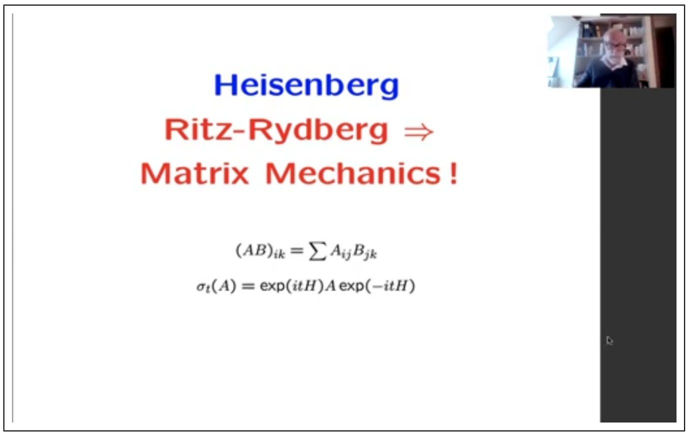
[1]entourant la dernière ligne de la page projetée.

car si vous intervertissez H et A, alors, il y a une commutation entre ces deux termes et vous obtenez que H est préservé par l'évolution temporelle.

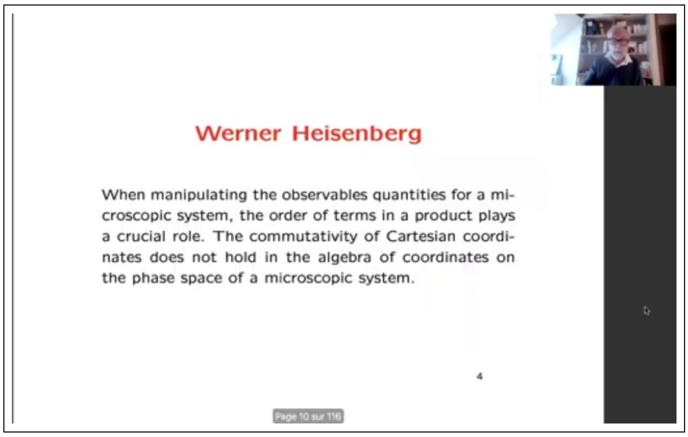
Puis, au lieu d'aller se coucher, il a escaladé l'un des sommets qui longeaient la côte et il a attendu le lever du soleil au sommet de ce pic. Et il explique qu'il voyait, bien sûr dans son esprit, par sa découverte, un paysage incroyable. Ce qu'il avait découvert avait une conséquence particulière, et cette conséquence était que, parce que les matrices ne commutent pas,



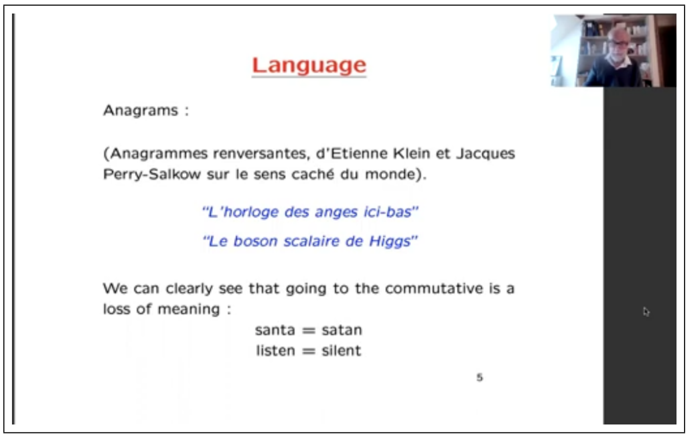
lorsque vous travaillez avec des quantités observables pour un système microscopique, vous devez faire attention à l'ordre des termes d'un produit. En fait, l'ordre des termes d'un produit joue un rôle crucial. Et en fait, si vous revenez à l'équation d'évolution de Heisenberg,



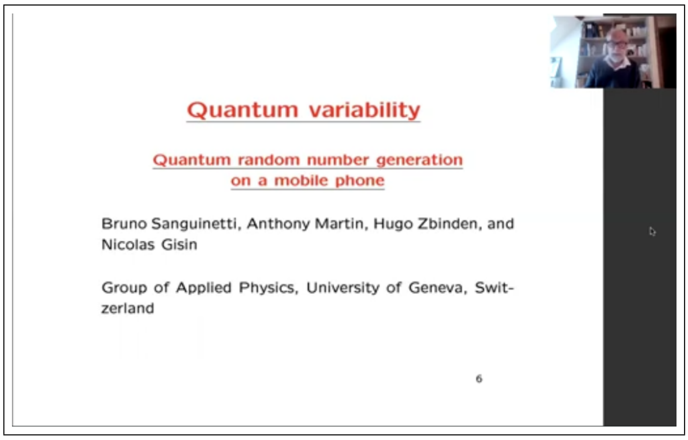
vous trouvez bien sûr que si tout pouvait commuter, cette évolution devrait être l'identité. En réalité, comme nous le verrons beaucoup plus loin, le monde commutatif est statique, tandis que le monde quantique est dynamique, et ceci est la première propriété.



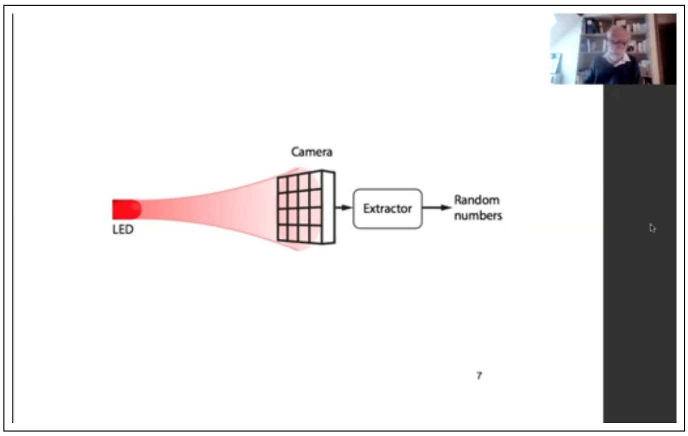
Maintenant, en particulier, cela signifie que la commutativité des coordonnées cartésiennes ne tient pas dans l'algèbre des coordonnées sur l'espace des phases. Et c'est un exemple fondamental de l'apparence d'un tel espace non-commutatif.



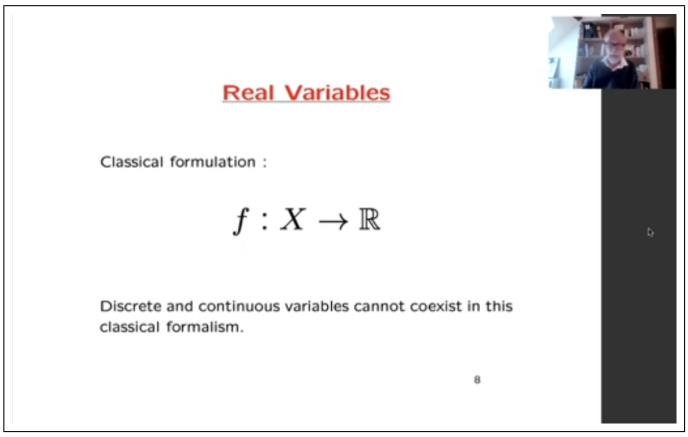
Maintenant, comme corollaire de ceci, vous pourriez penser que c'est très étrange, et que nous ne serions pas habitués à cette importance dans l'ordre des éléments, mais c'est faux. Nous sommes parfaitement habitués à cela par la langue, le langage. Je veux dire, quand nous utilisons des mots, nous devons, bien sûr, faire attention à l'ordre des lettres et à l'ordre des mots, sinon, on obtient des anagrammes. Ce que j'ai montré ici est un anagramme en français qui est assez étonnant mais d'une manière ou d'une autre, on peut clairement voir que quand vous allez au commutatif, vous perdez le sens. Par exemple, j'ai écrit ici Santa et Satan, qui sont identiques dans le monde commutatif (il y a deux a, un s, un n, un t). *Listen* (écouter en anglais), c'est la même chose que *Silent* (silence en anglais), et ainsi de suite. Donc en fait, ce que vous trouvez, c'est que cette voie quantique, cette manière d'être obligé de faire attention à l'ordre des lettres, c'est une façon de garder le sens. Et en géométrie algébrique ordinaire, on oublie complètement ces nuances.



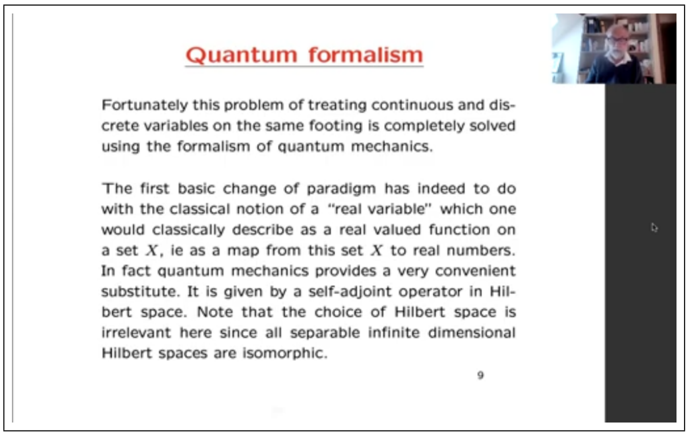
Or un corollaire de la non-commutativité, du principe d'incertitude de Heisenberg, c'est la variabilité quantique. Et pour comprendre cette variabilité quantique, il faut donner un exemple.



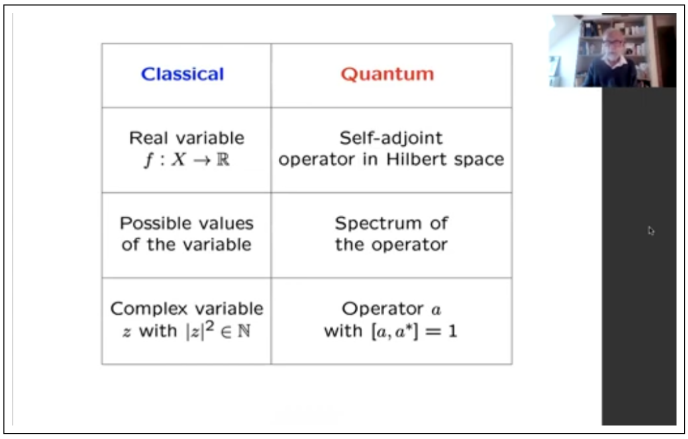
Plusieurs ingénieurs suisses ont fabriqué un petit appareil que vous pouvez utiliser dans un téléphone portable et qui génèrera des nombres aléatoires. Mais ces nombres aléatoires sont simplement générés en laissant un photon traverser une petite fente et atterrir quelque part sur une cellule photo, et la cellule sur laquelle il va atterrir est totalement imprévisible, par le principe d'incertitude de Heisenberg. Et donc, ce que cela vous donne, c'est un moyen de générer un nombre aléatoire, et cette façon de générer un nombre aléatoire ne peut pas être attaquée. Pour des raisons de sécurité, c'est un moyen très différent de ce que vous obtiendriez si vous génériez des nombres quantiques à partir d'un ordinateur puisque c'est un moyen incassable. C'est totalement différent non seulement par l'expérience, mais aussi par la théorie : vous savez que les nombres ne sont pas reproductibles. Il y a donc cette variabilité fondamentale,



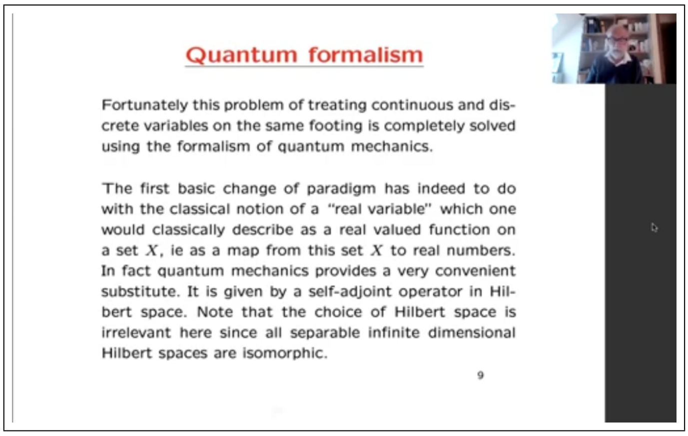
qui est liée à la mécanique quantique et quand vous y réfléchirez, vous découvrirez que la mécanique quantique est en fait un formalisme de variabilité bien meilleur que les mathématiques classiques ordinaires. Par exemple, si vous demandez à un mathématicien ce qu'est une variable réelle, vous obtiendrez très souvent comme réponse le fait qu'il ne s'agit que d'une application f d'un ensemble X à la droite réelle. Maintenant, il s'avère que ce formalisme est en fait assez pauvre car on ne peut pas avoir la coexistence de variables discrètes et continues, dans ce formalisme classique. La raison de cela est très simple. La raison est que si vous avez une variable, dans l'ensemble X en question, alors cet ensemble X doit être non dénombrable. Or toute variable discrète prendra en fait une certaine valeur un nombre infini de fois, et en fait même plus qu'un nombre infiniment dénombrable de fois. Donc, le discret et le continu ne coexistent pas.



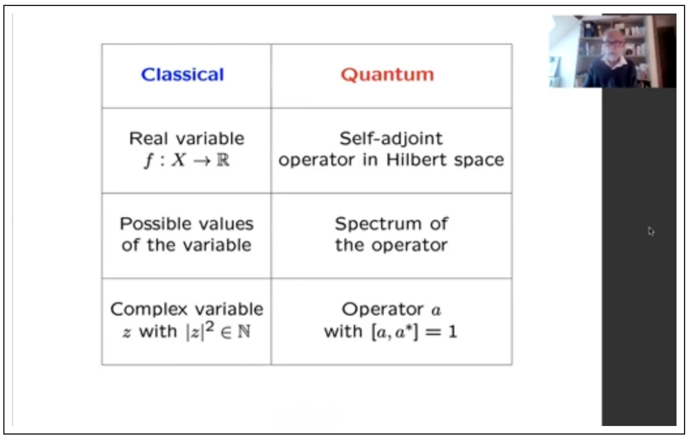
Et étonnamment, ils coexistent dans le formalisme quantique. Donc si vous voulez, le continu et le discrets coexistent dans le formalisme quantique car dans ce formalisme, une variable réelle devient un opérateur auto-adjoint



dans l'espace de Hilbert. Et dans le même espace de Hilbert, vous pouvez avoir un opérateur auto-adjoint qui est par exemple une multiplication par x dans l'espace de Hilbert qui est L^2 et qui travaille sur [0,1], mais cet espace de Hilbert des fonctions L^2 sur [0,1] est isomorphe à l'espace de Hilbert qui est l'espace de Hilbert des séquences ℓ^2 sur les entiers dans lesquelles vous avez également une autre variable, si vous le souhaitez, qui est la multiplication par n, qui est auto-adjoint, et qui est évidemment discret.

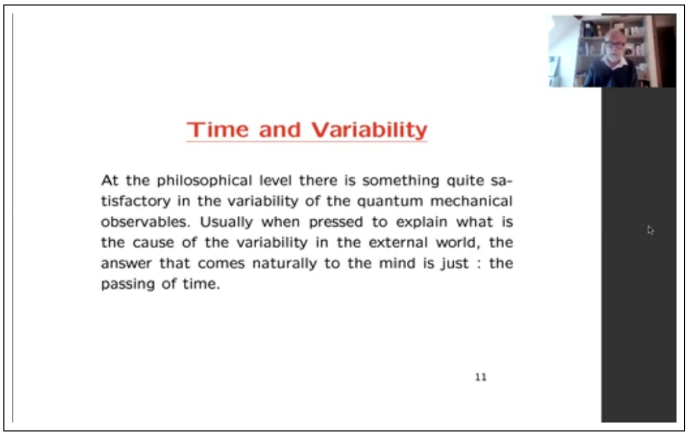


Donc si vous voulez, comme il n'y a qu'un seul espace de Hilbert, à savoir l'espace de Hilbert de dimension infinie de base dénombrable, ce que vous découvrez, c'est qu'il y a coexistence des variables discrètes, avec les variables continues à la seule condition qu'elles ne puissent pas commuter. Il y a cette nuance, et cette nuance jouera un rôle fondamental plus tard, comme nous le verrons.

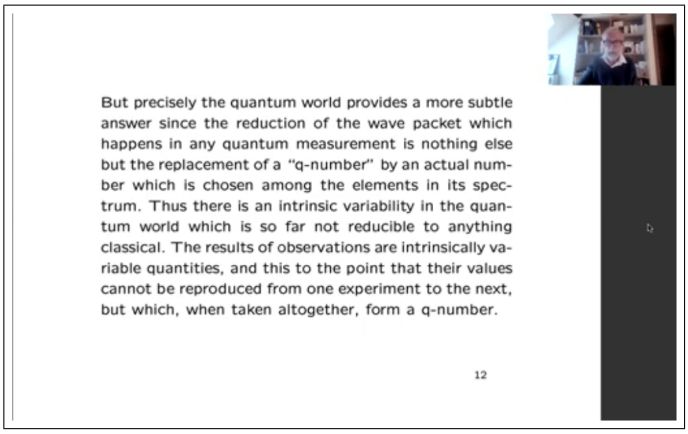


Nous avons donc ce dictionnaire, qui vient du quantique. Et bien sûr, les valeurs d'une variable réelle sont les valeurs propres du spectre de l'opérateur auto-adjoint, mais les physiciens ont été très tôt capables d'appliquer cette notion à des variables complexes. En fait, ils l'ont appliquée à une situation très particulière où vous voudriez avoir une variable complexe z telle que $|z|^2$ est un entier.

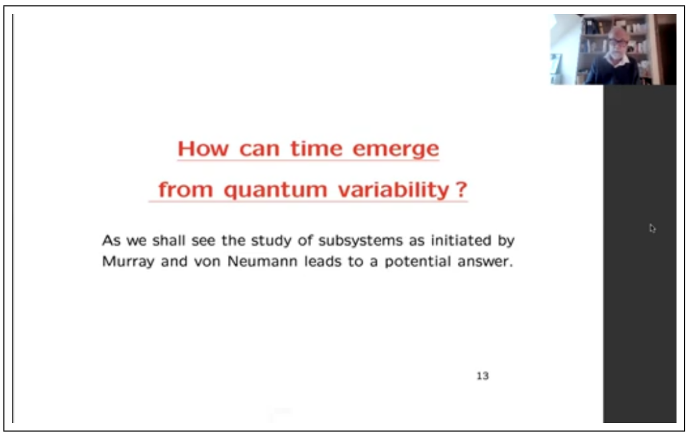
Ceci est lié à la découverte de Planck en 1900 et à ce qu'Einstein a écrit en 1906, à savoir que l'énergie d'un oscillateur ne doit prendre que des valeurs qui soient des multiples entiers de $h\nu$. L'oscillateur a d'abord été compris dans un article de Born, Heisenberg et Jordan, je pense en 1925, puis Dirac a pu utiliser le même ansatz dans lequel vous remplacez la variable z, qui était censée être une variable complexe, vous la remplacez par un opérateur a, et la seule condition pour cet opérateur a est que son commutateur avec son adjoint a^* soit égal à 1. Cela suffit pour s'assurer que le spectre sera formé d'entiers positifs, c'est un peu d'exercice. Et entre les mains de Dirac, cela lui a permis de prouver ce qu'Einstein avait deviné quand il avait deviné les constantes A et B d'émission et d'absorption d'un atome. C'est donc un formalisme très puissant et très étonnant, qui remplace le formalisme classique.



Et il y a quelque chose en fait qui est assez frappant, si l'on veut, au niveau de la variabilité, c'est-à-dire que normalement, lorsque les gens nous demandent d'expliquer ce qui est, vraiment, l'essence de la variabilité, quelle est la cause de la variabilité dans le monde extérieur, la réponse habituelle qui vient, je me rappelle avoir un jour donné cette réponse quand j'étais au lycée, la réponse naturelle qui vient à l'esprit est juste le temps qui passe. C'est la seule sorte de réponse raisonnable que nous puissions donner. Mais maintenant, à cause de cette variabilité intrinsèque et en quelque sorte fondamentale qui existe dans le quantique, vient une question très naturelle et



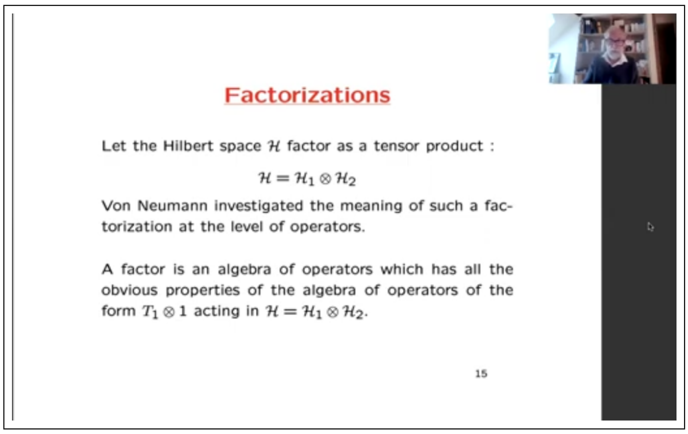
cette question est... vous savez, bien sûr, nous n'avons pas pu dans le formalisme de la mécanique quantique réduire cette variabilité à cause de la réduction du paquet d'ondes qui est quelque chose qui est en dehors de l'évolution du temps, donc si vous voulez, cette variabilité intrinsèque dans le monde quantique en quelque sorte pose une question très naturelle et cette question naturelle est



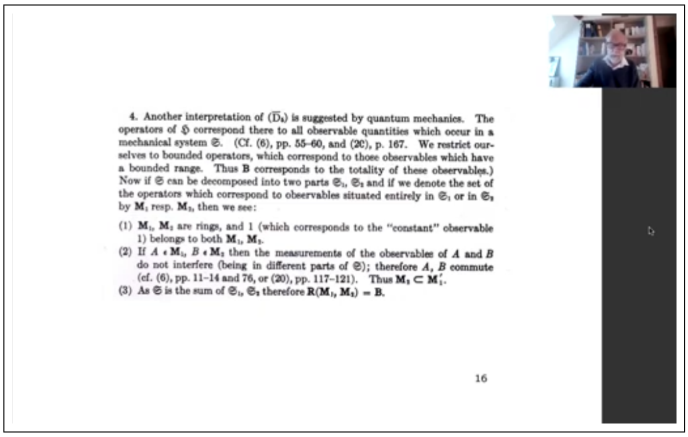
cette variabilité intrinsèque serait-elle plus primitive que le passage du temps ? À savoir, comment le temps pourrait-il émerger de la variabilité quantique ? Et ce que je veux expliquer brièvement, c'est que l'étude des sous-systèmes, qui a été initiée par Murray et von Neumann dans les années 1930-1940, conduit en fait à une réponse potentielle à cette question. Qu'ont-ils fait ? C'est juste une image que je montre là,

juste pour ne pas oublier que von Neumann est également très connu pour avoir inventé les ordinateurs.

Mais qu'ont-ils fait ?

