

REMARQUES SUR L'APPROCHE D'ALAIN CONNES CONCERNANT LE MODÈLE STANDARD EN  
GÉOMÉTRIE NON-COMMUTATIVE

DANIEL KASTLER, THOMAS SCHÜCKER

*dédié à la mémoire de E. M. Polivanov*

Dans les dernières années, Alain Connes a produit une interprétation remarquable du modèle standard (pour les secteurs électrofaibles et chromodynamiques) dans sa théorie des variétés riemanniennes de spin non-commutatives [1-4]. Tous les termes du lagrangien bosonique habituel sont obtenus via un analogue non-commutatif de l'algorithme de Yang-Mills dans lequel une courbure simple est attachée à une paire d'algèbres dans la dualité de Poincaré (viz. l'algèbre électrofaible  $\mathcal{A} = C^\infty \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{H})$  et l'algèbre chromodynamique  $\mathcal{B} = C^\infty \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbf{M}_3(\mathbb{C}))$ ) construisant un "espace non-commutatif"  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  qui incorpore les "degrés internes de liberté". La géométrie différentielle de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  est spécifiée (d'une façon généralisant la spécification de la géométrie différentielle d'une spin<sup>c</sup>-variété par son opérateur de Dirac) par un " $K$ -cycle 4<sup>+</sup>-sommable" (un  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -module de Kasparov)  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_l \oplus \mathcal{H}_q$ , somme directe des espaces de Hilbert  $\mathbb{Z}/2$ -échelonnés leptonique et de quarks, sur lesquels agit aussi un opérateur de Dirac généralisé  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_l \oplus \mathcal{D}_q$ . La représentation  $\pi = \pi_l \oplus \pi_q$  de  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  sur le bimodule  $\mathcal{H}_l \oplus \mathcal{H}_q$  se développe en une représentation du produit tensoriel  $\Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{A} \otimes \Omega_{\mathcal{D}}\mathcal{B}$  de leur "complexes de De Rham non-commutatifs" (des ensembles de formes différentielles quantiques). La théorie produit les quatre bosons de jauge habituels plus le boson de Higgs apparaissant comme un cinquième boson de jauge connecté avec le caractère discret. Pour des détails, nous nous référons à [5] et [8].

Le "schéma de Yang-Mills non-commutatif" consiste à "intégrer" le carré de la courbure quantique au moyen d'une trace  $\tau_{\mathcal{D}}$  sur les endomorphismes des formes quantiques dérivées de la trace  $\tau_{\mathcal{D}} = \text{Tr}_\omega[\mathcal{D}^{-4}\pi(\cdot)]$  sur les formes quantiques construites via la trace de Dixmier et ont généralisé l'opérateur de Dirac. En fait, comme cette trace se sépare en traces partielles indépendantes selon les séparations naturelles de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , la combinaison convexe de ces traces partielles donne naissance à une famille convexe d'"intégrations" (dépendant de la séparation adoptée). La séparation maximale en sous-modules irréductibles produit le lagrangien du modèle standard habituel avec ses 18 paramètres libres. Un choix plus restreint naturel correspond à la séparation  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_l \oplus \mathcal{H}_q$  en les espaces de Hilbert leptonique et de quark, avec des combinaisons convexes des traces possibles

$$\alpha_l \tau_{\mathcal{D}_l} + \alpha_q \tau_{\mathcal{D}_q}, \quad \alpha_l = \frac{1}{2}(1+x), \alpha_q = \frac{1}{2}(1-x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

parmi lesquelles le choix symétrique  $x = 0$  amène un lagrangien avec 4 paramètres de moins qu'habituellement (les paramètres libres sont les entrées de la matrice de masse des fermions plus une constante simple de couplage universel).

---

Centre de Physique théorique, CNRS - Luminy, BP 907, 13288 Marseille Cedex, et Université d'Aix-Marseille II et Université de Provence.

Traduction de l'article arxiv hep-th:0111234, par Denise Vella-Chemla, mars 2021.

De telles versions contraintes du modèle standard (naturelles tant qu'elles postulent des développements de l'“universalité fermionique”) sont potentiellement intéressantes puisqu'elles contiennent plus d'information que le modèle standard habituel (ces modèles sont de type “unification”, avec un Higgs unique, et sans termes croisés mettant en péril la stabilité du proton). Des prédictions physiques authentiques selon de telles lignes devraient bien sûr nécessiter une théorie des champs quantiques renormalisée - une étape non encore atteinte dans le niveau actuel purement classique (lagrangien), où la quantification habituelle et la renormalisation simplifiée détruiraient les contraintes et restitueraient les 18 paramètres libres habituels.

Avec ceci à l'esprit, il est, pourtant, peut-être intéressant, pour une première exploration des lagrangiens contraints et pour faire des spéculations, de regarder les résultats à un niveau arborescent. La trace de Dixmier (1) amène au lagrangien bosonique suivant (jauge et Higgs) [5]:<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_B = -A\mathbf{g}^a{}_{\mu\nu}\mathbf{g}_a{}^{\mu\nu} - B\mathbf{f}_{\mu\nu}\mathbf{f}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}C\mathbf{h}^s{}_{\mu\nu}\mathbf{h}_s{}^{\mu\nu} + 2LD_\mu\Phi_j\mathbf{D}^\mu\Phi^j + K(\Phi_i\Phi^i - 1)^2, \quad (2)$$

présentant les courbures  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  des respectivement  $SU(3)$ -,  $U(1)$ -, et  $SU(2)$ -connexions avec les une-formes  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}$ , et  $\mathbf{c}$ , et le covariant  $\mathbf{D}_\mu\Phi_j$ , où

$$\mathbf{D}_\mu = \nabla_\mu + i(\mathbf{a}_\mu - \mathbf{b}^s{}_\mu \frac{\tau_s}{2}). \quad (3)$$

avec les constantes  $A$  à travers  $K$  <sup>2</sup> données par

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{N}{2}(1-x) \\ B = \frac{N}{3}(10-x) \\ C = N(2-x) \\ L = Tr[\alpha_l\mu_e + 3\alpha_q(\mu_u + \mu_d)] \simeq \frac{3}{2}(1-x)m_t^2 \\ K = \frac{3}{2}Tr[\alpha_l\mu_e^2 + 3\alpha_q(\mu_u^2 + \mu_d^2)] + 3\alpha_q Tr[\mu_u\mu_d] \\ \quad - [1/(\alpha_l + 6\alpha_q) + 1/(2\alpha_l + 6\alpha_q)]N^{-1}L^2 \\ \simeq \frac{9}{4}(1-x)m_t^4 - \frac{9}{8}(1-x)\frac{3x^2-8x+5}{5x^2-17x+14}m_t^4 \end{array} \right. \quad (4)$$

où  $\mu_e = M_e M_e^*$ ,  $\mu_u = M_u M_u^*$ ,  $\mu_d = M_d M_d^*$ ,  $M_e$ ,  $M_u$ ,  $M_d$  les matrices de masse respectives des leptons chargés, les quarks les plus élevés et les quarks les plus bas. Nous indiquons des valeurs approximatives en fonction de la masse élevée  $m_t$  supposée dominante.

Nous rappelons l'expression de la partie jauge et Higgs du lagrangien du modèle standard traditionnel :

$$\mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Higgs} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}^a{}_{\mu\nu}\mathcal{G}_a{}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^s{}_{\mu\nu}W_s{}^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \frac{\mu^2}{v^2}(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2})^2, \quad (5)$$

<sup>1</sup>Dans ce qui suit, nous ne nous préoccupons pas du fait que le lagrangien traditionnel est lorentzien alors que le lagrangien NCDG est euclidien, puisque ce point ne porte pas sur les constantes de couplage.

<sup>2</sup>Les valeurs approximatives pour  $L$  et  $K$  sont valides à 1% près, ce qui est consistant avec le fait de négliger toutes les masses de fermions contre la masse top.

avec la dérivée covariante  $D_\mu$  donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_1}{2}B_\mu - ig_2W_\mu^s \frac{\tau_s}{2}. \quad (6)$$

Nous trouvons pratique d'utiliser les paramètres de base suivants du modèle standard - numériquement tous connus excepté  $\mu$  :

$$\begin{cases} g = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \\ \cos \theta_W = g_2/g \\ \mu \\ v \end{cases} \quad (7)$$

En fonction du dernier, on a  $g_1 = g \sin \theta_W$ ,  $g_2 = g \cos \theta_W$ , et les masses suivantes :

$$\begin{cases} m_H = \sqrt{2}\mu \\ m_Z = \frac{1}{2}vg \\ m_W = m_Z \cos \theta_W = \frac{1}{2}vg_2 \end{cases} \quad (8)$$

alors que le potentiel de Higgs est donné par :

$$V_{Higgs} = \frac{\mu^2}{v^2}(\phi^* \phi - \frac{v^2}{2})^2. \quad (9)$$

L'identification des dérivées covariantes (3) et (6) est synonyme avec les identifications :

$$\begin{cases} \mathbf{c} = g_3\mathcal{G} \\ \text{dans les composants } \mathbf{c}^a_\mu = g_3\mathcal{G}^a_\mu \quad a = 1, \dots, 8, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = -\frac{1}{2}g_1B \\ \text{dans les composants } \mathbf{a}_\mu = g_1B_\mu, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{b} = g_2W \\ \text{dans les composants } \mathbf{b}^s_\mu = g_2W^s_\mu, \quad s = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (12)$$

impliquant

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_1B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_2 \cos \theta_W B_{\mu\nu} \\ \mathbf{h}^s_{\mu\nu} = g_2W^s_{\mu\nu}, & s=1,2,3, \\ \mathbf{g}^a_{\mu\nu} = g_3\mathcal{G}^a_{\mu\nu}, & a=1,\dots,8 \end{cases} \quad (13)$$

En supposant que  $\phi$  et  $\Phi$  diffèrent d'une constante (insensible à la multiplication de  $\phi$  resp.  $\Phi$ , par des constantes), la dernière découle de la comparaison des quatrièmes termes de (2) et (5), amenant

$$\frac{v}{\sqrt{2}}\Phi = \phi. \quad (14)$$

En insérant (10) par (14) dans (2), on aboutit à :

$$C^{-1}g_2^{-2}\mathcal{L}_B = -\frac{A}{C}\frac{g_3^2}{g_2^2}\mathcal{G}_{\mu\nu}^a\mathcal{G}_a^{\mu\nu} - \frac{B}{4C}\tan^2\theta_W B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^s W_s^{\mu\nu} + \frac{4L}{Cv^2g_2^2}\left\{(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \frac{K}{v^2L}\left(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2}\right)^2\right\}, \quad (15)$$

que nous identifions avec (5). L'identification des premiers termes amène :

$$g_3 = \frac{1}{2}(C/A)^{1/2}g_2. \quad (16)$$

L'identification des seconds termes fixe l'angle de Weinberg :

$$\tan^{-2}\theta_W = \frac{B}{C} \quad \text{d'où} \quad \sin^2\theta_W = \frac{C}{B+C} \quad (17)$$

L'identification des termes du milieu fixe le rapport de la masse  $m_W$  du  $W$ -bosen à la masse  $m_t$  du quark :

$$v^2g_2^2 = 4m_W^2 = 4\frac{L}{C} \quad (18)$$

d'où

$$m_W = (L/C)^{1/2}. \quad (18a)$$

L'identification du rapport des derniers termes fixe le rapport de la masse  $m_H$  du boson de Higgs à la masse  $m_t$  du quark top :

$$\mu^2 = K/L, \quad (19)$$

d'où

$$m_H = (2K/L)^{1/2}. \quad (19a)$$

Insérer (3) dans ces relations donne

$$g_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{4-2x}{1-x}\right]^{1/2}g_2 \quad (= g_2 \quad \text{pour} \quad x=0), \quad (20)$$

$$\sin^2\theta_W = \frac{3(1-x/2)}{8-2x} \quad (= \frac{3}{8} \quad \text{pour} \quad x=0), \quad (21)$$

et, en négligeant toutes les masses des fermions contre la masse top  $m_t$ :

$$m_W = \left(\frac{3(1-x)}{4N(1-x/2)}\right)^{1/2} m_t \quad (= \frac{1}{2}m_t \quad \text{pour} \quad x=0 \quad \text{et} \quad N=3) \quad (22)$$

et

$$m_H = \left(3 - \frac{3}{2}\frac{3x^2-8x+5}{5x^2-17x+14}\right)^{1/2} m_t. \quad (23)$$

Les relations (20) et (21) ont une saveur de "grande unification". Nous montrons maintenant que, étant données les relations (10), (11), (12) entre les champs et les formes de connexion, ces relations procèdent directement du choix (1) de la trace de Dixmier avec le contenu de jauge du  $K$ -cycle leptonique et quark  $\mathcal{H}_l$  et  $\mathcal{H}_q$ . Concernant le dernier, nous rappelons les définitions des espaces de Hilbert leptonique et quark Hilbert (cf. [4],[5]) : on a  $\mathcal{H}_l = L^2(\mathbf{S}_M) \otimes H_l$  et  $\mathcal{H}_q = L^2(\mathbf{S}_M) \otimes H_q$ , où  $\mathbf{S}_M$  est le fibré de spin, et :

$$H_l = H_{lR} \oplus H_{lL} \quad (24)$$

avec <sup>3</sup>

$$\begin{cases} H_{l_R} = \mathbb{C}_R^1 \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}_R^1 \text{ fibré par } e_R, \\ H_{l_L} = \mathbb{C}_L^2 \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}_R^1 \text{ fibré par } \nu_L, e_L \end{cases}, \quad (25)$$

respectivement :

$$H_q = H_{q_R} \oplus H_{q_L} \quad (26)$$

avec

$$\begin{cases} H_{q_R} = \mathbb{C}_R^2 \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}_R^2 \text{ fibré par } u_R, d_R, \\ H_{q_L} = \mathbb{C}_L^2 \otimes \mathbb{C}^N, & \mathbb{C}_L^2 \text{ fibré par } u_L, d_L, \end{cases} \quad (27)$$

Les représentants matriciels  $T_l^3, C_l^3, Q_l$  of  $T^3, C^3$  agissent sur l'espace leptonique interne  $\mathbb{C}_R^1 \oplus \mathbb{C}_L^2$ , ainsi que la charge électrique  $Q$  <sup>4</sup>, où  $iT^3 \in SU(2)$ ,  $iC^3 \in SU(3)$ :

$$T_l^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_R \\ \nu_L \\ e_L \end{matrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(T_l^{3*} T_l^3) = \frac{1}{2}, \quad (28)$$

$$C_l^3 = 0 \quad (29)$$

$$Q_l = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_R \\ \nu_L \\ e_L \end{matrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(Q_l^* Q_l) = 2. \quad (30)$$

De même que les représentants  $T_q^3, C_q^3, Q_q$  of  $T^3, C^3$ , et  $Q$  agissent sur l'espace interne des quarks

$\mathbb{C}_R^2 \oplus \mathbb{C}_L^2$ , avec les matrices :

$$T_q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{matrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(T_q^{3*} T_q^3) = \frac{3}{2}, \quad (31)$$

$$C_q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{matrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad Tr(C_q^{3*} C_q^3) = 2 \quad (32)$$

---

<sup>3</sup>Le facteur  $\mathbb{C}^N$  correspond à la génération de  $N$  fermions avec comportement de jauge identique, et peut être omise dans le calcul à venir.

<sup>4</sup>Nous choisissons de travailler avec la charge électrique  $Q$  pour la définition de laquelle il y a consensus, plutôt qu'avec l'hyper-charge  $Y$  qui est définie différemment par différents auteurs. Nous aurons besoin du générateur infinitésimal  $R$  du groupe  $U(1)$  pour écrire la formule (34) ci-dessous, mais nous n'en aurons pas vraiment besoin.

$$Q_q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ u_L \\ d_L \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tels que} \quad \text{Tr}(T_q^{3*} T_q^3) = \frac{10}{3}. \quad (33)$$

Les formes bilinéaires invariantes sur les algèbres de Lie  $su(3)$ ,  $su(2)$ , et  $u(1)$  sont uniques à échelle près. La forme bilinéaire la plus invariante sur l'algèbre de Lie  $SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1)$  du groupe de jauge est par conséquent une combinaison linéaire du type :

$$\langle A, A' \rangle = \frac{1}{g_3^2} \text{Tr}(C^* C') + \frac{1}{g_2^2} \text{Tr}(T^* T') + \frac{1}{g_1^2} \frac{1}{2} \bar{R} R', \quad (34)$$

$$A = (C, T, R), A' = (C', T', R') \in SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1)$$

En identifiant ceci avec la forme bilinéaire sur l'algèbre de Lie du groupe de jauge limité par la trace de Dixmier (1):

$$\langle A, A' \rangle = \alpha_l \text{Tr}(A_l^* A'_l) + \alpha_q \text{Tr}(A_q^* A'_q), \quad A, A' \in SU(3) \oplus SU(2) \oplus U(1), \quad (35)$$

on aboutit alors à la relation

$$\left( \frac{g_3}{g_2} \right)^2 = \frac{\alpha_l \text{Tr}(T_l^{3*} T_l^3) + \alpha_q \text{Tr}(T_q^{3*} T_q^3)}{\alpha_l \text{Tr}(C_l^{3*} C_l^3) + \alpha_q \text{Tr}(C_q^{3*} C_q^3)} = \frac{\frac{1}{2} \alpha_l + \frac{3}{2} \alpha_q}{2 \alpha_q} = \frac{2-x}{2(1-x)}, \quad (36)$$

identique à (20), et la relation (9)

$$\sin^2 \theta_W = \frac{\alpha_l \text{Tr}(T_l^{3*} T_l^3) + \alpha_q \text{Tr}(T_q^{3*} T_q^3)}{\alpha_l \text{Tr}(C_l^* C_l) + \alpha_q \text{Tr}(Q_q^* Q_q)} = \frac{\frac{1}{2} \alpha_l + \frac{3}{2} \alpha_q}{2 \alpha_l + \frac{10}{3} \alpha_q} = \frac{3}{4} \frac{2-x}{4-x}, \quad (37)$$

identique à (21). Pour  $x = 0$ , ce calcul est formellement identique à celui effectué dans la  $SU(5)$ -grande unification, la raison étant que le contenu des fermions et la pondération sont les mêmes.

Notre second point est une courte discussion du comportement ou des relations (20) à (23) lorsque  $x$  couvre l'intervalle de -1 à +1. Cela est illustré par la table:

$x$	-1	0	$\frac{1}{2}$	0.99	1
$(g_3/g_2)^2$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	50.5	$\infty$
$\sin^2 \theta_W$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{28}$	0.252	$\frac{1}{4}$
$m_t/m_W$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	14.2	$\infty$
$m_H/m_W$	2.65	3.14	3.96	24.5	$\infty$

Nous notons que le rapport  $m_H/m_t$  montre peu de variation de 1.53 à  $\sqrt{3}$ . La table suggère les remarques suivantes :

- (i): toutes les fonctions tabulées sont monotones en  $x$ .
- (ii): la valeur  $x = 0$  semble correspondre à la situation du type d’“unification”.
- (iii): pour la valeur limite  $x = 1$ , i.e.  $\alpha_q = 0$ , l’angle de Weinberg est proche de sa valeur expérimentale, alors que les interactions fortes prévalent. Une indication de la dominance du lepton aux énergies expérimentales ? Un lien avec le confinement ?

Le premier des auteurs a eu le privilège, dans les années 70, de recevoir de E. M. Polivanov une introduction à quelques-uns des trésors de l’architecture de Moscou. Les impressions durables de D. K. à propos de la beauté et de la spiritualité de l’ancienne capitale russe restent indéniablement liées au souvenir de la gentillesse et de l’élévation morale de l’éminent physicien que nous regrettons.

## Références

- [1] A. Connes, The action function in non-commutative geometry, *Comm. Math. Phys.* **117**, 673 (1988).
- [2] A. Connes, Essay on Physics and Non-commutative Geometry, *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford (1990).
- [3] A. Connes et J. Lott, Particle models and non-commutative geometry, *Nucl. Phys. B* **18B** (Proc. Suppl.) (1990).
- [4] A. Connes, The metric aspect of non-commutative geometry. Collège de France Preprint (Octobre 1991).
- [5] D. Kastler, A detailed account of Alain Connes’ version of the standard model in non-commutative geometry, I (1991) and II (1992).
- [6] T. Schücker,  $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$ , why? Proc. XI Intern. Coll. on Group-Theoret. Methods in Physics, Istanbul, eds. M. Serdaroglu, E. Inonu, Springer, Heidelberg (1982).

# CHAPITRE QUATRE

## ARITHMÉTIQUE

Voyant qu'il n'y a rien (mes chers étudiants bien-aimés en mathématiques)  
qui soit si gênant pour la pratique des mathématiques,  
ni qui gêne et gêne encore les calculateurs,  
que les multiplications, les divisions,  
les extractions de racines carrées et cubiques de grands nombres,  
et qui, outre la dépense fastidieuse de temps qu'ils occasionnent,  
qui soit pour beaucoup d'entre eux sujets à de nombreuses erreurs glissantes,  
je commençai donc à considérer dans mon esprit  
par quel art utile et sûr,  
je pourrais supprimer ces obstacles.

– JOHN NEPAIR [NAPIER] (1616)

Je hais les additions.  
Il n'y a pas de plus grande méprise que de qualifier l'arithmétique de science exacte.  
Il y a des lois cachées des nombres, qui ne peuvent être perçues que par un esprit comme le mien.  
Par exemple, si vous additionnez une somme de bas en haut, puis de haut en bas,  
le résultat est toujours différent.

– M. P. LA TOUCHE (1878)

Je ne conçois pas qu'on puisse exiger que des multiplications soient effectuées  
au rythme de 40 000, ou même de 4 000 par heure ;  
un changement aussi révolutionnaire que l'échelle octonaire ne devrait pas être imposé  
à l'humanité complète pour le seul bien de quelques individus.

– F. H. WALES (1936)

La plupart des spécialistes en analyse numérique n'éprouvent aucun intérêt pour l'arithmétique.

– B. PARLETT (1979)

LE PRINCIPAL OBJECTIF de ce chapitre est de faire une étude minutieuse des quatre processus de base de l'arithmétique : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. De nombreuses personnes voient l'arithmétique comme une chose évidente que les enfants apprennent et que les ordinateurs font, mais nous verrons que l'arithmétique est un sujet fascinant avec de nombreuses

facettes intéressantes. Il est important de faire une étude complète des méthodes efficaces de calcul numérique, puisque l'arithmétique sous-tend de si nombreuses applications des ordinateurs.

L'arithmétique est, en fait, un sujet vivant qui a joué un rôle important dans l'histoire mondiale, et elle continue de se développer rapidement. Dans ce chapitre, j'analyserai les algorithmes pour faire des opérations arithmétiques sur de nombreux types de quantités, comme les nombres “à virgule flottante”, les nombres très grands, les fractions (nombres rationnels), les polynômes, et les séries de puissances ; et je discuterai également de sujets afférents tels que la conversion de racines, la factorisation des nombres, et l'évaluation des polynômes.

## 4.1. Systèmes de numération positionnelle

LA FAÇON DONT NOUS FAISONS DE L'ARITHMÉTIQUE est intimement liée à la manière dont nous représentons les nombres que nous utilisons, et donc il est approprié de commencer notre étude du sujet par une discussion des moyens principaux pour représenter les nombres.

La notation positionnelle utilisant la base  $b$  (ou la *racine*  $b$ ) est définie par la règle

$$(1) \quad \begin{aligned} & (\dots a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_b \\ & = \dots + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 + a_1 b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \dots ; \end{aligned}$$

par exemple,  $(520.3)_6 = 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 0 + 3 \cdot 6^{-1} = 192\frac{1}{2}$ . Notre système de numération décimale conventionnel est, bien sûr, le cas particulier quand  $b$  est égal à dix, et quand les  $a$  sont choisis parmi les “chiffres décimaux” 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; dans ce cas, l'indice  $b$  dans (1) peut être omis.

Les généralisations les plus simples du système de numération décimale sont obtenues quand on prend pour  $b$  un entier plus grand que 1 et quand on pose la contrainte que les  $a$  soient des nombres entiers tels que  $0 \leq a_k < b$ . Cela donne les systèmes de numération standard binaire ( $b = 2$ ), ternaire ( $b = 3$ ), quaternaire ( $b = 4$ ), quinaire ( $b = 5$ ), .... En général, on pourrait prendre pour  $b$  n'importe quel nombre non nul, et on pourrait choisir les  $a$  dans n'importe quel ensemble de nombres spécifié ; cela amène à des situations intéressantes, comme nous allons le voir.

Le point qui apparaît entre  $a_0$  et  $a_{-1}$  en (1) est appelé le *point racine*. (Quand  $b = 10$ , on l'appelle aussi le point décimal, et quand  $b = 2$ , on l'appelle parfois le point binaire, etc). Les européens utilisent souvent une virgule à la place d'un point pour dénoter le point racine ; les anglais utilisaient auparavant un point en hauteur.

Les  $a$  dans (1) sont appelés les *chiffres*<sup>1</sup> de la représentation. Les chiffres  $a_k$  pour les grandes valeurs de  $k$  sont souvent dits être “plus significatifs” que les chiffres  $a_k$  pour les petites valeurs de  $k$  ; par conséquent, on fait référence au chiffre le plus à gauche ou chiffre “dominant” comme au *chiffre le plus significatif* et on fait référence au chiffre le plus à droite ou “dernier chiffre” comme au *chiffre le moins significatif*. Dans le système binaire standard, les chiffres binaires sont souvent appelés bits ; dans le système standard hexadécimal (de racine seize), les symboles hexadécimaux de zéro

---

<sup>1</sup> *symboles.*

à quinze sont habituellement dénotés par

soit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f

soit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Le développement historique des représentations numériques est une histoire fascinante, puisqu'il se développe en parallèle du développement de la civilisation elle-même. Nous serions emmenés bien loin si nous voulions examiner cette histoire en détails minutieux, mais il sera instructif de regarder les caractéristiques principales de ces développements ici.

Les premières formes de représentations numériques, que l'on trouve encore dans les cultures primitives, sont en général basées sur des groupements de doigts, piles de pierres, etc., habituellement avec des conventions spéciales à propos du fait de remplacer une pile plus grande, ou un groupe, ou disons, cinq ou dix objets par un seul objet d'une sorte particulière ou à une position particulière. De tels systèmes amènent naturellement aux premières manières de représenter les nombres sous une forme écrite, comme dans les systèmes babylonien, égyptien, grec, chinois, et nombres en chiffres romains ; mais de telles notations sont comparativement moins pratiques pour effectuer des opérations arithmétiques à part dans les cas les plus simples.