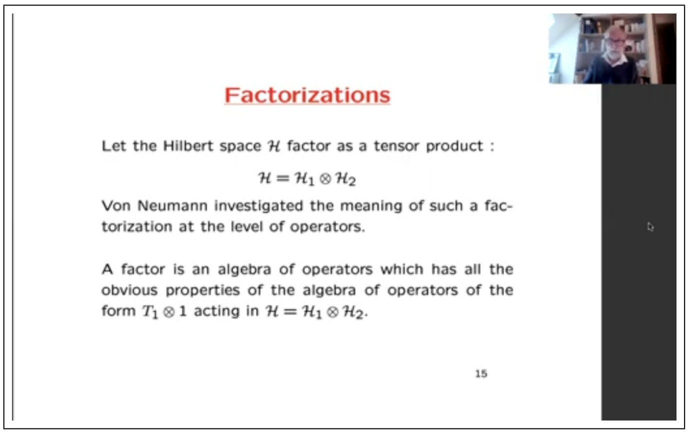


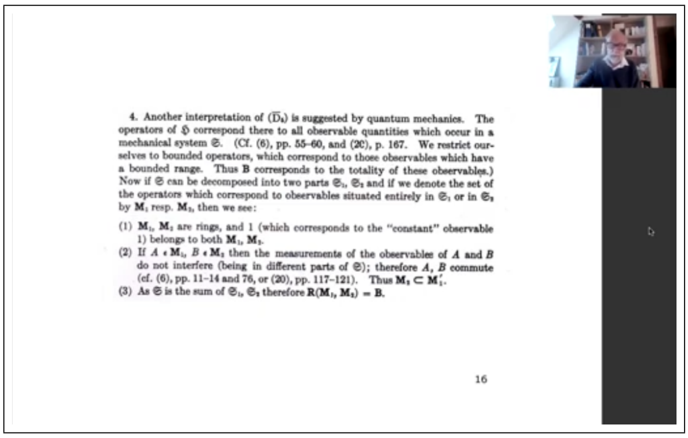
Ils ont étudié, ils ont commencé par étudier les factorisations spatiales. Et à cet égard, ils étaient motivés par la mécanique quantique. Alors ils voulaient comprendre pourquoi si vous aviez un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui est un produit tensoriel, qui se divise en produit tensoriel, alors vous pouvez considérer dans cet espace de Hilbert les opérateurs qui sont de la forme $T_1 \otimes 1$ où T_1 agit dans $\mathcal{H}_1$ et 1 est l'identité dans $\mathcal{H}_2$. D'une manière ou d'une autre, vous voulez comprendre algébriquement quelles sont les algèbres qui apparaissent de cette façon. Leur travail était donc motivé par la mécanique quantique,

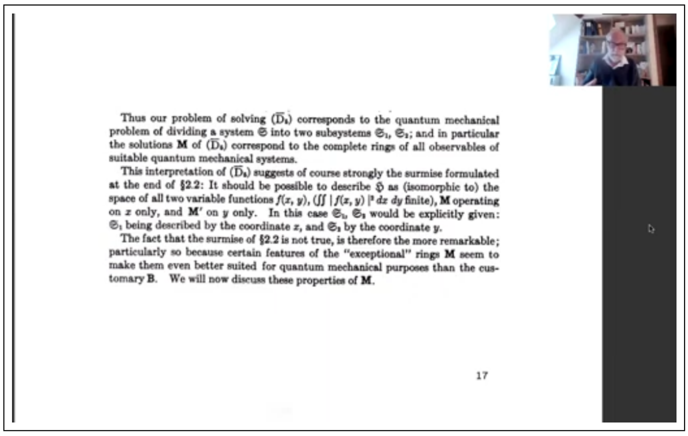


en ajoutant bien sûr que vous voulez considérer des quantités observables qui se produisent dans un sous-système, alors bien sûr vous avez affaire à des anneaux d'opérateurs, à des algèbres d'opérateurs, et vous avez une commutation, entre ce qui se passe dans un système et dans le système complémentaire, etc.

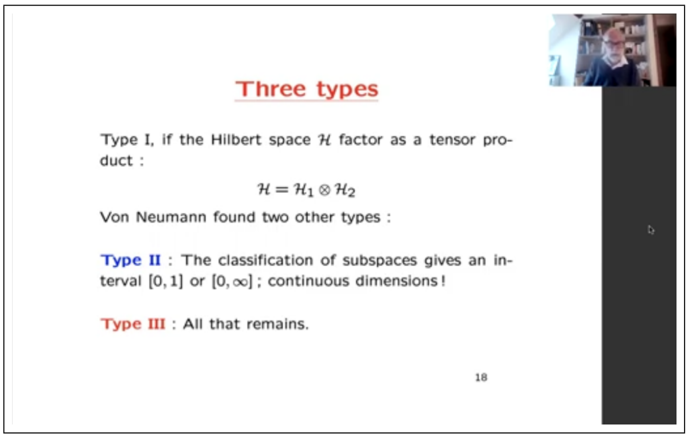
Ils ont donc étudié ces factorisations et le terme facteur vient de là, de la conception des algèbres que vous allez avoir, cette situation imiterait le produit tensoriel.



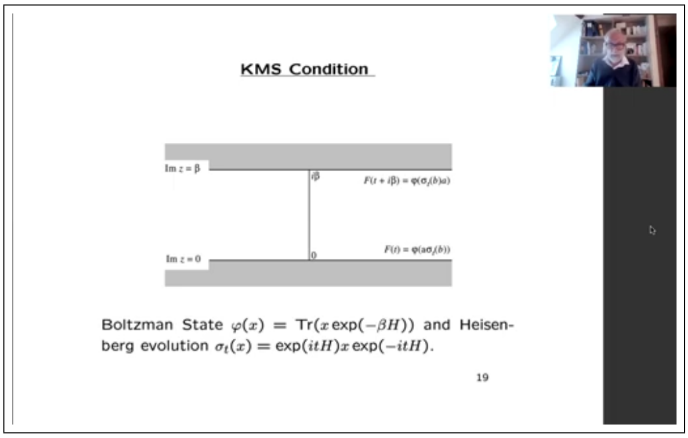




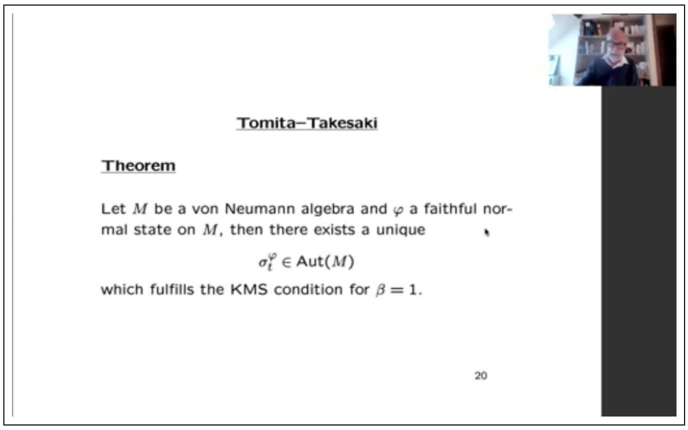
Mais étonnamment, ce que Murray et von Neumann ont trouvé, c'est que, outre la factorisation, qui provient de la factorisation de l'espace de Hilbert sous-jacent, il s'avère qu'il existe des factorisations qui ne viennent pas de là. Et donc, les factorisations issues de la factorisation de l'espace de Hilbert sont appelées les facteurs de type I, ce sont de loin les plus simples.



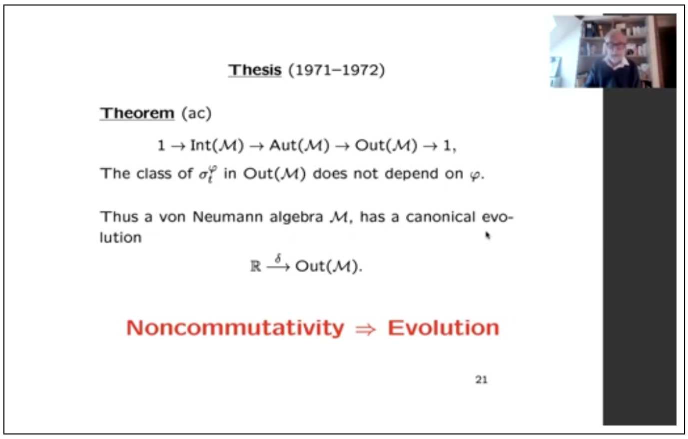
Mais ils ont trouvé deux autres types. Ils ont trouvé ce qu'on appelle le type II et le type II, qu'est-ce que cela signifie, de quelle manière, si vous voulez, les factorisations de type II sont-elles différentes, sont-elles distinctes des facteurs du type I. Les factorisations I, eh bien, elles sont très distinctes, car quand on considère une factorisation de type I, après tout, l'algèbre est juste l'algèbre des opérateurs dans un espace de Hilbert donné. Alors, si vous voulez, à quoi correspondraient des sous-espaces classés par les entiers, par la dimension du sous-espace, qui pourrait être infini bien sûr. Or, dans le cas du type II, ce qui se passe, c'est que ceux qui correspondent aux sous-espaces ne sont plus classés par un entier mais ils sont classés en fonction du type II_1 ou de type II_∞, soit par l'intervalle $[0, 1]$, soit par l'intervalle $[0, \infty]$. Et je veux dire, c'est la première apparition de dimensions continues qui... je me souviens avoir lu un article de von Neumann quand j'étais à l'École Normale, et ça, vraiment, ça m'a beaucoup intrigué, le fait qu'il y ait ces dimensions continues, ça apparaît. Et puis, qu'est-ce que vous avez, vous avez le type III et le type III correspond à tout ce qui reste.



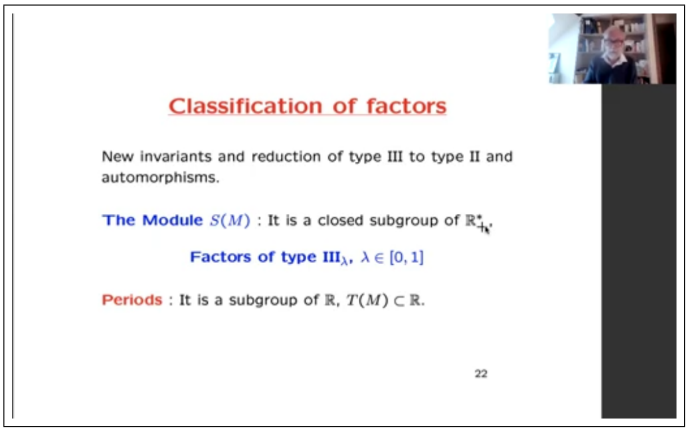
Je veux dire en fait, qu'est venu ensuite comme un outil important le fait que le lien entre l'état de Boltzman est donné lorsque vous considérez tous les opérateurs de l'espace de Hilbert par la trace de x multipliée par l'exponentielle de $-\beta H$ où H est l'hamiltonien et β est la température inverse. Ceci est lié à l'évolution temporelle de Heisenberg que je vous ai déjà montrée, à savoir le fait que $\sigma_t(x) = e^{itH}xe^{-itH}$. Ils sont liés entre eux par quelque chose qui peut être formulé purement algébriquement en termes de l'état lui-même et de l'évolution du temps. Et c'est la condition Kubo-Martin-Schwinger (KMS), qui est une condition qui peut être formulée en termes de fonctions holomorphes.



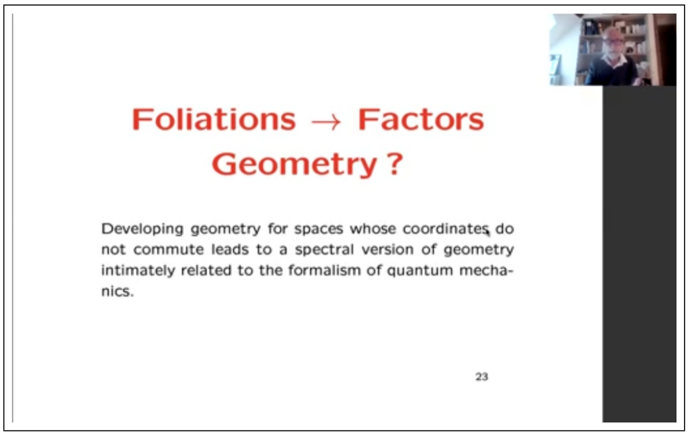
Et une étape très importante a été franchie par Tomita et Takesaki vers 1970 quand ils ont prouvé que cette association entre un état et un groupe d'automorphismes à un paramètre est valable pour toute algèbre de von Neumann. Donc, si vous prenez une algèbre de von Neumann et si vous prenez n'importe quel état normal fidèle sur cette algèbre, alors il existe un groupe unique d'automorphismes à un paramètre qui remplit réellement la condition KMS de l'association pour $\beta = 1$. J'ai commencé ma thèse et dans ma thèse, ce que j'ai prouvé



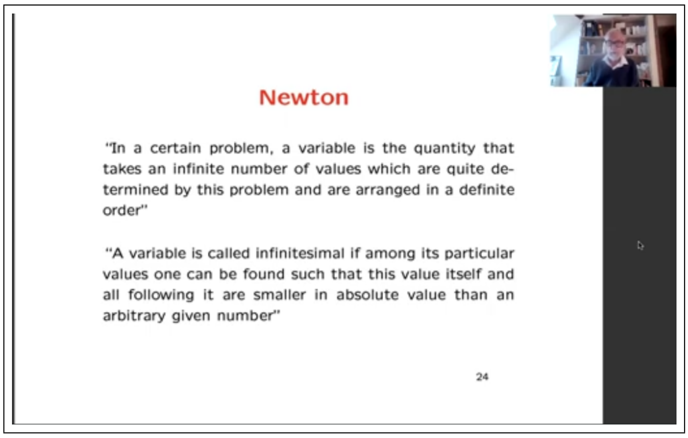
en 1971-1972, en avril 1972, c'est qu'en fait, ce groupe d'automorphismes à un paramètre est unique, quand vous le regardez dans le quotient du groupe des automorphismes de $\mathcal{M}$ divisé par les automorphismes intérieurs. Voyez-vous, quand une algèbre n'est pas commutative, elle admet des automorphismes triviaux, à savoir des automorphismes qui sont obtenus en conjuguant un élément par un élément unitaire dans l'algèbre, donc par x est envoyé sur UxU^*. Et parce que ces automorphismes sont complètement triviaux d'une certaine manière, ils forment un sous-groupe normal du groupe des automorphismes et les automorphismes intéressants forment un groupe quotient qui est le groupe $Out(\mathcal{M})$. Donc ce que j'ai prouvé dans ma thèse qui était sous Jacques Dixmier, j'ai prouvé qu'en fait, il y a un unique homomorphisme de la droite réelle dans le groupe $Out(\mathcal{M})$ des classes d'automorphismes de $\mathcal{M}$, indépendant du choix de l'état. Il s'agit d'un fait étonnant en ce sens que ce qu'il vous dit, c'est que cette algèbre, rien que par sa non-commutativité, acquiert une évolution. Cela m'a bien sûr donné



la classification des facteurs. J'ai donc pu définir de nouveaux invariants, et j'ai aussi pu réduire le type III au type II et automorphismes. En fait, j'ai laissé un cas ouvert, qui a été plus tard fermé par Takesaki. Mais j'avais défini deux invariants fondamentaux, le module $S(M)$ qui est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$ et qui permettait de classer, si on veut, les facteurs de type III en type III_λ où λ appartient à [0,1] et la réduction du type III au type II, je l'ai faite dans le cas où λ était différent de 1. Le cas III_0 était particulièrement intéressant. Et j'ai également défini le groupe de périodes, qui est un sous-groupe de la droite réelle, mais cette fois, ce n'est pas un sous-groupe fermé, cela peut être un groupe assez sauvage. Et c'est un sous-groupe remarquable dans le sens où, qu'il soit additif ou pas, il y a certaines durées, du sous-groupe vers la droite, qui sont des périodes des facteurs selon lesquelles le facteur ne bouge pas.



Une fois ce travail effectué, je suis arrivé à l'IHES à Bures, et j'ai découvert que, bien sûr, j'étais un spécialiste d'un sujet précis, mais que les préoccupations des gens étaient en fait assez éloignées des miennes et j'ai eu la chance de rencontrer Dennis Sullivan, et de discuter beaucoup avec lui, et après ces discussions, j'ai trouvé qu'il y avait une manière complètement canonique d'associer une algèbre de von Neumann qui, dans la plupart des cas, est un facteur, aux feuilletages. Les feuilletages sont donc des objets très familiers en géométrie différentielle, ce sont essentiellement des décompositions du produit mais données localement uniquement et ce qui est intéressant, ce n'est pas leurs propriétés locales qui sont triviales mais leurs propriétés globales. Et ce qui était incroyable c'est que cette relation que j'avais trouvée entre les feuilletages et les facteurs m'a permis d'obtenir les facteurs les plus exotiques dans le cas des feuilletages les plus simples. Par exemple, si vous prenez la foliation de Kronecker du tore, elle vous donne le type II hyperfini, si vous prenez par exemple les feuilletages du faisceau de sphères d'une surface de Riemann, cela vous donne le facteur hyperfini unique de type III_1 qui est extrêmement exotique. D'un autre côté, vous savez, ce qui se passe, c'est que lors de cette association des feuilletages aux facteurs, les algèbres de von Neumann ne tenaient compte que de la théorie majeure des feuilletages. Mais les feuilletages sont beaucoup plus riches d'une certaine manière. Ils appartiennent à la géométrie fonctionnelle. Ils ont donc une structure différentielle. Ils ont une topologie et ainsi de suite. Et cela m'a conduit à développer la géométrie des espaces dont les coordonnées ne commutent pas, car lorsque vous traitez l'algèbre des feuilletages, bien sûr les facteurs que vous obtenez ne sont pas commutatifs. Cette non-commutativité vient du fait que vous êtes autorisé à glisser le long des feuilles. Cela m'a donc conduit à une version spectrale de la géométrie, que je souhaite vous présenter ici, et ceci est étroitement lié au formalisme de la mécanique quantique. Et comme échauffement, il faut comprendre ce qu'il y a de miraculeux dans ce formalisme de la mécanique quantique et pourquoi il peut être si pertinent et si utile, pour faire de la géométrie.

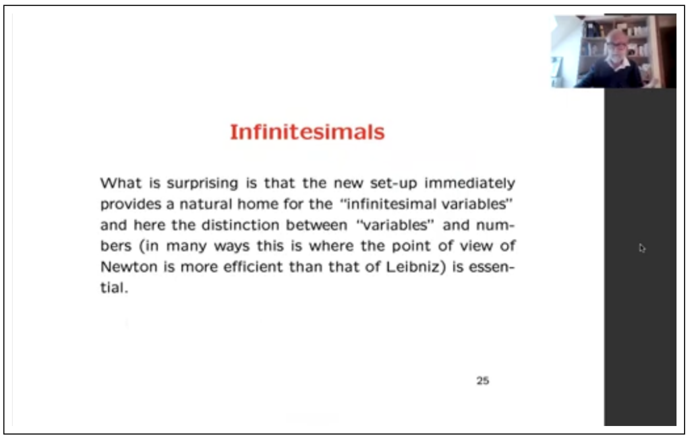


Une première chose qui est remarquable est que si vous lisez Newton, vous trouverez, à condition de lire ce qu'il a écrit dans le formalisme de la mécanique quantique... il vous donnera immédiatement la bonne réponse car ce sont des infinitésimaux. Donc, tout d'abord, Newton n'était pas intéressé par les chiffres, il était intéressé par les variables. Ce qu'il dit, c'est que :

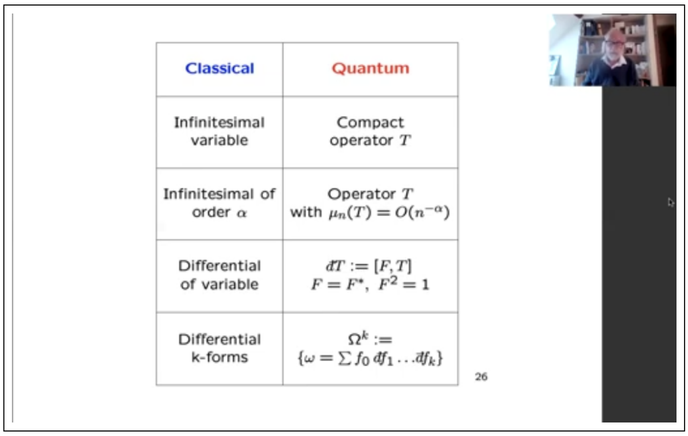
> *"Dans un certain problème, une variable est la quantité qui prend un nombre infini de valeurs qui sont bien déterminées par ce problème et sont disposées dans un ordre défini".*

Et puis il parle des infinitésimaux. Et pour lui, un infinitésimal est une variable. Donc,

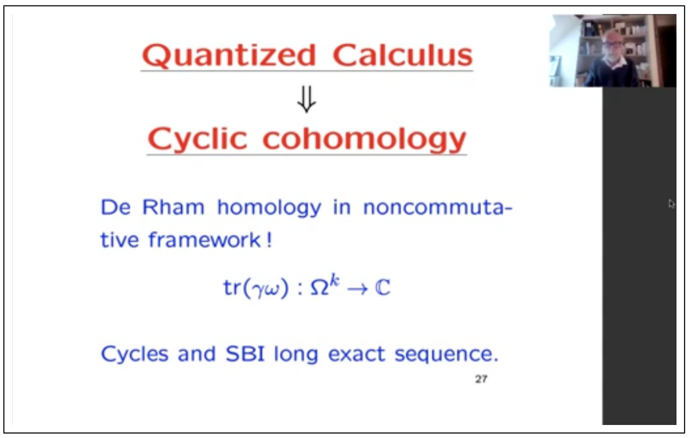
> *"Une variable est appelée infinitésimale si parmi ses valeurs particulières, on peut trouver qu'une telle de ces valeurs elle-même et toutes celles qui la suivent sont plus petites en valeur absolue qu'un nombre arbitraire donné."*



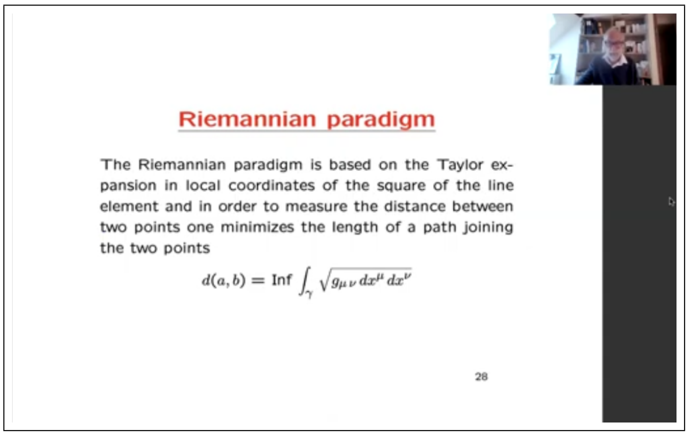
Maintenant, ce qui est étonnant, c'est que lorsque vous appliquez cette notion d'infinitésimal qui est essentiellement là, à la manière dont il est essentiellement défini selon les mots de Newton, alors vous trouvez qu'ils correspondent exactement à une notion bien connue en théorie des opérateurs



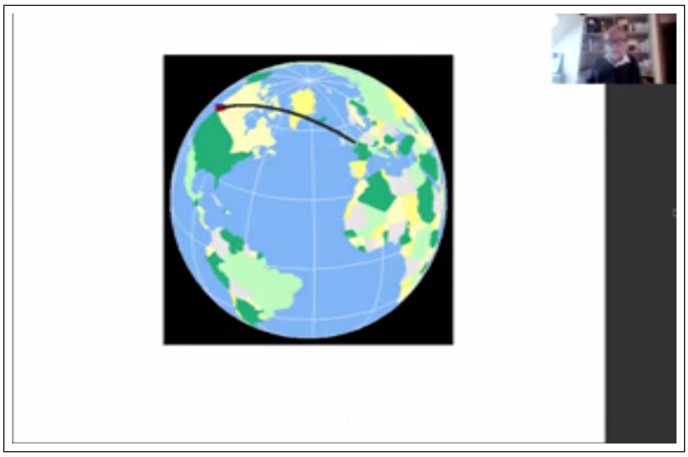
et qui est la notion des opérateurs compacts. Parce que les opérateurs compacts, eh bien, ce sont des variables, comme nous l'avons vu, car vous savez, les variables correspondent à des opérateurs, mais de plus, elles ont exactement le propriété que Newton disait, à savoir que si vous prenez leurs valeurs caractéristiques, alors ces valeurs caractéristiques sont des valeurs propres pour la valeur absolue de l'opérateur. Et ces valeurs caractéristiques ont la propriété que pour tout ε, il y en a seulement un nombre infini qui sont plus grands que ε. Ils correspondent donc exactement à ce que Newton avait en tête. Dans ce formalisme, vous avez une règle, immédiatement, pour ce qui est un infinitésimal d'ordre α. Donc, pour cela, vous regardez le taux de décomposition des valeurs caractéristiques, et par exemple, une infinitésimale d'ordre 1 est telle que sa caractéristique voit ses valeurs décroître comme $1/n$. Ceci est fondamental pour plus tard car de telles choses ne sont pas traçables car la série $1/n$ est divergente mais quand on regarde sa trace, elle a une divergence logarithmique, et c'est le coefficient de cette divergence logarithmique qui vous donne quelque chose de local. Il y a aussi le différentiel des variables. Normalement, vous essayez de différencier les fonctions, et etc., mais ici, c'est juste défini, pour un opérateur borné, c'est juste défini comme un commutateur avec l'opérateur F qui satisfait deux conditions : la condition qu'il soit auto-adjoint et la condition que son carré vaille 1. Il n'y a donc pas de contenu dans l'opérateur F lui-même ; ce qui est vraiment important, c'est la relation entre l'opérateur F et l'opérateur T. Comme F^2 vaut 1, vous pouvez facilement montrer que le carré du différentiel au sens graduel est 0, et alors vous avez la notion de k-formes différentielles, qui sont obtenues uniquement en prenant des sommes d'opérateurs de produits de (k-formes) 1-formes, si vous les définissez de manière évidente. Tant de propriétés sortent naturellement. Mais le plus important a été que ce calcul quantifié