Durant le vingtième siècle, des historiens des mathématiques ont mené des études complètes des plus anciennes tablettes cunéiformes trouvées par des archéologues au Moyen-Orient. Ces études montrent que les babyloniens avaient vraiment deux systèmes de représentation numérique : les nombres utilisés dans les transactions des affaires quotidiennes étaient écrits dans une notation basée sur des groupements par dix, cent, etc ; cette notation avait été héritée des premières civilisations mésopotamiennes, et les grands nombres n'étaient pas souvent nécessaires. Quand des problèmes mathématiques plus difficiles furent considérés, pourtant, les mathématiciens babyloniens firent un usage intensif d'une notation positionnelle sexagésimale (de racine soixante) qui se développa beaucoup au minimum dès 1750 av.J.-C. Cette notation était unique en ce qu'elle était effectivement une forme de représentation à *virgule flottante* avec les exposants omis ; le facteur d'échelle effectif ou la puissance de soixante devait être fourni par le contexte, de telle façon que, par exemple, les nombres 2, 120, 7200, et  $\frac{1}{30}$  étaient tous écrits de façon identique. La notation était particulièrement pratique pour la multiplication et la division, en utilisant des tables auxiliaires, puisque l'alignement du point racine n'avait pas d'effet sur la réponse. Comme exemples de notation babylonienne, considérons les extraits suivants des premières tables : le carré de 30 est 15 (ce qui peut aussi se lire, "le carré de  $\frac{1}{2}$  est  $\frac{1}{4}$ ") ; la réciproque de  $81 = (121)_{60}$  est  $(442640)_{60}$  ; et le carré de ce dernier est  $(32551831640)_{60}$ . Les babyloniens avaient un symbole pour zéro, mais à cause de leur philosophie "en virgule flottante", il était utilisé seulement à l'intérieur des nombres, et non pas à l'extrémité droite des nombres pour dénoter un facteur d'échelle. Pour l'histoire intéressante des très anciennes mathématiques babyloniennes, voir O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1952), et B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, traduit par A. Dresden (Groningen : P. Noordhoff, 1954) ; voir également D. E. Knuth, *CACM* **15** (1972), 671-677 ; **19** (1976), 108.

La notation positionnelle à point fixe a été apparemment conçue pour la première fois par les indiens Maya en Amérique centrale il y a 2000 ans ; leur système de racine 20 était grandement développé, particulièrement en relation avec les enregistrements astronomiques et les dates du calendrier. Ils

ont commencé à utiliser un signe écrit pour zéro environ en 200 apr.J.-C. Mais les conquérants espagnols détruisirent presque tous les livres Maya sur l'histoire et la science, et donc nous avons comparativement peu de connaissance au sujet du degré de sophistication que les amérindiens avaient atteint en arithmétique. Des tables destinées spécifiquement à la multiplication ont été trouvées, mais aucun exemple de division n'est connu. [Voir J. Eric S. Thompson, *Contrib. to Amer. Anthropology and History* **7** (Carnegie Inst. of Washington, 1941), 37-67 ; J. Justeson, "Pratiche di calcolo nell'antica mesoamerica," *Storia della Scienza* **2** (Rome: Istituto della Enciclopedia Italiana, 2001), 976-990.]

Plusieurs siècles avant J.-C., les grecs employaient une forme initiale d'abaque pour faire leurs calculs arithmétiques, en utilisant du sable et/ou des cailloux sur une planche qui a des lignes et des colonnes correspondant de manière naturelle à notre système décimal. Il nous est peut-être surprenant que le même système de notation positionnelle n'ait jamais été adapté aux formes écrites des nombres, dans la mesure où nous sommes si habitués au système de calcul avec papier et crayon ; mais la grande facilité du calcul par les abaques (puisque l'écriture manuscrite n'était pas une compétence commune, et puisque les utilisateurs d'abaques n'avaient pas besoin de mémoriser les tables d'addition et de multiplication) a sûrement fait penser aux grecs qu'il serait même idiot de suggérer que le calcul puisse être mieux fait sur "papier brouillon". Au même moment, les astronomes grecs utilisaient la notation positionnelle sexagésimale pour les fractions, puisqu'ils l'avaient apprise des babyloniens.

Notre notation décimale, qui diffère des formes plus anciennes principalement à cause de son point racine fixe, ainsi qu'avec son symbole pour zéro pour marquer une position vide, a été développée d'abord en Inde dans la culture hindoue. La date exacte à laquelle cette notation est apparue pour la première fois est assez incertaine ; environ 600 apr.J.-C. semble être une bonne possibilité. La science hindoue était grandement développée à cette époque, particulièrement en astronomie. Les manuscrits hindous les plus anciens qui ont été trouvés qui montrent la notation décimale contiennent des nombres écrits de droite à gauche (avec le chiffre le plus significatif écrit à droite), mais bientôt, il devint standard d'écrire le chiffre le plus significatif à gauche.

Les principes hindous de l'arithmétique décimale ont été emmenés en Perse environ en 750 apr.J.-C., lorsque plusieurs travaux importants furent traduits en arabe ; un compte-rendu imagé de ce développement est fourni dans un document hébreu de Abraham Ibn Ezra, qui a été traduit en anglais dans *AMM* **25** (1918), 99–108. Peu de temps après cela, al-Khwārizmī écrivit son livre en arabe sur ce sujet. (Comme noté dans le chapitre 1, notre mot "algorithme" vient du nom al-Khwārizmī's.) Son travail a été traduit en latin et a eu une forte influence sur Leonardo Pisano (Fibonacci), dont le livre d'arithmétique (en 1202 apr.J.-C.) a joué un rôle majeur dans la diffusion des numéraux hindous-arabes en Europe. Il est intéressant de noter que l'ordre d'écriture de droite à gauche pour les nombres est resté inchangé lors de ces deux transitions, bien que l'arabe s'écrive de droite à gauche alors que l'hindou et le latin littéraires s'écrivent en général de gauche à droite. Un compte-rendu détaillé de la propagation dans toutes les parties de l'Europe de la numération décimale et de l'arithmétique qui ont suivi durant la période 1200-1600 a été fourni par David Eugene Smith dans son *History of Mathematics* **1** (Boston: Ginn and Co., 1923), Chapitres 6 et 8.

La notation décimale a été appliquée d'abord seulement aux nombres entiers, mais non aux frac-

tions. Les astronomes arabes, qui avaient besoin de fractions dans leurs graphiques des étoiles et leurs autres tables, ont continué à utiliser la notation de Ptolémée (le célèbre astronome grec), une notation basée sur les fractions sexagésimales. Ce système perdure aujourd’hui dans les unités trigonométriques que sont les degrés, minutes, et secondes, et également dans nos unités de mesure de durées, comme une survivance de la notation babylonienne sexagésimale. Les premiers mathématiciens européens utilisaient également les fractions sexagésimales lorsqu’ils travaillaient avec des nombres non entiers ; par exemple, Fibonacci a donné la valeur

$$1^{\circ} 22' 7'' 42''' 33^{IV} 4^V 40^{VI}$$

comme une approximation de la racine de l’équation  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ . (La réponse correcte est  $1^{\circ} 22' 7'' 42''' 33^{IV} 4^V 38^{VI} 30^{VII} 50^{VIII} 15^{IX} 43^X \dots$ )

L’utilisation de la notation décimale également pour les dizaines, centaines, milliers, etc., de façon similaire semble être comparativement un changement mineur ; mais, bien sûr, il est difficile de rompre la tradition, et les fractions sexagésimales ont un avantage sur les fractions décimales parce que de tels nombres peuvent être exprimés exactement, d’une façon simple.

Les mathématiciens chinois, qui n’ont jamais utilisé les sexagésimaux, ont été apparemment les premières personnes à travailler avec l’équivalent des fractions décimales, même si leur système numéral (dans lequel il manque zéro) n’était pas originellement un système numérique positionnel au sens strict. Les unités chinoises de poids et mesures étaient décimales, de telle façon que Tsu Ch’ung-Chih (qui est mort en 500 ou 501 apr.J.-C.) était capable d’exprimer une approximation de  $\pi$  de la forme suivante :

$$3 \text{ chang, } 1 \text{ ch'in, } 4 \text{ ts'un, } 1 \text{ fen, } 5 \text{ li, } 9 \text{ hao, } 2 \text{ miao, } 7 \text{ hu.}$$

Ici chang,..., hu sont des unités de mesure de longueurs ; 1 hu (le diamètre d’un fil de soie) égale 1/10 miao, etc. L’utilisation de telles fractions de style décimal était assez répandue en Chine après 1250 environ.

Une forme embryonnaire de véritables fractions décimales positionnelles apparut dans un texte arithmétique du 10<sup>ième</sup> siècle, écrit en langue de Damas par un obscur mathématicien appelé al-Uqlīdisī (“l’Euclidien”). Il marquait occasionnellement la place du point décimal, par exemple en connexion avec un problème d’intérêts composés, le calcul de 135 fois  $(1.1)^n$  pour  $1 \leq n \leq 5$ . [Voir A. S. Saidan, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī* (Dordrecht : D. Reidel, 1975), 110, 114, 343, 355, 481-485.] Mais il ne développa pas l’idée très complètement, et sa ruse fut bientôt oubliée. Al-Samaw’al de Bagdad et Bakou, écrivant en 1172, comprit que  $\sqrt{10} = 3.162277\dots$ , mais il ne disposait pas d’un moyen pratique d’écrire de telles approximations. Plusieurs siècles passèrent avant que les fractions décimales ne soient réinventées par un mathématicien perse, Al-Kāshī, qui mourut en 1429. Al-Kāshī était un calculateur habile, qui donna la valeur de  $2\pi$  comme suit, correcte jusqu’à la 16<sup>ième</sup> décimale :

integer	fractions																
0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5

Ce fut de loin la meilleure approximation de  $\pi$  connue jusqu’à ce que Ludolph van Ceulen calcule laborieusement 35 décimales durant les années 1586-1610.

Les fractions décimales commencèrent à apparaître sporadiquement en Europe ; par exemple, une méthode appelée “méthode turque” était utilisée pour calculer  $153.5 \times 16.25 = 2494.375$ . Giovanni Bianchini les développa plus avant, avec des applications à l’arpentage, antérieures à 1450 ; mais comme al-Uqlīdisī, son travail semble n’avoir eu que peu d’influence. Christof Rudolff et François Viète suggérèrent l’idée à nouveau en 1525 et 1579. Finalement, un texte arithmétique de Simon Stevin, qui tomba indépendamment sur l’idée des fractions décimales en 1585, devint populaire. Le travail de Stevin, et la découverte des logarithmes bientôt après, rendit les fractions décimales banales en Europe durant le 17<sup>ième</sup> siècle. [Pour des remarques plus poussées et des références, voir D. E. Smith, *History of Mathematics* **2** (1925), 228-247; V. J. Katz, *A History of Mathematics* (1993), 225-228, 345-348; et G. Rosińska, *Quart. J. Hist. Sci. Tech.* **40** (1995), 17-32.]

Le système binaire de notation a sa propre histoire intéressante. De nombreuses tribus primitives qui existent de nos jours sont connues pour utiliser un système binaire ou “pair” de comptage (en faisant des groupes de deux plutôt que de cinq ou dix), mais elles ne comptent pas dans un véritable système de racine 2, puisqu’elles ne traitent pas les puissances de 2 d’une façon particulière. Voir *The Diffusion of Counting Practices* par Abraham Seidenberg, *Univ. of Calif. Publ. in Math.* **3** (1960), 215-300, pour des détails intéressants à propos des systèmes de nombres primitifs. Un autre exemple “primitif” d’un système principalement binaire est la notation musicale conventionnelle pour exprimer les rythmes et les durées de temps.

Les systèmes de numération non décimaux ont été étudiés en Europe durant le dix-septième siècle. Pendant de nombreuses années, les astronomes avaient utilisé occasionnellement l’arithmétique sexagésimale à la fois pour les entiers et pour les parties fractionnaires des nombres, au début pour calculer des multiplications [voir John Wallis, *Treatise of Algebra* (Oxford: 1685), 18-22, 30]. Le fait que *n’importe quel* entier plus grand que 1 puisse servir de racine a été affirmé apparemment pour la première fois de façon imprimée par Blaise Pascal *De Numeris Multiplicibus*, qui a été écrit environ en 1658 [voir les Œuvres Complètes de Pascal (Paris: Éditions du Seuil, 1963), 84-89]. Pascal a écrit, “Denaria enim ex instituto hominum, non ex necessitate naturæ ut vulgus arbitratur, et sane satis inepte, posita est” ; i.e., “Le système décimal a été établi, un peu bêtement pour sûr, selon l’habitude humaine, et non pas par nécessité naturelle comme la plupart des gens le pensent.” Il affirma que le système duodécimal (racine douze) serait un changement bienvenu, et il donna une règle pour tester si un nombre duodécimal est divisible par neuf. Erhard Weigel essaya de claironner son enthousiasme pour le système quaternaire (racine quatre) dans une série de publications commençant en 1673. Une étude détaillée de la racine douze a été menée par Joshua Jordaine, *Duodecimal Arithmetick* (Londres : 1687).

Bien que la notation décimale soit presque exclusivement utilisée pour l’arithmétique durant cette époque, les autres systèmes de poids et mesures furent rarement si ce n’est jamais basés sur des multiples de 10, et les transactions en affaires nécessitaient de bonnes compétences pour ajouter des quantités telles que les pounds, les shillings ou les pences. Pendant des siècles, les marchands avaient alors appris à calculer des sommes et des différences de quantités exprimées dans des unités particulières de monnaie, poids et mesures ; ainsi, ils faisaient de l’arithmétique dans des systèmes de numération non décimaux. Les unités communes de mesure des liquides en Angleterre, datant

du 13<sup>ème</sup> siècle ou avant, sont particulièrement remarquables :

2 gills	= 1 chopine	2 demibushels	= 1 bushel or firkin
2 chopines	= 1 pinthe	2 firkins	= 1 kilderkin
2 pinthes	= 1 quart	2 kilderkins	= 1 barrel
2 quarts	= 1 pottle	2 barrels	= 1 hogshead
2 pottles	= 1 gallon	2 hogsheads	= 1 pipe
2 gallons	= 1 peck	2 pipes	= 1 tun
2 pecks	= 1 demibushel		

Les quantités de liquide exprimées en gallons, pottles, quarts, pinthes, etc. étaient essentiellement écrits en notation binaire. Peut-être que les véritables inventeurs de l'arithmétique binaire furent des marchands de vin britanniques !

La première apparition connue d'une notation purement binaire date d'environ 1605 dans des manuscrits non publiés de Thomas Harriot (1560-1621). Harriot était un créateur qui devint d'abord célèbre en venant en Amérique comme représentant de Sir Walter Raleigh. Il inventa (entre autres choses) une notation comme celle que l'on utilise maintenant pour les relations "moins que" et "plus grand que" ; mais pour une certaine raison, il choisit de ne pas publier beaucoup de ses découvertes. Des extraits de ses notes sur l'arithmétique binaire ont été reproduites par John W. Shirley, *Amer. J. Physics* **19** (1951), 452-454 ; la découverte par Harriot de la notation binaire a été d'abord citée par Frank Morley dans *The Scientific Monthly* **14** (1922), 60-66.

Le premier traitement publié du système binaire est apparu dans le travail d'un éminent évêque cistercien, Juan Caramuel de Lobkowitz, *Mathesis Biceps* **1** (Campaniæ: 1670), 45-48. Caramuel étudia la représentation des nombres selon les racines 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, et 60 jusqu'à une certaine limite, mais il ne donna pas d'exemples d'opérations arithmétiques dans les systèmes de numération non décimaux excepté dans le cas sexagesimal.

Finalement, un article de G. W. Leibniz [*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (Paris, 1703), 110-116], qui illustra l'addition, la soustraction, la multiplication et la division binaires amena vraiment la notation binaire sous les projecteurs, et son article est habituellement fourni comme référence pour la naissance de l'arithmétique en base 2. Leibniz fit référence ultérieurement au système binaire assez fréquemment. Il ne le recommandait pas pour des calculs pratiques, mais il souligna son importance dans les recherches de théorie des nombres, puisque les motifs dans les séquences de nombres sont souvent plus apparente en notation binaire qu'en notation décimale ; il donnait également une signification mystique au fait que tout soit exprimable en fonction de zéro et un. Les manuscrits non publiés de Leibniz montrent qu'il s'est intéressé à la notation binaire dès 1679, quand il fait référence au système binaire en l'appelant système "bimal" (analogue à "décimal").

Une étude attentive des premiers travaux de Leibniz sur les nombres binaires a été menée par Hans J. Zacher, *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz* (Frankfurt am Main: Klostermann, 1973). Zacher fait remarquer que Leibniz maîtrisait bien ce qu'on appelle "l'arithmétique locale" de John Napier, une manière de calculer avec des pierres qui revient à utiliser une abaque avec la racine 2. [Napier avait publié l'idée de l'arithmétique locale dans la troisième partie de son

petit livre *Rabdologiæ* en 1617 ; on peut appeler cela le premier “ordinateur binaire” au monde et c’est sûrement le moins cher du monde, bien que Napier ait bien senti qu’il était plus amusant que pratique. Voir la discussion de Martin Gardner dans *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments* (New York : Freeman, 1986), Chapitre 8.]

Il est intéressant de noter que le concept important de puissances négatives à droite du point racine n’était pas encore bien compris à ce moment-là. Leibniz demanda à Jacques Bernoulli de calculer dans le système binaire, et Bernoulli “résolut” le problème en prenant une approximation à 35 chiffres de  $\pi$ , multipliée par  $10^{35}$ , et il exprima alors ce nombre dans le système binaire comme sa réponse. À une échelle plus petite, ça serait comme de dire que  $\pi \approx 3.14$ , et que  $(314)_{10} = (100111010)_2$  ; donc  $\pi$  en binaire, c’est 100111010 ! [Voir Leibniz, *Math. Schriften*, édité par C. I. Gerhardt, **3** (Halle : 1855), 97 ; deux des 118 bits de la réponse sont incorrects, du fait d’erreurs de calcul.] La motivation du calcul de Bernoulli était apparemment de voir si n’importe quel motif simple pouvait s’observer dans la représentation de  $\pi$ .

Charles XII de Suède dont le talent en mathématiques excédait peut-être celui des autres rois de l’histoire du monde tomba sur l’idée de l’arithmétique de racine 8 environ en 1717. C’est probablement une invention de lui, bien qu’il ait rencontré Leibniz brièvement en 1707. Charles sentait que les racines 8 ou 64 seraient plus pratiques pour les calculs que le système décimal, et il considéra l’introduction de l’arithmétique octale en Suède ; mais il mourut à la bataille avant de décréter un tel changement. [Voir *The Works of Voltaire* **21** (Paris : E. R. DuMont, 1901), 49 ; E. Swedenborg, *Gentleman’s Magazine* **24** (1754), 423-424.]

La notation octale fut proposée également en Amérique coloniale avant 1750, par le Révérend Hugh Jones, professeur au Lycée William et Mary [voir *Gentleman’s Magazine* **15** (1745), 377-379 ; H. R. Phalen, *AMM* **56** (1949), 461-465].

Plus d’un siècle plus tard, un ingénieur civil suédois-américain célèbre appelé John W. Nystrom décida d’amener à Charles XII ses plans une étape plus avant, en concevant un système complet de numération, poids et mesures basé sur une arithmétique en base 16. Il écrivit “Je n’ai pas peur, et je n’hésite pas, à plaider pour un système binaire pour l’arithmétique et la mesure. Je sais que j’ai la nature avec moi ; si je ne réussis pas à vous faire réaliser son utilité et sa grande importance pour l’humanité, cela reflètera le peu de crédit de notre génération sur nos scientifiques et nos philosophes.” Nystrom conçut des moyens particuliers pour prononcer les nombres hexadécimaux ; par exemple, (C0160)<sub>16</sub> devait se lire “vybong, bysanton.” On appela son système complet le système tonal, et il est décrit dans *J. Franklin Inst.* **46** (1863), 263-275, 337-348, 402-407. Un système similaire, mais basé sur la racine 8, a été étudié par Alfred B. Taylor [*Proc. Amer. Pharmaceutical Assoc.* **8** (1859), 115-216 ; *Proc. Amer. Philosophical Soc.* **24** (1887), 296-366]. L’utilisation accrue du système (métrique) français de poids et mesures amena un débat intensif autour des mérites de l’arithmétique décimale durant cette période ; en effet, l’arithmétique octale fut même proposée en France [J. D. Collenne, *Le Système Octaval* (Paris : 1845) ; Aimé Mariage, *Numération par Huit* (Paris: Le Nonnant, 1857)].

Le système binaire était bien connu comme une curiosité depuis l’époque de Leibniz, et environ 20 références antérieures à ce système ont été compilées par R. C. Archibald [*AMM* **25** (1918), 139-142].

Il était principalement utilisé pour le calcul de puissances, comme expliqué dans la section 4.6.3, et pour l'analyse de certains jeux et puzzles. Giuseppe Peano [*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* **34** (1898), 47- 55] utilisa la notation binaire comme base d'un ensemble de caractères "logiques" de 256 symboles. Joseph Bowden [*Special Topics in Theoretical Arithmetic* (Garden City: 1936), 49] donna son propre système de nomenclature pour les nombres hexadécimaux.

Le livre *History of Binary and Other Nondecimal Numeration* d'Anton Glaser (Los Angeles : Tomash, 1981) contient une discussion informative et presque complète au sujet du développement de la notation binaire, incluant les traductions anglaises de nombreux travaux cités plus haut [voir *Historia Math.* **10** (1983), 236-243].

Une grande partie de l'histoire récente des systèmes de numération est reliée au développement des ordinateurs. Les carnets de Charles Babbage pour l'année 1838 montrent qu'il avait considéré l'utilisation de nombres non décimaux dans son moteur analytique [voir M. V. Wilkes, *Historia Math.* **4** (1977), 421]. Un intérêt croissant dans les dispositifs mécaniques pour l'arithmétique, spécialement pour la multiplication, amena plusieurs personnes dans les années 1930 à considérer le système binaire à cette fin. Un compte-rendu particulièrement détaillé d'une telle activité apparaît dans l'article "Binary Calculation" d'E. William Phillips [*Journal of the Institute of Actuaries* **67** (1936), 187-221] avec un enregistrement de la discussion qui suivit l'exposé qu'il donna sur le sujet. Phillips commence par dire, "Le but ultime [de cet article] est de persuader l'ensemble du monde civilisé d'abandonner la numération décimale et d'utiliser la numération octale [c'est-à-dire de racine 8] à la place."

Les lecteurs modernes de l'article de Phillips seront peut-être surpris de découvrir qu'un système de numération en base 8 était appelé "octonaire" ou "octonal," selon tous les dictionnaires anglais de l'époque, exactement comme le système en base 10 est dit "denary" ou "décimal" ; le mot "octal" n'est apparu dans les dictionnaires anglais qu'en 1961, et il doit apparemment son origine à un terme pour la base d'une certaine classe de tubes à vide. Le mot "hexadécimal," qui s'est introduit dans notre langage assez récemment, est un mélange de racines grecque et latine ; des mots plus appropriés seraient "senidenary" ou "sedécimal" ou même "sexadécimal," mais ce dernier est peut-être trop risqué pour les programmeurs.

Le commentaire de M. Wales cité au début de ce chapitre a été extrait d'une discussion imprimée avec l'article de Phillips. Un autre homme qui assistait au même exposé objecta au système octal : "5% devient 3.1463 per 64, ce qui sonne assez horriblement à l'oreille."

Phillips trouva l'inspiration à sa proposition dans un circuit électronique qui était capable de compter en binaire (C. E. Wynn-Williams, *Proc. Roy. Soc. London* **A136** (1932), 312-324]. Les circuits électromécaniques et électroniques pour les opérations d'arithmétique générale furent développés durant la fin des années 1930, notamment par John V. Atanasoff et George R. Stibitz aux États-Unis d'Amérique, L. Couffignal et R. Valtat en France, Helmut Schreyer et Konrad Zuse en Allemagne. Tous ces inventeurs utilisèrent le système binaire, bien que Stibitz ait développé plus tard une notation décimale codée en binaire par complément à 3. Un compte-rendu fascinant de ces premiers développements, incluant les réimpressions et traductions de documents contemporains importants, se trouve dans le livre de Brian Randell *The Origins of Digital Computers* (Berlin :

Springer, 1973).

Les premiers ordinateurs américains rapides, construits au début des années 1940, utilisaient l'arithmétique décimale. Mais en 1946, un important memorandum par A. W. Burks, H. H. Goldstine, et J. von Neumann, en lien avec la conception des premiers ordinateurs à programme mémorisé, donna des raisons détaillées pour quitter définitivement la tradition et utiliser la notation en base deux [voir John von Neumann, *Collected Works* 5, 41-65]. Depuis lors, les ordinateurs binaires se sont multipliés. Après une douzaine d'années d'expérience avec les machines binaires, une discussion sur les avantages et les désavantages relatifs de la notation en base 2 a été fournie par W. Buchholz dans son article "Fingers or Fists ?" [*CACM* 2, 12 (December 1959), 3-11].

L'ordinateur MIX utilisé dans ce livre était défini de telle façon à pouvoir être soit binaire soit décimal. Il est intéressant de noter que presque tous les programmes pour le MIX peuvent s'écrire sans savoir si c'est la notation binaire ou la notation décimale qui est utilisée, même quand on fait des calculs dans lesquels intervient de l'arithmétique multi-précision. On trouve ainsi que le choix de la base n'influence pas de façon significative la manière de programmer. (Les algorithmes "booléens" dont il est question dans la section 7.1 constituent cependant des exceptions notables à cette assertion ; voir également l'algorithme 4.5.2B.)

Il y a différentes manières de représenter les nombres négatifs dans un ordinateur, et cela influence parfois la manière dont l'arithmétique est effectuée. Pour comprendre ces notations, considérons d'abord MIX comme si c'était un ordinateur décimal ; alors chaque mot contiendrait 10 symboles et un signe, par exemple

$$(2) \quad -12345\ 67890.$$

On appelle cela une représentation en *grandeur signée*. Une telle représentation est en accord avec les conventions habituelles de notation, et elle est donc préférée par de nombreux programmeurs. Un désavantage potentiel est que moins zero et plus zero peuvent tous les deux être représentés, alors qu'ils devraient habituellement représenter le même nombre ; cette possibilité nécessite quelque attention en pratique, bien qu'elle soit parfois utile.

La plupart des calculateurs mécaniques qui font de l'arithmétique décimale utilisent un autre système appelé notation par *complémentation à dix*. Si on soustrait 1 de 00000 00000, on obtient 99999 99999 dans cette notation ; en d'autres termes, aucun signe explicite n'est attaché au nombre, et le calcul est fait modulo  $10^{10}$ . Le nombre  $-12345\ 67890$  devrait apparaître comme

$$(3) \quad 87654\ 32110$$

dans la notation par complémentation à dix. Il est conventionnel de regarder n'importe quel nombre dont le chiffre dominant est 5, 6, 7, 8, ou 9 comme une valeur négative dans cette notation, bien que par rapport à l'addition et à la soustraction, il n'y ait pas de mal à regarder (3) comme le nombre  $+87654\ 32110$  s'il est pratique de le faire. Notons qu'il n'y pas de problème de moins zéro dans un tel système.

La principale différence entre les grandeurs signées et les notations par complémentation à dix en pratique est que le décalage à droite ne divise pas la grandeur par dix ; par exemple, le nombre

$-11 = \dots 99989$ , décalé de un à droite donne  $\dots 99998 = -2$  (en supposant qu'un décalage à droite insère un 9 comme chiffre dominant quand le nombre décalé est négatif). En général,  $x$  décalé à droite d'un symbole en notation par complémentation à dix donnera  $\lfloor x/10 \rfloor$ , que  $x$  soit positif ou négatif.

Un désavantage possible du système de complémentation à dix est le fait qu'elle n'est pas symétrique par rapport à zéro ; le nombre négatif à  $p$  symboles  $500\dots 0$  n'est l'opposé d'aucun nombre positif à  $p$  symboles. Ainsi, il est possible qu'un changement de  $x$  en  $-x$  cause un overflow. (voir les exercices 7 et 31 pour une discussion de la notation par complémentation à la racine en précision *infinie*.)