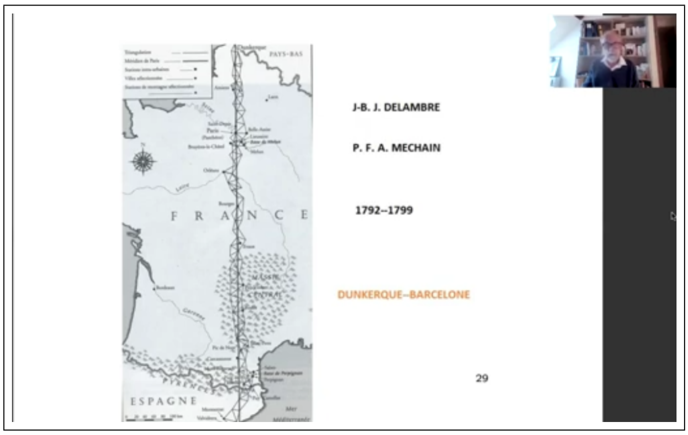
m'a conduit en 1980-1981 à la cohomologie cyclique. Et la cohomologie cyclique joue vraiment un rôle fondamental dans la géométrie non-commutative correspondant à la cohomologie de Rham dans ce cadre non-commutatif. J'ai donné une conférence en 1981 à Oberwolfach dont le titre était "Séquences spectrales et cohomologie des flots pour les algèbres non-commutatives", où si vous voulez toutes les propriétés de base, les propriétés fondamentales de la cohomologie cyclique viennent aisément si l'on prend au sérieux ce calcul quantifié. Parce que dans le calcul quantifié, ce que vous obtenez est ce qu'on appelle le cycle, car vous pouvez utiliser la trace pour intégrer les formes différentielles, et vous obtenez que ce cycle est fermé, et ainsi de suite. Et de plus, si vous pouvez intégrer une forme de dimension k, vous pouvez également intégrer des formes de dimension $k+2$. Il y a une distinction entre les cas pairs et impairs, ce qui donne à l'opérateur S une périodicité, et au SBI une séquence exacte qui est la séquence spectrale correspondante. Alors bien sûr, ce n'est qu'un exemple de l'utilisation du calcul quantifié. Il existe de nombreux autres cas. L'un des cas est que par exemple, vous pouvez faire de la géométrie différentielle dans l'anneau de groupe du groupe libre, en utilisant le calcul quantifié qui est défini par le groupe sur un arbre. Mais ce sont des outils, et maintenant, avec ces outils, nous voulons vraiment venir à la géométrie elle-même, au sens métrique. Donc pour la géométrie elle-même, dans le sens métrique, il faut faire une petite discussion, en revenant, sur le paradigme riemannien



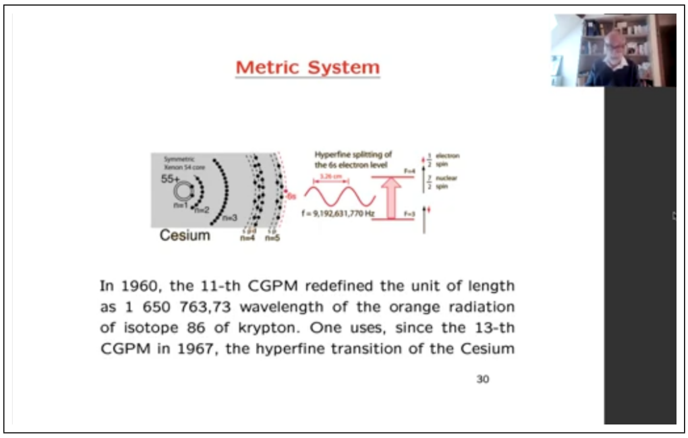
et sur la façon dont le système métrique évolue. Le paradigme riemannien est basé sur le développement de Taylor... Riemann a eu cette fantastique conférence inaugurale, sur laquelle nous reviendrons plus tard, dans laquelle il a eu la perspicacité de définir la métrique localement, en regardant le développement de Taylor de l'élément de longueur en coordonnées locales, et en fait, il regardait le carré de l'élément de longueur. Il y a donc une racine carrée impliquée, et la distance entre deux points, comme vous le savez très bien, est calculée en minimisant la longueur du chemin, comme ici,



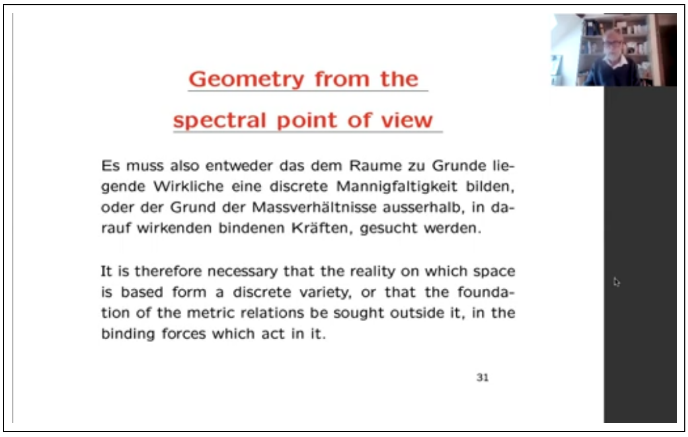
par exemple entre Seattle et Londres. Et donc, c'est une définition très concrète de la longueur et en quelque sorte, ça concorde bien avec



la manière dont le système métrique a été développé et typiquement, ce qui s'est passé... ce que je vous montre, c'est le fait que pendant la Révolution française, ils voulaient avoir une unification de l'unité de longueur, donc ils l'ont défini comme 1/40000000 fois la circonférence de la Terre et bien sûr, nous mesurons juste un angle, qu'ils connaissaient des étoiles, et je veux dire cet angle, cette distance était entre Dunkerque et Barcelone et deux physiciens, astronomes, sont allés le long de ce méridien et ils ont fait une mesure concrète et à partir de cette mesure concrète (ils s'appelaient Delambre et Méchain) a été fabriqué une barre de platine, qui a été déposée près de Paris au Pavillon de Breteuil à Sèvres, et qui devait être l'unité de longueur. Maintenant, ce qui s'est passé est très intéressant. Parce que ce qui s'est passé autour des années 1925 ou quelque chose comme ça, c'est que les physiciens ont découvert que l'unité de longueur qui avait été déposée près de Paris et ainsi de suite, n'avait pas une longueur constante. Comment ont-ils fait ça ? Eh bien, ils l'ont comparée à la longueur d'onde du Krypton. Il y a une certaine raie orange dans la longueur d'onde de Krypton qu'ils ont utilisée pour mesurer cette barre de platine, et ils ont constaté que la longueur changeait. Donc je veux dire, bien sûr, ce n'était pas une bonne définition, et ils ont changé, je veux dire les physiciens ont décalé ce problème à la Conférence sur le système métrique,

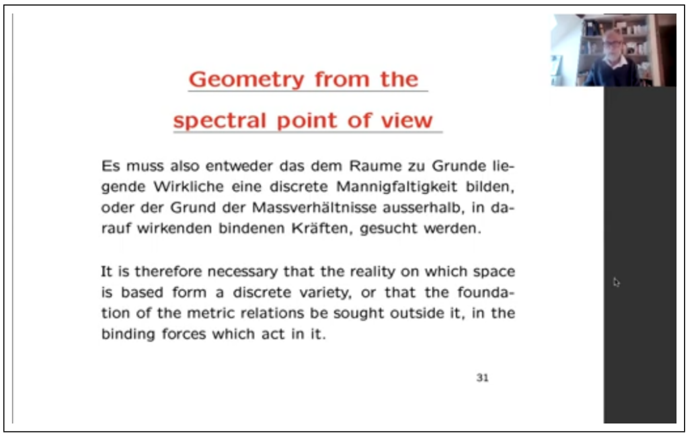


ils se sont décalés d'abord pour définir l'unité de longueur par ce rayonnement orange du Krypton, un certain multiple de cette longueur d'onde. Mais ensuite, ils ont découvert qu'il y avait une meilleure façon de le faire, qui était avec le Césium. Et en fait, avec cette définition du Césium, vous pouvez acheter, dans un magasin, des appareils qui vous permettent d'effectuer des mesures immédiates avec une précision de 10 décimales.



Je veux dire, c'est un grand pas en avant, et ce qui s'est passé, c'est qu'il y a une transition hyperfine entre deux niveaux, et cela correspond à peu près à

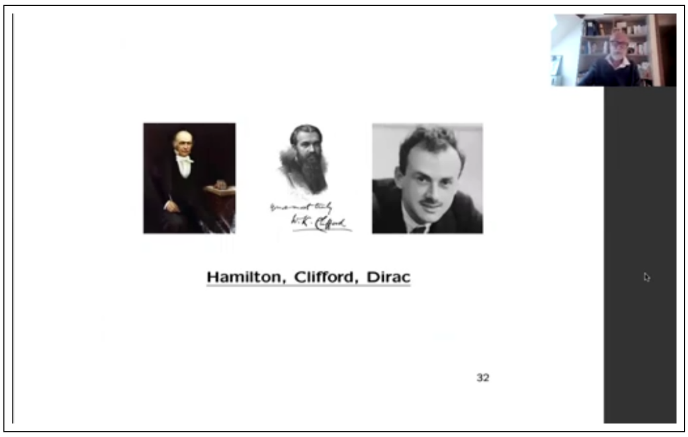
une longueur d'onde d'environ 3,26 centimètres et ensuite, vous redéfinissez le tout, donc en fait, vous définissez la vitesse de la lumière, vous fixez la vitesse de la lumière à ce nombre (j'ai entendu dire que Grothendieck était furieux quand il a entendu ça, parce qu'il voulait que ce soit 300 000 000), mais la raison pour laquelle vous ne pouvez pas le faire c'est-à-dire qu'il y a déjà des mesures précises qui sont effectuées, il faut donc s'accorder là-dessus. Donc je veux dire qu'il y a une valeur étrange qui est prise. Ensuite, vous définissez le second nombre, comme étant un nombre de périodes de ce rayonnement provenant de la transition hyperfine, et comme corollaire de cela, vous connaîtrez le mètre, l'unité de longueur, qui se définit donc comme étant cette proportion (c'est un nombre rationnel) fois la longueur d'onde de la transition hyperfine. Maintenant, ce qui est extrêmement étonnant, c'est que cette transition conceptuelle en termes de définition, que les physiciens ont faite, il y a longtemps, entre la barre de platine et la barre spectrale, est exactement parallèle à la transition entre le paradigme riemannien et le paradigme spectral, que je vais expliquer.



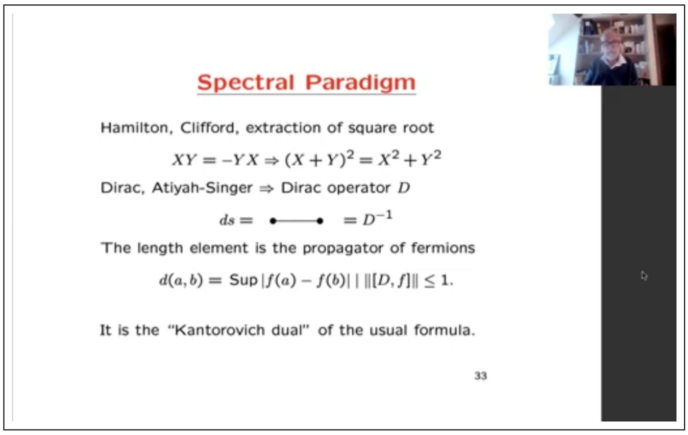
Ce qui est également étonnant, c'est que Riemann a été incroyablement prudent dans sa conférence inaugurale, pour dire, je veux dire, il ne croyait pas vraiment que sa notion de métrique continuerait à avoir un sens dans les plus petites dimensions. Et la raison pour laquelle il préconisait que... parce qu'il faut dire qu'il travaillait avec des corps solides et qu'il utilisait des rayons de lumière dans sa théorie, donc ce qu'il écrivait était que lorsque vous travaillez dans le domaine où les corps très petits et solides n'ont plus de sens, pas plus que les rayons lumineux et donc, la phrase exacte est la suivante

> *"Il faut donc que la réalité sur laquelle repose l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des relations métriques soit recherché en dehors d'elle, dans les forces contraignantes qui agissent en elle".*

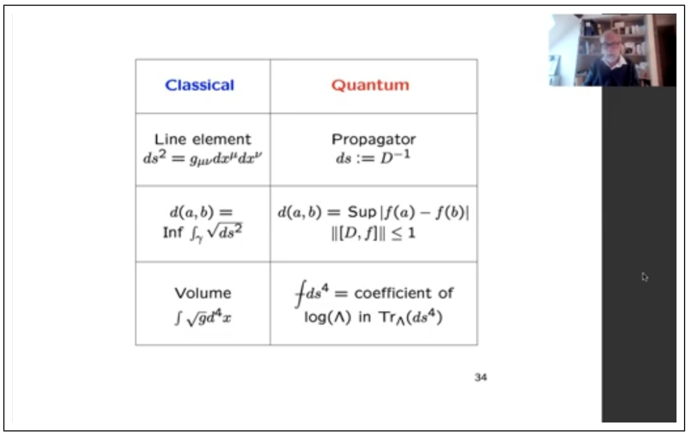
et comme nous le verrons, c'est exactement ce qui se passe, dans le cadre spectral.



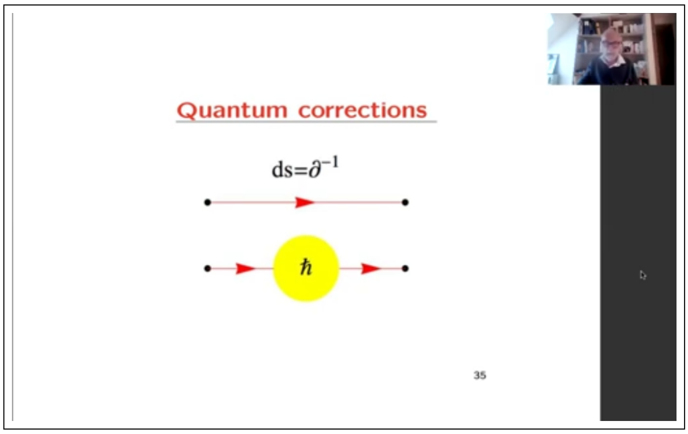
Donc la possibilité de faire ça, de transférer dans le cadre spectral ces idées, vient en fait du travail de Hamilton, Clifford et Dirac, et essentiellement, quelle est la manière d'extraire la racine carrée dans la formule de Riemann ($d(a,b) = Inf \int_\gamma g_{\mu\nu} dx\mu dx\nu$). Quand il y a la racine carrée de l'élément de longueur, on aimerait en fait n'avoir pas le carré mais l'élément de longueur lui-même. Il est possible d'extraire cette racine carrée au niveau du formalisme quantique, au niveau des opérateurs. Et c'est possible grâce à Hamilton, Clifford et Dirac. Hamilton a été le premier à écrire vraiment l'opérateur de Dirac, parce qu'il avait les quaternions, et il a écrit, vous savez, i, d par dx plus j, d par dy, plus k, d par dz (i.e. $i\dfrac{d}{dx} + j\dfrac{d}{dy} + \dfrac{d}{dz}$), qui est un exemple d'opérateur de Dirac. Et la clé de tout ça, c'est que quand vous avez deux opérateurs X et Y qui ne commutent pas,



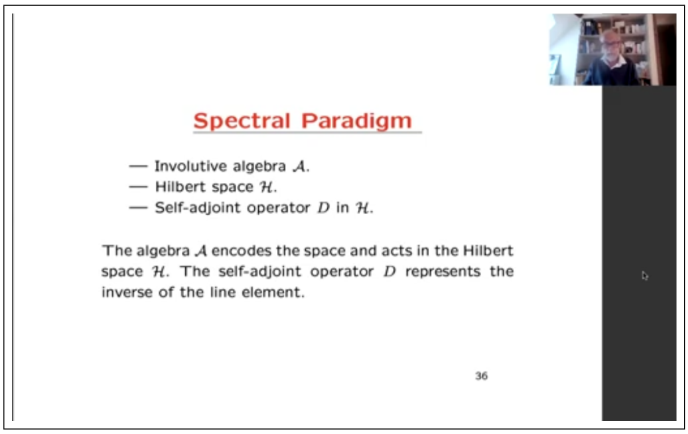
alors en fait, vous pouvez écrire X^2+Y^2 comme un seul carré, à savoir comme le carré de $X+Y$. Donc à travers le travail de Dirac et aussi d'Atyiah-Singer, qui ont défini l'opérateur de Dirac pour une variété de spins arbitraire, alors émerge l'opérateur de Dirac D. Dans la théorie spectrale, l'élément de longueur, qui est la racine carrée du ds^2 de Riemann, est un opérateur, c'est un infinitésimal lorsque la variété est compacte, et c'est quoi ? C'est simplement l'inverse de l'opérateur de Dirac. Bien sûr, il y a des choses mineures auxquelles vous devez faire attention, qu'en est-il des zéros et ainsi de suite, mais je veux dire, cet élément de longueur est ce qu'on appelle le propagateur de fermions, et vous devez le penser comme les physiciens l'écrivent quand ils écrivent des diagrammes de Feynman : c'est une toute toute petite ligne qui relie deux points qui sont très proches. Et puis, plutôt que cet inverse, qui est l'opérateur D, vous pouvez calculer une distance entre deux points, et cette distance n'est plus calculée par l'infimum d'un arc joignant les deux points, mais elle est calculée en regardant le décalage d'onde maximal, entre la valeur en a et la valeur en b, lorsque vous obligez la fréquence des ondes à être limitée. C'est ce qu'on appelle, mathématiquement parlant, le "dual de Kantorovitch" de la formule habituelle.



Donc vous avez ce dictionnaire maintenant selon lequel l'élément de longueur ds est le propagateur des fermions, la distance est calculable, elle est calculée non pas par un infimum sur les arcs, mais par un supremum, et vous remarquez que ces conditions s'appliquent à beaucoup plus d'espaces, car il y a beaucoup d'espaces dans lesquels vous ne pouvez pas rejoindre deux points par un arc, pensez à un espace qui est déconnecté, alors que la formule de droite est parfaitement logique. Et le volume, par exemple, est défini comme l'intégrale de la puissance de l'élément de longueur qui sera d'ordre 1, et comme je l'ai déjà dit, quand quelque chose est d'ordre 1, un infinitésimal d'ordre 1, cela signifie que sa trace est logarithmiquement divergente. Alors ce que vous faites c'est que vous prenez le coefficient de la divergence logarithmique et cela vous donnera le volume. Aussi, ce qu'il faut comprendre, c'est que si ce formalisme dans lequel se définit la géométrie est le formalisme quantique, ceci



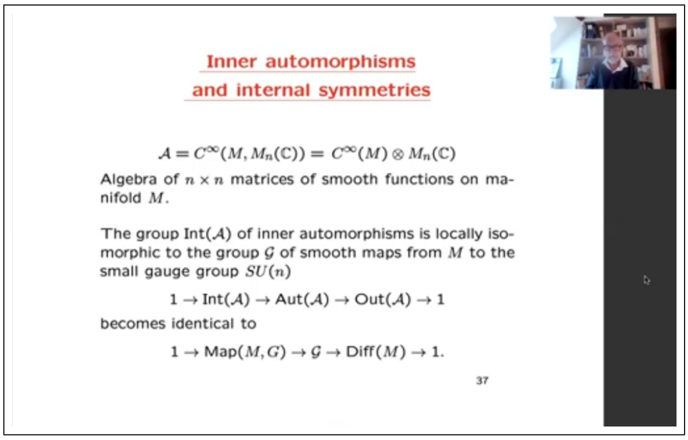
vous permet immédiatement de comprendre comment incorporer les corrections quantiques. Pourquoi ? Parce que nous savons très bien que le propagateur de fermions quand on travaille dans la théorie quantique des champs ne reste pas tel qu'il était avant. Il acquiert des corrections quantiques. Ce sont des modifications infimes de la géométrie, qui sont données par une sorte de série de puissances, mais qui peuvent être incorporées dans le formalisme spectral. Donc le formalisme spectral est encodé dans



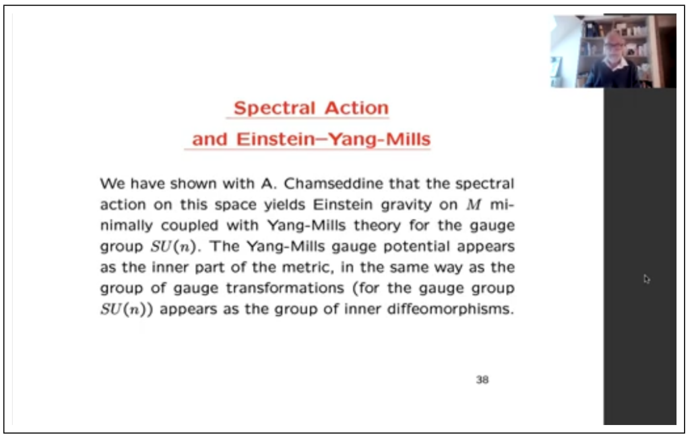
ce qu'on appelle un triple spectral. Un tel triplet contient donc trois données :

- les données d'une algèbre involutive $\mathcal{A}$, qui vous donne essentiellement l'espace, les coordonnées dans l'espace ; cette algèbre *agit* dans un espace de Hilbert ;
- l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est fixe ;
- et de plus vous avez l'élément auto-adjoint D, qui est le propagateur, qui agit dans le Espace Hilbert $\mathcal{H}$.

Dans la plupart des cas, en passant, vous découvrirez que la représentation de $\mathcal{A}$ et D est, quand vous les prenez ensemble, irréductible. Voilà donc le paradigme spectral. Et ce que je veux expliquer illustrera la puissance de ce paradigme par un certain nombre de cas.

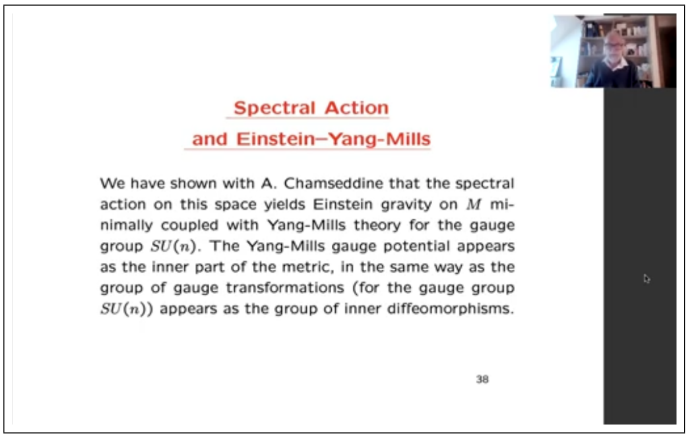


Donc la première chose qui arrive est que maintenant, parce que vous pouvez parler de la géométrie lorsque l'algèbre n'est plus commutative, maintenant vous n'avez plus le $g_{\mu\nu}$ qui dépend de x et ainsi de suite et ainsi de suite, juste à cause de cela, vous pouvez regarder l'exemple le plus simple. L'exemple le plus simple qui n'est pas commutatif consiste à remplacer l'algèbre des fonctions sur une variété M par l'ensemble des matrices $n \times n$ sur cette algèbre. Donc, si vous faites cela, vous regardez juste l'algèbre pendant un moment, ce que vous découvrez, comme je l'ai déjà dit, lorsqu'une algèbre n'est pas commutative, elle a cette séquence exacte non triviale, quand vous avez les automorphismes triviaux, qui sont les automorphismes intérieurs, et qui forment un sous-groupe normal d'automorphismes, puis vous passez au quotient qui est l'ensemble des automorphismes extérieurs. Maintenant, quand vous appliquez cette séquence, qui est générale, lorsque vous l'appliquez à l'algèbre des matrices $n \times n$ sur la variété, ce que vous obtenez est une séquence exacte où les automorphismes intérieurs deviennent les fonctions de la variété M vers le groupe G qui est dans ce cas le groupe $SU(n)$, si vous prenez les matrices $n \times n$, puis cela va au groupe des automorphismes, et cela va aux difféomorphismes. Alors qu'est-ce que vous avez automatiquement trouvé par cette extension non-commutative très simple, vous avez amélioré le groupe de difféomorphismes à un groupe que les physiciens connaissent très bien, car c'est le groupe d'invariance de la fonctionnelle d'action, lorsqu'ils couplent, au minimum, la gravité avec la théorie de Yang-Mills, avec le groupe $SU(n)$.

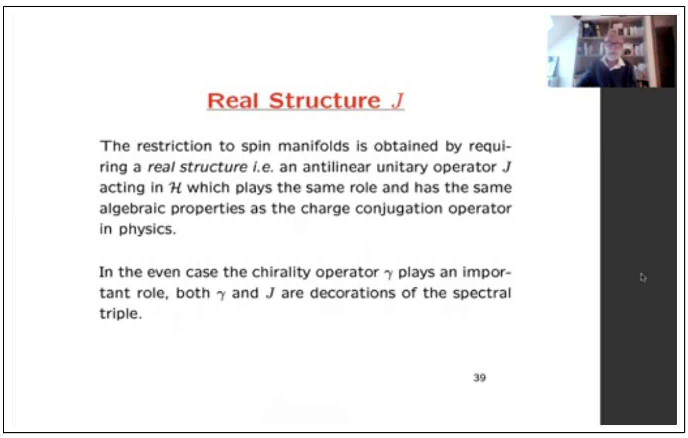


Donc dans notre travail avec Ali Chamseddine, ce que nous avons trouvé, c'était la fonctionnelle d'action. Nous avons constaté que si nous prenions le cas très simple ci-dessus qui consiste à prendre les matrices $n \times n$ sur une variété, et si nous regardions l'action qui remplacerait l'action d'Einstein, qui est l'action spectrale, cette action spectrale, il peut difficilement y avoir plus invariante qu'elle, cette action ne dépend que du spectre de l'élément de longueur. Ce que vous faites alors, c'est que vous écrivez le développement asymptotique et vous obtenez l'action d'Einstein. Vous obtenez le terme cosmologique sur lequel je reviendrai beaucoup plus tard.

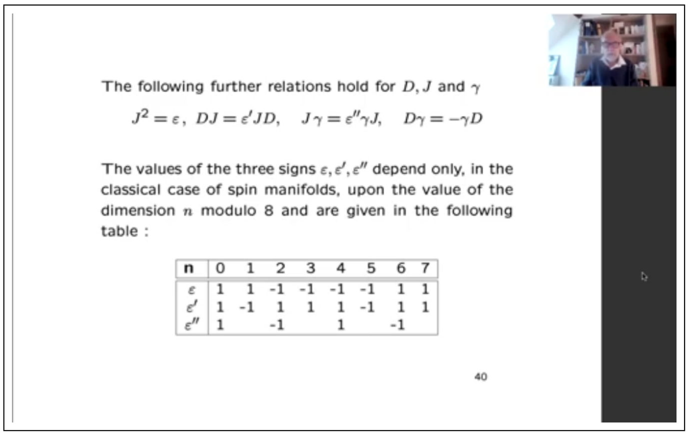
Donc, vous obtenez cette gravité d'Einstein mais si vous prenez cette gravité d'Einstein couplée au minimum à la théorie de Yang-Mills, lorsque vous faites le calcul. Et les potentiels de jauge de Yang-Mills au fur et à mesure qu'ils apparaissent, apparaissent comme partie interne de la métrique. Donc, exactement de la même manière que je viens de le dire, le groupe des transformations de jauge du second type, le groupe de jauge $SU(n)$ apparaît comme le groupe des difféomorphismes intérieurs. Donc vous avez ce mélange, qui vient juste du fait d'avoir, vous savez, remplacé l'algèbre des fonctions par l'algèbre des matrices sur la variété. Donc c'est une chose très complète et avec Ali Chamseddine, on a fait beaucoup de travail, ensuite, avec Matilde Marcolli, avec Walter van Suijlekom, et aussi avec Slava Mukhanov, nous avons fait un très gros travail pour aller bien plus loin que cette instance simple d'Einstein-Yang-Mills.



Dans ce travail, il y a un rôle essentiel qui est joué par la structure réelle. Alors ce qui se passe si vous voulez, c'est qu'il y a une sorte de reconstruction qui vous permet de reconstruire la variété à partir des données spectrales. Et pour se limiter aux variétés de spins, il faut penser à faire tourner les choses comme ça, il faut incorporer un peu de décoration dans les données spectrales, qui est celle d'une structure réelle. C'est donc un opérateur unitaire anti-linéaire, et nous verrons ce que c'est dans le langage physique et dans le langage mathématique, mais essentiellement, vous devez également ajouter une autre décoration dans le cas de même dimension qui est l'opérateur de chiralité. Donc nous avons ces deux choses, et

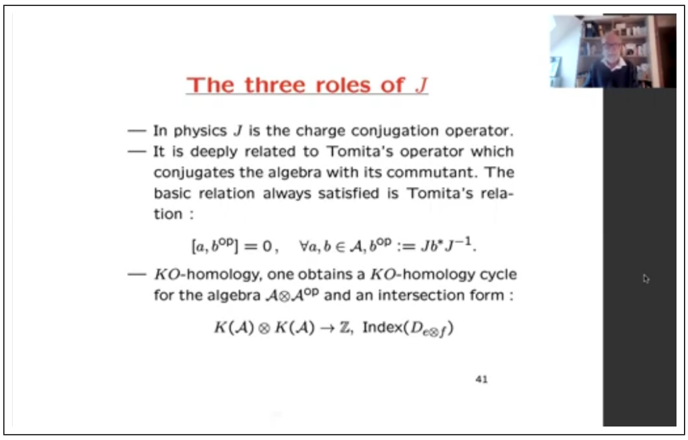


ils satisfont à certaines règles de commutation. Et ces règles de commutation en fait, elles vous disent que vous avez en fait affaire à huit théories, il y a 8 théories possibles qui dépendent des multiples cas de la dimension modulo 8. Si vous le souhaitez, la théorie conceptuelle sous-jacente est ce qu'on appelle la KO-homologie, et la raison pour laquelle cette KO-homologie joue un rôle fondamental, c'est que, si vous essayez de comprendre à un niveau conceptuel ce qu'est une variété, dans la situation ordinaire, dans la géométrie différentielle ordinaire ce qu'est une variété, vous découvrirez, et c'est un travail qui remonte aux années 1970, en particulier par Dennis Sullivan, vous découvrirez que ce que vous avez besoin de faire...

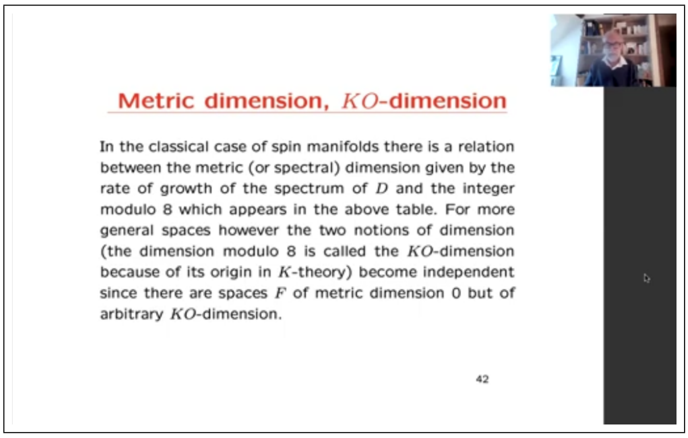


vous supposez d'abord bien sûr que la variété a la dualité de Poincaré dans l'homologie ordinaire, mais ce n'est pas du tout suffisant, il suffit de mettre l'espace en question dans l'espace euclidien pour qu'il ait un micro-fibré normal. Mais ce micro-fibré n'est en aucun cas un fibré vectoriel. Et la difficulté pour le transformer en une variété, c'est d'élever la structure de ce micro-fibré en structure de fibré vectoriel.

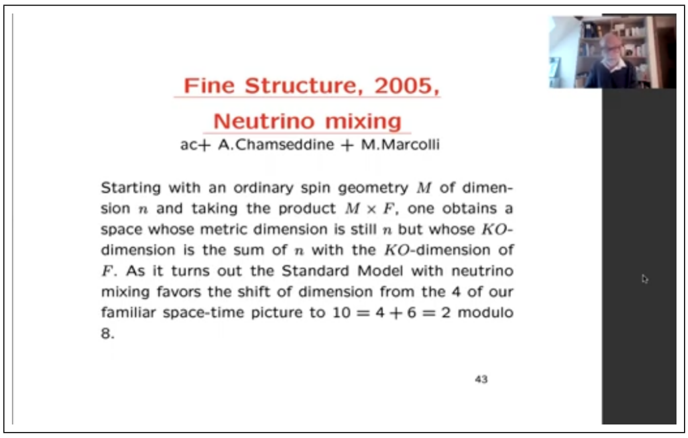
Maintenant, pour résumer très brièvement les choses, dans le cas simplement connecté, vous découvrez que l'obstruction pour faire cela est que vous devriez avoir aussi la dualité de Poincaré dans la théorie plus profonde qui est la KO-homologie. Maintenant, grâce aux travaux d'Atiyah et Singer sur le théorème de l'indice, ils ont découvert que le représentant des cycles en KO-homologie est en fait exactement fourni par les données dont vous avez besoin pour construire l'opérateur de Dirac, et que vous avez 8 théories possibles dans cette KO-homologie, et elles correspondent aux différentes possibilités que j'exposais ici. Donc en fait,



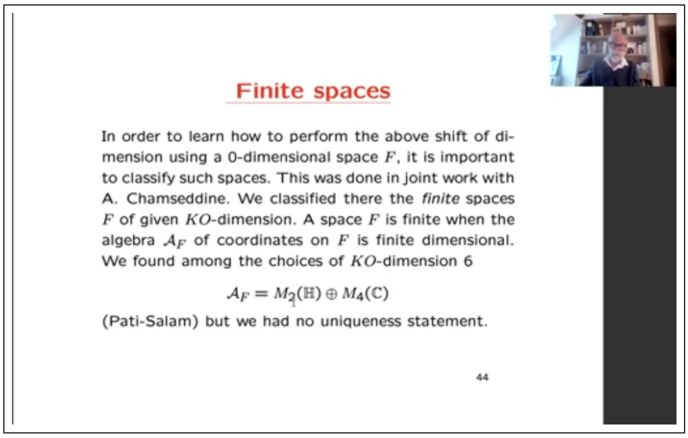
J, cette vraie structure, a trois rôles. En physique, eh bien, les gens la reconnaîtront comme ce qu'on appelle un opérateur de conjugaison de charge, nous travaillons en euclidien, en temps imaginaire, mathématiquement, cela s'avère être très profondément lié à l'opérateur de Tomita, pourquoi ? Parce que, dans le cas non-commutatif, ce que vous voulez, c'est que vous souhaiteriez restaurer la commutativité d'une manière ou d'une autre, et comment voulez-vous faire ça ? Vous le faites avec une sorte de truc, on retourne, on est capable de retourner l'algèbre en son commutant en utilisant cet opérateur J de la théorie. Tomita vous permet de faire cela en général. Je veux dire, il a prouvé un théorème qui dit que si vous prenez un facteur dans l'espace de Hilbert, qui a un vecteur cyclique et un séparateur, ce qui est toujours le cas dans le type III, alors vous pouvez toujours trouver un tel opérateur J qui le retourne en son commutant. Et enfin, le sens le plus profond, si vous voulez, de ce J comme je l'ai dit, c'est de dire que vous avez la dualité de Poincaré dans la KO-homologie, et cela vous donne le fait que, à cause du J, vous avez le cycle de KO-homologie non seulement pour l'algèbre $\mathcal{A}$, mais aussi pour l'algèbre sous-tendue par son opposé. Et en particulier, vous avez une forme d'intersection, et ainsi de suite. Maintenant, il s'avère que cela a joué un rôle clé dans le développement de la compréhension du modèle standard, au sens où généralement, lorsque vous travaillez avec des variétés de spins, il existe un lien entre la dimension métrique et ce KO-module de dimension 8.



Ce qui se passe, c'est qu'il y a une notion de dimension métrique, pour une géométrie spectrale, et cette dimension métrique vient juste de la croissance des valeurs propres du spectre de l'opérateur de Dirac. Mais il y a aussi une KO-dimension comme je viens de le mentionner et il s'avère que normalement, la KO-dimension est égale à la dimension métrique modulo 8, mais lorsque vous regardez les espaces de dimension 0, vous découvrez que ce n'est pas forcément vrai : vous pouvez fabriquer des espaces de dimension 0, mais qui sont de dimension arbitraire modulo 8. Cela pourrait sembler une curiosité mais en fait, ce n'est pas le cas du tout, et cela a joué un rôle absolument clé en 2005, dans notre travail conjoint avec Chamseddine et Marcolli,



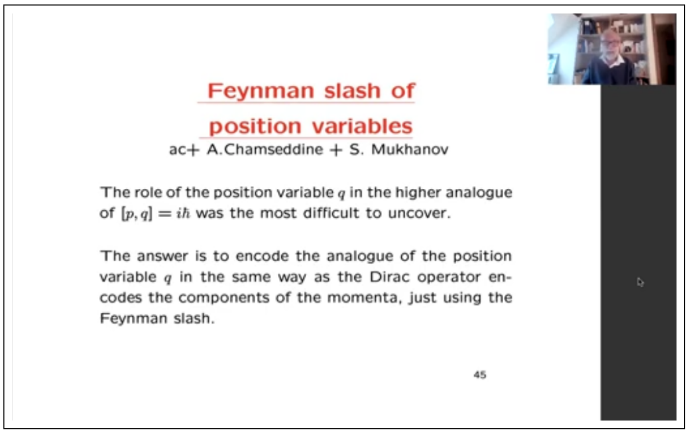
et ce que nous avons découvert, vous savez, avec Chamseddine, nous avions abandonné notre travail pour comprendre le modèle standard en 1998, nous l'avions fait en 1996 et nous avions abandonné en 1998 en raison de la découverte du mélange de neutrinos. Et il semblait impossible d'accueillir le mélange de neutrinos avec ce que nous avions. Mais dans ce que nous avons découvert en 2005, nous trois, c'est qu'en fait, si vous essayez les différentes KO-dimensions pour l'espace fini, vous savez, comme vous le mettez au cœur de la structure de l'espace-temps, alors étonnamment, vous constatez que si vous prenez la KO-dimension 6, pour cet espace fini qui a bien sûr une dimension métrique 0, alors, non seulement le mélange de neutrinos vient tout naturellement, mais aussi le mécanisme de bascule. Et je dois dire que j'ai été étonné parce que je ne connaissais pas jusque là le mécanisme de bascule et puis j'ai fait le calcul de ce que nous avions, et j'ai redécouvert le mécanisme de bascule. Mais contrairement à la physique, il n'est pas mis à la main, vous le trouvez à la suite des calculs.



Alors ce que nous avons fait plus tard, avec Ali[2], nous avons classé les différents espaces finis des différentes KO-dimensions, et bien sûr, nous nous sommes intéressés à la KO-dimension, et parmi eux, nous en avons trouvé un que nous avons trouvé extrêmement intéressant, où l'algèbre qui était sous-jacente à l'espace fini (donc c'est une algèbre de dimension finie) était des matrices 2×2 sur le corps des quaternions, + des matrices 4×4 sur le corps des nombres complexes. Dans ce que nous faisions, le passage au groupe de jauge du modèle standard a été fait par ce que nous avions appelé l'ordre ??, mais ensuite par un travail conjoint avec van Suijlekom, nous avons analysé le modèle complet, sans réduction au modèle standard, et nous avons trouvé un beau modèle de Patti-Salam qui est en fait beaucoup plus intéressant et symétrique que le modèle standard lui-même, en particulier à cause de la liberté asymptotique.

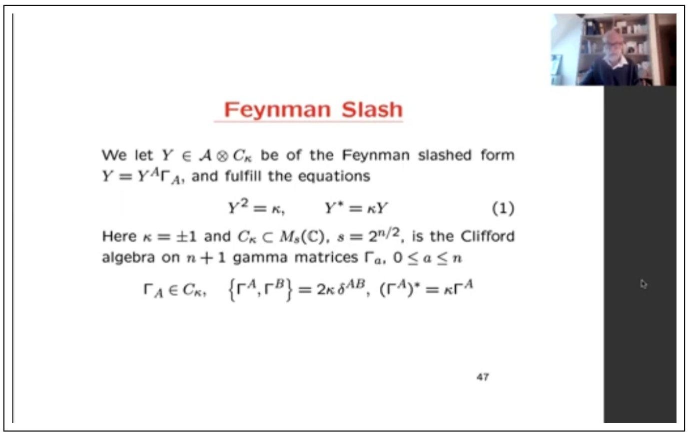
D'accord, donc en fait, à ce stade, nous avions trouvé, et nous serions, vous savez, extrêmement intéressés par une sorte d'autre façon de trouver la même algèbre. Mais cette algèbre est étrange au sens où la dimension réelle des deux parties est différente. Vous avez 32 et 16, donc cela semble très difficile d'obtenir une telle chose de manière naturelle.

[2] Chamseddine

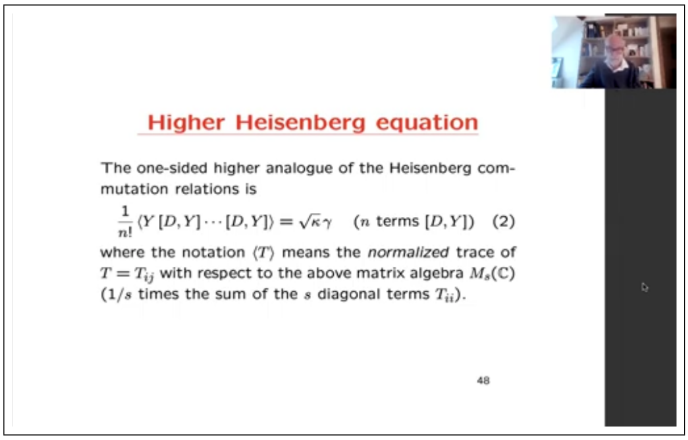


Mais c'est ce que nous avons fait dans notre travail avec Mukhanov. La nouvelle idée qui est venue alors est que maintenant, nous n'allons pas seulement encoder, si vous voulez, tous les moments ensemble, les assembler tous ensemble, comme Dirac l'a fait, vous savez, en utilisant l'opérateur de Dirac, qui mélangeait tous les composants des moments en une seule entité, mais nous avons étudié ce qui se passerait si nous faisions la même chose avec les coordonnées. Et ce que nous avons obtenu est un analogue plus élevé des relations de commutation de Heisenberg.

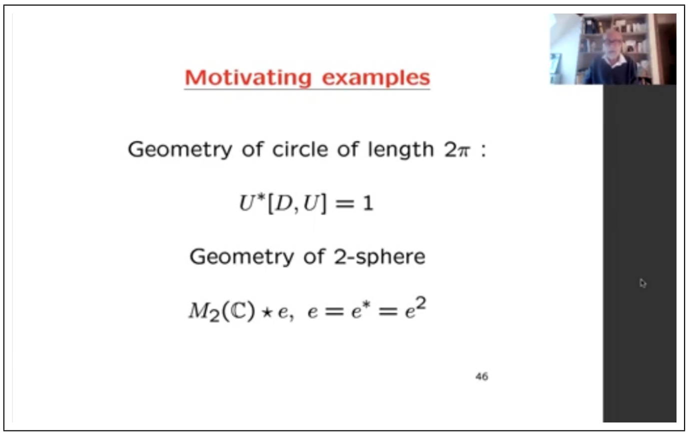
Ce que nous avons d'abord étudié, comme je vais l'expliquer, nous voulions assembler les coordonnées en un seul opérateur, nous avons donc commencé bien sûr avec l'opérateur slash de



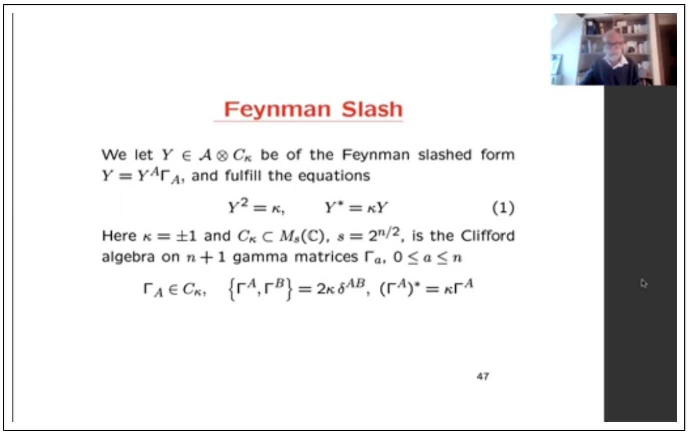
Feynman, d'accord ? Nous voulions les assembler en une seule entité, et ce que nous avons trouvé très vite, c'est que la bonne condition pour les assembler, à cause des matrices de Clifford et des relations qu'ils vérifiaient, était d'avoir un Y auto-adjoint, ou auto-adjoint selon la valeur de κ qui vaut plus ou moins un, qui vérifie $Y^2 = \kappa$ (soit est auto-adjoint selon κ). Ceci est basé sur les matrices gamma, et au début, cela rappelle beaucoup la sphère car alors, les composants Y ? A doivent satisfaire la condition que la somme de leurs carrés est égale à 1.



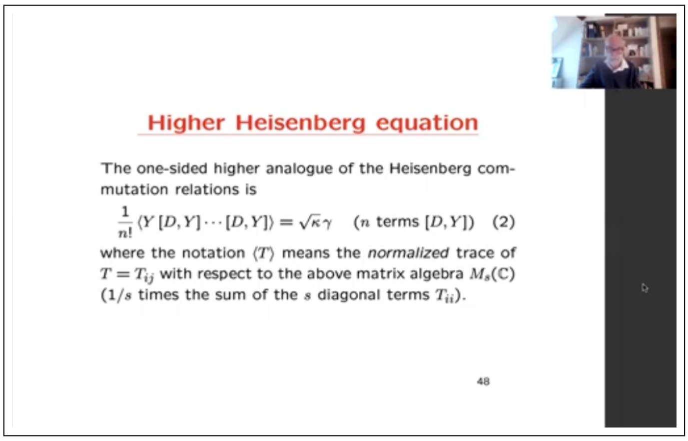
Donc au début, nous avons écrit une sorte d'équation d'Heisenberg de type supérieur, qui est une sorte de relation de commutation : si vous voulez comprendre ce qu'il y a derrière tout ça, je dois revenir à un exemple bien plus simple,



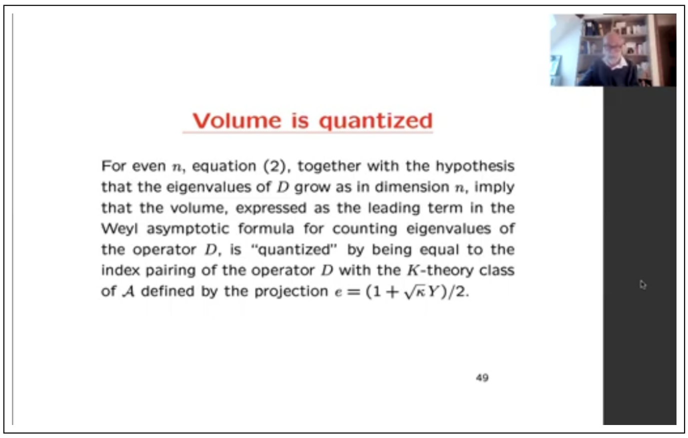
qui est la géométrie du cercle de longueur 2π. C'est un exercice facile de montrer que si vous regardez la géométrie du cercle de longueur 2π, elle est spécifiée uniquement par une équation, l'équation théorique d'un opérateur qui est $U^*[D,U] = 1$. U est un opérateur unitaire, D est un opérateur auto-adjoint, et il y a un paramètre unique, essentiellement à un paramètre près, qui ne joue aucun rôle dans la représentation métrique, irréductible de ces relations par des opérateurs d'espaces de Hilbert. Et quand vous calculez, vous trouvez que le spectre de U doit être le cercle et l'opérateur D définit la métrique et vous trouvez que le cercle correspondant a une longueur de 2π. Et bien sûr, vous trouvez cette géométrie de la bonne manière. De même nous avions commencé en fait il y a de nombreuses années avec Gianni Landi à faire la géométrie de la 2-sphère d'une manière similaire, en combinant des matrices 2×2 avec des projections.