Une autre notation qui a été utilisée depuis les débuts des ordinateurs de grande vitesse est appelée représentation par *compléments à neuf*. Dans cette notation, le nombre  $-12345\ 67890$  devrait apparaître comme

$$(4) \qquad 87654\ 32109.$$

Chaque symbole d'un nombre négatif ( $-x$ ) est égal à 9 moins le symbole correspondant de  $x$ . Il n'est pas difficile de voir que la notation par complémentation à neuf d'un nombre négatif est toujours un de moins que la notation correspondante en complémentation à dix. L'addition et la soustraction se font modulo  $10^{10} - 1$ , ce qui signifie qu'une retenue à l'extrémité gauche doit être ajoutée à l'extrémité droite. (voir la discussion de l'arithmétique modulo  $w - 1$  dans la section 3.2.1.1.) À nouveau, il y a un problème potentiel avec moins zéro, puisque  $99999\ 99999$  et  $00000\ 00000$  dénotent la même valeur.

Les idées qui viennent d'être expliquées pour l'arithmétique en base 10 s'appliquent de façon similaire en base 2, où on a *des grandeurs signées, par complémentation à deux*, et pour les notations *par complémentation aux uns*. L'arithmétique par complémentation à deux sur des nombres de  $n$ -bits est l'arithmétique modulo  $2^n$  ; l'arithmétique par complémentation aux uns est l'arithmétique modulo  $2^n - 1$ . L'ordinateur MIX, utilisé pour les exemples de ce chapitre, ne traite que l'arithmétique en grandeur signée ; pourtant, des procédures alternatives pour les notations par complémentation sont discutées dans les textes d'accompagnement quand il est important qu'elles le soient.

Les lecteurs méticuleux et les éditeurs de copies devraient noter l'utilisation du singulier ou du pluriel dans des termes comme "complémentation à deux" et "complémentation aux uns" : un nombre en complémentation à deux est complémenté par rapport à une seule puissance de 2, alors qu'un nombre par complémentation aux uns est complémenté par rapport à une longue séquence de 1. En effet, il y a également une "notation par complémentation aux deux", qui a comme base 3 et la complémentation est effectuée au nombre  $(2\dots 22)_3$

Les descriptions du langage machine nous disent souvent qu'un circuit d'ordinateur est conçu avec le point racine à une certaine position dans chaque mot numérique. De telles assertions devraient habituellement être ignorées. Il est préférable d'apprendre les règles concernant la position à laquelle le point racine sera dans le résultat d'une instruction si on suppose qu'il était à telle position avant l'opération. Par exemple, dans le cas du MIX, on peut regarder nos opérands soit comme des entiers avec un point racine à l'extrémité droite, soit comme des fractions avec le point racine à l'extrémité gauche, ou comme un mélange de ces deux extrêmes ; les règles pour l'apparition du

point racine après addition, soustraction, multiplication, ou division sont évidentes.

Il est facile de voir qu'il y a une relation simple entre la racine  $b$  et la racine  $b^k$  :

$$(5) \quad (\dots a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_b = (\dots A_3 A_2 A_1 A_0 . A_{-1} A_{-2} \dots)_{b^k},$$

où

$$A_j = (a_{kj+k-1} \dots a_{kj+1} a_{kj})_b ;$$

voir l'exercice 8. Ainsi on a des techniques simples pour convertir à vue entre, disons, la notation binaire et la notation hexadécimale.

De nombreuses variations intéressantes sur les systèmes de numération positionnelle sont possibles en plus des systèmes standards en base  $b$  dont il a été question jusque-là. Par exemple, on pourrait avoir des nombres en base  $(-10)$ , de telle façon que

$$\begin{aligned} (\dots a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_{-10} \\ &= \dots + a_3(-10)^3 + a_2(-10)^2 + a_1(-10)_1 + a_0 + \dots \\ &= \dots - 1000a_3 + 100a_2 - 10a_1 + a_0 - \frac{1}{10}a_{-1} + \frac{1}{100}a_{-2} - \dots \end{aligned}$$

Ici les symboles individuels satisfont  $0 \leq a_k \leq 9$  exactement comme dans le système décimal. Le nombre 12345 67890 apparaît dans le système "négadécimal" comme

$$(6) \quad (1\ 93755\ 73910)_{-10},$$

puisque ce dernier représente  $10305070900 - 9070503010$ . Il est intéressant de noter que l'opposé de ce nombre,  $-12345\ 67890$ , devrait s'écrire

$$(7) \quad (28466\ 48290)_{-10},$$

et, en fait, *tout nombre réel qu'il soit positif ou négatif peut être représenté sans signe* dans le système de base  $-10$ .

Les systèmes à base négative ont été étudiés d'abord par Vittorio Grünwald [*Giornale di Matematiche di Battaglini* **23** (1885), 203-221, 367], qui a expliqué comment effectuer les quatre opérations dans de tels systèmes ; Grünwald a également étudié l'extraction de racine, les tests de divisibilité et la conversion entre bases. Pourtant son travail semble n'avoir eu aucun effet sur d'autres recherches, puisqu'il a été publié dans un journal obscur, et qu'il a été bientôt oublié. La publication suivante sur les systèmes à base négative a été apparemment celle de A. J. Kempner [*AMM* **43** (1936), 610-617], qui a étudié les propriétés des racines non entières et a remarqué dans une note de bas de page que les racines négatives seraient utilisables également. Après vingt années supplémentaires, l'idée a été redécouverte à nouveau, cette fois par Z. Pawlak et A. Wakulicz [*Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, Classe III, **5** (1957), 233-236; Série des sciences techniques **7** (1959), 713-721], et également par L. Wadel [*IRE Transactions* **EC-6** (1957), 123]. Des ordinateurs expérimentaux appelés SKRZAT 1 et BINEG, qui utilisaient  $-2$  comme racine de l'arithmétique, ont été construits à la fin des années 1950 en Pologne ; voir N. M. Blachman, *CACM* **4** (1961), 257; R. W. Marczyński, *Ann. Hist. Computing* **2** (1980), 37-48. Pour de plus amples références, voir *IEEE Transactions* **EC-12** (1963), 274-277 ; *Computer Design* **6** (May 1967), 52-63. Il est clair que l'idée des bases négatives est apparue indépendamment à plusieurs personnes. Par exemple, D. E. Knuth avait discuté des racines négatives en 1955, ainsi que des généralisations à des racines à valeurs complexes,



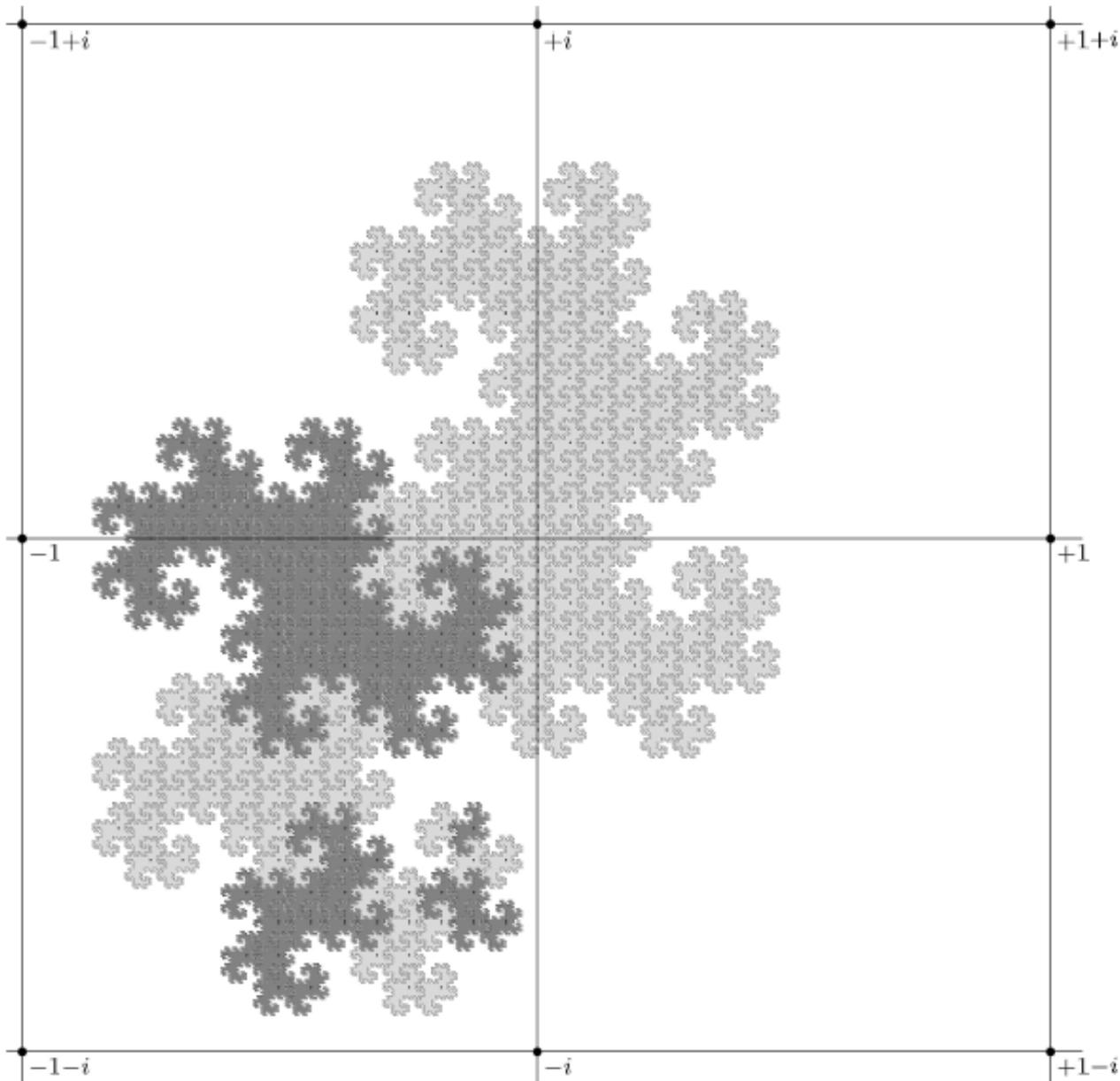


FIG. 1. L'ensemble fractal  $S$  appelé "dragon-siamois."

Dans ce système, on a besoin des seuls symboles 0 et 1. Une manière de démontrer que tout nombre complexe a une telle représentation consiste à considérer l'ensemble intéressant  $S$  présenté sur la figure Fig. 1 ; cet ensemble est, par définition, l'ensemble de tous les points qui peuvent s'écrire sous la forme  $\sum_{k \geq 1} a_k (i-1)^{-k}$ , pour une séquence infinie  $a_1, a_2, a_3, \dots$  de zéros et de uns. Il est aussi connu sous le nom de "fractal du dragon-siamois" [voir M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, seconde édition (Academic Press, 1993), 306, 310]. La figure 1 montre que  $S$  peut être décomposée en 256 pièces congruentes à  $\frac{1}{16}S$ . Notons que si le diagramme de  $S$  est tourné dans le sens des aiguilles d'une montre de  $135^\circ$ , on obtient deux ensembles adjacents congruents à  $(1/\sqrt{2})S$ , parce que  $(i-1)S = S \cup (S+1)$ . Pour des détails de la preuve que  $S$  contient tous les nombres complexes qui sont d'une grandeur suffisamment petite, voir l'exercice 18.

Peut-être que le système de numération le plus joli de tous est celui de la notation *ternaire balancée*, qui consiste en une représentation en base 3 en utilisant  $-1, 0$ , et  $+1$  comme “trits” (symboles ternaires) à la place de  $0, 1$ , et  $2$ . Si on utilise le symbole  $\bar{1}$  pour représenter  $-1$ , on a les exemples suivants de nombres ternaires balancés :

Balanced ternary	Decimal
$10\bar{1}$	$8$
$11\bar{1}0.\bar{1}\bar{1}$	$32\frac{5}{9}$
$\bar{1}\bar{1}10.11$	$-32\frac{5}{9}$
$\bar{1}\bar{1}10$	$-33$
$0.11111\dots$	$\frac{1}{2}$

Une manière de trouver la représentation d’un nombre dans le système balancé ternaire est de commencer par le représenter en notation ternaire ordinaire ; par exemple

$$208.3 = (21201.022002200220\dots)_3.$$

(Une méthode très simple avec papier-crayon pour convertir en notation ternaire est donnée dans l’exercice 4.4-12.) Maintenant, ajoutons le nombre infini  $\dots 11111.11111\dots$  en notation ternaire ; on obtient, dans l’exemple ci-dessus, le nombre infini

$$(\dots 11111210012.210121012101\dots)_3.$$

Finalement, soustrayons  $\dots 11111.11111\dots$  en décrémentant chaque symbole ; on obtient

$$(8) \quad 208.3 = (10\bar{1}\bar{1}01.10\bar{1}010\bar{1}010\bar{1}0\dots)_3.$$

Ce processus peut clairement être rendu rigoureux si on remplace le nombre artificiel infini  $\dots 11111.11111\dots$  par un nombre avec le nombre de uns adéquat.

Le système balancé ternaire a de nombreuses propriétés plaisantes :

- a) L’opposé d’un nombre est obtenu en échangeant  $1$  et  $\bar{1}$ .
- b) Le signe d’un nombre est donné par son trit non nul le plus significatif, et en général, on peut comparer deux nombres quelconques en les lisant de gauche à droite et en utilisant l’ordre lexicographique, comme dans le système décimal.
- c) L’opération d’arrondir à l’entier le plus proche est identique à la troncature ; en d’autres termes, on efface simplement tout ce qui est à droite du point racine.

L’addition dans le système balancé ternaire est assez simple, en utilisant la table

$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$		
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$1$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$1$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	
$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$
$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	$0$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	$0$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$0$	$1$	$1\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$0$	$1$	$1\bar{1}$	$\bar{1}$	$1$	$0$	$1$	$1\bar{1}$	$1$	$1\bar{1}$	$10$				

(Les trois entrées de l'addition sont les symboles des nombres à additionner et les symboles de retenue.) La soustraction est la négation suivie de l'addition. La multiplication se réduit aussi à la négation suivie de l'addition, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & & [17] \\
 \times & & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & & [17] \\
 \hline
 & & & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & \\
 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & & & \\
 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & & & & \\
 \hline
 0 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & [289]
 \end{array}$$

La représentation des nombres dans le système ternaire balancé est implicitement présente dans un célèbre puzzle mathématique, appelé communément le “problème des poids de Bachet” - bien qu’il ait déjà été énoncé par Fibonacci quatre siècles avant que Bachet n’écrive son livre, et par Tabarī en Perse plus de 100 ans avant Fibonacci. Voir W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* **1** (Leipzig: Teubner, 1910), Section 3.4; H. Hermelink, *Janus* **65** (1978), 105-117.] Les systèmes de numération positionnelle avec symboles négatifs furent inventés par J. Colson [*Philos. Trans.* **34** (1726), 161-173], puis ensuite oubliés et redécouverts environ 100 ans après par Sir John Leslie [*The Philosophy of Arithmetic* (Edinburgh: 1817) ; voir les pages 33-34, 54, 64-65, 117, 150], et par A. Cauchy [*Comptes Rendus Acad. Sci.* **11** (Paris, 1840), 789-798]. Cauchy nota que les symboles négatifs rendaient non nécessaire de mémoriser les tables de multiplication au-delà de  $5 \times 5$ . Une allégation selon laquelle de tels systèmes de numération étaient connus en Inde il y a fort longtemps [J. Bharati, *Vedic Mathematics* (Delhi: Motilal Banarsidass, 1965)] a été réfutée par K. S. Shukla [*Mathematical Education* **5,3** (1989), 129-133]. La première apparition véritable d’une notation balancée ternaire “pure” a eu lieu dans un article de Léon Lalande [*Comptes Rendus Acad. Sci.* **11** (Paris, 1840), 903-905], qui était concepteur de dispositifs mécaniques pour l’arithmétique. Thomas Fowler indépendamment a inventé et construit un calculateur ternaire balancé environ au même moment [voir *Report British Assoc. Adv. Sci.* **10** (1840), 55 ; **11** (1841), 39-40]. Le système de numération ternaire balancé a été mentionné seulement rarement pendant les 100 années suivantes, jusqu’au développement des premiers ordinateurs électroniques à l’école Moore d’ingénierie électrique en 1945-1946 ; à ce moment, il fut sérieusement considéré comme un remplaçant possible du système décimal. La complexité des circuits électriques pour la numération balancée ternaire n’est pas beaucoup plus compliquée qu’elle ne l’est pour les systèmes binaires, et un nombre donné nécessite seulement  $\ln 2 / \ln 3 \approx 63\%$  positions symboliques comparativement pour sa représentation. Des discussions sur le système ternaire balancé apparaissent dans *AMM* **57** (1950), 90-93, et dans *High-speed Computing Devices*, Engineering Research Associates (McGraw-Hill, 1950), 287-289. L’ordinateur expérimental russe SETUN était basé sur la notation ternaire balancée [voir *CACM* **3** (1960), 149-150], et peut-être que les propriétés de symétrie et d’arithmétique simple de ce système de numération s’avèreront importantes un jour, lorsque les “flip-flop” seront remplacés par des “flip-flap-flop.” La notation positionnelle se généralise d’une autre façon importante en un système de racines multiples mélangées. Étant donnée une séquence de nombres  $\langle b_n \rangle$  (où  $n$  peut être négatif, on définit

$$(9) \quad \left[ \begin{array}{c} \dots, a_3, a_2, a_1, a_0; a_{-1}, a_{-2}, \dots \\ \dots, b_3, b_2, b_1, b_0; b_{-1}, b_{-2}, \dots \end{array} \right] \\
 = \dots + a_3 b_2 b_1 b_0 + a_2 b_1 b_0 + a_1 b_0 + a_0 + a_{-1} / b_{-1} + a_{-2} / b_{-1} b_{-2} + \dots$$

Dans les systèmes les plus simples de bases mélangées, on travaille seulement avec des entiers ; soient  $b_0, b_1, b_2, \dots$  des entiers plus grands que un, et ne traitons que des nombres qui n'ont pas de point racine, où  $a_n$  doit être tel que  $0 \leq a_n < b_n$ .

Un des plus importants systèmes de numération à racines mélangées est le *système de numération factoriel*, où  $b_n = n + 2$ . En utilisant ce système, qui était connu au 13<sup>ième</sup> siècle en Inde, on peut représenter tout nombre entier positif de manière unique sous la forme

$$(10) \quad c_n n! + c_{n-1}(n-1)! + \dots + c_2 2! + c_1,$$

où  $0 \leq c_k \leq k$  for  $1 \leq k \leq n$ , et  $c_n \neq 0$ . (voir les algorithmes 3.3.2P et 3.4.2P.)

Les systèmes de numération à bases mélangées sont familiers dans la vie de tous les jours, où on utilise plusieurs unités de mesure. Par exemple, la quantité “3 semaines, 2 jours, 9 heures, 22 minutes, 57 secondes, et 492 millisecondes” est égale à

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 3, & 2, & 9, & 22, & 57; & 492 \\ & 7, & 24, & 60, & 60; & 1000 \end{array} \right] \text{secondes.}$$

La quantité “10 pounds, 6 shillings, and thruppence ha’penny” a été un jour égale à  $\left[ \begin{array}{cccc} 10, & 6, & 3; & 1 \\ & 20, & 12; & 2 \end{array} \right]$  pences en monnaie britannique, avant que la Grande-Bretagne ne passe à un système monétaire purement décimal.

Il est possible d’ajouter et de soustraire des nombres multi-racines en utilisant une généralisation évidente des algorithmes habituels d’addition et de soustraction, en supposant bien sûr que le même système multi-racines soit utilisé pour la représentation des deux opérands. Similairement, on peut facilement multiplier ou diviser un nombre multi-racines par de petites constantes entières, en utilisant de simples extensions des méthodes papier-crayon familières.

Le premier à avoir discuté en toute généralité des systèmes multi-racines a été Georg Cantor [*Zeitschrift für Math. und Physik* **14** (1869), 121-128]. Les exercices 26 et 29 donnent davantage d’informations à leur propos.

Plusieurs questions concernant les racines *irrationnelles* ont été étudiées par W. Parry, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960), 401–416.

Au-delà des systèmes décrits dans cette section, plusieurs autres manières de représenter les nombres ont été mentionnées ailleurs dans cette série de livres : le système de numération combinatoire ; le système de numération de Fibonacci ; le système de numération phi ; les représentations modulaires (Section 4.3.2) ; le code de Gray (Section 7.2.1) ; et les chiffres romains (Section 9.1).

**Transcription et traduction du paragraphe 9.6. *Fonction zeta d'un laplacien* du livre de Nicole Berline, Ezra Getzler et Michèle Vergne *Heat kernels and Dirac operators* (éd. Springer, 1996), Denise Vella-Chemla, 31 décembre 2024.**

Dans cette section, on donne une application de l'existence d'un développement asymptotique pour le noyau de la chaleur : la construction de la fonction zeta d'un laplacien généralisé et la définition de son déterminant renormalisé. Cette construction, appliquée à une famille d'opérateurs de Dirac, est utilisée dans la théorie des fibrés à déterminant linéaire, que nous décrirons dans la prochaine section. Le lecteur intéressé seulement par le théorème des familles d'indices peut sauter le reste de ce chapitre.

Si  $f \in C^\infty(0, \infty)$  est une fonction de la demi-droite des réels positifs (qui se comporte bien en 0 et en  $l'\infty$ , ce que nous décrirons rapidement), la transformation de Mellin de  $f$  est la fonction

$$M[f](s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt$$

**Lemme 9.34.** *Soit  $f \in C^\infty(0, \infty)$  une fonction dont le développement asymptotique pour de petites valeurs de  $t$  est de la forme*

$$f(t) \sim \sum_{k \geq -n} f_k t^{k/2} + g \log t,$$

*et décroît exponentiellement à l'infini, c'est-à-dire, telle que, pour un certain  $\lambda > 0$  et pour  $t$  suffisamment grand,*

$$|f(t)| \leq C e^{-t\lambda}$$

*Soit  $\gamma$  la constante d'Euler. Alors*

- (1) *la transformation de Mellin  $M[f]$  est une fonction méromorphe avec des pôles appartenant à l'ensemble  $n/2 - \mathbb{N}/2$  ;*
- (2) *la série de Laurent de  $M[f]$  au voisinage de  $s = 0$  est  $-gs^{-1} + (f_0 - \gamma g) + O(s)$*

*Soit  $h \in C^\infty(0, \infty)$  une fonction dont le développement asymptotique pour les petites valeurs de  $t$  est de la forme*

$$h(t) \sim \sum_{k \geq -n} h_k t^{k/2},$$

*et telle que pour un certain  $\lambda > 0$  et  $t$  grand,*

$$|h(t)| \leq C e^{-t\lambda}$$

*Alors  $f(t) = \int_t^\infty h(s)ds$  satisfait les contraintes ci-dessus.*

*Preuve.* Choisissons  $\Re s$  grand, et effectuons l'intégration sur  $[0, \infty)$  sur les deux intervalles  $[0, 1]$  et  $(1, \infty)$  séparément :

$$\Gamma(s)M[f](s) = \int_0^1 f(t)t^{s-1}dt + \int_1^\infty f(t)t^{s-1}dt.$$

Le second terme, la contribution de l'intégrale à l'infini, est clairement entière, du fait de la décroissance exponentielle de  $f(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Le premier terme peut être développé en une série asymptotique, et alors intégré explicitement, terme par terme :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)t^{s-1}dt &= \sum_{k < K} f_k \int_0^1 t^{k/2+s-1}dt \\ &\quad + g \int_0^1 (\log t)t^{s-1}dt + \int_0^1 O(t^{K/2+s-1})dt \\ &= \sum_{k < K} \frac{f_k}{s + k/2} - \frac{g}{s^2} + r(s), \end{aligned}$$

où  $r(s)$  est holomorphe dans le demi-plan droit  $\Re s > -K/2$ . Puisque l'inverse de la fonction Gamma  $\Gamma(s)^{-1}$  est entière, on peut déduire (1).

Puisque  $\Gamma(s)^{-1} = s + \gamma s^2 + O(s^3)$ , il s'ensuit que  $M[f]$  a le développement en série de Taylor au voisinage de  $s = 0$

$$-gs^{-1} + (f_0 - \gamma g) + O(s),$$

ce qui prouve la partie (2) du lemme.

Si  $h$  est comme dans l'énoncé du lemme, alors pour montrer que  $\int_t^\infty h(s)ds$  a un développement asymptotique de la forme requise, on écrit, pour de petites valeurs de  $t$ ,

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_t^1 \sum_{k < 0} (h_k s^{k/2}) ds - \int_0^t \left( h(s) - \sum_{k < 0} h_k s^{k/2} \right) ds \\ &\quad + \int_0^1 \left( h(s) - \sum_{k < 0} h_k s^{k/2} \right) ds + \int_1^\infty h(s)ds \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$f(t) \sim - \sum_{k \neq -2} \frac{h_k}{k/2 + 1} t^{k/2+1} - h_{-2} \log t + c,$$

où  $c$  est la constante

$$c = \sum_{k < 0, k \neq -2} \frac{h_k}{k/2 + 1} + \int_0^1 \left( h(s) - \sum_{k < 0} h_k s^{k/2} \right) ds + \int_1^\infty h(s)ds. \quad \square$$

Si on définit  $\text{LIM}_{t \rightarrow 0} f(t)$  comme étant égal à  $f_0 - \gamma g$  où  $f_0$  et  $g$  sont les coefficients de  $t^0$  et  $\log t$  dans le développement asymptotique de  $f$ , on voit que la partie (2) du lemme ci-dessus implique la formule

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} sM[f] = \text{LIM}_{t \rightarrow 0} f(t).$$

On notera  $\text{LIM}_{t \rightarrow 0} f(t)$  la limite renormalisée de  $f(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

Si  $H$  est un laplacien généralisé auto-adjoint sur une variété compacte  $M$  et si  $\lambda$  est un nombre réel positif, la fonction zeta de  $H$  est la transformée de Mellin

$$\zeta(s, H, \lambda) = \text{M}[\text{Tr}(P_{(\lambda, \infty)} e^{-tH})] = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \text{Tr}(P_{(\lambda, \infty)} e^{-tH}) t^{s-1} dt,$$

où  $P_{(\lambda, \infty)}$  est la projection spectrale associée à  $H$  sur les valeurs propres appartenant à l'intervalle  $(\lambda, \infty)$ . Cette fonction est égale à  $\text{Tr}(P_{(\lambda, \infty)} H^{-s})$  pour  $s > n/2$  où  $n$  est la dimension de la variété  $M$ .

Comme exemple, considérons le laplacien scalaire  $(-d^2)/dt^2$  sur le cercle, avec pour valeurs propres

$$\{0, 1, 1, 4, 4, \dots, n^2, n^2, \dots\}.$$

Si  $0 < \lambda < 1$  et  $s > 1/2$ , on voit que

$$\zeta(s, H, \lambda) = \frac{2}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-tn^2} t^{s-1} dt = 2 \sum_{n=1}^\infty n^{-2s} = 2\zeta(2s),$$

où  $\zeta(s)$  est la fonction zeta de Riemann.

On peut comprendre le comportement de la fonction zeta comme une fonction du plan complexe au moyen du développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel du noyau de la chaleur.

**Proposition 9.35.** *La fonction  $\zeta(s, H, \lambda)$  possède un développement méromorphe à tout le plan complexe, et elle est holomorphe en  $s = 0$ .*

*Preuve.* Lorsque  $t \rightarrow 0$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(P_{(\lambda, \infty)} e^{-tH}) &= \text{Tr}(e^{-tH}) - \sum_{k=0}^m e^{-t\lambda_k} \\ &\sim \sum_{k=-n/2}^\infty t^k a_k, \end{aligned}$$

où les  $\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \lambda$  sont les valeurs propres de  $H$  appartenant à l'intervalle  $(-\infty, \lambda]$  énumérées selon leur multiplicité. Le fait que  $\text{Tr}(P_{(\lambda, \infty)} e^{-tH})$  décroisse exponentiellement rapidement lorsque  $t \rightarrow \infty$  a été démontré dans le lemme 2.37 □

---

<sup>1</sup>**Proposition 2.37 :** *Si  $H$  est un laplacien généralisé, et si  $P_{(0, \infty)}$  est la projection sur les fonctions propres de  $H$  de valeur propre positive, alors pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C(\ell) > 0$  telle que pour tout  $t$  suffisamment grand,*

$$\|\langle x | P_{(0, \infty)} e^{-tH} P_{(0, \infty)} | y \rangle\| \leq C(\ell) e^{-t\lambda_1/2},$$

où  $\lambda_1$  est la plus petite valeur propre non nulle de  $H$ .

Notons  $\zeta'(s, H, \lambda)$  la dérivée de  $\zeta(s, H, \lambda)$  par rapport à  $s$ . En suivant Ray et Singer, on définit le déterminant de la fonction zeta d'un laplacien généralisé  $H$  pour lequel 0 n'est pas une valeur propre comme étant

$$\det(H) = e^{-\zeta'(0, H, 0)}.$$

Cette définition est motivée par le fait que si  $H$  est un endomorphisme positif d'un espace vectoriel hermitien fini-dimensionnel  $V$ , et si

$$\zeta(s, H) = M[\text{Tr}(e^{-tH})] = \text{Tr}(H^{-s})$$

alors  $\zeta'(0, H) = -\log \det(H)$ . Le déterminant de la fonction zeta d'un laplacien généralisé  $H$  est un déterminant renormalisé adapté à la classe des laplaciens généralisés.

Si  $H$  est un laplacien auto-adjoint, soit  $0 < \lambda < \mu$ , et  $\lambda < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \mu$  l'énumération des valeurs propres de  $H$  appartenant à l'intervalle  $(\lambda, \mu]$ . Le résultat suivant est clair.

**Proposition 9.36.** *La fonction zeta de  $H$  satisfait la formule*

$$\zeta(s, H, \lambda) = \zeta(s, H, \mu) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{-s},$$

et par conséquent, sa dérivée en  $s = 0$  satisfait la formule

$$\zeta'(0, H, \lambda) = \zeta'(0, H, \mu) - \sum_{i=1}^m \log \lambda_i.$$

Dans la proposition suivante, on calcule la variation de la fonction zeta  $\zeta(s, H^z, \lambda)$  d'une famille  $H^z$  de laplaciens généralisés sur  $M$  par rapport au paramètre  $z$ . On travaille sur l'ensemble  $U_\lambda$  où  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $H^z$ .

**Proposition 9.37.** *Sur l'ensemble  $U_\lambda$ , la dérivée par rapport au paramètre  $z$  de la fonction zeta d'une famille de laplaciens généralisés est donnée par la formule*

$$\frac{\partial \zeta(s, H^z, \lambda)}{\partial z} = -sM[\text{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z (H^z)^{-1} e^{-tH^z})].$$

*Preuve.* En utilisant la méthode du lemme 9.34, il n'est pas difficile de montrer que la dérivée  $\partial \zeta(s, H^z, \lambda) / \partial z$  de la fonction zeta est méromorphe. Par conséquent, on peut arguer que pour les grandes valeurs de  $\Re s$ , les deux côtés de la formule sont donnés par des intégrales convergentes. Si on différencie l'expression

$$\zeta(s, H^z, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \text{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z e^{-tH^z}) t^{s-1} dt$$

pour la fonction zeta par rapport à  $z$  et si on applique le corollaire 2.50 [\[2\]](#), on obtient que

---

<sup>2</sup>**Corollaire 2.50.** *Si  $H^z$  est une famille lisse à un paramètre de laplaciens généralisés sur un fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  sur une variété compacte, alors*

$$\frac{\partial}{\partial z} \text{Str}(e^{-tH^z}) = -t \text{Str}\left(\frac{\partial H^z}{\partial z} e^{-tH^z}\right).$$

*Note de la traductrice : la notion de Supertrace (Str) est définie à la page 38 et travaille sur des espaces "double-face", une face positive et une face négative.*

$$(9.5) \quad \frac{\partial}{\partial z} \zeta(s, H^z, \lambda) = -M[t \operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z e^{-tH^z})] + M[\operatorname{Tr}(\partial_z P_{(\lambda, \infty)} e^{-tH^z})].$$

Puisque  $P = P_{(\lambda, \infty)}^z$  est une projection, la règle de Leibniz montre que

$$\partial_z P = P \partial_z P + \partial_z P P ;$$

en multipliant sur la gauche et sur la droite par  $P$ , on voit que  $P \partial_z P P = 0$ , de telle façon que

$$\partial_z P = P(\partial_z P)(1 - P) + (1 - P)(\partial_z P)P.$$

Par conséquent, le second terme du côté droit de (9.5) s'évanouit. De l'autre côté, l'intégration par parties montre qu'en général

$$M[tf'] = -sM[f],$$

de telle façon que le premier terme peut être réécrit sous la forme désirée.  $\square$

Le théorème suivant est l'analogue pour le déterminant de la fonction zeta de la formule

$$\frac{\partial}{\partial z} \log \det(H^z) = \operatorname{Tr}(\partial_z H^z (H^z)^{-1})$$

pour la variation du déterminant d'une famille d'opérateurs  $H_z$  sur un espace vectoriel fini-dimensionnel.

**Proposition 9.38.** *Si  $H^z$  est une famille de laplaciens généralisés sur une variété compacte  $M$ , alors sur l'ensemble  $U_\lambda$ ,*

$$\frac{\partial}{\partial z} \zeta'(s = 0, H^z, \lambda) = -\operatorname{LIM}_{t \rightarrow 0} \operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z (H^z)^{-1} e^{-tH^z}).$$

*Preuve.* Pour appliquer le lemme 9.34 (2), on doit montrer que

$$\operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z (H^z)^{-1} e^{-tH^z})$$

a un développement asymptotique. Considérons le développement asymptotique

$$\operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z e^{-sH^z}) \sim \sum_{k=-n/2}^{\infty} a_k(z) s^k.$$

En se rappelant de la preuve de la proposition précédente que

$$\partial_z \operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z e^{-sH^z}) = -s \operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z e^{-sH^z}),$$

on voit que  $\operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z e^{-sH^z})$  a un développement asymptotique de la forme

$$\operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z e^{-sH^z}) \sim - \sum_{k=-n/2}^{\infty} \partial_z a_k s^{k-1}.$$

Par conséquent, on peut appliquer le lemme 9.34 pour conclure que

$$\int_t^\infty \operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z e^{-sH^z}) ds = \operatorname{Tr}(P_{(\lambda, \infty)}^z \partial_z H^z (H^z)^{-1} e^{-tH^z})$$

a un développement asymptotique.  $\square$

SUR LE CORPS À UN ÉLÉMENT  
(EXPOSÉ DONNÉ À L'ARBEITSTAGUNG<sup>1</sup>, BONN, JUIN 1999)

CHRISTOPHE SOULÉ

CNRS ET IHÉS

1. Soit  $G$  un schéma en groupes de Chevalley sur  $\mathbb{Z}$ , et  $\mathbb{F}_q$  le corps fini à  $q$  éléments. Il a été remarqué depuis quelques temps que, lorsque  $q$  tend vers 1, la cardinalité du groupe de points de  $G$  dans  $\mathbb{F}_q$  se comporte comme suit :

$$\text{card } G(\mathbb{F}_q) \underset{q \rightarrow 1}{\sim} (q-1)^r \times \text{card } W,$$

où  $r$  est le rang de  $G$  et  $W$  est son groupe de Weyl. En 1957, Tits [1] a proposé de penser à  $W$  comme au groupe de points of  $G$  dans “le corps de caractéristique un” :

$$(1) \quad G(\mathbb{F}_1) := W.$$

Il a aussi argumenté sur le fait que les géométries finies attachées à chaque groupe  $G$  ont une limite quand  $q$  tend vers 1, notamment la géométrie finie attachée au groupe de Coxeter  $W$ .

En 1993, Manin [2] a écrit quelques exposés au sujet des fonctions zeta dans lesquels il mentionne le corps à un élément. Il propose de développer la géométrie algébrique sur  $\mathbb{F}_1$ , et il prédit que les variétés sur ce corps ont des fonctions zeta simples. Par exemple

$$(2) \quad \zeta_{\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^N}(s) = s(s-1)(s-2)\dots(s-N).$$

Il note également que l'équation (1) pour  $G = \text{SL}_N$  amène au fait que la  $K$ -théorie la plus haute de  $\mathbb{F}_1$  doit être l'homotopie des groupes de sphères. En effet, par le théorème de Barratt-Priddy-Quillen, on obtient

$$(3) \quad K_m(\mathbb{F}_1) = \pi_m \text{BGL}(\mathbb{F}_1)^+ := \pi_m B \Sigma_\infty^+ = \pi_m^s.$$

Plus tard, Smirnov et Kapranov-Smirnov (preprints non publiés) ont étudié la question plus avant. Entre autres choses, ils ont développé l'algèbre linéaire sur  $\mathbb{F}_1$  (un espace vectoriel étant un ensemble fini pointé), et ont obtenu de cette manière une description de la loi de réciprocité de Gauss similaire à la description donnée plus tôt par Arbarello, De Concini et Kac de la loi de réciprocité de Weil sur les courbes au moyen des déterminants des espaces vectoriels.

2. L'analogie entre les corps de nombres et les corps de fonctions trouve une limitation de base avec le manque d'un corps de base. On dit que  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  (avec un point ajouté à l'infini, comme c'est l'habitude en théorie d'Arakelov) est comme une courbe (complète) ; mais sur quel corps ? En particulier, on devrait rêver d'avoir un objet comme

$$\text{Spec}(\mathbb{Z}) \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_1)} \text{Spec}(\mathbb{Z}),$$

---

<sup>1</sup>L'Arbeitstagung est une rencontre État de l'art de mathématiciens de haut niveau ayant lieu à Bonn, annuellement depuis 1957, et fondée par Hirzebruch.

Article : IHES/M/99/55, Scan-9911017 des bibliothèques du CERN à Genève.

Traduction : Denise Vella-Chemla, juillet 2023.

puisque la preuve de Weil de l'hypothèse de Riemann pour une courbe sur un corps fini utilise le produit de deux copies de cette courbe. Je n'ai rien à dire sur cette question. Le fait simple que la fonction zeta de Riemann ait une infinité de zéros indique que  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  ne peut être regardé comme un objet de type fini sur  $\mathbb{F}_1$ , par conséquent  $\text{Spec}(\mathbb{Z}) \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_1)} \text{Spec}(\mathbb{Z})$  ne peut être une honnête variété algébrique sur  $\mathbb{Z}$ .

D'un autre côté, si  $X$  est une variété de type fini sur  $\mathbb{F}_1$ , son changement de base  $X_{\mathbb{Z}} = X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}$  doit être une variété de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . Il y a donc un espoir de décrire de tels objets  $X$  en utilisant la géométrie algébrique habituelle, et on peut se poser la :

**Question** : Quelles variétés sur  $\mathbb{Z}$  sont obtenues par changement de base de  $\mathbb{F}_1$  à  $\mathbb{Z}$  ?

Par exemple, quand  $X$  est lisse sur  $\mathbb{F}_1$ ,  $X_{\mathbb{Z}}$  sera lisse sur  $\mathbb{Z}$ , ce qui est déjà une contrainte forte.

**3.** Notre point de départ pour une tentative de définition des variétés sur  $\mathbb{F}_1$  est la définition courte des schémas qui dit qu'un schéma est un foncteur covariant des anneaux vers les ensembles qui est localement représentable par un anneau. Dans ce langage, le changement de base d'un corps  $k$  vers une  $k$ -algèbre  $\Lambda$  est décrite par le lemme facile suivant. Étant donnée une variété  $X$  sur  $k$  (resp. une  $k$ -algèbre  $A$ ), soit  $X_{\Lambda} = X \otimes_k \Lambda$  (resp.  $A_{\Lambda} = A \otimes_k \Lambda$ ).

**Lemme 1** :

- i) Il y a une inclusion canonique  $X(A) \subset X_{\Lambda}(A_{\Lambda})$ .
- ii) Étant donnée une variété  $S$  sur  $\Lambda$  et n'importe quelle transformation naturelle de foncteurs (des  $k$ -algèbres vers les ensembles)

$$\phi : (A \mapsto X(A)) \longrightarrow (A \mapsto S(A_{\Lambda}))$$

il existe un unique morphisme canonique

$$\tilde{\phi} : X_{\Lambda} \mapsto S$$

induisant  $\phi$  sur chaque ensemble  $X(A)$ .

Nous aimerions avoir une situation similaire avec  $k = \mathbb{F}_1$  et  $\Lambda = \mathbb{Z}$ . Mais personne ne nous dit quelles sont les  $\Lambda$ -algèbres provenant de  $k$ .

## 4. Une définition

**4.1.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , un corps fini  $\mathbb{F}_q$  a une extension finie  $\mathbb{F}_{q^n}$  de degré  $n$ , obtenue en adjoignant les racines de l'unité. Comme Kapranov et Smirnov le suggèrent,  $\mathbb{F}_1$  devrait avoir une extension  $\mathbb{F}_{1^n}$  de degré  $n$ , et on décide que

$$\mathbb{F}_{1^n} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1).$$

En d'autres termes,  $\mathbb{F}_{1^n} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$  est l'anneau  $R_n$  de fonctions sur le schéma de groupe affine des  $n$ -ièmes racines de l'unité.

Soit  $\mathcal{R}$  la sous-catégorie pleine de Anneaux avec comme objets les anneaux  $R_n, n \geq 1$ , et leurs produits tensoriels finis. Soit également  $\mathcal{R}'$  la catégorie pleine de Anneaux contenant comme objets les produits tensoriels des anneaux dans  $\mathcal{R}$  avec les anneaux  $\mathbb{Z}[1/N], N \geq 1$ .

**Définition :** Une *variété sur  $\mathbb{F}_1$*  est un foncteur covariant  $X$  de  $\mathcal{R}$  vers les ensembles finis, équipé des inclusions naturelles  $X(R) \subset X_{\mathbb{Z}}(R), R \in \text{Ob}\mathcal{R}$ , où  $X_{\mathbb{Z}}$  est une variété sur  $\mathbb{Z}$ , et tel que la propriété suivante (U) est vérifiée : pour toute variété  $S$  sur  $\mathbb{Z}$  et n'importe quelle “bonne” transformation de foncteurs (de  $\mathcal{R}$  vers les ensembles)

$$\phi : (R \mapsto X(R)) \longrightarrow (R \mapsto S(R))$$

il existe un unique groupe algébrique

$$\tilde{\phi} : X_{\mathbb{Z}} \mapsto S$$

induisant sur chaque ensemble  $X(R), R \in \text{Ob}\mathcal{R}$ .

**4.2.** Voici trois possibilités de ce que “bon” pourrait vouloir dire dans la définition précédente :

(G0) Soit  $X(\mathbb{C})$  l'union des sous-ensembles  $\sigma(X(R)) \subset X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ , où  $R$  parcourt tous les anneaux dans  $\mathcal{R}$  et  $\sigma$  parcourt tous les morphismes de  $R$  vers  $\mathbb{C}$ . Il y a une application continue  $\phi_{\mathbb{C}}$  de la fermeture topologique de  $X(\mathbb{C})$  (dans  $X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ ) vers  $S(\mathbb{C})$  telle que, pour tout  $R$  et  $\sigma$  comme ci-dessus,

$$\sigma \circ \phi = \phi_{\mathbb{C}} \circ \sigma$$

(G1) Même définition que (G0), mais maintenant  $\phi_{\mathbb{C}}$  est holomorphe sur la fermeture holomorphe de  $X(\mathbb{C})$  dans  $X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ .

(G2) Le foncteur  $X$  s'étend à un foncteur de  $\mathcal{R}'$  vers les ensembles, et  $\phi$  s'étend à une transformation des foncteurs sur  $\mathcal{R}'$ . Alors (G0) est vérifiée, et, de plus, la même assertion est vraie quand  $\mathbb{C}$  (resp.  $\mathcal{R}$ ) est remplacé par n'importe quelle extension finie d'un corps  $p$ -adique (resp. par  $\mathcal{R}'$ ).

## 5. Exemples

**5.0.** Quand  $X_{\mathbb{Z}} = \text{Spec}(\mathbb{Z})$  et  $X(R) = X_{\mathbb{Z}}(R)$ , on dit que  $X = \text{Spec}(\mathbb{F}_1)$ .

**5.1.** Quand  $X_{\mathbb{Z}}(R) = R^*$  et  $X(R)$  est l'ensemble  $\mu(R)$  des racines de l'unité dans  $R$ , on dit que  $X = G_m/\mathbb{F}_1$ .

**Lemme 2 :** La propriété (U) est vérifiée quand  $S$  est affine et satisfait (G0).

*Esquisse de la démonstration :* On prouve l'existence de  $\tilde{\phi}$  quand  $S$  est la droite affine (regarder les coordonnées réduit la preuve à ce cas). Pour tout  $n \geq 1$ , l'application  $\phi$  envoie l'élément  $T \in \mu(R_n)$  vers un polynôme  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i(n)T^i$  dans  $R_n$ . D'un autre côté, la fermeture topologique de  $X(\mathbb{C})$  est le cercle  $S^1$ . L'application continue  $\phi_{\mathbb{C}}$  du cercle vers  $\mathbb{C}$  peut être écrite comme une série de Laurent

$$\phi_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i z^i.$$

Lorsque  $n$  tend vers l'infini, le coefficient

$$a_i(n) = \sum_{\zeta^n=1} \phi_{\mathbb{C}}(\zeta)\zeta^{-i}/n$$

tend vers

$$\alpha_i = \int_{S^1} \phi_{\mathbb{C}}(z)z^{-i}d\theta.$$

Puisque tous les  $a_i(n)$  sont entiers, la séquence  $a_i(n), n \geq 1$ , doit être stationnaire, par conséquent,  $\phi_{\mathbb{C}}$  est un polynôme de Laurent  $\tilde{\phi} \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}] = Hom(G_m, A_1)$ .

**5.2.** Quand, pour tout  $R \in \mathcal{R}$ ,  $X_{\mathbb{Z}}(R) = R$  et  $X(R)$  est l'ensemble  $\mu(R) \cup \{0\}$ , on dit que  $X = A_1/\mathbb{F}_1$ . Quand  $R \in Ob(\mathcal{R}')$ , si  $\Sigma = Hom(R, \mathbb{C})$  a pour cardinalité  $N$ , on dénote par  $X(R)$  l'ensemble des éléments  $x \in R$  tels que

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} |\sigma(x)|^2 \leq N.$$

La propriété (U) est vérifiée si  $S$  est affine et satisfait (G1) ou (G2).

**5.3.** Plus généralement, si  $X_{\mathbb{Z}}$  est une variété torique lisse sur  $\mathbb{Z}$ , on peut l'écrire comme une union disjointe de produits de copies de  $A_1$  avec des copies de  $G_m$ . En imposant que les coordonnées correspondantes soient dans  $\mu(R) \cup \{0\}$ , on obtient un sous-ensemble  $X(R) \subset X_{\mathbb{Z}}(R)$ , qui satisfait (U) quand  $S$  est affine et  $\phi$  satisfait (G1) ou (G2).

**5.4.** Soit  $E \simeq \mathbb{Z}^N$  un réseau équipé d'un produit scalaire hermitien  $h$  sur  $E \otimes \mathbb{C}$ , et  $\|\cdot\|$  la norme correspondante. Il est habituel en théorie d'Arakelov de voir la paire  $\bar{E} = (E, h)$  comme un fibré<sup>2</sup> sur la courbe  $Spec(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ , dont les sections globales sont les éléments de  $E$  de norme inférieure à un.

Si on définit  $X(R)$  comme l'ensemble des éléments  $x \in E \otimes R$  tels que

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \|\sigma(x)\|^2 \leq N,$$

on peut à nouveau montrer que la propriété (U) est vérifiée (pour une certaine variété  $X_{\mathbb{Z}}$ ) si  $S$  est affine et si  $\phi$  satisfait (G1) ou (G2).

**5.5.** Quand  $X_{\mathbb{Z}} = G$  est un groupe de Chevalley comme dans le §1, il semble naturel de définir  $X(R)$  comme l'ensemble des éléments  $g \in G(R)$  qui sont envoyés vers le sous-groupe compact standard maximal de  $G(\mathbb{C})$  par tous les  $\sigma \in \Sigma$ . Le groupe  $G(\mathbb{F}_1)$  sera alors une extension de  $W$  par un 2-groupe élémentaire fini abélien. Je n'ai pas vérifié si la propriété (U) était satisfaite.

---

<sup>2</sup>bundle ?

## 6. Fonction zeta

Soit  $X$  une variété sur  $\mathbb{F}_1$ . Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $q = 2n + 1$ , et

$$N(q) := \text{card } X(R_n).$$

Dans tous les cas considérés dans le §5,  $N(q)$  s'avère être un polynôme en  $q$  à coefficients entiers (c'est facile à montrer, mais assez surprenant dans le cas 5.4). On peut alors définir

$$\mathbb{Z}(q, T) = \exp \left( \sum_{k \geq 1} N(q^k) T^k / k \right).$$

En remplaçant  $T$  par  $q^{-s}$  et en laissant tendre  $q$  vers 1, on obtient

$$\mathbb{Z}(q, q^{-s}) \underset{q \rightarrow 1}{\sim} (q - 1)^\chi \zeta_X(s),$$

où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$  et

$$\zeta_X(s) = P(s)/Q(s),$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes avec à la fois des coefficients et des racines entières.

Par exemple, quand  $X = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^N$  (défini comme dans 5.3, i.e.  $X(R)$  est constitué des points dans  $\mathbb{P}^N(R)$  ayant des coordonnées homogènes dans  $\mu(R) \cup \{0\}$ ), la formule (2) est vérifiée.

## 7. Motifs

**7.1.** Soit  $T$  un tore séparé<sup>3</sup> sur  $\mathbb{C}$ ,  $M$  une variété  $T$ -torique, et  $r > 1$  un entier. L'endomorphisme qui envoie  $t \in T$  sur sa  $r$ -ième puissance s'étend à un endomorphisme  $\Phi_r$ , sur  $M$ . Totaro a noté dans un article récent [3] que le sous-espace de la cohomologie rationnelle de  $M$  où  $\Phi_r$  agit par multiplication par  $r^i$  fournit une séparation canonique de la filtration poids (de degré  $i$ ).

En termes de motifs mélangés (encore une notion conjecturale),  $M$  donne naissance à des extensions (plusieurs) de motifs de Tate à cause de la stratification mentionnée au §5.3), et leurs classes  $e \in \text{Ext}(\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z}(i + n))$  sont éliminées par le plus grand commun diviseur de  $r^{i+n} - r^i > 1$ , i.e. (essentiellement) le dénominateur de  $B_n/n$ , où  $B_n$  est le  $n$ -ième nombre de Bernoulli.

**7.2.** D'un autre côté, Beilinson propose la formule

$$K_{2n-1}(\mathbb{Z}) = \text{Ext}_{\mathcal{M}/\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(n))$$

décrivant la K-théorie de  $\mathbb{Z}$  comme des extensions de motifs de Tate sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . À cause de (3), on pourrait spéculer que

$$\pi_{2n-1}^s = \text{Ext}_{\mathcal{M}/\mathbb{F}_1}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(n)).$$

---

<sup>3</sup>split ?

Si la variété torique  $M$  est définie et lisse sur  $\mathbb{Z}$ , l'exemple du §5.3 indique que les classes d'extension  $e$  ci-dessus devraient vivre dans l'image du morphisme  $\pi_{2n-1}^s \rightarrow K_{2n-1}(\mathbb{Z})$ . C'est un théorème de Quillen et Mitchell que cette image est (à 2-torsion près) le groupe cyclique  $\text{Im}(J)_{2n-1}$ , dont l'ordre est le dénominateur de  $B_n/n$ . Ceci est assez consistant avec la remarque de Totaro.

Il serait intéressant de vérifier si cette borne sur  $e$  est pointue, i.e. si tous les éléments dans  $\text{Im}(J)_{2n-1}$  peuvent être interprétés en termes de variétés toriques.

## Références

- [1] Tits, J. : *Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes*. Colloque d'algèbre supérieure, Bruxelles, 1956, pp. 261-289. Centre Belge de Recherches Mathématiques. Gauthier-Villars, (1957).
- [2] Manin, Y. : *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa)*. Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). Astérisque no. 228 (1995), 4, 121-163.
- [3] Totaro, B. : *Chow groups, Chow cohomology, and linear varieties*, preprint (1998).

IHES  
35 route de Chartres 91440 Bures/s/Yvette  
France

# Théorie modulaire de Tomita-Takesaki

## Stephen J. Summers

### Résumé

Nous fournissons un bref survol de la théorie modulaire de Tomita-Takesaki et de quelques unes de ses applications à la physique mathématique. Ceci est un article commandé par l'*Encyclopédie de physique mathématique*, éditée par J.-P. Francoise, G. Naber et T.S. Tsun, pour être publiée par la maison d'édition Elsevier.

### 1. Structure de base

Les origines de la théorie modulaire de Tomita-Takesaki consistent en deux articles non publiés de M. Tomita en 1967 et un fin volume [9] par M. Takesaki. Elle s'est développée en l'un des plus importants outils dans la théorie des algèbres d'opérateurs et elle a trouvé de nombreuses applications en physique mathématique.

Bien que la théorie modulaire ait été formulée en un paradigme plus général, elle sera présentée sous la forme sous laquelle elle trouve le plus souvent ses applications en physique mathématique. Soit  $\mathcal{M}$  une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  contenant un vecteur  $\Omega$  qui est cyclique et séparable pour  $\mathcal{M}$ . Définissons l'opérateur  $S_0$  sur  $\mathcal{H}$  comme suit :

$$S_0 A \Omega = A^* \Omega, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M}.$$

Cet opérateur se développe en un opérateur fermé anti-linéaire  $S$  défini sur un sous-ensemble dense de  $\mathcal{H}$ . Soit  $\Delta$  l'unique opérateur auto-adjoint positif, et  $J$  l'unique opérateur anti-unitaire intervenant dans la décomposition polaire

$$S = J \Delta^{1/2} = \Delta^{-1/2} J.$$

$\Delta$  est appelé l'*opérateur modulaire* et  $J$  la *conjugaison modulaire* (ou l'*involution modulaire*) associée à la paire  $(\mathcal{M}, \Omega)$ . Notons que  $J^2$  est l'opérateur identité et que  $J = J^*$ . De plus, le calcul spectral peut être appliqué à  $\Delta$  de telle façon que  $\Delta^{it}$  est un opérateur unitaire pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\{\Delta^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$  forme un groupe unitaire fortement continu. Dénoteons par  $\mathcal{M}'$  l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés sur  $\mathcal{H}$  qui commutent avec tous les éléments de  $\mathcal{M}$ . La théorie modulaire commence avec le théorème remarquable suivant.

**Théorème 1.1.** Soit  $\mathcal{M}$  une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparable  $\Omega$ . Alors  $J\Omega = \Omega = \Delta\Omega$  et les égalités suivantes sont vérifiées :

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}' \quad \text{et} \quad \Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Notons que si l'on définit  $F_0 A' \Omega = A'^* \Omega$ , pour tout  $A' \in \mathcal{M}'$ , et que l'on prend sa fermeture  $F$ , alors on a les relations

$$\Delta = FS, \quad \Delta^{-1} = SF, \quad F = J\Delta^{-1/2}.$$

---

Département de Mathématiques, Université de Floride, Gainesville FL 32611, USA

traduction Denise Vella-Chemla, en janvier 2021, de l'article <https://arxiv.org/pdf/math-ph/0511034.pdf>

1. Le lecteur est renvoyé aux références [6,7,8,10] pour y trouver des généralisations, des détails et des références concernant le contenu des quatre premières sections.