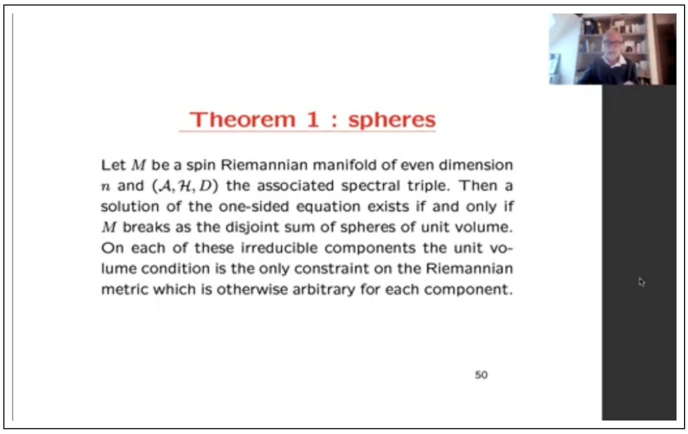
Donc, avec Chamseddine et Mukhanov, nous avons d'abord commencé par un slash de Feynman, nous avons noté cette équation supérieure de Heisenberg,



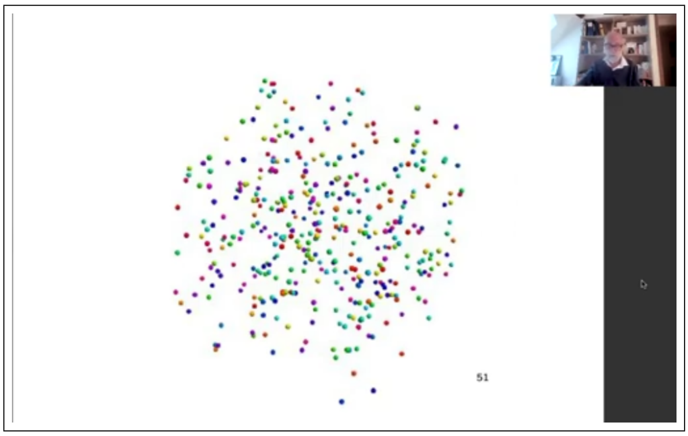
qui ressemble à l'équation du cercle, sauf que maintenant, le commutateur D commutateur Y est élevé à la puissance qui est la dimension de l'espace. Nous avons donc écrit cette équation et nous l'avons étudiée. Et l'une des premières choses que nous avons trouvées



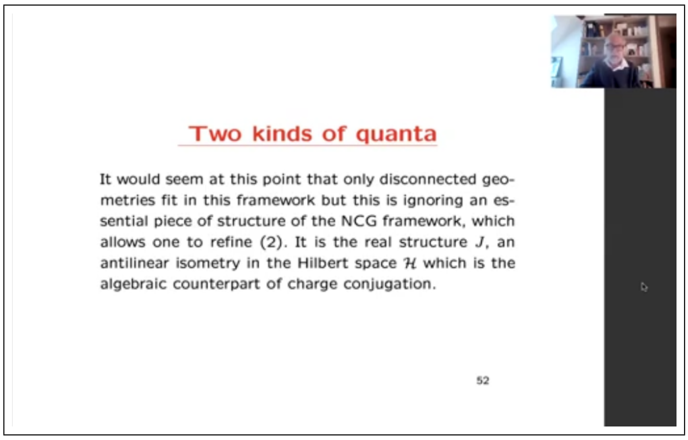
est que cette équation, exactement comme dans le cas du cercle, elle nous donnait la longueur 2π, bon, cela quantifie le volume. Donc le volume qui est donné par la croissance des valeurs propres, ou si vous voulez, par les divergences logarithmiques de la trace de la bonne puissance, est quantifié. C'est donc la première chose.



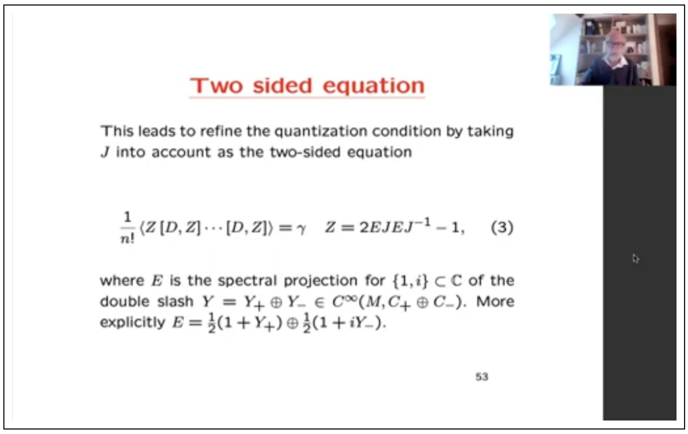
Mais ensuite, nous avons été un peu déçus car ce que nous avons trouvé, c'est que lorsque vous avez une solution à cette équation, alors, automatiquement, la solution, la variété, se brisera comme une disjonction d'un certain nombre de sphères de volume unité. Et si vous travaillez en unités physiques, vous constatez que ce volume unité est le volume de Planck.



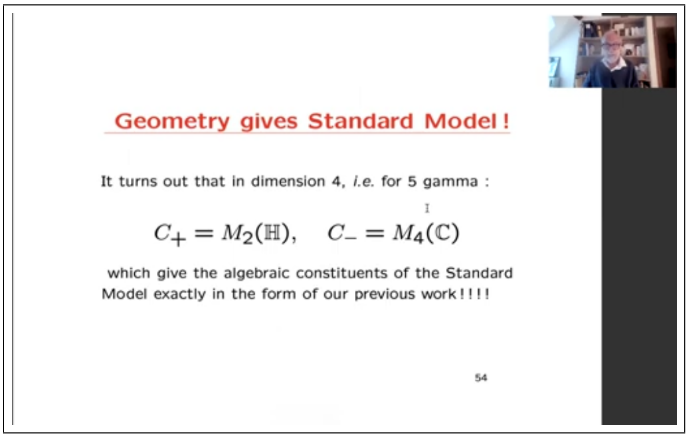
Donc, à ce stade, nous avons été assez déçus parce que nous nous disions "ok regarde. L'espace-temps, euclidien ou non, ça ne ressemble pas à ça : ce n'est pas une union de sphères, de très minuscules petites sphères. Mais nous avions oublié l'élément essentiel de la structure, qui est le J, qui est la conjugaison de charge, la structure réelle J.



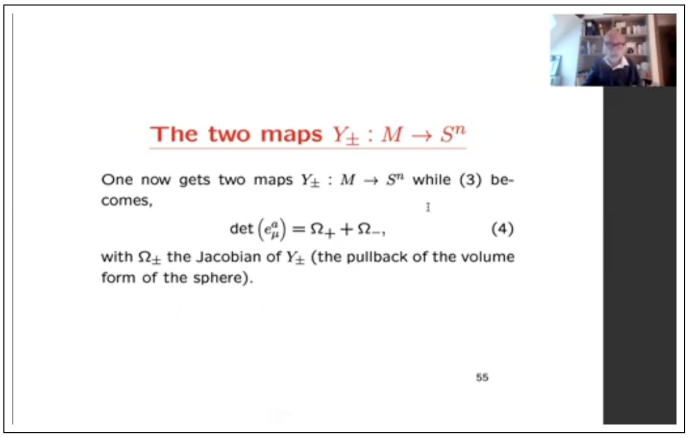
Et quand vous incorporez la structure réelle J, ce que vous trouvez, c'est qu'elle vous oblige automatiquement à affiner l'équation supérieure de Heisenberg. Et à cause de ce problème, de la KO-dimension 6, et ainsi de suite, que trouvez-vous ? Vous constatez que vous êtes obligé d'affiner l'équation en impliquant le J



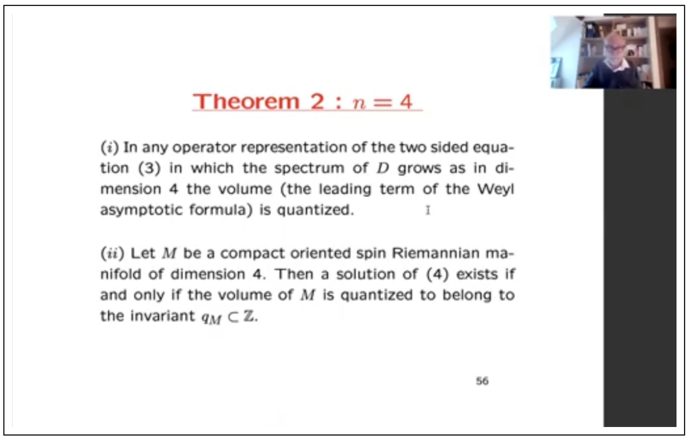
et le J est maintenant incorporé en passant la projection venant de Y au commutant. L'équation devient cette équation. Maintenant, ce qui est vraiment sorti de nulle part, c'est que tout cela, ce que je suis en train de dire là, a été inspiré par le souhait d'essayer de présenter la géométrie de la manière la plus simple possible, en ayant cette sorte d'appariement entre le Dirac et ce que vous obtenez en assemblant les coordonnées dans un opérateur unique.



Et maintenant nous avons regardé exactement quelles sont les algèbres de Clifford nécessaires pour obtenir cette équation, pour obtenir la solution de cette équation. Nous avons regardé le tableau des algèbres de Clifford, pour trouver, dans le cas de la dimension 4, donc quand vous prenez 5 matrices Gamma, alors vous trouvez cela pour écrire ceci, vous avez deux algèbres de Clifford qui apparaissent, de façon irréductible. Et la première vous donne en fait $M_2(\mathbb{H})+M_2(\mathbb{H})$ mais parce que vous voulez prendre une partie irréductible, vous avez $M_2(\mathbb{H})$. Et la seconde est $M_4(\mathbb{C})$ ici et elles apparaissent toutes ensemble. Elles apparaissent si vous voulez comme somme de ces deux parties C_+ et C_-.

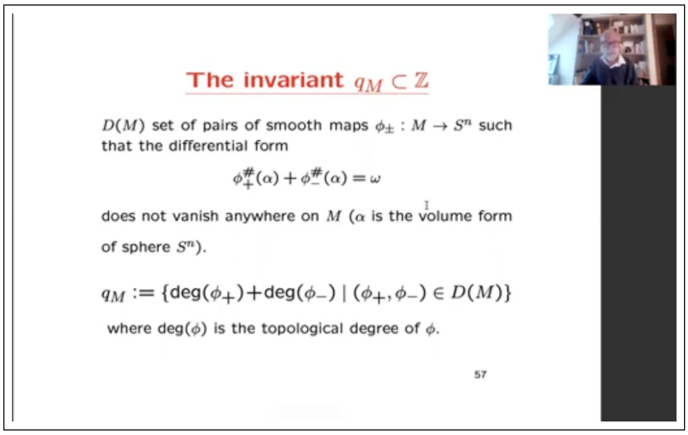


Donc en fait, à partir du problème purement géométrique, nous avons trouvé exactement l'algèbre qui était en quelque sorte mise à la main, vous savez, dans nos travaux précédents, selon une sorte d'histoire ascendante. C'était assez incroyable mais alors bien sûr, il fallait aller plus loin, et il fallait prouver que l'on pouvait obtenir toutes les variétés de spins possibles, de cette construction et non plus une union disjointe de sphères. Alors ce qui se passe, c'est qu'au lieu d'avoir une seule fonction de la variété M vers la sphère, et vous savez, parce que la sphère est simplement connectée dans les dimensions supérieures, vous ne pourriez pas empêcher M d'être elle-même une collection de sphères, mais maintenant vous avez deux fonctions

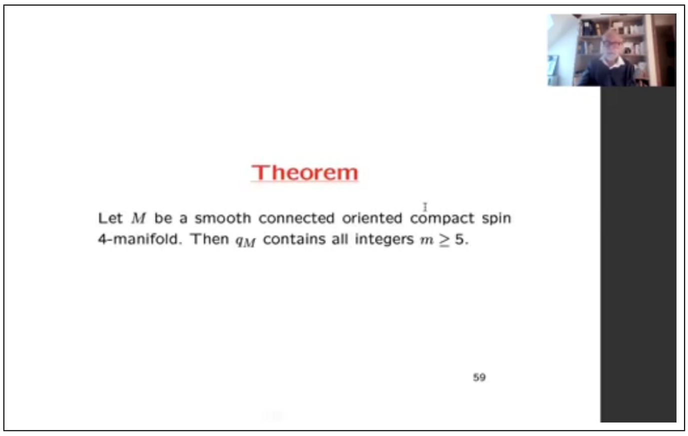


Y_+ et Y_- vers la sphère, et la seule condition est que lorsque vous effectuez le pullback du volume de la forme de la sphère par plus et par moins, ce n'est pas qu'individuellement elles ne disparaissent pas, non, c'est que leur somme ne disparaît jamais. Leur somme doit définir une forme différentielle qui ne disparaît jamais, pas individuellement, ce qui bien sûr n'est pas possible, sauf si vous êtes une sphère.

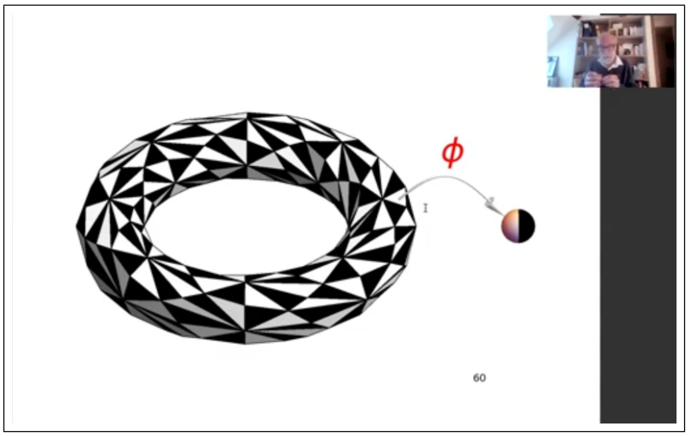
Alors très vite, nous avons obtenu deux résultats : nous avons obtenu le fait que le volume était quantifié, j'y reviendrai brièvement ultérieurement, mais nous avons obtenu un fait beaucoup plus précis, qui est que si vous prenez une variété de spin riemannienne orientée compacte de dimension 4, alors une solution de cette équation existe si et seulement si le volume est quantifié pour appartenir à un certain invariant,



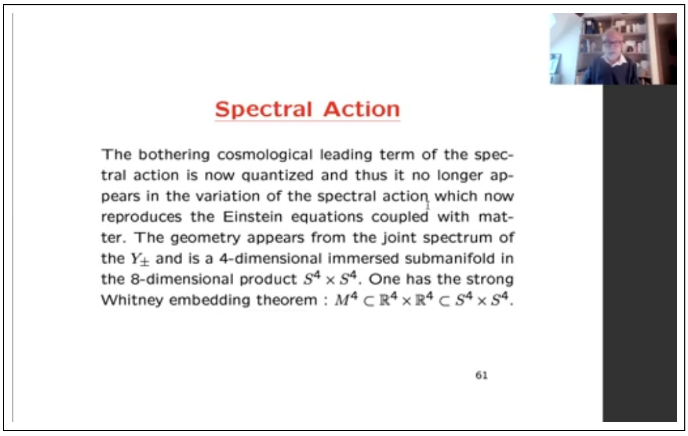
et cet invariant est simplement la somme des degrés de ces applications φ_+ et φ_- qui remplissent la condition que lorsque vous faites le pullback du volume, vous obtenez quelque chose qui ne disparaît pas. Maintenant, après beaucoup de travail, beaucoup de travail géométrique, qui utilisait l'existence de recouvrements ramifiés de la sphère et aussi toute la puissance de la théorie de l'immersion qui remonte à Smale, Milnor et Poenaru, en fait, il y a un théorème de Poenaru qui dit que si vous avez une variété orientée ouverte de dimension n, alors vous pouvez la plonger dans $\mathbb{R}_n$. Ensuite, nous avons pu prouver que, dans le cas de la dimension 4, pour toute variété de spins, cet invariant contiendra tous les entiers n plus grands que 4. Le cas des dimensions 2 et 3 est beaucoup plus facile par arguments généraux de transversalité mais le cas où $n = 4$ est beaucoup plus difficile.



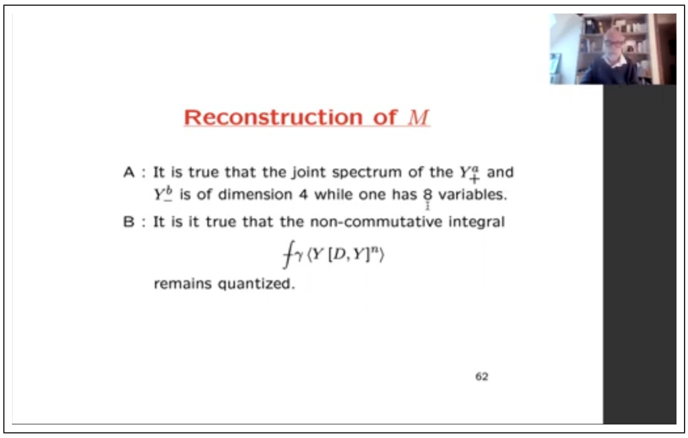
Ce qui se passe, c'est que maintenant vous pouvez obtenir n'importe quelle variété de spins de n'importe quel volume arbitraire. Si vous prenez une 4-variété compacte orientée lisse connexe, alors cet invariant contient tous les entiers plus grands que 5 et qu'est-ce que cela signifie ?



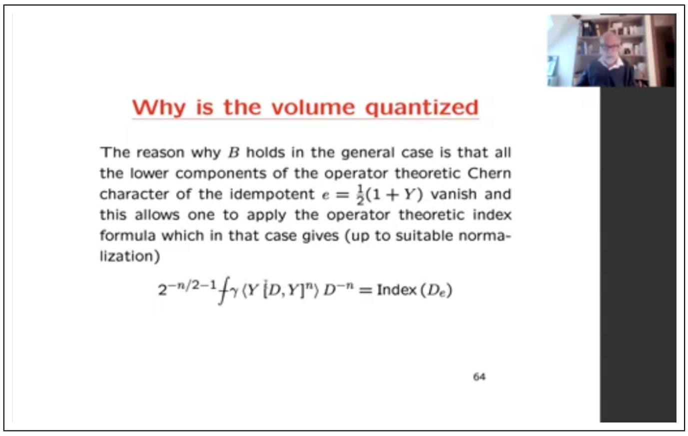
Cela signifie que vous pouvez en quelque sorte obtenir cette variété à partir de deux petites sphères de la taille de Planck mais que bien sûr, cette variété elle-même se développera en quelque sorte, et elle se développera à une taille arbitraire. C'est pourquoi nous avons intitulé l'article que nous avons écrit avec Ali Chamseddine et Mukhanov "Quanta de géométrie" parce que c'est vraiment ce qui se passe. Il y a des petits quanta qui s'imbriquent pour former cet énorme variété. Ce qui se passe aussi, c'est que,



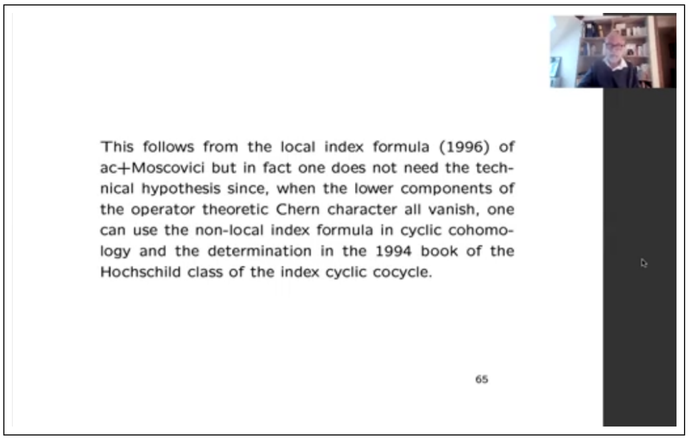
maintenant parce que le volume est quantifié, quand vous notez l'action spectrale comme nous l'avions écrite avec Ali, comme je l'ai dit, dans l'action spectrale, ce que vous avez, c'est qu'il y a un terme cosmologique qui est énorme, et qui est assez dérangeant. Mais maintenant, parce que le volume est quantifié, ce terme cosmologique, qui est le terme principal de l'action spectrale, ne joue aucun rôle, lorsque vous écrivez l'équation variationnelle. Et donc, lorsque vous écrivez l'équation variationnelle, vous reproduisez vraiment l'action d'Einstein couplée à la matière. La géométrie est reconstruite comme un spectre conjoint, et c'est une sous-variété 4-dimensionnelle de ce produit 8-dimensionnel de deux très petites sphères,



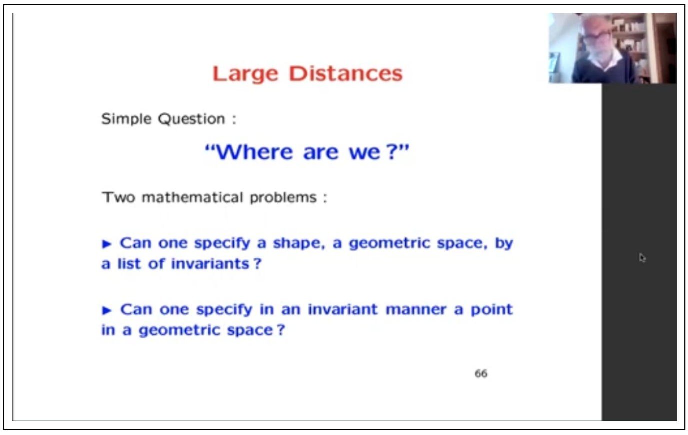
et il y a des faits assez généraux qui sont essentiels pour effectuer cette reconstruction : il y a le fait que le spectre conjoint sera de dimension 4, cela repose sur un résultat profond de Dan Voiculescu, et aussi, cela repose sur le fait que le théorème de l'indice, vous dira que le volume restera quantifié.



Le fait que le volume reste quantifié découle du fait que vous disposez de la condition supérieure de Heisenberg qui vous donne que ces quantités seront égales à gamma, donc gamma au carré vaut 1, donc elles s'annulent. Mais c'est aussi un indice. Donc, la raison pour laquelle il s'agit d'un indice repose sur un théorème d'indice que nous avons prouvé

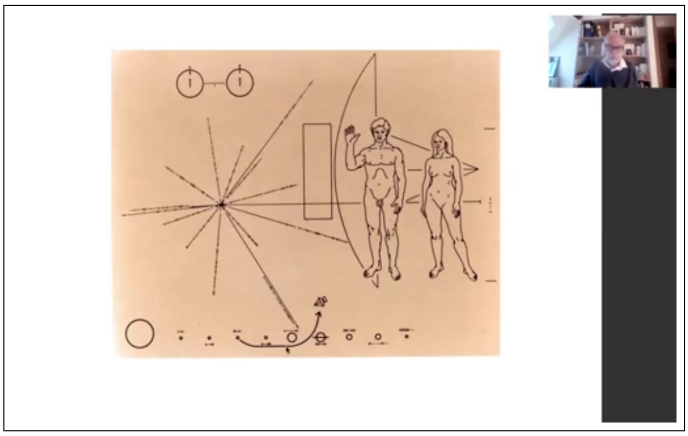


avec Henri Moscovici en 1996, mais en fait, on peut utiliser un résultat moins général, car il s'avère que les composants des caractères de Chern du Y disparaissent automatiquement, les composants les plus bas. Donc en fait, on n'a pas besoin, si vous voulez, en cohomologie cyclique, de comprendre pleinement l'indice, il suffit de comprendre la classe de Hochschild de l'indice. Bien sûr, ceci est très instrumental pour prouver ce résultat. Alors j'espère vous avoir convaincu... Alors je veux juste ajouter une chose, que certains physiciens écarteront, car à un moment donné, nous avions fait une erreur de prédiction, qui concernait la masse de Higgs, mais il y a une histoire très intéressante, qui est qu'avec Ali Chamseddine, nous avions rédigé un article de survol en 2010 dans lequel nous expliquions la théorie, et dans cet article, nous avions un champ scalaire, que nous ignorions en fait, lorsque nous avons fait les calculs du groupe de renormalisation. Ce champ scalaire fonctionnait comme des coefficients pour le neutrino et ainsi de suite, d'accord, cet article est publié en 2010, maintenant ce qui se passe, c'est qu'en 2012, Ali m'a écrit un e-mail et il m'a dit "tu sais, c'est incroyable parce qu'il y a trois groupes indépendants de physiciens qui ont montré que si vous ajoutez un champ scalaire au modèle standard, vous pouvez récupérer la stabilité du paramètre de diffusion de Higgs, la positivité du paramètre de diffusion de Higgs à l'unification, qui est exactement ce qui, si vous voulez, contredisait notre prédiction, le fait que ce n'était plus positif dans le modèle habituel. Je ne pouvais pas en croire mes yeux, je ne croyais pas Ali, et j'ai vérifié et tous les signes étaient corrects, notre champ scalaire était exactement le bon. Pour que cela puisse corriger la prédiction et la rendre compatible avec la valeur réelle de la masse de Higgs. Notre modèle n'est donc pas du tout réfuté par ce qui a été trouvé comme masse.

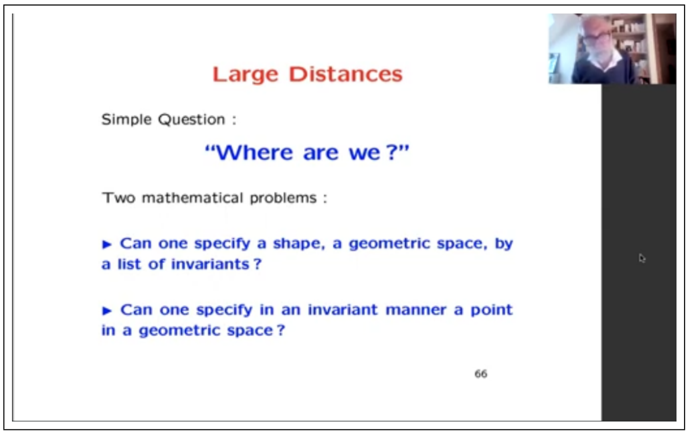


Alors maintenant, permettez-moi de venir aux grandes distances.