## 2. Groupe d'automorphismes du groupe modulaire

Par le Théorème 1.1, les unitaires  $\Delta^{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , induisent un groupe d'automorphismes à un paramètre  $\{\sigma_t\}$  de  $\mathcal{M}$  par

$$\sigma_t(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it}, \quad A \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}.$$

Ce groupe est appelé le *groupe d'automorphismes du groupe modulaire* de  $\mathcal{M}$  (relativement à  $\Omega$ ). Dénotons par  $\omega$  l'état normal fidèle sur  $\mathcal{M}$  induit par  $\Omega$  :

$$\omega(A) = \frac{1}{\|\Omega\|^2} \langle \Omega, A\Omega \rangle, \quad A \in \mathcal{M}.$$

Du Théorème 1.1, il découle que  $\omega$  est invariant sous  $\{\sigma_t\}$ , i.e.  $\omega(\sigma_t(A)) = \omega(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{M}$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

Le groupe d'automorphismes du groupe modulaire contient de l'information à la fois à propos de  $\mathcal{M}$  et à propos de  $\omega$ . Par exemple, le groupe modulaire d'automorphismes est un automorphisme intérieur sur  $\mathcal{M}$  si et seulement si  $\mathcal{M}$  est semi-finie. Il est évident si et seulement si  $\omega$  est un état de la trace sur  $\mathcal{M}$ . En effet, on a pour tout  $B \in \mathcal{M}$  que  $\sigma_t(B) = B$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\omega(AB) = \omega(BA)$  pour tout  $A \in \mathcal{M}$ . Dénotons par  $\mathcal{M}^\sigma$  l'ensemble de tous ces  $B \in \mathcal{M}$ .

Le groupe d'automorphismes du groupe modulaire satisfait une condition qui avait déjà été utilisée en physique mathématique pour caractériser les états de température à l'équilibre des systèmes quantiques en mécanique statistique et en théorie des champs - la condition *Kubo-Martin-Schwinger* (KMS). Si  $\mathcal{M}$  est une algèbre de von Neumann et  $\{\alpha_t \mid t \in \mathbb{R}\}$  est un groupe à un paramètre d'automorphismes  $\sigma$ -faiblement continu de  $\mathcal{M}$ , alors l'état  $\phi$  sur  $\mathcal{M}$  satisfait la condition KMS à la condition de (température inverse)  $\beta$  ( $0 < \beta < \infty$ ) par rapport à  $\{\alpha_t\}$  si pour tout  $A, B \in \mathcal{M}$ , il existe une fonction complexe  $F_{A,B}(z)$  qui est analytique dans la bande  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < \beta\}$  et continue sur la fermeture de la bande de telle façon que

$$F_{A,B}(t) = \phi(\alpha_t(A)B) \quad \text{et} \quad F_{A,B}(t + i\beta) = \phi(B\alpha_t(A)),$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas,  $\phi(\alpha_{i\beta}(A)B) = \phi(BA)$ , pour tout  $A, B$  dans une  $*$ -sous-algèbre  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -faiblement dense,  $\alpha$ -invariante. De tels états KMS sont  $\alpha$ -invariants, i.e.  $\phi(\alpha_t(A)) = \phi(A)$ , pour tout  $A \in \mathcal{M}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , et sont stables et passifs (cf. le Chapitre 5 de [3] et [5]).

Tout état normal fidèle satisfait la condition KMS pour la valeur  $\beta = 1$  (appelée désormais la condition modulaire) par rapport au groupe d'automorphismes du groupe modulaire correspondant.

**Théorème 2.1.** Soit  $\mathcal{M}$  une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur  $\Omega$ . Alors l'état induit  $\omega$  sur  $\mathcal{M}$  satisfait la condition modulaire par rapport au groupe d'automorphismes du groupe modulaire  $\{\sigma_t \mid t \in \mathbb{R}\}$  associé à la paire  $(\mathcal{M}, \Omega)$ .

Le groupe d'automorphismes du groupe modulaire est alors équipé de l'analyticité associée à la condition KMS, et ceci est un outil puissant dans de nombreuses applications de la théorie modulaire à la physique mathématique. De plus, les propriétés physiques et les interprétations des  tats KMS sont souvent invoquées quand on applique la théorie modulaire à la physique quantique.

Notons qu'alors que la non-trivialité du groupe d'automorphismes du groupe modulaire donne une mesure de nature non-traciale à l'état, la condition KMS pour le groupe d'automorphismes du groupe modulaire fournit le lien manquant entre les valeurs  $\omega(AB)$  et  $\omega(BA)$ , pour tout  $A, B \in \mathcal{M}$  (d'où l'utilisation de terme "modulaire", comme dans la théorie de l'intégration sur les groupes localement compacts).

La condition modulaire est assez restrictive. Seul le groupe modulaire peut satisfaire la condition modulaire pour  $(\mathcal{M}, \Omega)$ , et le groupe modulaire pour un état peut satisfaire la condition modulaire seulement dans les états différant de l'état original par l'action d'un élément dans le centre de  $\mathcal{M}$ .

**Théorème 2.2.** Soit  $\mathcal{M}$  une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur  $\Omega$ , et appelons  $\{\sigma_t\}$  le groupe d'automorphismes du groupe modulaire correspondant. Si l'état induit  $\omega$  satisfait la condition modulaire par rapport au groupe  $\{\alpha_t\}$  des automorphismes de  $\mathcal{M}$ , alors  $\{\alpha_t\}$  doit coïncider avec  $\{\sigma_t\}$ . De plus, un état normal  $\psi$  sur  $\mathcal{M}$  satisfait la condition modulaire par rapport à  $\{\sigma_t\}$  si et seulement si  $\psi(\cdot) = \omega(h \cdot) = \omega(h^{1/2} \cdot h^{1/2})$  pour un opérateur injectif unique positif  $h$  associé au centre de  $\mathcal{M}$ .

Par conséquent, si  $\mathcal{M}$  est un facteur, deux états distincts ne peuvent pas partager le même groupe d'automorphismes du groupe modulaire. La relation entre les groupes d'automorphismes du groupe modulaire de deux états différents sera décrite plus en détails.

### Une algèbre et deux états

Considérons une algèbre de von Neumann  $\mathcal{M}$  avec deux vecteurs cycliques et séparateurs  $\Omega$  et  $\Phi$ , et dénotons par  $\omega$  et  $\phi$ , respectivement, les états induits sur  $\mathcal{M}$ . Dénotons par  $\{\sigma_t^\omega\}$  et  $\{\sigma_t^\phi\}$  les groupes modulaires correspondant. Il y a une relation générale entre les groupes d'automorphismes du groupe modulaire de ces états.

**Théorème 2.3.** Il existe une application  $\sigma$ -fortement continue  $\mathbb{R} \ni t \mapsto U_t \in \mathcal{M}$  telle que

- (1)  $U_t$  est unitaire, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $U_{t+s} = U_t \sigma_t^\omega(U_s)$ , pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$ ;
- (3)  $\sigma_t^\phi(A) = U_t \sigma_t^\omega(A) U_t^*$ , pour tout  $A \in \mathcal{M}$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

Le un-cocycle  $\{U_t\}$  est communément appelé le *cocycle dérivatif* de  $\phi$  par rapport à  $\omega$  et on écrit  $U_t = (D\phi : D\omega)_t$ . Il y a une règle de déduction pour ce dérivatif, qui est : Si  $\phi, \psi$  et  $\rho$  sont des états normaux fidèles sur  $\mathcal{M}$ , alors  $(D\psi : D\phi)_t = (D\psi : D\rho)_t (D\rho : D\phi)_t$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On peut en dire davantage à propos du cocycle dérivatif si les états satisfont l'une quelconque des conditions du théorème suivant.

**Théorème 2.4.** Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (1)  $\phi$  est  $\{\sigma_t^\omega\}$ -invariant ;

- (2)  $\omega$  est  $\{\sigma_t^\phi\}$ -invariant ;
- (3) il existe un unique opérateur positif injectif  $h$  associé à  $\mathcal{M}^{\sigma^\omega} \cap \mathcal{M}^{\sigma^\phi}$  tel que  $\omega(\cdot) = \phi(h \cdot) = \phi(h^{1/2} \cdot h^{1/2})$ ;
- (4) il existe un unique opérateur positif injectif  $h'$  associé à  $\mathcal{M}^{\sigma^\omega} \cap \mathcal{M}^{\sigma^\phi}$  tel que  $\phi(\cdot) = \omega(h' \cdot) = \omega(h'^{1/2} \cdot h'^{1/2})$ ;
- (5) les normes des fonctionnelles linéaires  $\omega + i\phi$  et  $\omega - i\phi$  sont égales ;
- (6)  $\sigma_t^\omega \sigma_s^\phi = \sigma_s^\phi \sigma_t^\omega$ , pour tous  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Les conditions du Théorème 2.4 s'avèrent être équivalentes au fait que le cocycle dérivatif est une représentation.

**Théorème 2.5.** Le cocycle  $\{U_t\}$  entrelaçant  $\{\sigma_t^\omega\}$  avec  $\{\sigma_t^\phi\}$  est un groupe de représentation du groupe additif des réels si et seulement si  $\phi$  et  $\omega$  satisfont les conditions du Théorème 2.4. Dans ce cas,  $U(t) = h^{-it}$ .

L'opérateur  $h' = h^{-1}$  dans le Théorème 2.4 est appelé le *dérivatif de Radon-Nikodym* de  $\phi$  par rapport à  $\omega$  et il est souvent dénoté par  $d\phi/d\omega$ , du fait du résultat suivant, que, si l'algèbre  $\mathcal{M}$  est abélienne, c'est le théorème bien connu de Radon-Nikodym de la théorie de la mesure.

**Théorème 2.6.** Si  $\phi$  et  $\omega$  sont des fonctionnelles linéaires positives normales sur  $\mathcal{M}$  telles que  $\phi(A) \leq \omega(A)$ , pour tous les éléments positifs  $A \in \mathcal{M}$ , alors il existe un élément unique  $h^{1/2} \in \mathcal{M}$  tel qu'il existe un unique opérateur positif injectif tel que  $\phi(\cdot) = \omega(h^{1/2} \cdot h^{1/2})$  et  $0 \leq h^{1/2} \leq 1$ .

Bien que nous n'ayons pas assez de place pour traiter le sujet correctement, les analogies avec la théorie de la mesure ne sont pas accidentelles. En effet, toute trace normale sur une algèbre (finie) de von Neumann  $\mathcal{M}$  donne naissance à une théorie de l'intégration non-commutative de manière naturelle. La théorie modulaire permet une extension de cette théorie au réglage des fonctionnelles fidèles normales  $\eta$  sur les algèbres de von Neumann  $\mathcal{M}$  de n'importe quel type, permettant la définition d'espaces non-commutatifs  $L^p, L^p(\mathcal{M}, \eta)$ .

### 3. Invariants modulaires et classification des algèbres de von Neumann

Comme mentionné précédemment, la structure modulaire apporte de l'information sur l'algèbre. Ceci est mieux mis en évidence dans la structure des facteurs de type III. Comme cette théorie est plutôt compliquée, seul un survol de quelques-uns des résultats peut être donné.

Si  $\mathcal{M}$  est une algèbre de type III, alors son produit croisé  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R}$  relatif au groupe d'automorphismes du groupe modulaire de tout état normal fidèle  $\omega$  sur  $\mathcal{M}$  est une algèbre de type  $\text{II}_\infty$  avec une trace normale semi-finie fidèle  $\tau$  telle que  $\tau \circ \theta_t = e^{-t} \tau$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , où  $\theta$  est le dual de  $\sigma^\omega$  sur  $\mathcal{N}$ . De plus, l'algèbre  $\mathcal{M}$  est isomorphe au produit croisé  $\mathcal{N} \rtimes_\theta \mathbb{R}$ , et la décomposition est unique

dans un sens très fort. Ce théorème de structure entraîne l'existence d'invariants algébriques importants pour  $\mathcal{M}$ , qui a de nombreuses conséquences, l'une d'entre elles étant fournie explicitement ci-dessous.

Si  $\omega$  est un état normal fidèle sur une algèbre de von Neumann  $\mathcal{M}$  induite par  $\Omega$ , dénotons par  $\Delta_\omega$  l'opérateur modulaire associé à  $(\mathcal{M}, \Omega)$  et dénotons par  $\text{sp } \Delta_\omega$  le spectre de  $\Delta_\omega$ . L'intersection

$$S'(\mathcal{M}) = \bigcap \text{sp } \Delta_\omega$$

sur tous les états fidèles normaux  $\omega$  de  $\mathcal{M}$  est un invariant algébrique de  $\mathcal{M}$ .

**Théorème 3.1.** Soit  $\mathcal{M}$  un facteur agissant sur un espace de Hilbert séparable. Si  $\mathcal{M}$  est de type III, alors  $0 \in S'(\mathcal{M})$ ; sinon,  $S'(\mathcal{M}) = \{0, 1\}$  si  $\mathcal{M}$  est de type  $\text{I}_\infty$  ou  $\text{II}_\infty$  et  $S'(\mathcal{M}) = \{1\}$  sinon. Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un facteur de type III.

- (i)  $\mathcal{M}$  est de type  $\text{III}_\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , si et seulement si  $S'(\mathcal{M}) = \{0\} \cup \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .
- (ii)  $\mathcal{M}$  est de type  $\text{III}_0$  si et seulement si  $S'(\mathcal{M}) = \{0, 1\}$ .
- (iii)  $\mathcal{M}$  est de type  $\text{III}_1$  si et seulement si  $S'(\mathcal{M}) = [0, \infty)$ .

Dans certaines situations physiquement pertinentes, les spectres des opérateurs modulaires des états normaux fidèles coïncident, de telle façon que le théorème 3.1 entraîne qu'il suffit de calculer le spectre de n'importe quel opérateur modulaire convenablement choisi pour déterminer le type de  $\mathcal{M}$ . Dans d'autres situations, il y a des états particuliers  $\omega$  tels que  $S'(\mathcal{M}) = \text{sp } \Delta_\omega$ . Un tel exemple est fourni par les systèmes asymptotiquement abéliens. Une algèbre de von Neumann  $\mathcal{M}$  est dite être *asymptotiquement abélienne* s'il existe une séquence  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'automorphismes de  $\mathcal{M}$  telle que la limite de  $\{A\alpha_n(B) - \alpha_n(B)A\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans la topologie des opérateurs forts est zéro, pour tout  $A, B \in \mathcal{M}$ . Si l'état  $\omega$  est  $\alpha_n$ -invariant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\text{sp } \Delta_\omega$  est contenu dans  $\text{sp } \Delta_\phi$ , pour tous les états fidèles normaux  $\phi$  sur  $\mathcal{M}$ , de telle façon que  $S'(\mathcal{M}) = \text{sp } \Delta_\omega$ . Si, de plus,  $\text{sp } \Delta_\omega = [0, \infty)$ , alors  $\text{sp } \Delta_\omega = \text{sp } \Delta_\phi$ , pour tout  $\phi$  comme décrit.

#### 4. Cônes auto-duals

Dénotons par  $j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  l'\*-isomorphisme antilinéaire défini par  $j(A) = JAJ$ ,  $A \in \mathcal{M}$ . Le *cône naturel positif*  $\mathcal{P}^\natural$  associé à la paire  $(\mathcal{M}, \Omega)$  est défini comme la fermeture dans  $\mathcal{H}$  de l'ensemble des vecteurs

$$\{Aj(A)\Omega \mid A \in \mathcal{M}\}.$$

Dénotons par  $\mathcal{M}_+$  l'ensemble de tous les éléments positifs de  $\mathcal{M}$ . Le théorème suivant recense les attributs essentiels du cône naturel.

**Théorème 4.1.**

- (1)  $\mathcal{P}^\natural$  coïncide avec la fermeture dans  $\mathcal{H}$  de l'ensemble  $\{\Delta^{1/4}A\Omega \mid A \in \mathcal{M}_+\}$ .
- (2)  $\Delta^{it}\mathcal{P}^\natural = \mathcal{P}^\natural$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

- (3)  $J\Phi = \Phi$  pour tout  $\Phi \in \mathcal{P}^\natural$ .
- (4)  $Aj(A)\mathcal{P}^\natural \subset \mathcal{P}^\natural$  pour tout  $A \in \mathcal{M}$ .
- (5)  $\mathcal{P}^\natural$  est un cône pointé, auto-dual, dont le sous-espace vectoriel engendré coïncide avec  $\mathcal{H}$ .
- (6) Si  $\Phi \in \mathcal{P}^\natural$ , alors  $\Phi$  est cyclique pour  $\mathcal{M}$  si et seulement si  $\Phi$  est séparableur pour  $\mathcal{M}$ .
- (7) Si  $\Phi \in \mathcal{P}^\natural$  est cyclique, et donc séparableur, pour  $\mathcal{M}$ , alors la conjugaison modulaire dans le cône naturel associé à la paire  $(\mathcal{M}, \Phi)$  coïncide avec  $J$  et  $\mathcal{P}^\natural$ , respectivement.
- (8) Pour toute fonctionnelle linéaire positive normale  $\phi$  sur  $\mathcal{M}$ , il existe un vecteur unique  $\Phi_\phi \in \mathcal{P}^\natural$  tel que  $\phi(A) = \langle \Phi_\phi, A\Phi_\phi \rangle$ , pour tout  $A \in \mathcal{M}$ .

En fait, les algèbres  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  sont caractérisées de manière unique par le cône naturel  $\mathcal{P}^\natural$  [4]. À la lumière de (8), si  $\alpha$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}$ , alors

$$V(\alpha)\Phi_\phi = \Phi_{\phi \circ \alpha^{-1}}$$

définit un opérateur isométrique sur  $\mathcal{P}^\natural$ , qui par (5) s'étend à un opérateur unitaire sur  $\mathcal{H}$ . L'application  $\alpha \mapsto V(\alpha)$  définit une représentation unitaire du groupe des automorphismes  $\text{Aut}(\mathcal{M})$  sur  $\mathcal{M}$  de telle manière que  $V(\alpha)AV(\alpha)^{-1} = \alpha(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{M}$  et  $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ . En effet, on a le théorème suivant.

**Théorème 4.2.** Soit  $\mathcal{M}$  une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparableur  $\Omega$ . Le groupe  $\mathcal{V}$  de tous les unitaires  $V$  satisfaisant

$$V\mathcal{M}V^* = \mathcal{M}, \quad VJV^* = J, \quad V\mathcal{P}^\natural = \mathcal{P}^\natural$$

est isomorphe à  $\text{Aut}(\mathcal{M})$  selon l'application suivante  $\alpha \mapsto V(\alpha)$ , qui est appelée l'implémentation standard de  $\text{Aut}(\mathcal{M})$ .

Souvent les (anti-)automorphismes de  $\mathcal{M}$  sont d'un intérêt physique particulier parce qu'ils laissent  $\omega$  invariant. Ils peuvent seulement être implémentés par des (anti-)unitaires qui laissent la paire  $(\mathcal{M}, \Omega)$  invariante. En fait, si  $U$  est un opérateur unitaire ou anti-unitaire satisfaisant  $U\Omega = \Omega$  et  $U\mathcal{M}U^* = \mathcal{M}$ , alors  $U$  commute à la fois avec  $J$  et  $\Delta$ .

## 5. Deux algèbres et un état

Motivée par des applications à la théorie quantique des champs, l'étude des structures modulaires associées aux algèbres de von Neumann à un état et plus a commencé (voir l'article de survol [2] pour des références et des détails). Soit  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  des algèbres de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparableur  $\Omega$ .  $\Delta_{\mathcal{N}}, J_{\mathcal{N}}$  et  $\Delta_{\mathcal{M}}, J_{\mathcal{M}}$  dénoteront les objets modulaires correspondant. La structure  $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Omega)$  est appelée une *inclusion modulaire de  $\pm$ -demi-côté* si  $\Delta_{\mathcal{M}}^{it}\mathcal{N}\Delta_{\mathcal{M}}^{-it} \subset \mathcal{N}$ , pour tout  $\pm t \geq 0$ .

**Théorème 5.1.** Soit  $\mathcal{M}$  une algèbre de von Neumann de vecteur cyclique et séparateur  $\Omega$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe une sous-algèbre propre  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  telle que  $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Omega)$  est une inclusion modulaire à  $\mp$ -demi-côté.
- (ii) Il existe un groupe unitaire  $\{U(t)\}$  à générateur positif tel que

$$U(t)\mathcal{M}U(t)^{-1} \subset \mathcal{M}, \text{ pour tout } \pm t \geq 0, \quad \text{et} \quad U(t)\Omega = \Omega, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$\Delta_{\mathcal{M}}^{it}U(s)\Delta_{\mathcal{M}}^{-it} = \Delta_{\mathcal{N}}^{it}U(s)\Delta_{\mathcal{N}}^{-it} = U(e^{\mp 2\pi t} s)$$

et

$$J_{\mathcal{M}}U(s)J_{\mathcal{M}} = J_{\mathcal{N}}U(s)J_{\mathcal{N}} = U(-s),$$

pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$ . De plus,  $\mathcal{N} = U(\pm 1)\mathcal{M}U(\pm 1)^{-1}$ , et si  $\mathcal{M}$  est un facteur, il doit être de type  $\text{III}_1$ .

La richesse de cette structure est davantage suggérée par le théorème suivant.

**Théorème 5.2.**

- (a) Soit  $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_1, \Omega)$  et  $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_2, \Omega)$  de demi-côté  $-$ , resp. de demi-côté  $+$ , les inclusions modulaires satisfont la condition  $J_{\mathcal{N}_1}J_{\mathcal{N}_2} = J_{\mathcal{M}}J_{\mathcal{N}_2}J_{\mathcal{N}_1}J_{\mathcal{M}}$ . Alors les unitaires modulaires  $\Delta_{\mathcal{M}}^{it}, \Delta_{\mathcal{N}_1}^{is}, \Delta_{\mathcal{N}_2}^{iu}$ ,  $s, t, u \in \mathbb{R}$ , engendrent une représentation fidèle continue unitaire du composant identité du groupe d'isométries de l'espace de Minkowski à deux dimensions.
- (b) Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$  des algèbres de von Neumann avec un vecteur cyclique commun et séparateur  $\Omega$ . Si  $(\mathcal{M}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \Omega)$  et  $(\mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \Omega)$  sont de demi-côté  $-$ , resp. de demi-côté  $+$ , les inclusions modulaires telles que  $J_{\mathcal{N}}\mathcal{M}J_{\mathcal{N}} = \mathcal{M}$ , alors les unitaires modulaires  $\Delta_{\mathcal{M}}^{it}, \Delta_{\mathcal{N}}^{is}, \Delta_{\mathcal{N} \cap \mathcal{M}}^{iu}$ ,  $s, t, u \in \mathbb{R}$ , engendrent une représentation unitaire continue fidèle de  $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ .

Cela a amené à une notion encore plus utile. Si  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  et  $\Omega$  est cyclique pour  $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ , alors  $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Omega)$  est dit être *intersection  $\pm$ -modulaire* si à la fois les  $(\mathcal{M}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \Omega)$  et les  $(\mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \Omega)$  sont des inclusions à  $\pm$ -demi-côtés modulaires

$$J_{\mathcal{N}} \left[ \lim_{t \rightarrow \mp \infty} \Delta_{\mathcal{N}}^{it} \Delta_{\mathcal{M}}^{-it} \right] J_{\mathcal{N}} = \lim_{t \rightarrow \mp \infty} \Delta_{\mathcal{M}}^{it} \Delta_{\mathcal{N}}^{-it},$$

où l'existence de limites pour l'opérateur fort est assurée par les assertions précédentes. Un exemple de l'utilité de cette structure est le théorème suivant.

**Théorème 5.3.** Soient  $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{L}$  des algèbres de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur  $\Omega$ . Si les  $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \Omega)$  et les  $(\mathcal{N}', \mathcal{L}, \Omega)$  sont des intersections  $-$ -modulaires et les  $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \Omega)$  sont des intersections  $+$ -modulaires, alors les unitaires  $\Delta_{\mathcal{M}}^{it}, \Delta_{\mathcal{N}'}^{is}, \Delta_{\mathcal{L}}^{iu}$ ,  $s, t, u \in \mathbb{R}$ , engendrent une représentation fidèle continue de  $SO^\uparrow(1, 2)$ .

Ces résultats et leurs extensions à des nombres plus grands d'algèbres ont été développés pour une application à la théorie des champs quantiques, mais on peut anticiper que les inclusions modulaires à demi-côtés trouveront un usage d'application plus étendu. La théorie modulaire s'est aussi avérée fructueuse dans la théorie des inclusions  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  des algèbres proprement infinies avec indice fini ou infini.

## 6. Applications à la théorie quantique

La théorie de Tomita-Takesaki a trouvé de nombreuses applications dans la théorie quantique des champs et dans la mécanique quantique statistique. Comme mentionné précédemment, le groupe d'automorphismes du groupe modulaire satisfait la condition KMS, une propriété qui a un sens physique dans la théorie quantique des systèmes à plusieurs particules, qui inclut la mécanique statistique quantique et la théorie quantique des champs. Dans de tels paradigmes, il se trouve que pour une algèbre d'observables adéquate  $\mathcal{M}$  et un état  $\omega$ , un groupe d'automorphismes  $\{\sigma_{\beta t}\}$  représentant l'évolution temporelle satisfait la condition modulaire. Par conséquent, d'un côté,  $\{\sigma_{\beta t}\}$  est le groupe d'automorphismes du groupe modulaire de la paire  $(\mathcal{M}, \Omega)$ , et, d'un autre côté,  $\omega$  est un état d'équilibre à l'inverse de la température  $\beta$ , avec toutes les conséquences que ces deux états de fait entraînent.

Mais il est devenu de plus en plus clair que les objets modulaires  $\Delta^{it}$ ,  $J$ , de certaines algèbres d'observables et d'états codaient une information physique supplémentaire. En 1975, on a découvert que si on considère les algèbres d'observables associées à une théorie des champs quantique avec un composant fini satisfaisant les axiomes de Wightman, alors les objets modulaires associés à l'état de vide et les algèbres d'observables localisées dans certaines régions en forme de coins dans l'espace de Minkowski ont un contenu géométrique. En fait, le groupe unitaire  $\{\Delta^{it}\}$  implémente le groupe de Lorentz laissant les régions en question invariantes (cette propriété est maintenant appelée la *covariance modulaire*), et l'involution modulaire  $J$  implémente la réflexion de l'espace-temps par rapport au côté du coin, de même qu'une conjugaison de charge. Cette découverte a engendré une activité de recherche intense<sup>2</sup>.

### 6.1. Énergie positive

En physique quantique, le développement temporel du système est souvent représenté par un groupe fortement continu  $\{U(t) = e^{itH} \mid t \in \mathbb{R}\}$  d'opérateurs unitaires, et le générateur  $H$  est interprété comme l'énergie totale du système. Il y a un lien entre la structure modulaire et l'énergie positive, qui a trouvé de nombreuses applications en théorie quantique des champs. Ce résultat est crucial dans le développement du théorème 5.1 et a motivé en 1975 la découverte mentionnée ci-dessus, maintenant communément appelée Théorème de Bisognano-Wichmann.

**Théorème 6.1.** Soit  $\mathcal{M}$  une algèbre de von Neumann avec un vecteur cyclique et séparateur  $\Omega$ , et soit  $\{U(t)\}$  un groupe unitaire continu satisfaisant  $U(t)\mathcal{M}U(-t) \subset \mathcal{M}$ , pour tout  $t \geq 0$ . Alors n'importe quelles deux des conditions suivantes en impliquent une troisième.

(1)  $U(t) = e^{itH}$ , avec  $H \geq 0$ ;

---

2. Voir [1,2,5] pour de plus amples détails et références.

(2)  $U(t)\Omega = \Omega$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ;

(3)  $\Delta^{it}U(s)\Delta^{-it} = U(e^{-2\pi t}s)$  et  $JU(s)J = U(-s)$ , pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$ .

## 6.2. Nucléarité modulaire et propriétés de l'espace des phases

La théorie modulaire peut être utilisée pour exprimer les propriétés physiques significatives des “espaces des phases” quantiques par une condition de compacité ou de nucléarité de certaines applications. Dans sa forme initiale, la condition était formulée en fonction de l'Hamiltonien, l'opérateur d'énergie globale des théories dans l'espace de Minkowski. Les indications ci-dessus que les opérateurs modulaires transportent de l'information à propos de l'énergie du système furent renforcées quand on montra qu'une formulation en termes d'opérateurs modulaires était essentiellement équivalente.

Soient  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$  des sous-régions ouvertes non vides délimitées de l'espace de Minkowski avec leurs algèbres d'observables correspondantes  $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$  dans une représentation vide avec vecteur vide  $\Omega$ , et appelons  $\Delta$  l'opérateur modulaire associé à  $(\mathcal{A}(\mathcal{O}_2), \Omega)$  (par le théorème de Reeh-Schlieder,  $\Omega$  est cyclique et séparateur pour  $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ ). Pour tout  $\lambda \in (0, 1/2)$ , on définit l'application  $\Xi_\lambda : \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \rightarrow \mathcal{H}$  par  $\Xi_\lambda(A) = \Delta^\lambda A \Omega$ . La compacité de n'importe laquelle de ces applications implique la compacité de toutes les autres. De plus, les normes  $\ell^p$  (nucléaires) de ces applications sont reliées entre elles et fournissent une mesure du nombre de degrés de liberté locaux du système. Des conditions adéquates sur les applications en fonction de ces normes entraînent une condition d'indépendance statistique forte appelée la propriété de séparation<sup>3</sup>. Inversement, la propriété de séparation implique la compacité de toutes ces applications. De plus, l'existence d'états d'équilibre de température de l'algèbre globale des observables peut être déduite de conditions adéquates sur ces normes dans le secteur vide.

L'avantage conceptuel de la compacité modulaire et des conditions de nucléarité comparées à la forme originelle par l'Hamiltonien réside dans le fait qu'elles ont aussi du sens pour les systèmes quantiques dans les espaces-temps courbes, où les opérateurs d'énergie globale (i.e. les générateurs correspondant aux champs de vecteurs globaux de Killing) peuvent ne pas exister.

## 6.3. Position modulaire et théorie quantique des champs

La caractérisation de la position “géométrique” relative d'algèbres basée sur les notions d'inclusion modulaire et d'intersection modulaire a été directement motivée par le théorème de Bisognano-Wichmann. Les algèbres d'observables associées à des régions de coins convenablement choisies dans l'espace de Minkowski fournissent des exemples dont la structure principale pourrait être abstraite pour une application plus générale, ayant pour résultat les notions présentées dans la Section 5.

Le Théorème 5.2 (b) a été utilisé pour construire à partir de deux algèbres et des inclusions modulaires indiquées de demi-côtés une théorie quantique des champs conforme sur le cercle (à rayon de

---

3. split property.

lumière compactifié) avec une énergie positive. Et puisque la partie chirale d'un modèle de champ quantique conforme en deux dimensions d'espace-temps amène de telles inclusions modulaires à demi-côtés, étudier de telles inclusions dans le théorème 5.2 (b) équivaut à étudier de telles théories des champs. Les Théorèmes 5.2 (a) et 5.3 et leurs généralisations aux inclusions impliquant jusqu'à 6 algèbres ont été utilisés pour construire des réseaux covariants de Poincaré des algèbres d'observables (la forme algébrique des théories quantiques des champs) satisfaisant la condition sur le spectre sur l'espace de Minkowski  $d + 1$ -dimensionnel pour  $d = 1, 2, 3$ . Inversement, de telles théories quantiques des champs amènent naturellement à de tels systèmes d'algèbres.

Cette relation intime semblerait ouvrir la possibilité de construire des théories quantiques des champs à partir d'un nombre limité d'inclusions/intersections modulaires.

#### 6.4. Action géométrique modulaire

Le fait que les objets modulaires, dans la théorie quantique des champs, associés à des régions à forme de coins dans l'état vide de l'espace de Minkowski aient un sens géométrique ("l'action modulaire géométrique") a été découvert au départ dans le modèle des axiomes de Wightman. Comme la théorie quantique algébrique des champs (AQFT) ne repose pas sur le concept des champs de Wightman, il était naturel de se demander (1) quand l'action modulaire géométrique peut avoir lieu dans AQFT et (2) quelles conséquences physiquement pertinentes découlent de cette fonctionnalité ?

Il y a deux approches à l'étude de l'action modulaire géométrique. Dans la première, l'attention est portée sur la covariance modulaire, exprimée en fonction des groupes modulaires associés aux algèbres de coins et à l'état de vide de l'espace de Minkowski. La covariance modulaire a été démontrée comme pouvant être obtenue dans AQFT conformément invariante, dans n'importe quelle théorie de masse satisfaisant à la complétude asymptotique, et aussi en la présence d'autres suppositions physiques naturelles. Pour mentionner seulement trois de ses conséquences, à la fois le théorème statistique de spin, et le théorème PCT, ainsi que l'existence d'une représentation unitaire continue du groupe de Poincaré agissant de façon covariante sur les algèbres d'observables et satisfaisant les conditions de spectre, découlent de la covariance modulaire.

Dans une seconde approche de l'action modulaire géométrique, les involutions modulaires sont regardées en premier lieu. Ici, aucune connexion *a priori* entre les objets modulaires et les isométries de l'espace-temps n'est supposée. La supposition centrale, étant donné un vecteur d'état  $\Omega$  et les algèbres de von Neumann des observables localisées  $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}$  sur l'espace-temps, est qu'il existe une famille  $\mathcal{W}$  d'espaces-temps telle que  $J_{W_1} \mathcal{R}(W_2) J_{W_1} \in \{\mathcal{R}(W) \mid W \in \mathcal{W}\}$ , pour tout  $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ . Cette condition ne fait pas appel explicitement aux isométries ou à d'autres attributs spécifiques et est ainsi applicable en principe aux théories quantiques des champs sur des espaces-temps courbés généraux.

Il a été montré que pour certains espaces-temps, incluant l'espace de Minkowski, sous certaines suppositions techniques additionnelles, les involutions modulaires codent suffisamment d'information pour déterminer la dynamique de la théorie, le groupe d'isométries de l'espace-temps, et une représentation unitaire continue du groupe d'isométries qui agit de façon covariante sur les observables et laisse l'état invariant. Dans certains cas incluant l'espace de Minkowski, il est même possible de dé-

river l'espace-temps lui-même du groupe  $\mathcal{J}$  engendré par les involutions modulaires  $\{J_W \mid W \in \mathcal{W}\}$ .

Les unitaires modulaires  $\Delta_W^{it}$  entrent dans cette approche à travers une condition qui est destinée à assurer la stabilité de la théorie, notamment que  $\Delta_W^{it} \in \mathcal{J}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $W \in \mathcal{W}$ . Dans l'espace de Minkowski, cette condition additionnelle entraîne que la représentation dérivée du groupe de Poincaré satisfait la condition sur le spectre.

## 6.5. Applications avancées

Comme observé précédemment, à travers sa connexion proche avec la condition KMS, la théorie modulaire entre naturellement dans la thermodynamique de l'équilibre de systèmes à plusieurs corps. Mais dans le travail récent sur la théorie de la thermodynamique du non-équilibre, elle joue également un rôle en donnant un sens mathématique à la notion de systèmes quantiques à équilibre thermodynamique local. La théorie modulaire s'est aussi avérée utile dans les récents développements dans la théorie des règles de super-sélection et leurs secteurs connexes, les champs de charges et transports de charges.

## Références

- [1] Baumgärtel H., Wollenberg M. (1992) *Causal Nets of Operator Algebras*. Akademie-Verlag, Berlin.
- [2] Borchers H.J. (2000) On revolutionizing quantum field theory with Tomita's modular theory, *Journal of Mathematical Physics*, **41**, 3604-3673.
- [3] Bratteli O., Robinson D.W. (1981) *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.
- [4] Connes A. (1974) Caractérisation des algèbres de von Neumann comme espaces vectoriels ordonnés, *Annales de l'Institut Fourier*, **24**, 121-155.
- [5] Haag R. (1992) *Local Quantum Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.
- [6] Kadison R.V., Ringrose J.R. (1986) *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Volume II. Academic Press, Orlando.
- [7] Pedersen G.K. (1979) *C\*-Algebras and Their Automorphism Groups*. Academic Press, New York.
- [8] Stratila, S. (1981) *Modular Theory in Operator Algebras*. Abacus Press, Tunbridge Wells.
- [9] Takesaki M. (1970) *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and Its Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 128. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.
- [10] Takesaki M. (2003) *Theory of Operator Algebras II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York.

## Cohomologie cyclique et géométrie différentielle non-commutative

Alain CONNES

Proceedings du Congrès international des mathématiciens  
Berkeley, Californie, Etats-Unis, 1986

La cohomologie cyclique est apparue indépendamment à partir de deux courants différents d'idées, la  $K$ -théorie algébrique et la géométrie différentielle non-commutative. J'essaierai d'expliquer dans cet article le sens de la géométrie différentielle non-commutative. Le besoin de considérer de tels espaces et de développer pour eux les analogues des outils de géométrie différentielle est mieux compris dans les deux exemples suivants. Dans les deux cas, on essaie de prouver un résultat de géométrie différentielle classique, et une preuve heuristique est possible si l'on accepte la nouvelle définition de l'espace.

*Premier exemple.*

THÉORÈME (LICHNEROWICZ, 1961). *Si  $M$  est un feuilletage compact de spin dont le genre  $\hat{A}$  est non nul, alors il est impossible de doter  $M$  d'une métrique Riemannienne de courbure scalaire strictement positive.*

La preuve du résultat utilise une idée globale simple. Par l'identité de Lichnerowicz, le carré de l'opérateur de Dirac est  $\nabla * \nabla + \frac{1}{4}\chi$  où  $\nabla * \nabla$  est un opérateur positif et  $\chi$  est la courbure scalaire. Ainsi pour  $\chi > 0$ , l'opérateur de Dirac a un indice nul. Mais par le théorème de l'indice  $\text{indice}(\text{Dirac}) = \hat{A}(M) \neq 0$ . CQFD.

On a un résultat plus fort à propos de la non-existence d'une métrique de courbure scalaire positive qui est le résultat suivant

THÉORÈME [14]. *Soit  $M$  un feuilletage compact orienté avec  $\hat{A}(M) \neq 0$ . Alors il n'y a pas de sous-fibré de spin intégrable  $F$  de  $TM$  de courbure scalaire strictement positive.*

Donnons une preuve heuristique de ce résultat qui fonctionnera lorsque nous obtiendrons les bons outils. L'idée est la suivante : étant donné un sous-fibré intégrable  $F$  du fibré tangent de  $M$ , on peut a priori l'intégrer et obtenir un feuilletage de  $M$  qui crée un nouvel espace  $B$  de feuilles de cette variété feuilletée (Voir Figure 1).

Maintenant,  $\hat{A}(M)$  est l'indice de l'opérateur de Dirac, au moins si  $M$  est spin, ou, équivalentement, c'est le pushforward  $\pi_!(L)$  du fibré trivial  $L$  sur  $M$  par la fonction  $\pi : M \rightarrow \text{pt}$ . Comme  $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ , où  $\pi_2$  est la projection de  $M$  sur l'espace de feuilles  $B$ , on a  $\pi_!(L) = \pi_1!(\pi_2!(L))$ ,

mais  $\pi_2!(L) \in K(B)$  est l'indice de la famille d'opérateurs de Dirac le long des feuilles et par conséquent est nul puisque la courbure scalaire des feuilles est strictement positive.

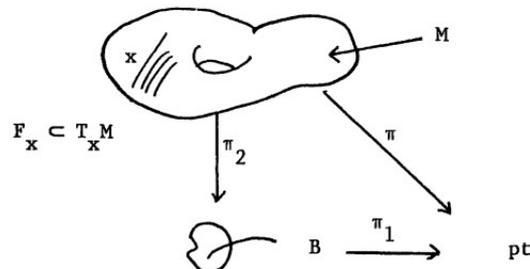


FIGURE 1

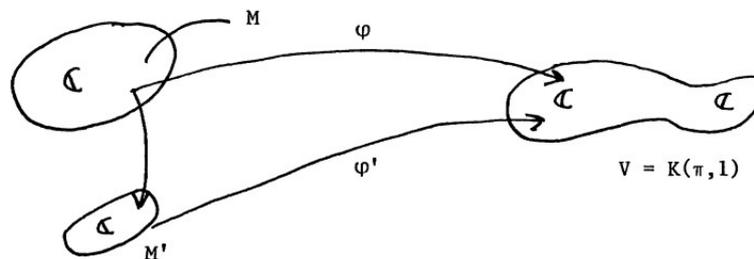


FIGURE 2

Ce raisonnement ne marche pas si l'on a juste une fibration ; on applique alors le théorème de l'indice pour les familles. Pourtant, en général, étant donné un sous-fibré intégrable  $F$ , il est impossible de décider s'il crée une fibration ou un feuilletage. Par exemple, sur le deux-tore  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ , l'équation  $dy = \theta dx$  définit une fibration ssi  $\theta$  est rationnel. Du coup, il est impossible de se restreindre au cas des fibrations, et on a besoin de gérer des espaces comme l'espace  $B$  des feuilles d'un feuilletage arbitraire. On a besoin de nouveaux outils pour comprendre et utiliser de tels espaces parce que vus seulement comme des espaces topologiques ordinaires, ils ne sont d'aucune utilité ; en général, ils devraient apporter la topologie globale et  $K(B)$  serait trivial.

*Second exemple.* Nous passons maintenant de l'espace des feuilles d'un feuilletage à un autre exemple lié aux groupes discrets. Il vient d'un problème énoncé par Novikov - l'invariance d'homotopie des plus grandes signatures. Soit  $M$  une variété compacte orientée et  $\varphi$  une fonction de  $M$  vers un  $K(\pi, 1)$  espace  $V$ . Par exemple, on peut prendre pour  $\varphi$  la fonction qui classifie la couverture universelle de  $M$ . Pour chaque classe de cohomologie  $\omega \in H^*(V, \mathbf{C}) = H^*(\pi, \mathbf{C})$ , la plus grande signature de la paire  $(M, \varphi)$  est donnée par le scalaire  $\langle \mathcal{L}_M \cdot \varphi^*(\omega), [M] \rangle$  où  $\mathcal{L}_M$  est le  $L$  genre de  $M$  et  $\varphi^*(\omega)$  est le pullback de  $\omega$  par  $\varphi$ . Le problème est le suivant : le nombre bien défini ci-dessus est-il un invariant d'homotopie de la paire  $(M, \varphi)$  ? (voir Figure 2).

Quand  $V = \text{pt}$ , on obtient la signature ordinaire de  $M$ , qui est un invariant d'homotopie. Par le travail de Wall et Miscenko, en théorie de la chirurgie équivariante, on peut assigner une signature  $\pi$ -équivariante au recouvrement  $\tilde{M}$  de  $M$  pullbacké par  $\varphi$  du recouvrement universel  $\tilde{V}$  de  $V$ . De plus, cette signature équivariante appartient (en négligeant la torsion) au groupe de Witt de

l'anneau de groupe  $\mathbf{C}\pi$  et est un invariant d'homotopie,  $\text{Signature}_\pi(M) \in \text{Witt}(\mathbf{C}\pi)$ . Quand  $\pi$  est *commutatif*, on peut prouver l'invariance d'homotopie des plus grandes signatures comme suit. Il y a par exemple un *espace* assigné au groupe  $\pi$ , l'espace des caractères, i.e., le dual  $\hat{\pi}$ , qui est Hausdorff et compact, de dimension finie si  $\pi$  est finiment engendré. Alors l'anneau de groupes  $\mathbf{C}\pi$  intègre comme sous-anneau l'anneau  $C(\hat{\pi})$  des fonctions continues sur  $\hat{\pi}$  :

$$\mathbf{C}\pi \subset C(\hat{\pi}).$$

La diagonalisation des formes quadratiques sur  $C(\hat{\pi})$  amène une fonction du groupe de Witt de  $\mathbf{C}\pi$  sur le  $K^0$  groupe de  $\hat{\pi}$  :

$$\text{Witt } \mathbf{C}\pi \rightarrow K^0(\hat{\pi}).$$

Maintenant n'importe quel

$$\omega \in H^n(V, \mathbf{C}) = H^n(\pi, \mathbf{C})$$

est représenté par un cocycle de groupes  $\omega(g^1, \dots, g^n)$  totalement antisymétrique en les  $g^i$ .

On définit alors de manière unique un flot  $C$  sur  $\hat{\pi}$  par l'égalité :

$$\langle c, f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^n \rangle = \sum_{\prod_0^n g^i = 1} \hat{f}^0(g^0) \hat{f}^1(g^1) \dots \hat{f}^n(g^n) \omega(g^1, \dots, g^n)$$

où les  $f^i$  sont les fonctions sur  $\hat{\pi}$  de telle façon que leur transformation de Fourier  $\hat{f}^i$  soient des fonctions sur le groupe  $\pi$  lui-même. Le flot  $C$  est fermé parce que  $\omega$  est un cocycle de groupes.

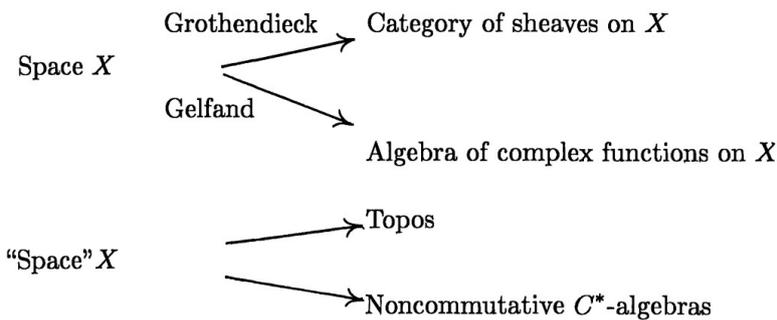
Le lemme principal, alors, qui est un corollaire du théorème de l'indice pour les familles, dit que si l'on apparie  $C$  avec le caractère de Chern de la signature équivariante, on obtient une signature plus grande :

$$\langle C, \text{Ch}(\text{Signature}_\pi(\widetilde{M})) \rangle = \langle \mathcal{L}_M \cdot \varphi^*(\omega), [M] \rangle.$$

Ainsi le côté droit est invariant par homotopie. CQFD.

En général, *quand*  $\pi$  *n'est pas commutatif*, il n'y a pas d'espace de caractères intéressant et on ne peut pas vraiment parler du dual de  $\pi$  comme d'un espace. Pourtant, et cela sera l'élément clef de cette discussion, on peut assigner une  $C^*$ -algèbre non-commutative à  $\pi$  ; c'est la complétion de l'anneau de groupe  $\mathbf{C}\pi$  agissant sur l'espace de Hilbert  $l^2(\pi)$ .

Une étude attentive des deux exemples précédents révèle que l'on a besoin, de manière à pouvoir procéder, d'une généralisation adéquate de la notion d'espace, qui nous autorisera à traiter à la fois les espaces de feuilles et les duaux des groupes non-commutatifs, comme si c'étaient des espaces ordinaires.



L'idée de base sous-tendant la nouvelle notion d'espace découverte par Grothendieck - et qu'il a appelée "topos" - est que dans un espace topologique ordinaire, le rôle principal n'est plus joué par les points et par leurs relations de proximité, mais par les catégories de faisceaux sur l'espace. En effet, l'espace topologique original peut être retrouvé à partir de cette catégorie et, de plus, si l'on garde vraiment les conditions adéquates satisfaites par de telles catégories, on obtient la notion de topos qui joue un rôle fondamental implicite dans la nouvelle géométrie algébrique. La nouvelle notion d'espace avec laquelle nous allons travailler est basée sur une idée similaire, mais elle assigne un rôle spécifique aux nombres complexes  $\mathbf{C}$  ou, de façon équivalente, à l'analyse fonctionnelle. Elle a pour origine la théorie de Gelfand des  $C^*$ -algèbres. Elle affirme qu'un espace topologique compact  $X$  est caractérisé par la  $*$ -algèbre  $C(X)$  des fonctions continues à valeurs complexes sur  $X$  et que de telles algèbres sont les  $C^*$ -algèbres commutatives les plus générales. Il n'y a donc pas de bonne raison de se restreindre aux  $C^*$ -algèbres commutatives plutôt qu'aux non-commutatives et cette idée remonte aux développements initiaux de la mécanique quantique avec la découverte de la *mécanique matricielle* par Heisenberg. En comprenant, d'un point de vue très optimiste grandement renforcé par l'évidence expérimentale en spectroscopie, l'interaction de la matière avec le champ de radiation, Heisenberg a montré que les observables habituels de la mécanique classique devaient être remplacés par des matrices qui violent la commutativité de la multiplication. Ainsi l'espace des phases des particules quantiques est un des premiers exemples de ce nouveau type d'espaces que nous allons traiter. Pour pousser plus avant cette seconde idée d'espace, nous avons besoin de nombreux exemples, chacun étant utilisé comme un petit laboratoire dans lequel tester les idées et voir ce qui fonctionne. Nous résumons quelques exemples dans la table ci-dessous :

<i>Espace</i>	<i>Algèbre</i>
$X$	$C(X)$
$X = \hat{\pi}$ dual d' un groupe discret	$C^*(\pi) \supset \mathbf{C}\pi$ (complétion dans $\ell^2(\pi)$ )
$X = M/F$ espace des feuilles	$C^*(M, F)$
Exemple : feuilletage de Kronecker	$VU = (\exp 2\pi i\theta)UV$
$X = \Omega/G$ espace des orbites	produit croisé $C_0(\Omega) \rtimes G$

Nous avons déjà discuté du premier exemple. Le second vient des feuilletages. Il y a une  $C^*$ -algèbre très naturelle, venant des opérateurs qui différencient seulement dans la direction des feuilles, et qui sont elliptiques dans cette direction. Ils s'avèrent avoir des paramètres naturels ;

ils sont inversibles modulo les opérateurs qui sont lisses dans la direction des feuilles. Ces opérateurs constituent une  $C^*$ -algèbre,  $C^*(M, F)$ . Un exemple serait de prendre le feuilletage de Kronecker du 2-tore, qui est induit par l'équation  $dy = \theta dx$  où  $\theta$  est irrationnel. Dans ce cas, on obtient une  $C^*$ -algèbre engendrée par les deux éléments unitaires qui ne commutent pas, mais qui commutent à une phase près égale à  $\lambda = \exp 2\pi i\theta$ . C'est une algèbre avec laquelle on peut faire de nombreux calculs, exactement comme si on calculait avec les fonctions ordinaires du 2-tore en utilisant l'analyse de Fourier.

Un autre exemple très important a été découvert par Bellissard [6] dans le domaine de la physique des états solides et de l'effet de Hall quantique. Dans l'étude des systèmes désordonnés, l'Hamiltonien  $H_\omega$  est étiqueté par un paramètre  $\omega \in \Omega$ . De plus,  $H_\omega$  ne peut commuter avec  $H_{T_x}(\omega)$  où  $T$  est l'action du groupe de translation de l'espace de paramètre  $\Omega$ . Ainsi le translaté de l'Hamiltonien engendre une  $C^*$ -algèbre non-commutative, qui correspond au "spectre d'énergie" du système.

Etant donnés ces exemples, on a besoin des bons outils. Le premier provient de mon domaine originale d'étude : "les algèbres de von Neumann". Ces algèbres constituent exactement l'analogue non-commutatif de la théorie de la mesure. Leur classification et compréhension ont atteint un état presque complet et satisfaisant.

Mais nous avons besoin alors d'un peu plus que de la simple théorie de la mesure ; nous avons besoin de topologie. Je décrirai maintenant l'outil de base en topologie, introduit initialement par Grothendieck en géométrie algébrique, et ensuite par Atiyah pour les objectifs de la topologie. Cet outil est la  $K$ -théorie. Il y a une relation assez simple entre les fibrés vectoriels complexes sur l'espace  $X$  et les modules projectifs sur l'algèbre  $A = C(X)$  ; c'est le théorème de Serre-Swann :

$$K^i(X) = K_i(A = C(X)).$$

Il nous permet de faire de la  $K$ -théorie des espaces en faisant de l'algèbre linéaire où le corps  $\mathbb{C}$  est remplacé par l'anneau  $A$ . Alors le groupe des dimensions des modules projectifs finis est le  $K$ -groupe  $K_0(A)$ . Le théorème de périodicité de Bott nous dit que les  $K$ -groupes d'une  $C^*$ -algèbre  $A$  sont les groupes d'homotopie du groupe de jauge, i.e. du groupe unitaire  $\mathcal{U}$  des matrices infinies sur  $A$  :

$$K_i(A) = \pi_{i+1}(\mathcal{U})$$

A chaque fois qu'un espace est construit en collant ensemble deux espaces, de telle façon qu'on ait une séquence exacte d'algèbres, il y a une séquence exacte longue correspondante de  $K$ -groupes, qui est raccourcie grâce à la périodicité :

$$0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & & K_0(J) & \longrightarrow & K_0(A) & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ & & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(J) & & \\ & & \nwarrow & & \nearrow & & \\ & & K_1(B) & & & & K_0(B) \end{array}$$

De plus, il y a un principe général qui est absolument crucial. Ci-dessus, nous avons utilisé deux fois le théorème de l'indice pour les familles. Maintenant le principe est qu'un "espace"  $X$  sera décrit par une algèbre non-commutative  $A$ , et que quand on a une famille  $(D_x)$ ,  $x \in X$  indexée par  $X$ , de telle façon que la famille des opérateurs de Dirac soit indexée feuille à feuille par l'espace des feuilles, alors l'indice de cette famille appartient à  $K^0(X) = K_0(A)$ .

Ce principe est très important parce qu'il nous autorise à traduire en termes  $K$ -théoriques les propriétés analytiques de base telles que :

- L'évanouissement de l'indice de la famille d'opérateurs de Dirac feuille à feuille :

$$\text{Indice}(\text{Dirac}_L)_{L \in M/F} = 0$$

quand la courbure scalaire des feuilles est strictement positive.

- L'invariance d'homotopie de la signature  $\pi$ -équivariante :  $\text{Signature}_\pi(\widehat{M}) \in K_0(C^*(\pi))$ .