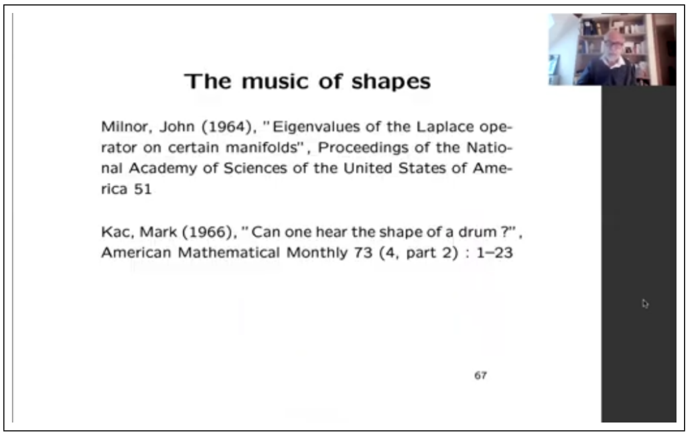
Riemann a été très prudent dans son discours inaugural, pour distinguer les grandes distances des petites distances. Donc j'espère avoir fait le point pour ce qu'il en est des petites distances et maintenant, quand vous regardez les grandes distances, je veux expliquer que le point de vue spectral est là-aussi pertinent. Pour cela, je vais poser une question simple, qui est "Où sommes-nous ?". Je veux dire par là, comment pouvons-nous essayer de spécifier où est la Terre, si nous envoyons par exemple une sonde dans l'espace, comment pouvons-nous spécifier d'où provient cette sonde ?



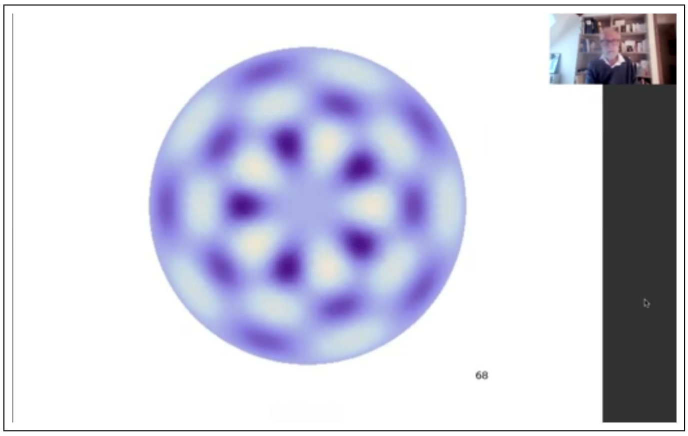
Bien sûr, vous pouvez montrer le système solaire, avec notre planète, vous pouvez montrer à quoi nous ressemblons, mais il y a quelque chose qui est beaucoup plus proche de la réponse que je veux expliquer, et qui est cette image, quand vous avez toutes ces droites qui se regroupent toutes en un même point, et sur chacune d'elles, une fréquence est indiquée.



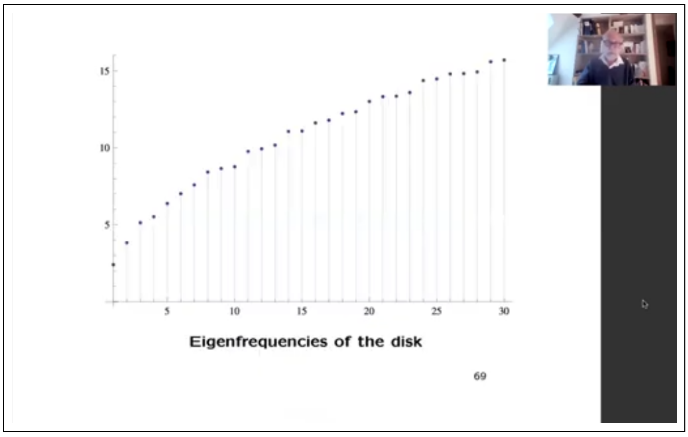
Or cela donne naissance à deux problèmes mathématiques, le premier est "peut-on spécifier une forme par une liste d'invariants ?" Donc, si vous essayez de spécifier l'univers ou n'importe quel espace, en donnant un graphique, un système de coordonnées, c'est ridicule, car si par exemple vous donnez quelles sont les coordonnées dans tel système, vous devez spécifier l'origine du système, la question est donc complètement circulaire. Donc ce que vous devez faire, c'est qu'il vous faut d'abord spécifier la forme, par invariants géométriques, par une liste d'invariants, et alors, "peut-on maintenant spécifier de manière invariante un point dans l'espace géométrique ?". Donc ce sont deux problèmes mathématiques, et la réponse repose sur deux articles.



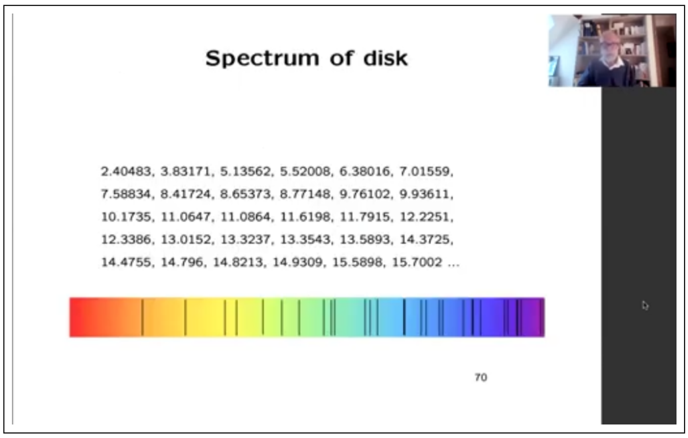
Il y a un article de Milnor en 1964 : il a montré que quand on a un espace, dont on prend le spectre, les valeurs propres de l'opérateur de Laplace ou de l'opérateur de Dirac, cela n'a pas d'importance pour cela, alors il s'avère que cela ne constitue pas un invariant complet de la géométrie. Il a exposé deux espaces en dimension 16, qui avaient les mêmes valeurs propres et la raison à cela repose juste sur des formes modulaires et des fonctions thêta. Et puis, il y a un autre article, qui est de Mark Kac en 1966 qui est "peut-on entendre la forme d'un tambour ?".



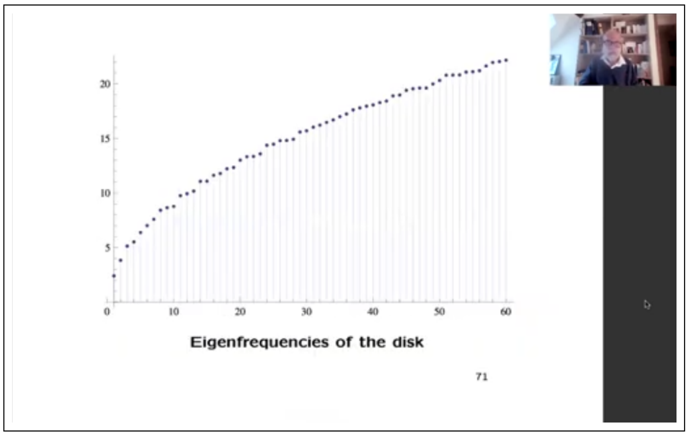
Donc, si vous prenez un tambour, il va vibrer, il aura de nombreuses formes de vibrations, qui dépendent du nombre de variations qu'il y a lorsque le disque est parcouru circulairement, et du nombre de vibrations qu'il y a lorsque le disque est parcouru du centre vers l'extérieur du tambour ; il a donc des séquences de valeurs propres.

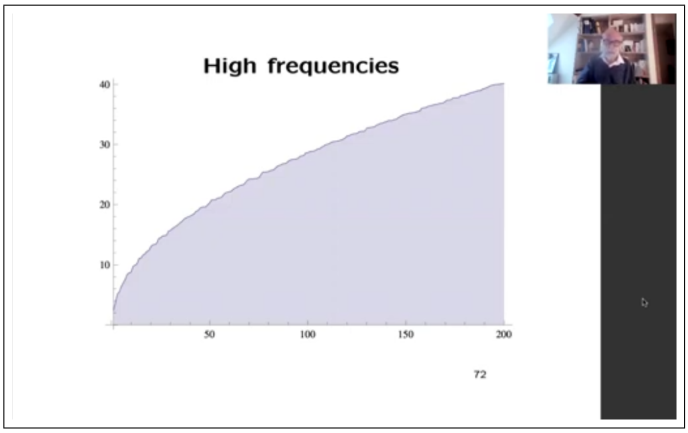


elles grandissent,

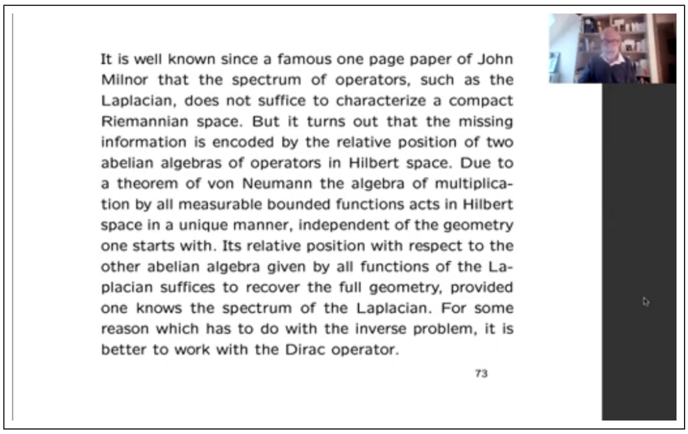


elles sont calculables comme zéros des fonctions de Bessel, elles forment une sorte de spectre, et quand on regarde ce qu'elles valent pour des fréquences de plus en plus élevées, ces valeurs forment une parabole.

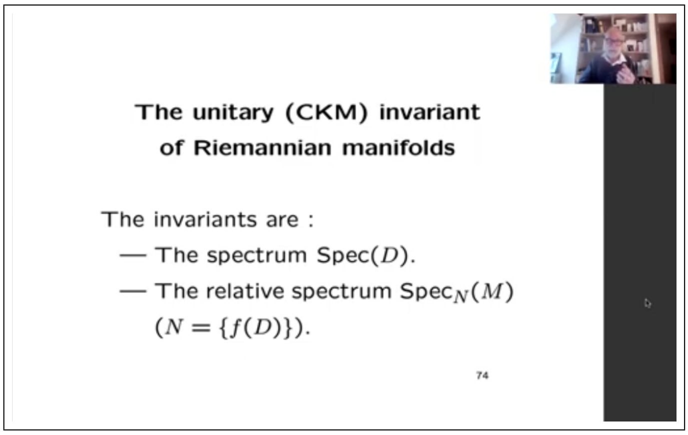




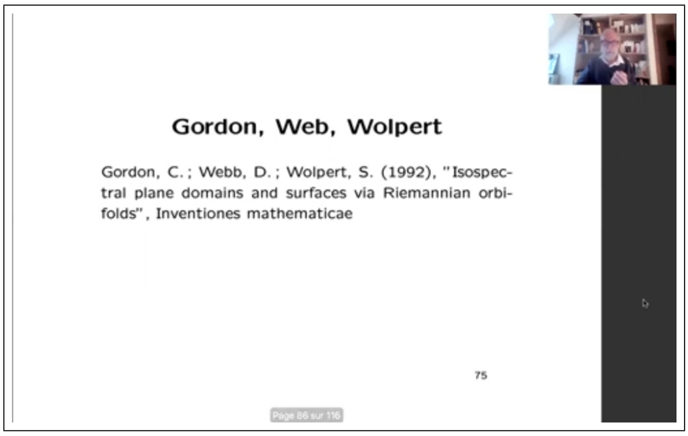
Et cette parabole indique que vous manipulez une forme de dimension 2. C'est le résultat d'Hermann Weyl qui sera assez instrumental plus tard.



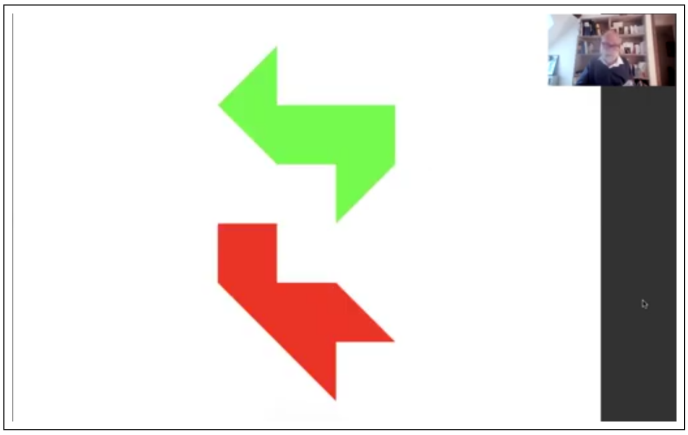
Maintenant, la réponse que je veux expliquer est ce qui manque quand on n'a que le spectre, quand vous n'avez que ce qu'ils appelleront l'échelle si vous voulez, car si vous pouviez faire de la musique avec la forme, il y aurait une échelle qui vous serait imposée et qui serait constituée des fréquences très spécifiques que ça donne. Maintenant, il s'avère que les informations manquantes dont vous avez besoin, qui vous manquent pour reconstruire l'espace, la géométrie avec toutes ses propriétés, sont en fait données par la position relative de deux algèbres abéliennes d'opérateurs dans l'espace de Hilbert. Il y a bien sûr l'opérateur de Dirac, qui par son spectre est uniquement incorporable dans l'espace de Hilbert, mais il y en a un autre, et cela vient d'un théorème de von Neumann, car le résultat de von Neumann prouve que si vous prenez deux variétés de même dimension, il s'avère que... l'algèbre de von Neumann est multipliée par des fonctions, par des fonctions mesurables sur les variétés... ces algèbres de fonctions sont isomorphes dans leur action... mais non seulement elles sont isomorphes comme algèbres mais elles sont aussi isomorphes par la manière dont elles agissent sur l'espace de Hilbert. Donc si vous voulez que la paire donnée par l'algèbre et l'espace de Hilbert soit unique, la paire qui est donnée par l'espace de Hilbert et l'opérateur de Dirac est donnée par le spectre, la seule chose qui vous manque est leur position relative. Et cette position relative me permet de définir



un invariant, qui est assez subtil à définir, mais que je peux illustrer très simplement sur un exemple, que j'ai appelé l'invariant CKM et la raison pour laquelle je l'ai appelé CKM, c'est parce que Cabibbo-Kobayashi-Maskawa utilisent un invariant similaire lorsqu'ils définissent leur... vous savez, cette chose qui était en fait une rupture du CP, vous savez, dans le modèle standard. Donc les invariants sont donnés non pas par le spectre de l'opérateur de Dirac, mais par quelque chose qui revient à donner les accords possibles, sur ce spectre.

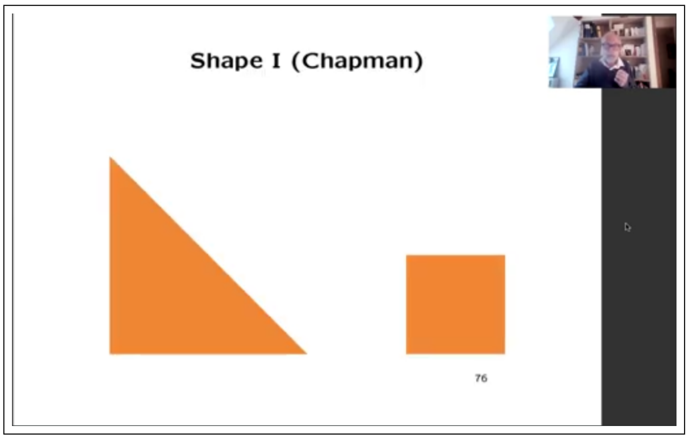


Et pour illustrer cela, je vais vous montrer cela sur un exemple très simple, bien sûr très naïf, de quoi s'agit-il ? Pour cela, je travaillerai en dimension 2, car grâce au travail de Gordon, Web et Wolpert par exemple, on a un bel exemple, de formes isospectrales, en dimension 2.

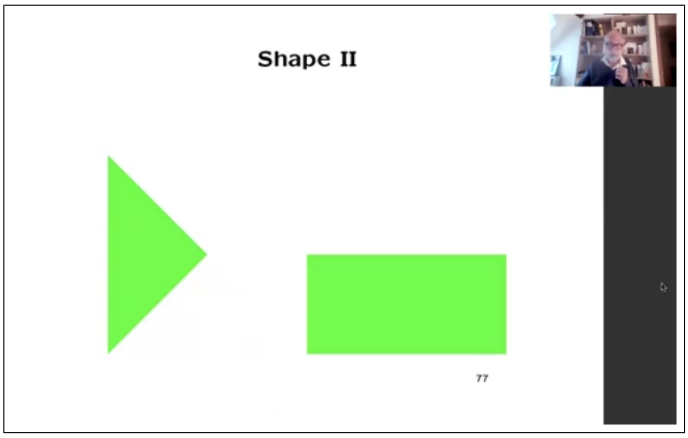


Donc ces deux formes par exemple, elles ont exactement le même spectre, et bien sûr, elles ne sont pas identiques, ici vous avez cette protubérance du petit carré, qui n'apparaît pas dans l'autre forme.

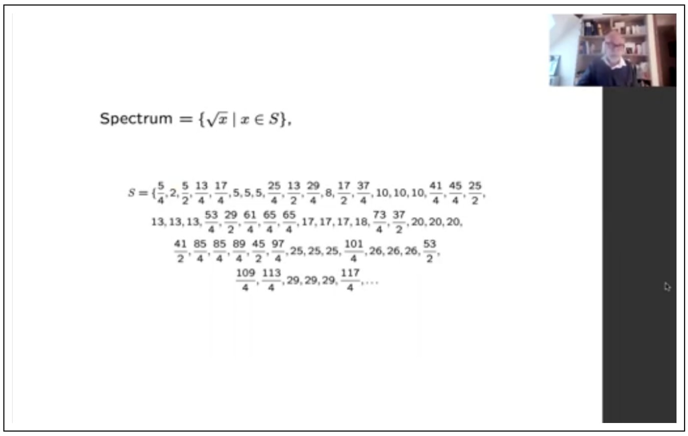
Il y a donc un autre exemple que je vais utiliser qui est dû à Chapman, et les deux formes que je vais utiliser ne sont pas connectées.



Donc la première forme est cette union, de ce triangle isocèle et de ce petit carré,

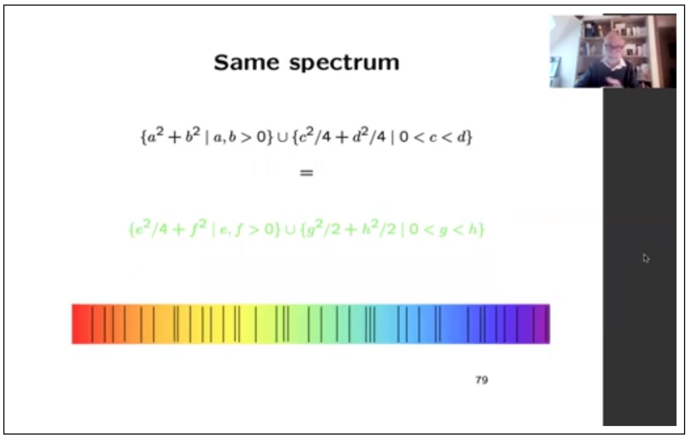


et la seconde forme est l'union de ce triangle isocèle avec ce petit rectangle, maintenant il s'avère que lorsque vous calculez, vous découvrirez que ces deux formes ont

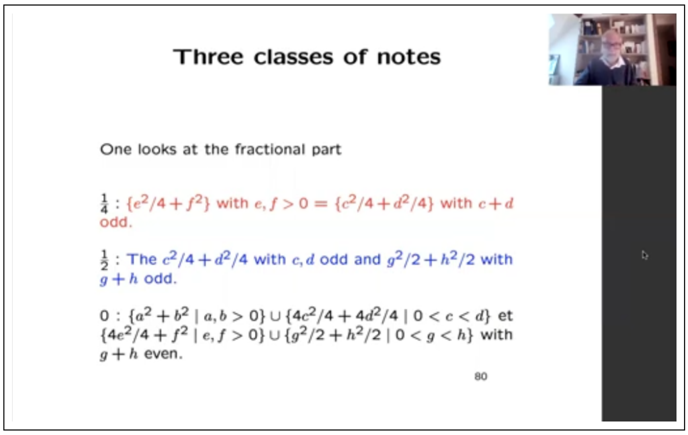


exactement le même spectre. Chacune des deux formes[3] est déconnectée, mais elles ont le même spectre. Le fait qu'elles soient déconnectées m'aidera à vous montrer ce qui se passe.

Ainsi, lorsque vous calculez le spectre, vous trouvez, lorsque vous écrivez les carrés des raies spectrales, que les valeurs propres sont de trois types, il existe trois types de nœuds dans l'échelle : il y a des nœuds qui sont fractionnaires de partie fractionnaire $1/4$, il y a des nœuds qui ont $1/2$ comme partie fractionnaire, et il y a des nœuds qui sont des entiers "pleins"[4].

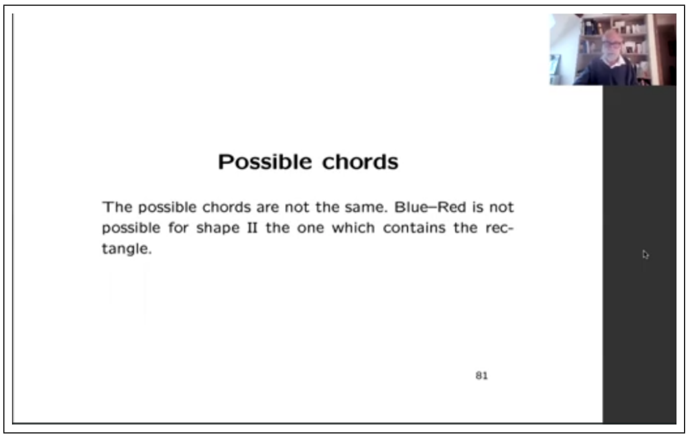


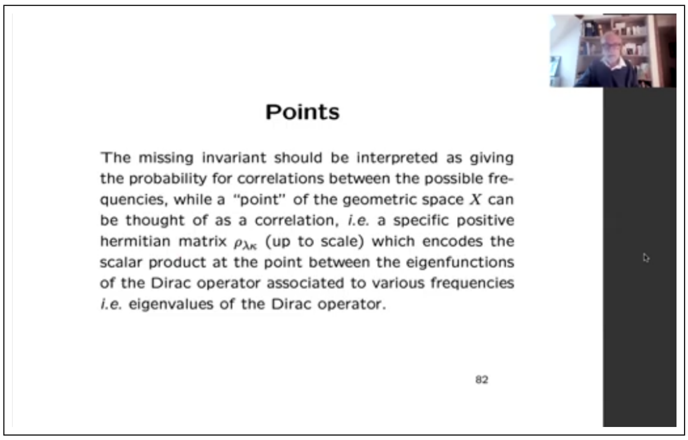
Donc en fait, cela forme une sorte de gamme comme celle-ci, et de la même façon que sur un piano, voux avez les touches noires et les touches blanches, ici vous avez le bleu, le rouge et le jaune. Vous avez donc trois types de nœuds, les deux formes ont le même spectre, le spectre ressemble à ceci, il y a ces trois classes de nœuds,



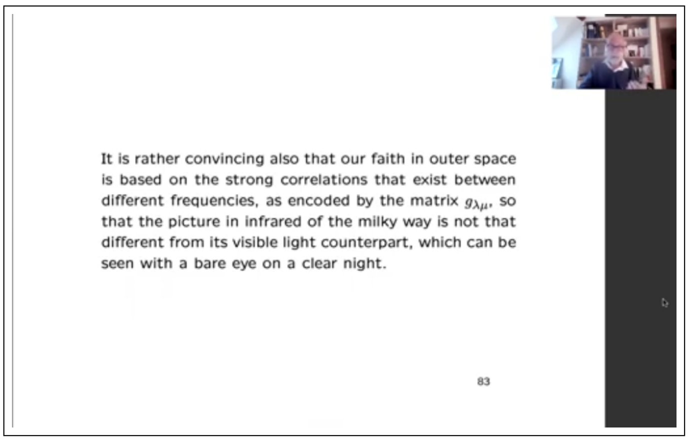
[3] constituées chacune de deux formes géométriques mais qui sont chacune agrégées en une seule forme en fait.
[4] sans partie fractionnaire.

et maintenant, pourquoi les deux formes ne sont-elles pas les mêmes, alors qu'elles ont le même spectre ? Elles ne sont pas les mêmes parce que les accords possibles ne sont pas les mêmes sur les deux formes. Ce que vous découvrez, il faut réfléchir un peu, c'est que l'accord bleu-rouge n'est pas possible pour la forme II, celui qui contient le rectangle, mais que cet accord bleu-rouge est possible pour la forme numéro I. D'accord, vous devez définir ce que vous entendez par un accord, et ainsi de suite.