L'évanouissement dont il est question ci-dessus a lieu dans le  $K$ -groupe  $K_0(C^*(M, F))$ . Tous les  $K$ -groupes sont des groupes abéliens dénombrables mais sont de prime abord des objets extrêmement mystérieux, définis à travers les  $C^*$ -algèbres ci-dessus. Quand on travaille avec des espaces ordinaires, on obtient quelque intuition à propos de leurs  $K$ -groupes, mais cela est moins clair avec les  $C^*$ -algèbres. La première percée réelle qui a vraiment fait tout démarrer a été réalisée par Pimsner et Voiculescu [26] qui ont, en particulier, calculé les  $K$ -groupes du feuilletage du flot de Kronecker dont il a été question ci-dessus. Cela a permis à P. Baum et à l'auteur de deviner quelle serait la réponse à la fois en termes généraux et en termes géométriques. La situation se décrit ainsi : nous construisons un groupe géométrique, la  $K$ -homologie de son espace classifiant, et une fonction  $\mu$  vers le  $K$ -groupe de la  $C^*$ -algèbre. L'espace classifiant fait sens dans toutes les situations ci-dessus puisque les topologues ont une manière de donner du sens, à homotopie près, à des espaces comme l'espace des feuilles d'un feuilletage ou l'espace des orbites d'une action de groupe. Ce qu'ils font c'est qu'ils amplifient l'espace, disons  $M$ , sur lequel le groupe  $\Gamma$  agit, en croisant  $M$  avec un espace contractible  $ET$  sur lequel  $\Gamma$  agit librement ; alors le quotient  $M \times_\Gamma ET$  fait sens et est "homotopique à  $M/\Gamma$ ".

$$K_*(\text{Espace classifiant}) \xrightarrow{\mu} K(C^*\text{-algèbre})$$

L'application  $\mu$  est difficile à construire [5, 4, 12, 24] et même quand on traite un espace à un seul point, sa simple existence découle du théorème d'Atiyah-Singer [5]. C'est essentiellement l'application de la dualité de Poincaré dans la mesure où elle inverse les functorialités. Le problème principal de la théorie est de gérer cette application  $\mu$  ; tous les calculs effectués jusque-là indiquent que c'est une bijection [4, 23, 24, 27]. Un outil important développé par l'école russe, par Miscenko et Kasparov en particulier, et aussi par Atiyah, Brown, Douglas, et Fillmore (cf. [23, 24, 1, 7]), est la  $K$ -homologie pour les  $C^*$ -algèbres. Puisque cette théorie a joué un rôle crucial dans la compréhension de l'analogie de la théorie de de Rham des flots sur les espaces ci-dessus, je la rappellerai brièvement. Pour les espaces ordinaires, la  $K$ -homologie est définie,

en utilisant la dualité, par un théorème général qui établit qu'étant donnée une théorie cohomologique (telle que la  $K$ -théorie), il y a une théorie correspondante de l'homologie, appelée ici  $K$ -homologie. On veut réaliser cette théorie de l'homologie concrètement. Il est assez frappant que si l'on est très conservateur et que l'on souhaite coller des espaces ordinaires, en n'acceptant pas les "espaces", on ne sera pas capable de décrire la théorie  $K$ -homologie ( $X$ ) (il y a un  $K_{pair}$  et un  $K_{impair}$ ) comme des classes d'homotopie de classes d'applications d'espaces  $Z_{pair}, Z_{impair}$  vers l'espace  $X$ . Pourtant, avec des "espaces", c'est possible ;  $Z_{pair}$  s'obtient en collant ensemble deux "espaces" contractibles, et la  $C^*$ -algèbre  $C(Z_{pair})$  est l'algèbre non-commutative  $A_{pair}$ , des paires d'opérateurs  $(x, y)$  dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  dont la différence  $x - y$  est un opérateur compact. De façon similaire,  $C(Z_{impair}) = A_{impair}$  qui apparaît aussi dans *Beyond Affine Lie Algebras*, d'I. Frenkel, est l'algèbre des matrices  $2 \times 2$   $(x_{ij})$  d'opérateurs, tels que  $x_{12}$  et  $x_{21}$  sont compacts. Bien sûr, une "application continue" de  $Z_{pair}$  vers  $X$  est donnée par un homomorphisme de  $C(X)$  vers  $C(Z_{pair})$ , i.e., un homomorphisme de la  $C^*$ -algèbre  $A = C(X)$  vers  $A_{pair}$ . On l'appelle un *module de Fredholm* sur  $A$  parce que cela revient à donner un espace de Hilbert mesuré  $\mathbf{Z}/2$ ,  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  avec comme étalon  $\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , avec une structure de  $A$ -module à gauche telle que

$$(1) \varepsilon a = a \varepsilon \quad \forall a \in A,$$

$$(2) [F, a] \text{ est compact } \forall a \in A \text{ où } F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il y a une notion similaire de module de Fredholm impair. Sur chaque variété compacte  $\text{spin}^c$  de dimension paire, le module des spineurs  $L^2$ , avec l'étalon  $\mathbf{Z}/2$  donné par la matrice  $\gamma_5$  [5] et l'opérateur  $F$  donné par la phase  $F = D|D|^{-1}$  de l'opérateur de Dirac, est un module de Fredholm qui représente la *classe fondamentale* de la variété en  $K$ -homologie [5]. Si l'on met ensemble cette notion d'un module de Fredholm avec les idées de Helton et Howe, Carey et Pincus [18, 9] sur les opérateurs commutants modulo les idéaux de la trace, on aboutit à l'analogie non-commutatif de la théorie de de Rham : la cohomologie cyclique. Helton et Howe ont associé à chaque opérateur  $T$ , normal modulo les opérateurs de classe trace, un flot de de Rham sur  $\mathbf{R}^2$  avec une frontière amenée par le spectre essentiel de  $T$ . Leur travail était très inspirant parce qu'il montrait que le calcul des formes différentielles pourrait naître de considérations purement théoriques sur les opérateurs dans l'espace de Hilbert. C'est ce qui est fait dans [11] ; étant donné un module de Fredholm sur  $A$ , on peut définir *des formes différentielles* sur l'"espace" correspondant non pas en utilisant des cartes locales et en les recollant ensemble mais directement comme des opérateurs dans  $\mathcal{H}$ . C'est exactement la même étape que le remplacement, en mécanique quantique, des crochets de Poisson par des commutateurs. Ainsi

$$da = i[F, a] \quad \forall a \in A$$

définit la différentielle d'une fonction. Les formes de degré  $q$  sont obtenues comme produits de 1-formes :  $\Omega^q = \{ \sum x^0 dx^1 \dots dx^q, \quad x^j \in A \}$ . De cette manière, on obtient une algèbre différentielle graduée ; le produit est le produit d'opérateurs et la différentielle est donnée par

$$d\omega = i(F\omega - (-1)^q \omega F) \quad \text{for } \omega \in \Omega^q.$$

On a  $d^2 = 0$ , et le point principal est d'obtenir l'intégration des formes  $\omega \rightarrow \int \omega \in \mathbf{C}$  satisfaisant  $\int d\omega = 0$  et  $\int \omega_2 \omega_1 = (-1)^{q_1 q_2} \int \omega_1 \omega_2$ .

La formule qui marche est assez simple :  $\int \omega = \text{Trace}(\varepsilon\omega)$ . C'est là qu'apparaît la *dimension*, la trace ayant uniquement un sens si  $\omega$  est un opérateur de *classe trace*. Par l'inégalité de Holder, cela est vérifié, pour tout  $\omega \in \Omega^n$ , si l'on suppose que  $[F, a] \in \mathcal{L}^n \forall a \in A$ . Ici, pour tout nombre réel  $p \in [1, \infty]$ ,  $\mathcal{L}^p$  est l'idéal des opérateurs compacts  $T$  avec  $\sum \lambda_q(|T|)^p < \infty$ , où  $\lambda_q(|T|)$  est la  $q^{\text{ème}}$  valeur propre de la valeur absolue de  $T$ . La *dimension* d'un module de Fredholm sur une algèbre est le plus petit des  $p$  pour lesquels  $[F, a] \in \mathcal{L}^p \forall a \in A$ . Pour la classe fondamentale des variétés  $M$  décrite ci-dessus, cela fournit la dimension de  $M$ . En général, elle n'est pas nécessairement entière. Etant donné un module pair de Fredholm de dimension  $p$  sur  $A$ , on ne peut intégrer que les formes  $\omega \in \Omega^n$  de degré  $\geq p$ . De plus, les formes impaires ont une intégrale nulle. Du coup, la construction ci-dessus fournit pour tout entier pair  $n \geq p$ , la fonctionnelle  $\tau_n$  appelée le caractère  $n$ -dimensionnel du module de Fredholm :

$$\tau_n(a^0, \dots, a^n) = \int a^0 da^1 \dots da^n \quad \forall a^i \in A.$$

Une analyse attentive de ces fonctionnelles m'a amené à découvrir la cohomologie cyclique en 1981. Elle a été découverte indépendamment à partir de la  $K$ -théorie algébrique par Feigin et Tsigan [17, 30], en remplaçant l'homologie de groupe par l'homologie de l'algèbre de Lie dans la construction de base de la  $K$ -théorie algébrique de Quillen. Elle est aussi apparue, au moins sous une forme implicite, dans le travail de Hsiang et Staffeld sur la  $K$ -théorie algébrique des espaces [20]. C'est bien sûr frappant que de plusieurs courants d'idées, on obtienne la même théorie : la *cohomologie cyclique*. On a le lemme simple et crucial suivant.

LEMME. Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre et  $\tau$  une application  $(n+1)$ -linéaire  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{C}$  telle que

- (1)  $\tau(a^1, \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, \dots, a^n) \forall a^i \in \mathcal{A}$ ;
- (2)  $\sum_0^n (-1)^j \tau(a^0, \dots, a^j, a^{j+1}, \dots, a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau(a^{n+1}, a^0, \dots, a^n) = 0 \quad \forall a^i \in \mathcal{A}$ .

Alors l'application  $e \in \mathcal{A}, e^2 = e \rightarrow \tau(e, \dots, e)$ , fournit un morphisme de  $K_0(\mathcal{A})$  dans  $\mathbf{C}$ .

En fait,  $K_0(\mathcal{A})$  est engendré par les idempotents  $e^2 = e$  dans les matrices sur  $\mathcal{A}$ ,  $M_q(\mathcal{A}) = M_q(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{A}$ , et on doit étendre  $\tau$  à  $M_q(\mathcal{A})$  par l'égalité :

$$\tau_q(m^0 \otimes a^0, \dots, m^n \otimes a^n) = \text{Trace}(m^0 \dots m^n) \tau(a^0, \dots, a^n)$$

$\forall m^j \in M_q(\mathbf{C}), a^j \in \mathcal{A}$ .

Voici quelques exemples de fonctionnelles  $\tau$  qui satisfont (1) et (2) :

EXEMPLE  $\alpha$ . Soit  $\mathcal{A} = \mathbf{C}^\infty(M)$ , l'algèbre des fonctions lisses sur une variété compacte, et  $C$  un flot fermé sur  $M$  de dimension  $k$ . Alors  $\tau(f^0, \dots, f^k) = \langle C, f^0 d f^1 \wedge \dots \wedge d f^k \rangle \forall f^j \in \mathcal{A}$  a exactement les propriétés (1), (2) d'un cocycle cyclique. En fait,  $\tau$  satisfait  $\tau^\sigma = \text{sign}(\sigma)\tau$  pour toute permutation de  $\{0, 1, \dots, k\}$ , mais puisque  $\text{Trace}(m^0 \dots m^k)$  est invariant seulement sous les

permutations *cycliques*, il n'y a que (1) qui soit satisfaite par tous les  $\tau_q$ . On a  $K_0(\mathcal{A}) = K^0(M)$  et le lemme fournit en retour le caractère de Chern, vu comme un appariement avec l'homologie de  $M$ .

EXEMPLE  $\beta$ . Soit  $\pi$  un groupe discret,  $\mathcal{A} = \mathbf{C}\pi$  l'anneau de groupe, et  $\omega \in \mathbf{Z}^n(\pi, \mathbf{C})$  un cocycle de groupe convenablement normalisé tel que  $\omega(g^1, \dots, g^n) = 0$  si  $g^1 \dots g^n = 1$ . Alors l'égalité

$$\begin{aligned} \tau(g^0, \dots, g^n) &= 0 \text{ if } g^0 \dots g^n \neq 1 \quad \forall g^i \in \pi \\ \tau(g^0, \dots, g^n) &= \omega(g^1, \dots, g^n) \text{ if } g^0 \dots g^n = 1 \quad \forall g^i \in \pi, \end{aligned}$$

définit un cocycle  $n$ -cyclique  $\tau$  sur  $\mathcal{A}$ . De plus, en étendant  $\tau$  aux matrices infinies sur  $\mathcal{A}$ , on peut montrer que

$$\langle \tau, \text{Signature}_\pi(\widetilde{M}) \rangle = \langle \mathcal{L}_M \cdot \varphi^*(\omega), [M] \rangle$$

avec les notations du problème des plus hautes signatures. La cohomologie cyclique des anneaux de groupes est calculée par Burghelea dans [8].

EXEMPLE  $\gamma$ . Pour chaque  $n \geq p$  pair, le caractère  $n$ -dimensionnel  $\tau_n$  d'un module de Fredholm sur  $A$  est un cocycle cyclique. De plus, l'appariement avec  $K_0(A)$ ,  $\langle \tau_n, e \rangle$  est donné pour tout idempotent  $e$  par l'indice d'un opérateur de Fredholm, et, en particulier, il aboutit dans  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ . Il correspond à l'appariement  $\mathbf{Z}$ -valué entre la  $K$ -théorie et la  $K$ -homologie, ce qui assure qu'il est hautement non trivial.

Etant donnée une algèbre  $\mathcal{A}$ , il y a une manière évidente de construire des cocycles cycliques sur  $\mathcal{A}$ , notamment  $\tau = b\varphi$  où  $\varphi \in C_\lambda^{n-1}$  est une fonctionnelle  $n$ -linéaire sur  $\mathcal{A}$  satisfaisant (1), et  $b\varphi$  sa colimite de Hochschild donnée par la formule (2). Le groupe pertinent est le quotient  $H_\lambda^n(\mathcal{A}) = Z_\lambda^n(\mathcal{A})/bC_\lambda^{n-1}$ , où  $Z_\lambda^n = \text{Ker } b$ , et il est appelé la *cohomologie cyclique* de  $\mathcal{A}$ . Il s'avère qu'en travaillant simplement avec les modules de Fredholm de l'exemple  $\gamma$ , toutes les propriétés de la cohomologie cyclique permettent de retomber sur ses pieds. D'abord, un module de Fredholm a de nombreux caractères  $\tau_q$ , un pour chaque entier pair  $q \geq p$ , et il ne serait pas déraisonnable de s'attendre à ce que  $\tau_{q+2}, \tau_{q+4} \dots$  amène une nouvelle information non contenue dans  $\tau_q$ . Les calculs explicites montrent qu'il y a un opérateur de périodicité naturelle

$$S : H_\lambda^n(\mathcal{A}) \rightarrow H_\lambda^{n+2}(\mathcal{A})$$

donné en fait par le cup produit par le générateur de  $H_\lambda^2(\mathbf{C})$  et tel que  $\tau_{q+2k} = S^k \tau_q$  in  $H_\lambda^{q+2k}(\mathcal{A})$ . Alors, dans le but de trouver le plus petit  $n$  pour lequel  $\tau_n$  est défini, on a besoin de déterminer l'image de  $S$ . Mais par construction, le complexe  $(C_\lambda^n, b)$  est un sous-complexe du complexe de Hochschild  $(C^n, b)$  où  $C^n$  est l'espace de toutes les fonctionnelles  $(n+1)$ -linéaires sur  $\mathcal{A}$ . Il en résulte que  $\tau \in \text{Im } S$  ssi  $\tau$  est trivial dans ce dernier complexe, dont la cohomologie  $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ , la cohomologie de Hochschild de  $\mathcal{A}$  à coefficients dans le bimodule des formes linéaires sur  $\mathcal{A}$ , est calculable par les méthodes générales de l'algèbre homologique. Le point final est la construction d'un opérateur naturel  $B$  à partir de la cohomologie de Hochschild  $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$  vers  $H_\lambda^{n-1}(\mathcal{A})$  et la preuve de l'exactitude de la séquence suivante :

$$\begin{array}{c}
\left( H_{\lambda}^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} H_{\lambda}^{n+2}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} H^{n+2}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \right) \\
\left( H_{\lambda}^{n+1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} H_{\lambda}^{n+3}(\mathcal{A}) \xrightarrow{I} H^{n+3}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \right)
\end{array}$$

Ainsi, la cohomologie de Hochschild et la cohomologie cyclique forment un couple exact qui avec la séquence spectrale associée devient un outil de base pour calculer la cohomologie cyclique des algèbres. La puissance de cet outil est illustrée par deux exemples :

EXEMPLE a. Soit  $M$  une variété compacte,  $\mathcal{A} = C^{\infty}(M)$ . En imposant des conditions de continuité évidentes aux cochaînes, on obtient que les groupes de cohomologie de Hochschild  $H^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$  sont identifiables à l'espace  $\Omega_q$  des flots de de Rham de dimension  $q$  sur  $M$ . L'application  $I \circ B$  du couple exact est la limite de de Rham  $d^t$ , et on obtient

$$H_{\lambda}^q(\mathcal{A}) = \{ \text{Ker } d^t \subset \Omega_q \} + H_{q-2}(M, \mathbf{C}) + H_{q-4}(M, \mathbf{C}) \dots$$

L'homologie de de Rham de  $M$  s'identifie à la cohomologie cyclique périodique de

$$\mathcal{A} = H_{\text{Per}}^*(\mathcal{A}) = \varinjlim (H_{\lambda}^n(\mathcal{A}), S).$$

EXEMPLE b. Soit  $(M, F)$  une variété feuilletée,  $A = C^*(M, F)$  sa  $C^*$ -algèbre correspondante. Dans  $A$ , il y a une sous-algèbre dense naturelle  $\mathcal{A}$  d'éléments lisses et on doit calculer sa cohomologie cyclique. On a

$$H_{\text{Per}}^*(\mathcal{A}) \cong H_{\tau}^*(\text{Espace classifiant})$$

où le côté droit est la cohomologie avec les coefficients complexes de l'espace classifiant du groupoïde d'holonomie ou le graphe du feuilletage. L'indice  $\tau$  signifie que cette cohomologie est tordue par l'orientation du fibré transverse  $\tau$  du feuilletage. En utilisant les fibres sur  $M$  et la construction naturelle de  $\mathcal{A}$ , on construit un morphisme de localisation  $\lambda_M$ , qui est une généralisation de grande portée du flot de Ruelle-Sullivan :

$$\lambda_V : H_{\text{Per}}^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\lambda_M} H_{\tau}^*(M, \mathbf{C})$$

et l'on aboutit à la formulation cohomologique suivante du théorème de l'indice longitudinal pour les feuilletages [12].

THÉORÈME. Soit  $(M, F)$  une variété compacte feuilletée,  $D$  un opérateur elliptique longitudinal, et  $\tau$  un cocycle cyclique sur  $\mathcal{A}$ . Alors

$$\langle \tau, \text{Indice}(D) \rangle = (\lambda_M(\tau) \text{Td}(F_{\mathbf{C}}) \text{Ch } \sigma_D, [M])$$

où  $\sigma_D$  est le symbole longitudinal de  $D$ .

Il y a, cependant, encore une très difficile étape à franchir pour utiliser la cohomologie cyclique comme une théorie de de Rham ordinaire pour nos “espaces” - tel que l’espace des feuilles d’un feuilletage - et pour prouver le Théorème 2 de cet article, par exemple [14]. Le point problématique est que  $\mathcal{A} \subset A$ , dans l’exemple b, n’est en général pas un isomorphisme en  $K$ -théorie, et l’information analytique repose en  $K(A)$  et non en  $K(\mathcal{A})$ . Ce problème est complètement résolu dans [14] pour la classe transverse fondamentale de  $M/F$  et toutes les classes venant par pull-back de la cohomologie de Gelfand-Fuchs par la fonction  $B(\text{espace classifiant}) \rightarrow B\Gamma_q$ .

Cette difficulté est que pour un feuilletage général, il est impossible de réduire le groupe de structure transverse à un groupe compact. De façon équivalente, pour un groupe de difféomorphismes agissant sur une variété, on ne peut pas trouver de métrique Riemannienne invariante. Le résultat implique, en particulier, la conjecture de Novikov pour les classes de cohomologie de Gelfand-Fuchs sur  $B(\text{Diff } N)$  pour tout  $N$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

Commentaires bibliographiques. Pour un survol de la cohomologie cyclique et une bibliographie complète, voir [10, 17]. Le calcul de l’homologie des traces sur l’algèbre différentielle universelle  $\Omega(\mathcal{A})$  d’une algèbre  $\mathcal{A}$  a été effectué explicitement dans [11, Théorème 33, p. 118]. Une fois dualisé, cela donne le calcul [22] en fonction de l’homologie cyclique de la cohomologie du complexe universel de de Rham introduit par Karoubi dans [21]. Le calcul de l’homologie de l’algèbre de Lie des matrices en fonction de l’homologie cyclique est faite dans [25, 30]. L’idée d’utiliser l’identité de Lichnerowicz dans un contexte de  $C^*$ -algèbres est due à J. Rosenberg [27].

- [1] M.F. Atiyah, *Global theory of elliptic operators*, Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Univ. of Tokyo Pres, Tokyo, 1970, pp. 21-29.
- [2] \_\_\_\_\_, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967.
- [3] M. F. Atiyah and L. Singer, *The index of elliptic operators. IV*, Ann. of Math. **93** (1971), 119-138.
- [4] P. Baum et A. Connes, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, Preprint I.H.E.S., 1082.
- [5] P. Baum et R. Douglas, *K-homology and index theory*, Operator Algebras and Applications, Proc. Sympos. Pure Math, vol. 38, part I, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 117-173.

- [6] J. Bellissard, *K-theory of C\*-algebras in solid state physics* (Conf. on Statistical Mechanics and Field Theory, Mathematical Aspects, Groningen, August 26-30, 1985).
- [7] L. G. Brown, R. Douglas, and P. A. Fillmore, *Extensions of C\*-algebras and K-homology*, Ann. of Math. (2) **105** (107), 265-324.
- [8] D. Burghelea, *The cyclic cohomology of the group rings*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 354-365.
- [9] R. Carey et J. D. Pincus, *Almost commuting algebras, K-theory and operator algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 575, Springer, Berlin-New York, 1977.
- [10] P. Cartier, *Homologie cyclique*, Exposé 621, Seminaire Bourbaki, Février 1984.
- [11] A. Connes, *Noncommutative differential geometry. Part I, The Chern character in K-homology, Part II, de Rham homology and noncommutative algebra*, (Preprint), Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math **62** (1986), 44-144.
- [12] A. Connes et G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 1139-1183.
- [13] A. Connes, *C\*-algèbres et géométrie différentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **290** (1980), 599-604.
- [14] \_\_\_\_\_, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, Preprint I.H.E.S. M/84/7, 1984.
- [15] \_\_\_\_\_, *Spectral sequence and homology of currents for operator algebras*, Math Forschungsinstitute Oberwolfach Tagungsbericht 42/81, Funktionalanalysis and C\*-Algebren, 27-9/3-10-1981.
- [16] R. Douglas and D. Voiculescu, *On the smoothness of sphere extensions*, J. Operator Theory **6** (1981), no. 1, 103-111.
- [17] J. Helton and R. Howe, *Integral operators, commutators, traces, index and homology*, Proc. Conf. on Operator Theory, Lecture Notes in Math, vol. 345, Springer, Berlin-New York, 1973.
- [18] \_\_\_\_\_, *Traces of commutators of integral operators*, Acta Math. **135** (1975), 271-305.
- [19] W. C. Hsiang et R. E. Staffeldt, *A model for computing rational algebraic K-theory of simply connected spaces*, Invent. Math. **68** (1982), 227-239.
- [20] M. Karoubi, *Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique*, CMS Conf. Proc, 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1982.

- [22] \_\_\_\_\_, *Homologie cyclique et K-théorie algébrique*. I, II, C.R. Acad. Sci. Sér. I Math. **297** (1983), 447-450, 513-516.
- [23] G. Kasparov, *K-functor and extensions of  $C^*$ -algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **44** (1980), 571-636.
- [24] \_\_\_\_\_, *K-theory, group  $C^*$ -algebras and higher signatures*, Conspectus, Chernogolovka, 1983.
- [25] J. L. Loday et D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra of matrices*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), 295-297.
- [26] M. Pimsner et D. Voiculescu, *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product  $C^*$ -algebras*, J. Operator Theory **4** (1980), 93-118.
- [27] J. Rosenberg,  *$C^*$ -algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture*, Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math. **58** (1984), 409-424.
- [28] I. Segal, *Quantized differential forms*, Topology **7** (1968), 147-172.
- [29] *Quantization of the de Rham complex*, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 205-210.
- [30] B. L. Tsigan, *Homology of matrix Lie algebras over rings and Hochschild homology*, Uspekhi Mat. Nauk **38** (1983), 217-218.

COLLÈGE DE FRANCE, 75005 PARIS, FRANCE

# Opérateur sphéroïdal prolata et Zeta

## Alain Connes, Henri Moscovici

**Résumé :** Dans cet article, nous décrivons une nouvelle propriété remarquable de l’extension auto-adjointe  $W_{sa}$  de l’opérateur sphéroïdal prolata introduite dans [1], [3]. La restriction de cet opérateur à l’intervalle  $J$  dont la fonction caractéristique commute avec lui est bien connue, a un spectre positif discret et est bien comprise ([14], [15], [16], [9]). Ce que nous avons découvert, c’est que la restriction de  $W_{sa}$  au complémentaire de  $J$  admet (outre une réplique du spectre positif ci-dessus) des valeurs propres négatives dont le comportement ultraviolet reproduit celui des carrés des zéros de la fonction zeta de Riemann. De plus, les fonctions propres leur correspondant appartiennent à l’espace de Sonin. Cette caractéristique s’accorde avec la preuve [4] de la positivité de Weil à la place archimédienne, qui utilise la compression de l’action de mise à l’échelle à l’espace de Sonin. Comme sous-produit, nous construisons une famille isospectrale d’opérateurs de Dirac dont les spectres ont le même comportement ultraviolet que les zéros de la fonction zeta de Riemann.

## 1. Introduction

Les fonctions d’onde sphéroïdales prolata jouent un rôle central dans [2] [4] [5] en relation avec la fonction zeta de Riemann. Dans toutes ces applications, elles apparaissent comme les fonctions propres d’un opérateur d’angle entre deux projections orthogonales dans l’espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})^{ev}$  de fonctions de carrés intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Ces projections dépendent d’un paramètre  $\lambda > 0$ , la projection  $P_\lambda$  est donnée par la multiplication par la fonction caractéristique de l’intervalle  $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$ . La projection  $\widehat{P}_\lambda$  est sa conjuguée par transformation de Fourier  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$  qui est l’opérateur unitaire dans  $L^2(\mathbb{R})^{ev}$  défini par

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\xi)(y) = \int \xi(x) \exp(-2\pi ixy) dx.$$

Dans toutes les applications ci-dessus des fonctions sphéroïdales prolata, l’existence miraculeuse, découverte par le groupe des laboratoires Bell ([14], [15], [16]), d’un opérateur différentiel  $W_\lambda$  commutant avec l’opérateur d’angle, joue seulement un rôle auxiliaire. Dans le présent article, nous découvrons un autre “miracle”: une étude minutieuse de l’extension naturelle auto-adjointe de  $W_\lambda$  introduite dans le lemme 6 de [1] (voir également le paragraphe 3.3 de [3]) à  $L^2(\mathbb{R})$  montre que celle-ci a encore un spectre discret et que ses valeurs propres négatives reproduisent le comportement ultraviolet des carrés des zéros de la fonction zeta de Riemann. De façon similaire, le spectre positif correspond, dans le régime ultraviolet, aux zéros triviaux<sup>1</sup>. Cette coïncidence est vérifiée pour deux valeurs  $\lambda = 1$  et  $\lambda = \sqrt{2}$ . La raison conceptuelle de cette coïncidence est le lien entre l’opérateur

$$(W_\lambda \xi)(x) = -\partial_x(\lambda^2 - x^2)\partial_x \xi(x) + (2\pi\lambda)^2 x^2 \xi(x) \quad (1)$$

et le carré de l’opérateur de mise à l’échelle  $S := x\partial_x$ . Dans [4], la compression de  $f(S)$  à l’espace de Sonin (pour  $\lambda = 1$ ) s’est avérée être (cela a été montré) la racine de la positivité de Weil à la

---

A. Connes :  
Collège de France, 3, rue d’Ulm , Paris, F-75005 France,  
I.H.E.S. et The Ohio State University,  
email : alain@connes.org

H. Moscovici :  
Département de mathématiques, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA  
email : henri@math.ohio-state.edu

Le travail d’H. M. a été partiellement financé par la subvention NSF 1600541.