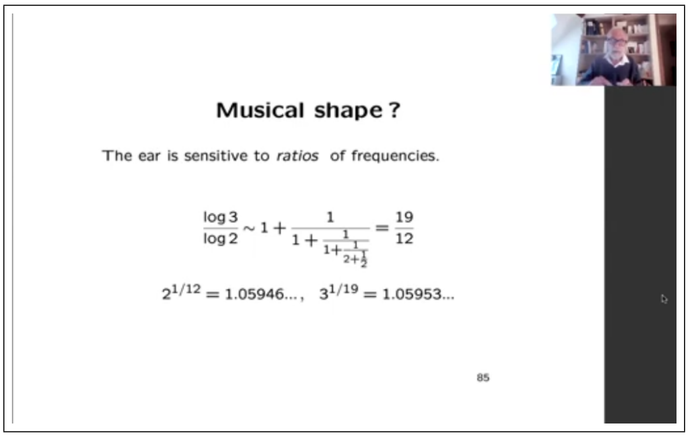


Mais ce que cela signifie en général, c'est que l'idée d'un point émerge également de ce type de réflexion. L'invariant est assez difficile, assez délicat à définir. Ce qui émerge aussi, c'est l'idée d'un point. L'idée est qu'un point dans un espace géométrique doit être considéré comme une corrélation. En fait, c'est donné là comme une mesure hermitienne spécifique, mais ce que ça code, c'est le produit scalaire en le point des fonctions propres de l'opérateur de Dirac, mais ce que ça code si vous voulez, c'est la corrélation entre diverses fréquences.



Et cela est très convaincant puisque notre foi en l'existence de l'espace extra-atmosphérique repose sur la corrélation qui existe entre différentes fréquences. Par exemple, quand on regarde la voie lactée, on peut la regarder en lumière visible, mais on peut aussi la regarder dans d'autres fréquences comme les rayons X, ou l'infrarouge, etc. Et il est crucial que toutes ces différentes images que nous obtenons à différentes fréquences soient effectivement corrélées les unes aux autres.

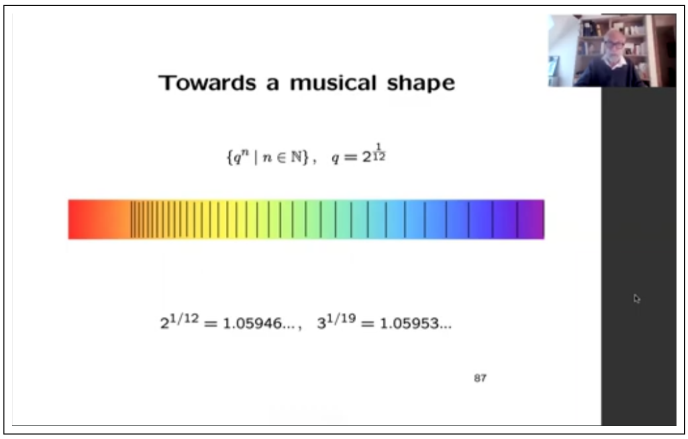
C'est donc ce que dit cet invariant supplémentaire. Maintenant pour faire une petite pause, quand je jouais avec ces différentes formes et avec leurs échelles, je me demandais “y en a-t-il une qui nous permettrait de faire de la musique comme on l'aime ?”, comme les notes qu'on a sur un piano. Et bien sûr, vous devez en savoir un minimum du point de vue musical, qui est que l'oreille est sensible non pas aux ajouts, comme vous le feriez dans une progression arithmétique [5], pas du tout, l'oreille est sensible aux rapports de fréquences : si vous multipliez une fréquence par 2, c'est le passage à l'octave ; c'est comme quand vous jouez sur un piano, vous jouez un *la*, et maintenant si vous jouez le même *la* une octave plus haut, vous ne faites en fait que doubler la fréquence, et l'oreille y est très sensible. Maintenant, l'oreille est également sensible à la multiplication par 3,



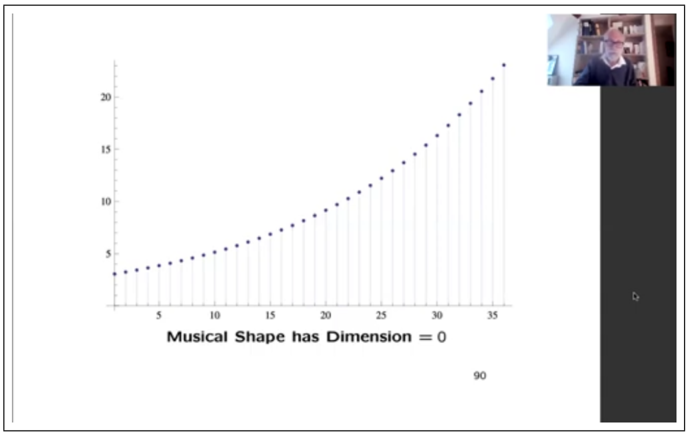
et un fait mathématique extrêmement utilisé en musique est le fait que lorsque vous regardez 2^{19},c'est presque 3^{12}. Bien sûr, ils ne peuvent être égaux, car l'un est pair et l'autre est impair, mais ce que cela signifie, c'est que si vous prenez $\frac{\log 3}{\log 2}$, c'est un nombre très proche de $\frac{19}{12}$. En réalité 19 et 12 apparaissent dans le développement en fractions continues. Donc en fait, la racine douzième de 2 est très proche de la racine dix-neuvième de 3, et il s'avère que la bonne forme musicale est celle que vous pouvez voir sur une guitare. Vous voyez, quand vous regardez une guitare,

[5] +k, +k, etc.

vous découvrez que les frettes de la guitare sont comme ici, elles ne forment pas du tout une progression arithmétique, elles ne sont pas également espacées, non. Si vous réfléchissez un peu, vous devez réfléchir, et puis vous comparez, vous faites quelques calculs et ainsi de suite, vous trouvez que ces frettes sont exactement les puissances de ce nombre q qui vaut $2^{1/12}$.

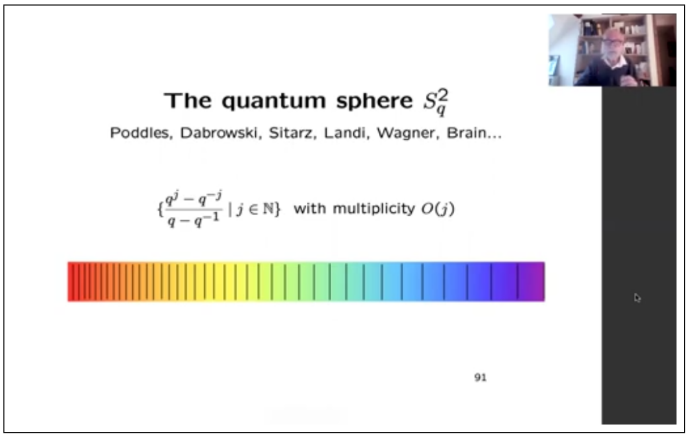


Et le spectre que nous regardons, cette forme musicale, ce qu'elle devrait être, c'est exactement ce qui se passe avec les frettes, à savoir que les raies devraient être les puissances de ce nombre. Maintenant, vous pouvez regarder les formes nous connaissons, auxquelles nous sommes habitués pour essayer de trouver ce spectre. Cela ne vous mène nulle part : si vous obtenez la sphère



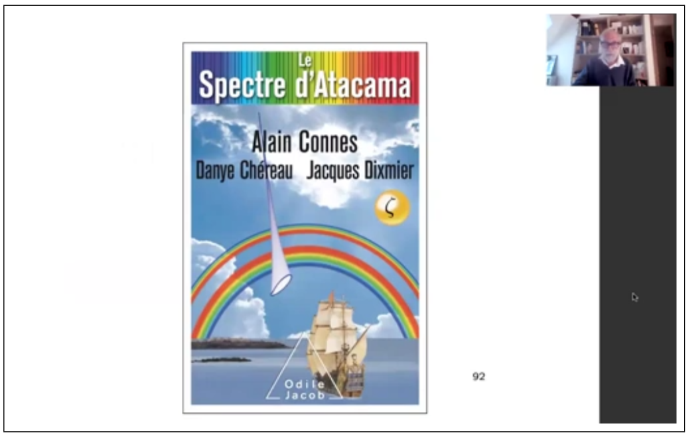
par exemple, la 2-sphère, bien sûr, vous savez, les hautes fréquences ressemblent à une parabole, mais cela ne vous mène nulle part, pourquoi ?

Cela ne nous mène nulle part car cette forme musicale... quand on regarde le spectre, les valeurs croissent rapidement de façon exponentielle, bien sûr, car c'est une série géométrique. Donc quand vous regardez sa dimension, je veux dire, en relation avec les idées précédentes que vous devez utiliser le théorème de Hermann Weyl et ainsi de suite, vous trouvez que la forme doit être de dimension 0. Être de dimension 0, cela signifie qu'il est en quelque sorte inutile de la chercher parmi les formes que nous connaissons. Mais étonnamment, cette forme existe dans le monde non-commutatif, et c'est la sphère quantique,

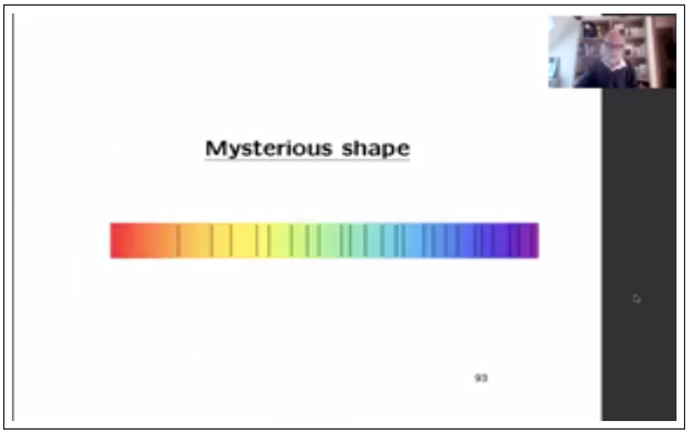


qui est une déformation de la sphère, et dont la beauté est due au fait que non seulement, elle a le spectre que nous aimerions avoir, mais aussi, elle a les symétries que nous aimerions avoir, à savoir que, comme une sphère a un groupe complet de symétries qui agissent sur elle de manière transitoire, la sphère quantique a un groupe quantique de symétries qui agissent sur elle de manière transitoire dans le sens approprié.

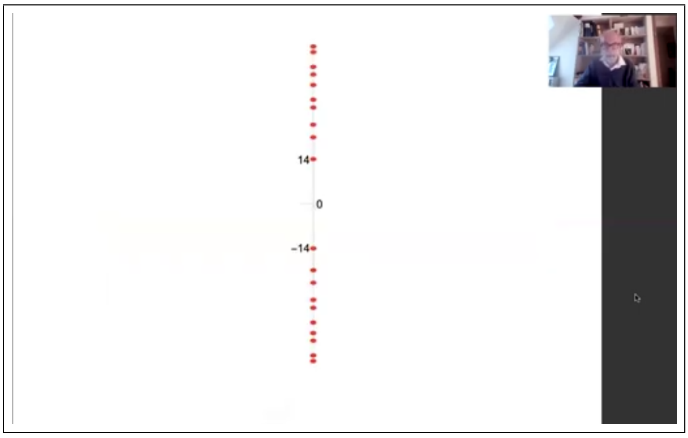
Permettez-moi maintenant d'aborder un sujet très important qui constituera la fin de mon exposé.



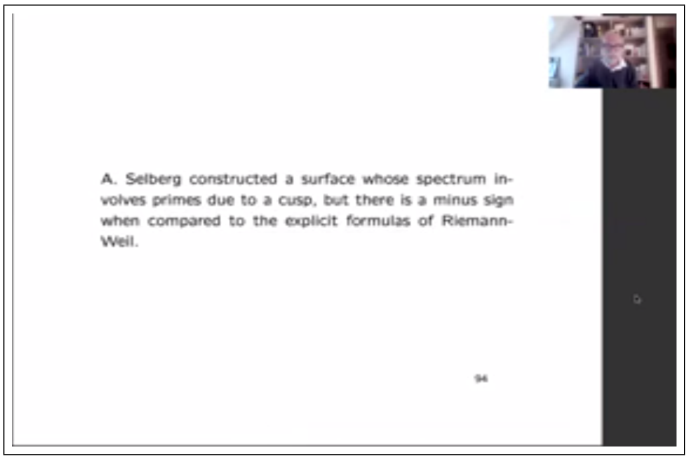
Il y a un livre que j'ai écrit avec mon épouse Danye Chéreau et avec Jacques Dixmier, qui est une sorte de Prélude à ce dernier sujet.



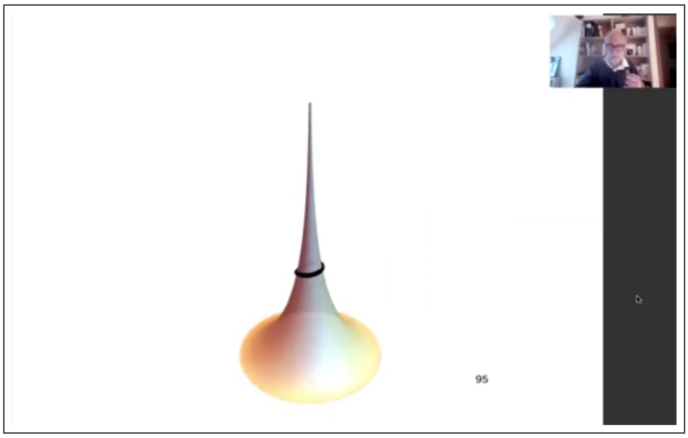
Donc ce dernier sujet concerne une forme mystérieuse, il y a une forme assez mystérieuse, dont je vous montre le spectre, et c'est ainsi qu'il apparaît,



quand vous le regardez pour la première fois, et qu'est-ce que c'est ? Eh bien, les gens qui connaissent un peu la théorie des nombres ont reconnu les zéros de la fonction zêta de Riemann. Maintenant, c'est une forme très mystérieuse, et il faut admettre que ça ressemble un peu à une sorte de spectre d'un opérateur de Dirac, cette remarque m'a été faite par Atyiah, et vous savez

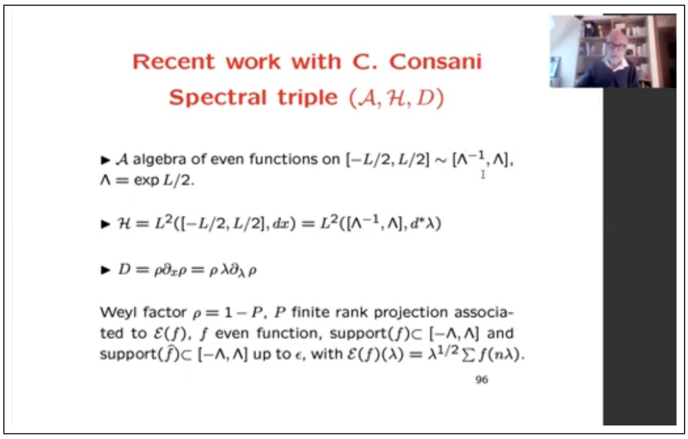


Selberg a essayé de trouver, de construire une surface dont le spectre pourrait être tout à fait lié à cela. Il construit une surface qui, à cause d'une cuspide, était liée aux nombres premiers, mais lorsque vous calculez plus avant pour la surface de Selberg, vous trouvez qu'il y a un signe moins qui apparaît, et lorsque vous comparez aux formules explicites de Riemann-Weil,

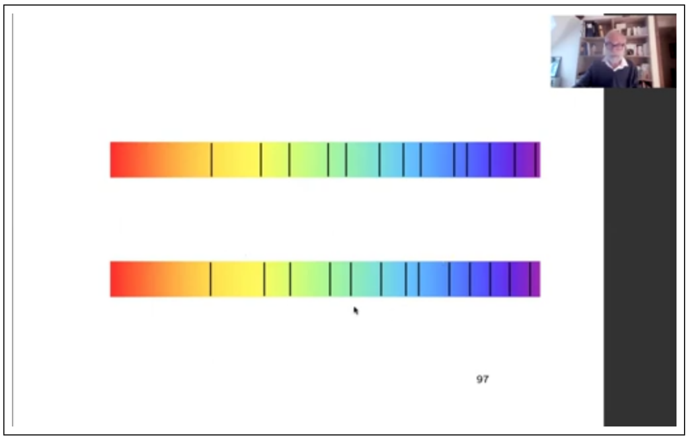


donc, ce genre de choses ne peut pas tout à fait fonctionner, et c'est le type de cuspide que Selberg obtenait et qui s'approchait assez près du spectre qui nous intéresse.

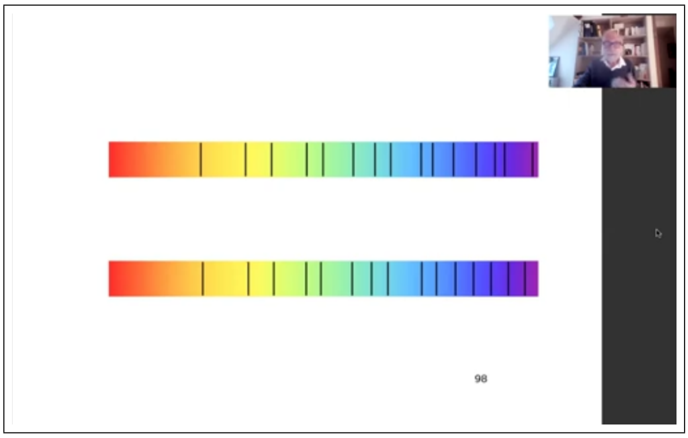
Maintenant, la raison pour laquelle je mentionne cela est que dans un travail très récent que nous avons fait le mois dernier avec Katia Consani, ce que nous avons trouvé, c'est une géométrie non-commutative, mais pour cette géométrie non-commutative, la géométrie est bien sûr donnée par un triplet spectral, mais l'algèbre du triplet est commutative.



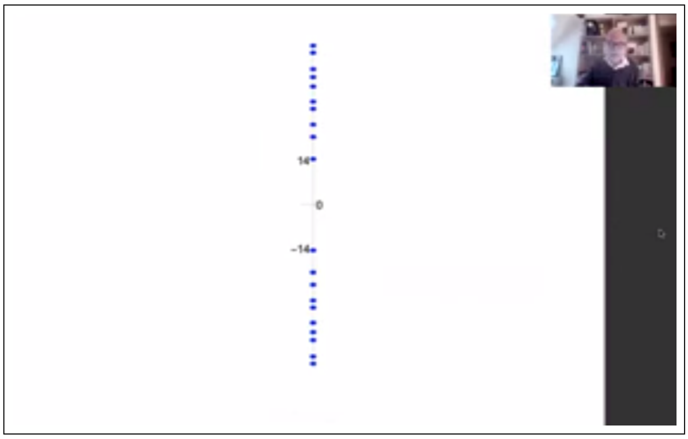
donc l'algèbre est juste l'algèbre des fonctions paires ordinaires sur l'intervalle $[-L/2, L/2]$, je pense il vaut mieux y penser de manière multiplicative ($[\Lambda^{-1}, \Lambda]$, c'est un peu mieux. Donc, vous le considérez comme des fonctions de longueur lambda vers lambda en utilisant l'exponentielle. D'accord. L'espace de Hilbert est également simple, c'est l'espace de Hilbert de toutes les fonctions L^2, sur cet intervalle, à dx ou à mesure de Haar multiplicative $d^*\lambda$ quand on pense multiplicativement, et qu'en est-il de l'opérateur de Dirac ? L'opérateur de Dirac est une toute petite perturbation de l'opérateur de Dirac ordinaire. Et l'opérateur de Dirac ordinaire est donné par D par ∂_x ou par λD par ∂_λ lorsque vous travaillez avec l'exponentielle, et cette minuscule perturbation est provoquée par un facteur de Weyl : il s'avère en général que vous pouvez écrire l'opérateur de Dirac d'une métrique donnée vers l'opérateur de Dirac à partir de la nouvelle métrique obtenue en introduisant simplement un facteur de Weyl par la formule $\rho\partial_\rho$. C'est donc la formule que j'utilise ici, et le facteur de Weyl ne pourrait pas être plus simple, il est de la forme $1 - P$ où P est la projection de rang fini, qui est associée aux fonctions paires dont le support est compris entre $-\Lambda$ et Λ, maintenant je suis dans le cadre multiplicatif, et dont le support de la transformée de Fourier est aussi dans $[-\Lambda, \Lambda]$. Il faut donc être très prudent, je veux dire, c'est en général impossible, mais c'est possible à ε près et cela conduit à des fonctions sphéroïdales prolates. D'accord. Donc ce que nous avons fait avec Katia, nous avons défini ce triple spectral, il dépend de la longueur de l'intervalle, et nous avons pu calculer le spectre correspondant de l'opérateur de Dirac, uniquement dans des cas très simples car les formules des fonctions sphéroïdales prolates sont assez compliquées. Nous l'avons donc calculé pour de petites valeurs de L et à notre grand étonnement, vous savez,



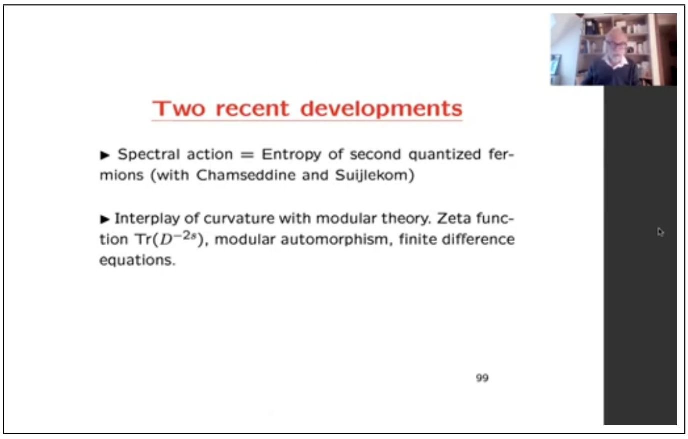
je veux dire, cette chose est le spectre des zéros de zêta, et ça, c'est le spectre que nous avons trouvé, dans le premier exemple, et dans le deuxième exemple, nous avons eu une coïncidence encore meilleure entre les deux. Nous explorons donc maintenant cette coïncidence, en essayant de comprendre dans quel sens, dans quelles limites



les deux spectres coïncident, et ce n'est que la pointe émergée de l'iceberg dans un énorme programme que nous poursuivons avec Katia Consani sur la fonction zêta de Riemann et qui bien sûr, je veux dire, a de nombreux liens avec la géométrie non-commutative mais enfin, il a une connexion avec le point de vue spectral. Il a également de nombreuses connexions avec d'autres pans de la géométrie non-commutative, en fait, à la partie concernant les espaces singuliers, comme les espaces de classes d'adèles, et aussi à la théorie des topos de Grothendieck, et etc. et ainsi de suite.



C’est donc le spectre que nous avons obtenu qui est si similaire, le spectre de notre opérateur de Dirac, donc qui est semblable au spectre des zéros de zêta,



et je voudrais terminer mon intervention en mentionnant deux développements récents très actifs. Il existe un développement que j’aime beaucoup et qui est que lorsque nous avons développé l’action spectrale, avec Chamseddine, l’action spectrale dépend d’une fonction, elle dépend très peu de cette fonction parce que vous en donnez juste le développement asymptotique mais nous n’avions aucun moyen de choisir la fonction. Maintenant, avec Ali Chamseddine et Walter van Suijlekom, nous avons montré qu’en fait, le spectre de l’action est égal à l’entropie des seconds fermions quantifiés, mais pour une fonction test très très spécifique, qui est liée à la fonction zêta de Riemann. Et l’autre développement, que je n’ai pas trop le temps de mentionner, est l’interaction de la courbure, qui est généralement une courbure riemannienne, une extension de la courbure riemannienne au cas non-commutatif : il y a un jeu fantastique entre cette courbure et la théorie modulaire, avec les opérateurs modulaires, dont j’ai parlé par rapport à l’évolution du temps.

Donc cette théorie est étonnante dans le sens où il faut calculer le développement asymptotique, et en ce qui me concerne, vous savez, j’ai commencé à travailler là-dessus avec Paula Tretkoff, Paula Cohen à la fin des années 1980, et cela a été révisé plus récemment pour prouver le théorème de Gauss-Bonnet dans le paradigme non-commutatif, ce théorème de Gauss-Bonnet a été prouvé dans un cas, mais a ensuite été prouvé par Masoud Khalkhali et ses collaborateurs dans le cas général, et ce travail, en ce qui me concerne, a vraiment acquis une substance incroyable dans ma collaboration avec Henri Moscovici. Et ce que nous avons constaté en particulier, c’est que les formules remplissaient certaines équations différentielles qui permettaient de calculer les fonctions de plusieurs variables qui se produisaient dans l'interaction de la courbure avec la théorie modulaire et ces choses peuvent être codées sur ordinateur et peuvent être vérifiées, nous avons été absolument étonnés car la théorie prédisait certaines relations très compliquées qui ont été effectivement vérifiées par les tests et un cas plus élevé de ceci a été fait dans mon collaboration avec Farzad Fathizadeh, lorsque nous avons calculé les termes du a_4 dans le développement asymptotique.

Je terminerai par un diagramme qui montre les relations entre la géométrie non-commutative et d'autres branches des mathématiques. Donc je veux dire que la géométrie non-commutative s'adapte énormément, elle est en relation avec la physique, la physique des hautes énergies comme je l'ai expliqué, elle est en relation avec la théorie des nombres, avec l'espace sous-jacent aux classes d'adèles et etc., elle est liée aux algèbres d'opérateurs bien sûr, dès ses tout premiers commencements, avec la K-théorie, la théorie des indices ainsi qu'avec la fantastique KK-théorie de Kasparov qui est l'un des outils-clés, avec bien sûr la topologie algébrique, la théorie des groupes géométriques et etc., et aussi avec la géométrie différentielle, car dans tous ces cas, il y a un retour de l'une à l'autre : par exemple en géométrie différentielle, ce que Skandalis et ses collaborateurs ont montré, c'est à quel point elle est pertinente, pas seulement pour étudier les variétés mais également pour étudier les groupoïdes lisses et pour étudier les groupoïdes lisses, vous avez besoin de la géométrie non-commutative.

Alors bien, je pense que je vais finir ici, et je vous remercierai pour votre patience. Merci beaucoup.

Interview d'Alain Connes
par Lucia Dora Simonelli, physicienne
à l' ICTP, à Trieste, Italie
2017.03.02

Je suis ici avec le professeur Alain Connes à l'ICTP ; il visite l'Institut à l'occasion d'un colloque ici sur la géométrie non commutative. La première question sera donc une sorte de question spécifique à l'ICTP : si vous aviez des conseils à donner aux jeunes étudiants qui souhaitent étudier les mathématiques, en particulier aux étudiants des pays en développement, quel conseil leur donneriez-vous ?

C'est difficile : vous savez, pour étudier les mathématiques, bien sûr, ce sont des défis et donc, je veux dire, j'ai toujours pensé que l'étape clé dans l'étude des mathématiques est de comprendre que, vous savez, on n'apprend pas les mathématiques. On en fait, on en fait, et jusqu'à ce que vous soyez vraiment capable de prendre un problème et de le résoudre par vous-même ou d'essayer de le résoudre par vous-même, vous ne faites pas de mathématiques. Parce que les mathématiques ne sont pas un sujet que vous pouvez apprendre ; il y a des sujets scientifiques que vous pouvez apprendre, mais ce ce n'est pas le cas pour les mathématiques. Pour les mathématiques, vous devez en faire vous-même. Ce serait le meilleur conseil que je pourrais donner, en très peu de temps. C'est vraiment comme... par exemple, vous savez, pour faire une comparaison, si vous essayez de devenir pianiste en lisant des livres, c'est la même histoire, il faut s'entraîner. La pratique est beaucoup plus importante que n'importe quoi d'autre, comme lire des livres, et tout ça. De cette façon, les mathématiques sont un sujet très démocratique et il y a aussi une étape clé, la magnificience de cette étape clé est qu'un étudiant peut trouver une erreur d'un enseignant, car il est capable de penser par lui-même, et de découvrir qu'il a raison, et que l'enseignant a tort ; c'est quelque chose qui est très important dans les mathématiques, et qui n'est pas présent dans d'autres sujets. Parce que les autres sujets nécessitent tellement de connaissances que, d'une manière ou d'une autre, cela ne sera pas possible pour un débutant, mais en mathématiques, c'est possible.

La prochaine question est donc de penser à cette quête pour trouver une théorie unifiée pour l'univers. Je pense que cette quête est intéressante par l'impact qu'elle a peut-être eu sur l'interaction entre mathématiques et physique. Et donc peut-être que certains ont la possibilité qu'à un moment donné un ensemble de champs en établlise un autre, mais il semble que maintenant il y ait une sorte de relation symbiotique et je voulais votre point de vue sur l'évolution des relations entre les mathématiques et la physique.

Oui, je pense que c'est une question très délicate dans le sens où il y a un Graal, un problème que les gens essaient de résoudre, qui est la gravité quantique, donc nous

Transcription d'une vidéo est visionnable ici : https://www.youtube.com/watch?v=XxtnTtvlhMw savons que la gravité quantique existe, nous savons que c'est assez difficile. Mais en quelque sorte, pour les mathématiciens, du moins en ce qui les concerne, la question est encore plus importante pour les mathématiques dans le sens suivant : par exemple lorsque Riemann a donné sa leçon inaugurale, il était très clair sur le fait que l'hypothèse qu'il avait pour la géométrie riemannienne, son hypothèse pour la géométrie, ne tiendrait pas à très très petite échelle.

Et il était si lucide et précis, qu'il avait déjà prévu des développements qui viendraient beaucoup plus tard, et en particulier en géométrie non-commutative, en raison du fait qu'il pensait que la notion de (...) ou la notion de rayon de lumière n'a plus de sens dans le très très petit alors que ces notions étaient cruciales dans sa définition de la géométrie. Il y a donc une symbiose, mais il y a aussi, je dirais, des écarts, et ce que j'entends par exemple dans certaines discussions, j'entends des écarts parce que certaines personnes veulent carrément changer les règles de la physique (faire ce qu'elles veulent ? ...).

Je pense donc que nous devons être très prudents. Et en même temps, ce que je dirais, c'est qu'il y a un objectif intermédiaire pour compléter la géométrie, et cet objectif est très précis, c'est de comprendre l'effet, l'impact sur la notion de géométrie des résultats que la physique expérimentale nous a fourni en un siècle, où le voyage vers des échelles de grandeurs plus petites, qui a commencé à la fin du XIX$^{\text{e}}$, avec la découverte de l'électron et de la radio-activité. Et il a augmenté notre perception de la structure fine de l'espace-temps par un facteur de dix à la puissance huit au cours du siècle et qui a des implications sur le modèle géométrique que nous avons de l'espace-temps et cette application sera pleinement comprise en géométrie non-commutative et ce qui se passe est que l'espace-temps n'est plus un pur continuum mais c'est un mélange du continuum et du discret. Et donc ça, c'est une leçon qui a été comprise, c'est une leçon qui est très étrange, et qui a forcé à changer le paradigme riemannien. Mais ce changement de paradigme riemannien, bien sûr, Riemann ne pouvait pas le prévoir car cela implique la mécanique quantique. Donc le nouveau paradigme sur la géométrie est très proche du riemannien mais il y a des nuances, et ces nuances viennent du quantum, elles viennent du formalisme de la mécanique quantique découverte par von Neumann dans les années 1960. Et il s'est avéré alors que l'idée ou la notion que nous voulons pour l'espace géométrique devient plus naturelle, et est plus facile à comprendre dans le formalisme quantique.

Vous décrivez donc qu'il n'y a pas seulement l'immensité de l'univers mais aussi ces très petites échelles. Comment définiriez-vous un point ?

D'accord, c'est une question intéressante parce que nous pouvons poser, au sein d'une telle approche de cela, la question de savoir comment définir un point, et cette question qui est simple est de savoir comment nous communiquerions avec des extraterrestres ou d'autres civilisations possibles l'endroit où nous sommes. Eh bien, si je vous dis que nous sommes à Trieste, et ainsi de suite, eh bien, cela ne dit rien à aucun extra-terrestre parce que tout d'abord, ces gens ne comprennent pas ce que Trieste veut dire, et puis, si on admettait que ce sont des gens qui connaissent la relativité générale, il suffirait de leur donner nos coordonnées dans un système de coordonnées, mais c'est aussi stupide parce que quel système de coordonnées devrions-nous prendre, quelle manière invariante avons-nous de définir un tel système de coordonnées, et il se trouve que par rapport à ce dont je parlais avant, ce rétablissement de la dualité a sa réponse qui est exactement fournie par le formalisme. Donc la première question devient comment communiquer cet espace dans lequel nous sommes, juste la Terre, non pas en donnant une image, comment communiquons-nous l'espace dans lequel nous nous trouvons, et deuxième question, comment définir où nous sommes dans cet espace. Pour communiquer l'espace dans lequel nous nous trouvons, il s'avère que la meilleure façon est de donner la musique de l'espace. Donc, si vous prenez une forme, c'est une métaphore bien connue si vous voulez, qui remonte à Mark Kac, donc si vous prenez une forme, comme un tambour par exemple, des tambours de formes diverses et ainsi de suite, il s'avère que chaque tambour a selon sa forme une gamme spéciale, une gamme musicale, et dont les fréquences dépendent de la forme en question.

Et il s'avère que si vous voulez donner invariablement l'espace, vous devez donner une liste des quantités qui sont affectées à cet espace de manière invariante. Maintenant l'échelle de l'espace est invariablement définie ; vous pouvez faire pivoter l'espace, vous pouvez faire ce que vous voulez, et vous ne changerez pas son échelle. Donc, c'est un invariant de l'espace. Et il se trouve que Helmholtz a trouvé ce qu'on appelle l'équation de Helmholtz dans laquelle il utilise l'échelle de l'espace, et il s'avère qu'il y a un petit raffinement dans cette équation, Helmholtz prenait pour élément linéaire la racine carrée du laplacien, et vous devez diviser cette base par l'opérateur de Dirac, mais c'est une petite nuance. Et quand vous connaissez cette petite nuance, alors vous pouvez réellement reconstruire l'espace, mais vous devez en savoir un peu plus. Vous avez besoin d'un peu plus que l'échelle de l'espace, vous avez besoin de savoir précisément quels sont les points. Et quels sont les points ? Chaque point est défini par un accord sur l'échelle. Un point dans un espace, techniquement parlant, comment voulez-vous préciser le point ? Donc, techniquement, ce que vous faites, vous prenez ce qu'on appelle les vecteurs propres de l'opérateur de Dirac, leurs valeurs sont bornées dans l'espace (...) et vous les évaluez au point. Lorsque vous les évaluez, vous ne pouvez pas simplement donner un nombre, donc vous obtenez un nombre en termes de métriques, qui sont des produits scalaires de ces différentes bases, au point, vous utilisez les métriques et il se trouve que modulo l'invariance, cette métrique est exactement ce dont vous avez besoin pour connaître le point.

Donc, l'image, l'image mentale est que l'espace est compris par une échelle musicale et des accords possibles. Et les accords possibles sont les points. Donc, d'une certaine façon, ce qui se passe, c'est que vous reconstituez l'espace par une sorte de transformation de Fourier. Et je crois que c'est exactement ce que fait le cerveau quand vous voyez, parce que quand vous voyez, il y a des photons qui arrivent pendant un laps de temps, parce que quand vous voyez, vous avez les photons à l'échelle propre de l'espace et le cerveau reconstitue l'espace comme nous sommes habitués à le voir, mais ce qui est encore plus important, c'est que c'est exactement la façon dont nous percevons l'univers lointain. Parce que nous percevons l'univers lointain en regardant les spectres des galaxies, les spectres des étoiles, les spectres des nébuleuses, et c'est dans ce sens que les spectres peuvent calibrer les informations que nous recevons des étoiles lointaines.

Dans ce formalisme, nous découvrons que non seulement, il est utile pour les distances microscopiques mais il y a aussi des remaniements et cela change le point de vue sur les grandes distances, mais d'une manière qui est parfaitement cohérente avec nos perceptions de l'univers. Par exemple, généralement, ce qui se passe, c'est que nous savons que les choses sont très très éloignées, vous devez vous rappeler qu'il y a un certain temps, les gens ne savaient même pas qu'il y avait des choses en dehors de notre galaxie, ok, il a fallu des astronomes très courageux pour trouver cela. Mais maintenant, nous savons que les choses sont très très très éloignées, simplement à cause du décalage vers le rouge. Et ce sont encore des données spectrales qui nous le font savoir.

Et ici, il y a un concept de distance ou d'unité de longueur en termes de longueur d'onde.

Sûr. C'est aussi une étape très importante, qui est tellement amusante à expliquer parce que cela concerne des choses très concrètes. L'histoire commence donc plus ou moins en France, à la Révolution française. Vous voyez, il y avait plus ou moins une unité de longueur par ville. Il y avait des milliers d'unité de longueur. Cela signifie que là où les gens étaient, lorsqu'ils vendaient par exemple du tissu, en voyageant d'un endroit à un autre, ils devaient mesurer leur tissu par rapport à l'unité qui se trouvait à l'entrée du village, bien sûr *(rires de Lucia-Dora Simonelli)*. La révolution était bien sûr une idée pour unifier les choses, et ils avaient de grands objectifs et tout ça, alors ils ont décidé de ... ils avaient de très bons scientifiques, ils ont décidé d'essayer d'unifier le système, en définissant une unité de longueur. Alors qu'est-ce ils ont fait. Ils ont pris le plus grand objet disponible, qui est la Terre, et ils ont défini l'unité de longueur de sorte que, lorsque vous multipliez cette unité de longueur par 40 000 000, vous obtenez la circonférence de la Terre. Voilà donc ce qu'ils ont essayé.

Et pour... Bien sûr, ils ne pouvaient pas aller au pôle, pour mesurer l'ensemble du méridien, ils mesuraient des angles entre des étoiles qu'ils pointaient avec leurs instruments, ils n'avaient donc besoin que de mesurer une partie angulaire du méridien. Et ils ont choisi de mesurer la portion angulaire qui était entre Dunkerque, qui se trouve au nord de la France, et Barcelone, qui est en Espagne. Et en 1792, ce fut donc pendant la folle période de la Révolution, ils ont envoyé deux personnes. Delambre et Méchain, ont été envoyées, pour faire la chose suivante ; l'idée était qu'ils auraient d'abord une base, ce que nous appelons une base. Ils avaient donc aligné sur une distance suffisamment longue quelques barres, si vous voulez, et ils avaient pris cela comme base. Ils mesuraient seulement des angles, ce qui est une idée très intelligente. Ils mettaient des télescopes au sommet des collines et mesuraient les angles, et en faisant des triangulations, ils comparaient la base avec la distance entre Barcelone et Dunkerque. Et c'est à partir de cela qu'a été définie l'unité de longueur, qui était en fait une barre métallique. C'est une histoire très intéressante car il y a toutes sortes de développements derrière cette histoire parce que l'un des gars, je pense que c'était Méchain, devait faire des mesures en Espagne et bien sûr, donc, il mesurait les angles, en mettant le télescope au sommet de la colline, et bien sûr, il a eu beaucoup de problèmes parce que c'était en temps de guerre, une guerre entre la France et l'Espagne, à cette époque, et il a dû expliquer à l'Armée espagnole qu'en mettant son télescope au sommet de la colline et en regardant dans son télescope, il n'était pas en train d'espionner, il essayait de définir l'unité de longueur *(rires des deux)*.

Il y a donc beaucoup d'anecdotes intéressantes à développer, j'adore les détails de cette histoire, je ne sais pas pourquoi. Et puis ce qui s'est passé, c'est la chose suivante. Cette unité de longueur a été déposée près de Paris, et quand j'étais enfant, j'ai appris que "L'unité de longueur est le mètre qui est déposé au Pavillon de Breteuil près de Paris.", et ainsi de suite. Donc je pensais et je suis sûr que beaucoup de gens pensaient "Ce n'est pas très pratique" parce que si vous voulez mesurer votre lit, bien sûr, ils en ont fait plusieurs exemplaires. Donc c'était la situation à l'époque. Mais ensuite, un événement très intéressant s'est produit. Il y avait donc des réunions périodiques des gens du système métrique. Et cette réunion a lieu depuis des années. Je ne suis pas sûr que la période était d'un an.

Mais vers les années 1930, ils ont remarqué qu'en fait, la barre de platine, définissant l'unité de longueur, changeait de longueur. Et comment l'ont-ils remarqué ? Ils ont remarqué ça en essayant de mesurer sa longueur très précisément, et en la comparant à la longueur d'onde du krypton pour une transition spécifique. C'était donc très mauvais, et progressivement, ils ont trouvé la bonne démarche. Et la bonne démarche, c'était bien sûr de prendre cette longueur d'onde, comme unité de longueur. Cela a pris du temps. Mais ce qui est très intéressant à savoir, c'est que maintenant, il y a des instruments qui sont si communs, vous pouvez les acheter dans un magasin, et ces instruments sont eux aussi basés sur la longueur d'onde. L'élément utilisé n'est plus le krypton. C'est le césium parce que le césium est très facilement disponible et vendu, et de plus, la longueur d'onde du césium utilisé est une micro-onde. C'est comme quand vous mettez quelque chose dans le four à micro-ondes, c'est une onde qui est de l'ordre de 3 centimètres. Et c'est un instrument qui vous permet de mesurer une longueur avec une précision allant jusqu'à 12 décimales, donc je veux dire, c'est absolument incroyable. Et c'est maintenant ce qui est considéré comme l'unité de longueur. Bien sûr, les gens vous diront que ce n'est pas une unité de longueur, c'est une unité de temps mais en raison de la constance de la vitesse de la lumière, la vitesse de la lumière a été fixée à un nombre très précis. Donc, les choses ont évolué et maintenant, ce que vous pouvez retenir de cela, c'est qu'il y a eu un changement complet dans le paradigme parce que l'unité de longueur n'est plus un objet localisé, qui est quelque part, mais c'est une donnée spectrale. Et ça montre que le nouveau paradigme, qui vient de la mécanique quantique, qui est le paradigme de la géométrie non-commutative, qui est appelée la géométrie spectrale si vous voulez, est exactement parallèle à ce changement de paradigme en physique. C'est donc très concret. C'est quelque chose qui est très très concret et l'énorme avantage est que si nous avions, par exemple, unifier le système métrique, non pas sur Terre, mais dans la galaxie, par exemple, de façon localisée. Si vous dites aux gens : "ok, venez à Paris et comparez votre unité de longueur à l'unité de longueur que nous avons définie là-bas..." *(rires)*, ils se moqueraient de vous, ils rugiraient "nous aussi, nous avons notre unité de longueur", alors que si vous dites aux gens "prenez un élément chimique". Bien sûr, le césium est un peu compliqué parce que...

Pour votre entreprise, il... Peut-être... vous avez besoin de quelque chose de très commun ...

Oui, exactement, comme l'hélium ou l'hydrogène. Je voterais pour l'hydrogène, car l'hydrogène est essentiellement présent partout, tandis que le césium ou les éléments lourds de ce genre, en fait, il faut savoir qu'ils ne viennent, non pas seulement des supernovae, mais de supernovae très, très exceptionnelles. Donc leur abondance dans l'univers n'est pas si claire, mais si vous prenez l'hydrogène par exemple, il y a des rayons spectraux d'hydrogène qui sont très précisément définis, il y aurait des modèles très spécifiques, mais alors un devrait trouver le fractionnement hyperfin, car l'avantage du fractionnement hyperfin qui est utilisé pour le césium est qu'un fractionnement hyperfin est une différence d'énergie qui est très, très petite, et ce serait dans la loi inverse, lorsque vous passez à la longueur d'onde, il va générer des micro-ondes, ce qui est beaucoup plus pratique, alors que si vous prenez une énorme différence de fréquences, comme pour une transition, vous obtiendrez une très, très petite unité de longueur et ce ne serait pas (?) bon. Ce que je dis, c'est que lorsque vous communiquez avec les gens, en envoyant une sonde, et si vous êtes en mesure de leur dire quelle est votre unité de longueur, c'est merveilleux. Et vous envoyez simplement une copie du spectre des rayons d'hydrogène et vous expliquez lequel vous voulez découvrir. Je veux dire que c'est très simple, et s'ils sont intelligents, ils comprendront, alors que si vous faites autrement, cela ne marcherait jamais.

La structure fine de l'espace-temps, vous la décrivez en termes de spectre d'un opérateur, ce qui permet ...

C'est un peu plus compliqué, comme je l'ai dit, vous savez, bien sûr, le spectre de l'opérateur vous donne l'unité de longueur, ...

Est-ce que cela vous permet, en quelque sorte, de combiner un concept discret avec un concept… ?

Eh bien, ce qui permet de combiner le discret et le continuum, c'est le fait que, essentiellement, c'est un mélange du discret et du continuum et cela résulte de ces découvertes de la physique expérimentale. Ce que ces résultats nous ont donnés, au cours du siècle, c'est exactement la structure de l'espace discret. Donc au début, l'espace discret, avec mes collaborateurs, Chamseddine, et Walter Van Suijlekom et Mukhanov, ce que nous avons trouvé, au début, nous procédions avec une approche ascendante, à savoir, nous prenions des expériences, et nous essayions de les adapter à ce qui se passait, etc., et progressivement, nous avons trouvé ce que l'espace fini devrait être, mais dans un travail récent, il y a environ 2 ou 3 ans, avec Chamseddine et Mukhanov, nous avons été très étonnés parce que nous nous posions un problème purement géométrique, qui était bien sûr motivé par la géométrie non commutative, mais qui était totalement disjoint de la physique et du modèle standard, et ainsi de suite, et en développant ce problème dans la dimension 4, nous avons trouvé exactement le même espace fini dans la même algèbre, que nous avions mis à la main précédemment. Donc, nous croyons que nous avons un morceau de la vérité.

Mais naïvement, pourquoi est-il important d'inclure ce concept discret ?

Pourquoi naïvement, est-ce important, c'est facile à expliquer en quelque sorte, mais j'ai besoin d'un morceau de papier, *(Il en prend un)*. C'est très simple à comprendre. Vous voyez, pourquoi est-ce important d'avoir cette pièce discrète. C'est parce que le problème le plus évident que vous avez si vous n'avez pas cette pièce discrète, c'est que le boson de Higgs, le boson de Brout-Englert-Higgs, je connaissais bien Brout, je veux dire, il est mort juste un an avant que la particule ne soit découverte. La particule a été découverte, nous savons qu'elle est là, mais elle ne correspond pas à la norme de la géométrie, pourquoi ? Parce qu'en géométrie standard, si vous prenez une fonction sur un espace, vous la différenciez, et vous obtiendrez ce qu'on appelle un potentiel de jauge de la forme, d'accord. Pourquoi ? Parce que la différenciation dépend de la direction dans laquelle vous différenciez, c'est pourquoi vous obtenez quelque chose qui est appelé spin 1 si vous voulez, qui dépend de la direction. Mais la particule de Brout-Englert-Higgs est une particule de spin 0. Cela ne dépend donc pas de la direction. Vous vous demandez donc comment obtenir géométriquement une particule de spin 0. Imaginez maintenant qu'au lieu d'avoir juste cette variété, d'accord, il y ait un élément discret, l'élément discret est juste un élément qui dit "suis-je en haut ou suis-je en bas ?", alors maintenant, j'ai davantage d'informations, je sais si je suis en haut ou en bas. Et je prends une fonction. Cette fonction aura un développement ici, et elle aura un développement en dessous *(montrant avec sa main les deux faces de la feuille de papier)*. Ces développements ne doivent pas nécessairement être les mêmes, donc je peux différencier ma fonction en haut *(AC fait tourner sa main contre la face haute de la feuille)*, et je peux la différencier en bas *(AC fait tourner sa main contre la face basse de la feuille)*, mais je peux aussi prendre la différence finie entre les deux *(montrant la différence sur la tranche de la feuille)*. Et la différence finie entre les deux, elle ne dépend pas de la direction que je prends. C'est le boson de spin 0, et cela correspond au boson de Brout-Englert-Higgs. Alors le boson de Brout-Englert-Higgs était un signe indubitable parfaitement clair, sur une réalité qui était présente.

Et je connaissais beaucoup Robert Brout et il était très intéressé, bien sûr, par cette interprétation, qui est de comprendre pourquoi, si vous voulez, lescombats exprérimentaux que les physiciens ont dû mener, parce que le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, il a été obtenu après des années et des années et des années de réflexion, sur la façon de donner des masses aux particules. Donc toutes les masses des particules proviennent en fait de ce mécanisme et de ce que vous trouvez dans ce modèle que nous avons développé qui explique qu'en fait, l'ingrédient principal qui fournit les mesures des masses et l'écart des angles, et ainsi de suite, des particules, sont en fait exactement dus à l'élément de longueur pour la structure finie. Ainsi, l'élément de longueur pour la structure finie contient exactement ces informations, ce qui signifie si vous le souhaitez que dans ce modèle, vous avez un mélange de continuum et de discret. Mais le discret contient l'information sur la masse et l'écart des angles du mélange.

Merci beaucoup pour votre temps et votre exposé.