Traduction de l’article <https://alainconnes.org/wp-content/uploads/draft4.pdf>, Denise vella-Chemla, mars 2022.

<sup>1</sup>non triviaux ?

place archimédienne sur des fonctions de test à support dans l'intervalle  $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$ , mais puisque l'espace de Sonin n'est pas préservé par la mise à l'échelle, on ne pouvait pas réduire la mise à l'échelle à cet espace. Il s'est avéré que  $W_\lambda$  commute avec la projection orthogonale de l'espace de Sonin. Donc on peut restreindre  $W_\lambda$  à l'espace de Sonin et la similarité spectrale ultraviolette avec les carrés des zéros non triviaux de la fonction zeta suggère qu'on a capturé spectralement la contribution de la place archimédienne au spectre mystérieux de zeta. En fait, en utilisant le procédé de Darboux, on construit une racine carrée du Dirac de  $W_\lambda$  dépendant d'un paramètre de déformation, et dont le spectre a le même comportement ultraviolet que les zéros de la fonction zeta de Riemann.

Notre article s'organise comme suit : dans le paragraphe 2, nous montrons qu'il existe une unique extension auto-adjointe  $W_{sa}$  de l'opérateur symétrique  $W_{min}$  défini sur l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  par (1). De plus,  $W_{sa}$  commute avec la transformation de Fourier et a un spectre discret non borné dans les deux directions. Dans le paragraphe 3, nous montrons que les vecteurs propres pour les valeurs propres négatives de  $W_{sa}$  appartiennent à l'espace de Sonin. Dans le paragraphe 4, nous calculons l'approximation semi-classique du nombre de valeurs propres négatives de  $W_{sa}$  dont la valeur absolue est inférieure à  $E^2$ . Dans le paragraphe 5, nous utilisons la méthode de Darboux combinée avec les solutions d'une équation de Riccati pour construire une famille isospectrale d'opérateurs de Dirac  $\mathcal{D}$  dont les carrés sont les sommes directes de deux copies de  $W_{sa}$ . Dans le paragraphe 6, nous spécialisons cela au cas  $\lambda = \sqrt{2}$  et nous montrons que l'opérateur  $2\mathcal{D}$  a un spectre discret simple contenu dans  $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$  avec des valeurs propres imaginaires selon la conjugaison complexe et la fonction de comptage  $N(E)$  (qui compte ceux dont la partie imaginaire positive est moindre que  $E$ ) respecte la même condition que la formule de Riemann

$$N(E) \sim \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + O(1) \quad (2)$$

Nous montrons également l'évidence numérique pour la similarité spectrale ultraviolette entre les valeurs propres de  $2\mathcal{D}$  et les zéros de la fonction zeta de Riemann. Finalement, le paragraphe 7 contient des remarques finales plus spéculatives, en particulier sur une géométrie naturelle de trous noirs 2-dimensionnelle intrinsèquement liée à l'opérateur  $2\mathcal{D}$ .

## 2. L'opérateur auto-adjoint d'onde sphéroïdal prolate

L'opérateur sphéroïdal prolate (1) est un opérateur de type Sturm-Liouville,

$$\begin{aligned} (W_\lambda \xi)(x) &= -\partial_x \left( p(x) \partial_x \xi(x) \right) + q(x) \xi(x), & x \in \mathbb{R} \\ \text{où } p(x) &= \lambda^2 - x^2, & q(x) = (2\pi\lambda)^2 x^2, \end{aligned} \quad (3)$$

mais ayant deux points singuliers intérieurs, il n'est pas directement traitable par la théorie habituelle de Sturm-Liouville. Pourtant, ses restrictions à chacun des intervalles  $(-\infty, -\lambda)$ ,  $(-\lambda, \lambda)$  et  $(\lambda, \infty)$  sont des opérateurs de Sturm-Liouville standards, en fait quasi-réguliers.

Dans la suite  $W_\lambda$  sera simplement noté  $W$  à chaque fois que  $\lambda$  est un paramètre général. Pour commencer, on regarde  $W$  comme un opérateur non borné sur  $L^2(\mathbb{R})$  avec comme centre l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Ainsi,  $W$  est réel, symétrique et invariant selon l'échange de parité  $x \mapsto -x$ . Ces caractéristiques sont héritées de sa fermeture dans la norme de graphe  $W_{min}$ , aussi bien que

par  $W_{\max} = W_{\min}^*$ , ce dernier ayant pour domaine

$$\text{Dom}(W_{\max}) = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}) \mid W\xi \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad (4)$$

avec  $W\xi$  vu comme une distribution tempérée. De plus,  $W$  a la remarquable propriété de commuter avec la transformation de Fourier

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi ixy) dx. \quad (5)$$

Puisqu'à la fois l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  et son dual sont globalement invariants par la transformation de Fourier, les domaines  $\text{Dom}W_{\min}$  et  $\text{Dom}W_{\max}$  sont également invariants, et par conséquent à la fois  $W_{\min}$  et  $W_{\max}$  commutent avec  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ .

LEMME 2.1. *Les indices de déficience de  $W_{\min}$  sont  $(4, 4)$ .*

*Preuve.* N'importe quel  $\xi \in \text{Dom}(W_{\max})$  satisfaisant  $W\xi = \pm i\xi$  est une fonction analytique réelle par morceaux et est uniquement déterminée par six paramètres dans le complémentaire des deux points singuliers réguliers  $\pm\lambda$ . La forme connue des solutions (cf. [13]) avec le fait que  $W\xi \in L^2(\mathbb{R})$  implique que les singularités logarithmiques de  $\xi$  sur la gauche et sur la droite de  $\pm\lambda$  doivent concorder. Cela réduit le nombre de paramètres à 4. Inversement, puisque tous les 4 points singuliers sont LC (dans le cas limite du cercle), toute solution de  $W\xi = \pm i\xi$  appartient à  $\text{Dom}(W_{\max})$ , par conséquent  $\dim \text{Ker}(W_{\max} \pm iI) = 4$ .

LEMME 2.2. *Soit  $\xi \in \text{Dom}W_{\max}$  et dénotons par  $a = \pm\lambda$ . La distribution  $p(x)\partial_x\xi$  coïncide avec une fonction continue  $f$  dans un voisinage de  $a$  et la fonction d'évaluation  $L(\xi) := f(a)$  définit une forme linéaire continue non nulle sur  $\text{Dom}W_{\max}$  qui s'évanouit sur le sous-espace fermé  $\text{Dom}W_{\min}$ .*

*Preuve.* Soit  $V = [b, c]$  un voisinage intervalle compact de  $a = \pm\lambda$  où  $a$  est le seul zéro de  $p(x)$ . Soit  $\psi$  la distribution  $\psi = p(x)\partial_x\xi(x)$ , on a par définition,

$$\langle \psi \mid \phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \xi(x) \partial_x(p(x)\phi(x)) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Soit  $\eta = W_{\max}\xi$ , on a par définition,

$$\langle \eta \mid \phi \rangle = \langle \xi \mid W_{\min}\phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi(x) (\partial_x(p(x)\partial_x\phi(x)) + q(x)\phi(x)) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Soit  $\xi_1 \in L^2(\mathbb{R})$  qui coïncide avec  $q(x)\xi(x)$  sur  $V$ . Alors pour toute fonction continue  $\phi$  à support dans  $V$ ,

$$\langle \psi \mid \partial_x\phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \xi(x) \partial_x(p(x)\partial_x\phi(x)) dx = \langle \xi_1 - \eta \mid \phi \rangle$$

La restriction de  $\xi_1 - \eta$  à  $V$  appartient à  $L^2(V) \subset L^1(V)$  et la fonction  $f_1(x) = - \int_b^x (\xi_1 - \eta)(t) dt$  est continue et vérifie

$$\int_V f_1(x) \partial_x\phi(x) dx = \langle \xi_1 - \eta \mid \phi \rangle$$

Il s'ensuit que  $\langle \psi - f_1 \mid \partial_x\phi \rangle = 0$  pour toutes les fonctions continues  $\phi$  à support dans  $V$  et en choisissant une fonction continue positive  $\phi_1$  à support dans  $V$  et d'intégrale 1, on obtient

$$\langle \psi \mid \phi \rangle = \langle f_1 + s \mid \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(V), \quad s = \langle (\psi - f_1) \mid \phi_1 \rangle.$$

Par conséquent, la distribution  $p(x)\partial_x\xi$  coïncide avec la fonction  $f(x) := f_1(x) + s$  sur  $V$ . On a

$$f(a) = s + f_1(a) = \langle (\psi - f_1) \mid \phi_1 \rangle - \int_b^a (\xi_1 - \eta)(x)dx$$

De plus  $\langle \psi \mid \phi_1 \rangle = \int p(x)\partial_x\xi(x)\phi_1(x)dx = - \int \xi(x)\partial_x(p(x)\phi_1(x))dx = \langle \xi \mid \eta_1 \rangle$  où  $\eta_1 \in C_c^\infty(V)$ . On a également,

$$\begin{aligned} -\langle f_1 \mid \phi_1 \rangle - \int_b^a (\xi_1 - \eta)(x)dx &= \int_b^c \int_b^x (\xi_1 - \eta)(t)\phi_1(x)dt dx - \int_b^a (\xi_1 - \eta)(x)dx \\ &= \langle \xi \mid \eta_2 \rangle + \langle \eta \mid \eta_3 \rangle \end{aligned}$$

où les vecteurs  $\eta_j \in L^2(\mathbb{R})$ . Par conséquent la forme linéaire  $L(\xi) := f(a)$  est continue dans la norme de graphe de  $\text{Dom}W_{\max}$ . Pour  $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  la distribution  $\psi = p(x)\partial_x\xi(x)$  est une fonction qui s'évanouit en  $x = a$  et donc  $L(\xi) = 0$ . Par la densité de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\text{Dom}W_{\min}$  pour la norme de graphe, il s'ensuit que  $L$  s'évanouit sur le sous-espace fermé  $\text{Dom}W_{\min}$ .  $\square$

Soit  $P_\lambda$  la projection cutoff associée à l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$ , *i.e.* l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique  $1_{[-\lambda, \lambda]}$ , et si  $\widehat{P}_\lambda = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} P_\lambda \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}$  dénote son conjugué par la transformation de Fourier.

**LEMME 2.3.** *Si  $\xi \in \text{Dom}W_{\min}$  alors  $P_\lambda\xi \in \text{Dom}W_{\max}$  et  $WP_\lambda\xi = P_\lambda W\xi$ . La même chose est vérifiée par rapport à  $\widehat{P}_\lambda$ .*

*Preuve.* Soit  $f \in C^\infty(V)$  où  $V$  est un voisinage de l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$ . Alors  $P_\lambda f \in \text{Dom}W_{\max}$  et en voyant  $W(P_\lambda f)$  comme une distribution, on obtient pour tout  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle W(P_\lambda f), \phi \rangle &= \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)(W\phi)(x)dx = \int_{-\lambda}^{\lambda} -f(x)\partial_x(\lambda^2 - x^2)\partial_x\phi(x)dx \\ &\quad + \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)(2\pi\lambda)^2 x^2\phi(x)dx. \end{aligned}$$

En utilisant deux fois l'intégration par parties, ainsi que le fait que  $(\lambda^2 - x^2)\phi'(x)$  et  $(\lambda^2 - x^2)f'(x)$  s'évanouissent sur la frontière, on obtient

$$\begin{aligned} \langle W(P_\lambda f), \phi \rangle &= \int_{-\lambda}^{\lambda} f'(x)((\lambda^2 - x^2)\phi'(x))dx + \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)(2\pi\lambda)^2 x^2\phi(x)dx \\ &= - \int_{-\lambda}^{\lambda} (\partial_x((\lambda^2 - x^2)f'(x)))\phi(x)dx + \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)(2\pi\lambda)^2 x^2\phi(x)dx \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} Wf(x)\phi(x)dx, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $W(P_\lambda f) = P_\lambda Wf$ . En particulier, la même chose est vraie pour tout  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , et par la densité de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\text{Dom}W_{\min}$  pour la norme de graphe, il s'ensuit que

$$\xi \in \text{Dom}W_{\min} \implies P_\lambda\xi \in \text{Dom}W_{\max} \quad \text{et} \quad W_{\max}P_\lambda\xi = P_\lambda W\xi.$$

L'assertion découle maintenant du fait que  $W$  commute avec  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ .

Les extensions auto-adjointes de  $W_{\min}$  sont paramétrées par les sous-espaces auto-orthogonaux de  $\mathcal{E} := \text{Dom}(W_{\max})/\text{Dom}(W_{\min})$  selon la forme sesquilinéaire anti-symétrique donnée par l'appariement

$$\Omega(\xi, \eta) := \frac{1}{i} \left( \langle W_{\max} \xi \mid \eta \rangle - \langle \xi \mid W_{\max} \eta \rangle \right), \quad \xi, \eta \in \text{Dom}(W_{\max}) \quad (6)$$

qui descend vers une forme non-dégénérée sur  $\mathcal{E}$ .

L'appariement  $\Omega$  peut être exprimé en fonction des valeurs sur la frontière comme habituellement. On commence avec l'identité de Lagrange

$$\frac{d}{dx} [\xi, \eta] = \xi W \eta - \eta W \xi, \quad (7)$$

où  $\xi, \eta \in C^1(\mathbb{R}) \cap \text{Dom}W_{\max}$ , et

$$[\xi, \eta] := p \left( \xi \frac{d\eta}{dx} - \eta \frac{d\xi}{dx} \right), \quad p(x) = \lambda^2 - x^2, \quad (8)$$

est le Wronskien généralisé. En l'intégrant sur des sous-intervalles compacts  $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \{\pm\lambda\}$ , on obtient la formule de Green

$$\int_a^b (W(\xi)\bar{\eta} - \xi W(\bar{\eta})) (x) dx = [\xi, \bar{\eta}]_a^b := \lim_{x \rightarrow b} [\xi, \bar{\eta}](x) - \lim_{x \rightarrow a} [\xi, \bar{\eta}](x). \quad (9)$$

Le passage aux limites latérales vers les extrémités des trois sous-intervalles partitionnant  $\mathbb{R} \setminus \{\pm\lambda\}$ , étend cette identité à la ligne temporelle complète, permettant d'exprimer  $\Omega$  en fonction des crochets de Lagrange comme suit :

$$i\Omega(\xi, \eta) = [\xi, \bar{\eta}]|_{-\infty}^{-\lambda} + [\xi, \bar{\eta}]|_{-\lambda}^{\lambda} + [\xi, \bar{\eta}]|_{\lambda}^{\infty} \quad (10)$$

pour toutes les paires  $\xi, \eta \in \text{Dom}W_{\max}$ .

Puisque  $W$  est invariant par l'échange de parité, il préserve la décomposition orthogonale  $L^2(\mathbb{R}) = L^2_+(\mathbb{R}) \oplus L^2_-(\mathbb{R})$  en des fonctions paires, resp. impaires, ce qui en retour induit les séparations correspondantes  $W = W^+ \oplus W^-$ ,  $\Omega = \Omega_+ \oplus \Omega_-$  et  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$ . Notons aussi que les  $\mathcal{E}_{\pm}$  sont invariants par transformée de Fourier.

Le lemme auxiliaire suivant sera utilisé dans la discussion à venir.

LEMME 2.4. (i) Soit  $f(x) = \frac{1}{2} \log((\lambda^2 - x^2)^{-2})$  vue comme une distribution tempérée. Alors, la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f$  est une distribution qui coïncide en dehors de 0 avec la fonction

$$\tilde{f}(y) = \frac{\cos(2\pi\lambda y)}{|y|}.$$

(ii) Soit  $1_I$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $I = [-\lambda, \lambda]$  alors

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} 1_I(y) = \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y}.$$

*Preuve.* (i) On a  $f(x) = \frac{1}{2} \log((\lambda - x)^{-2}) + \frac{1}{2} \log((\lambda + x)^{-2})$ , alors on commence par calculer la transformation de Fourier de la distribution  $\ell = -\log(x^2)$ . On a  $x\partial_x \ell = -2$ . Alors on obtient  $\partial_y y \widehat{\ell} = 2$ . Par conséquent,  $y \widehat{\ell}$  est égal à  $\text{sign}(y)$  et  $\widehat{\ell}$  est la valeur principale de Weil  $1/|y|$ . Translater la variable signifie multiplier par une exponentielle imaginaire dans Fourier et cela donne l'égalité requise.

(ii) On a  $\partial_x 1_I = \delta_{-\lambda} - \delta_\lambda$  et en général,  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f(y) = 2\pi i y \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f(y)$ .

Nous procédons maintenant à la construction d'une base de  $\mathcal{E}$ . D'abord, pour  $\mathcal{E}_+$  nous prenons une fonction paire  $\alpha_+ \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\alpha_+(x) = \log|\lambda^2 - x^2|$  pour  $x \in [\frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda]$  et à support dans  $(\frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda)$ . Alors nous prenons  $\beta_+(x) = 1_I$ , la fonction caractéristique de l'intervalle  $I = [-\lambda, \lambda]$ , qui appartient à  $P_\lambda \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et par conséquent à  $\text{Dom} W_{\max}$ . Ensuite, pour  $\mathcal{E}_-$  on pose  $\alpha_-(x) := x\alpha_+(x)$  et  $\beta_-(x) := x\beta_+(x)$ .

LEMME 2.5. *Le quadruplet  $\{\alpha_\pm, \beta_\pm, \widehat{\alpha}_\pm, \widehat{\beta}_\pm\}$  forme une base de  $\mathcal{E}_\pm$ .*

*Preuve.* On vérifie en utilisant l'expression (10) de l'appariement  $\Omega$  ainsi que le lemme 2.4 que la représentation matricielle de  $\Omega$  selon le quadruplet fourni a une entrée non nulle unique dans chaque ligne et chaque colonne.

Dans le cas impair, on note que d'un côté  $[\alpha_-, \beta_-](x) = x^2[\alpha_+, \beta_+](x)$ , et de l'autre côté, les dérivées impliquées dans leurs transformées de Fourier  $\widehat{\alpha}_-(x) = \frac{i}{2\pi} \partial_x \widehat{\alpha}_+(x)$ , resp.  $\widehat{\beta}_-(x) = \frac{i}{2\pi} \partial_x \widehat{\beta}_+(x)$ , échantillent les deux fonctions *cos* et *sin* dans les termes principaux à l'infini. Avec cette observation, le calcul devient semblable à celui pour le cas pair, et on a ainsi le résultat.

Les appariements  $\Omega$  avec les éléments de la base ci-dessus amènent des conditions aux bornes de type Sturm-Liouville. En utilisant les notations, pour  $\xi \in \text{Dom}(W_{\max}^\pm)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\alpha_\pm}(\xi) &:= i\Omega_\pm(\xi, \alpha_\pm), & \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_\pm}(\xi) &:= i\Omega_\pm(\xi, \widehat{\alpha}_\pm), \\ \mathbf{L}_{\beta_\pm}(\xi) &:= i\Omega_\pm(\xi, \beta_\pm), & \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_\pm}(\xi) &:= i\Omega_\pm(\xi, \widehat{\beta}_\pm), \end{aligned} \tag{11}$$

les domaines minimaux sont caractérisés en ces termes comme étant l'intersection

$$\text{Dom}(W_{\min}^\pm) = \text{Ker } \mathbf{L}_{\alpha_\pm} \cap \text{Ker } \mathbf{L}_{\beta_\pm} \cap \text{Ker } \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_\pm} \cap \text{Ker } \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_\pm} \tag{12}$$

et les fonctionnelles induites sur  $\mathcal{E}_\pm = \text{Dom}(W_{\max}^\pm)/\text{Dom}(W_{\min}^\pm)$  forment une base de  $\mathcal{E}_\pm^*$ .

Par des calculs évidents, en utilisant le fait qu'on peut toujours restreindre le calcul à  $\mathbb{R}^+$ , on obtient des expressions explicites pour les fonctionnelles aux bornes. À un facteur constant non nul près,

ils sont comme suit. Dans le cas pair,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\alpha_+}(\xi) &= \lim_{x \nearrow \lambda} ((x - \lambda) \log(\lambda - x) \partial_x \xi(x) - \xi(x)) \\
&\quad - \lim_{x \searrow \lambda} ((x - \lambda) \log(x - \lambda) \partial_x \xi(x) - \xi(x)); \\
\mathbf{L}_{\beta_+}(\xi) &:= \lim_{x \nearrow \lambda} ((\lambda - x) \partial_x \xi(x)) = \lim_{x \searrow \lambda} ((\lambda - x) \partial_x \xi(x)); \\
\mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_+}(\xi) &:= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cos(2\pi \lambda x) \partial_x \xi(x) + (2\pi \lambda x \sin(2\pi \lambda x) + \cos(2\pi \lambda x)) \xi(x)); \\
\mathbf{L}_{\widehat{\beta}_+}(\xi) &:= -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin(2\pi \lambda x) \partial_x \xi(x) - (2\pi \lambda x \cos(2\pi \lambda x) - \sin(2\pi \lambda x)) \xi(x)).
\end{aligned} \tag{13}$$

On remarque que l'existence de la limite définissant  $\mathbf{L}_{\beta_+}(\xi)$ , *i.e.* l'égalité des limites latérales, est assurée par le lemme 2.2.

Des formules similaires définissent les fonctionnelles  $\mathbf{L}_{\alpha_-}, \mathbf{L}_{\beta_-}, \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_-}, \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_-}$  dans le cas impair.

Puisqu'à la fois  $\text{Dom}(W_{\min})$  et  $\text{Dom}(W_{\max})$ , ainsi que la forme symplectique  $\Omega$ , sont globalement invariants par transformation de Fourier, le quotient hérite des transformations induites  $f_{e_{\mathbb{R}}}^{\pm} : \mathcal{E}_{\pm} \rightarrow \mathcal{E}_{\pm}$  qui relie les fonctionnelles aux bornes comme suit :

$$\mathbf{L}_{\widehat{\beta}_{\pm}} = \mathbf{L}_{\beta_{\pm}} \circ f_{e_{\mathbb{R}}} \quad \text{and} \quad \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_{\pm}} = \mathbf{L}_{\alpha_{\pm}} \circ f_{e_{\mathbb{R}}}. \tag{14}$$

Cette association donne naissance à deux sous-espaces auto-orthogonaux distincts, notamment

$$\mathcal{L}_{\beta} = \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\beta_{\pm}} \cap \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_{\pm}} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_{\alpha} = \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\alpha_{\pm}} \cap \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_{\pm}} \tag{15}$$

**Définition :** On note  $W_{\text{sa}}$  la restriction de l'opérateur  $W_{\max}$  au sous-espace  $\mathcal{L}_{\beta} = \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\beta_{\pm}} \cap \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_{\pm}}$ . Explicitement, son domaine  $\text{Dom} W_{\text{sa}}$  consiste en les éléments  $\xi \in \text{Dom}(W_{\max})$  satisfaisant les conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \pm \lambda} (\lambda^2 - x^2) \partial_x \xi(x) = 0, \tag{16}$$

et en  $\pm \infty$ , en écrivant  $\xi = \xi^+ + \xi^-$  avec  $\xi^{\pm} \in \text{Dom}(W_{\max}^{\pm})$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x \sin(2\pi \lambda x) \partial_x \xi^+(x) - (2\pi \lambda x \cos(2\pi \lambda x) - \sin(2\pi \lambda x)) \xi^+(x)) = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x \cos(2\pi \lambda x) \partial_x \xi^-(x) + (2\pi \lambda x \sin(2\pi \lambda x) + \cos(2\pi \lambda x)) \xi^-(x)) = 0. \tag{18}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal de ce paragraphe.

**THÉORÈME 2.6.** (i)  $W_{\text{sa}}$  est auto-adjoint et commute avec la transformation de Fourier.

(ii)  $W_{\text{sa}}$  commute avec les projections  $P_{\lambda}$  et  $\widehat{P}_{\lambda}$ .

(iii)  $W_{\text{sa}}$  est la seule extension auto-adjointe de  $W_{\min}$  commutant avec  $P_{\lambda}$  et  $\widehat{P}_{\lambda}$ .

(iv) Le spectre de  $W_{\text{sa}}$  est discret et non borné des deux côtés ; ses valeurs propres négatives sont simples, alors que ses valeurs propres positives (avec possiblement un nombre fini d'exceptions) ont pour multiplicité 2.

*Preuve.* (i)  $W_{\text{sa}}$  est auto-adjoint par construction, et son domaine  $\mathcal{L}_\beta$  est invariant par transformation de Fourier également par construction.

(ii) Puisque  $\text{Dom}W_{\text{min}}$  est donné par (12), tout élément de  $\mathcal{L}_\beta$  est une combinaison linéaire d'un élément  $\xi \in \text{Dom}W_{\text{min}}$  et des 4 vecteurs  $\beta_\pm, \widehat{\beta}_\pm$  du lemme 2.1. Chaque  $\beta_\pm$  est de la forme  $P_\lambda f_\pm$  avec  $f_\pm$  continue à support compact et ainsi on a en utilisant le lemme 2.3,

$$P_\lambda \beta_\pm = \beta_\pm \in \mathcal{S}, \quad W_{\text{sa}} P_\lambda \beta_\pm = W_{\text{sa}} P_\lambda f_\pm = P_\lambda W f_\pm,$$

qui montre que  $W_{\text{sa}} P_\lambda \beta_\pm = P_\lambda W_{\text{sa}} P_\lambda \beta_\pm = P_\lambda W_{\text{sa}} \beta_\pm$  fournissant la commutation requise pour le  $\beta_\pm$ .

(iii) Le domaine d'une extension auto-adjointe de  $W_{\text{min}}$  commutant avec  $P_\lambda$  et  $\widehat{P}_\lambda$  doit être contenu dans  $\text{Dom}W_{\text{max}}$  et contient également à la fois  $P_\lambda \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $\widehat{P}_\lambda \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Ainsi, il doit contenir  $\mathcal{L}_\beta$ , et ne peut être plus grand du fait de l'auto-adjonction.

(iv) [...]

**COROLLAIRE 2.7.** *Si  $\phi$  est une fonction propre de  $W_{\text{sa}}^\pm$  alors*

- (i)  $\phi$  est régulier sur  $[\lambda, \lambda + \epsilon)$  et sur  $(\lambda - \epsilon, \lambda]$  pour un certain  $\epsilon > 0$ , avec une discontinuité possible en  $\lambda$ ;
- (ii) le terme dominant de l'expansion asymptotique de  $\phi$  at  $\infty$  est proportionnel à  $\frac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}$  si  $\phi$  est pair et à  $\frac{\cos(2\pi\lambda x)}{x}$  si  $\phi$  est impair.

*Preuve.* Cela découle des caractérisations ci-dessus (16), (17), (18) du domaine de  $W_{\text{sa}}$  combinées avec les bases connues des solutions formelles de l'équation  $W\xi = \mu\xi$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , près de  $\pm\lambda$  et  $\pm\infty$  (cf.[13]).  $\square$

### 3. Espace de Sonin et valeurs propres négatives

Nous traduisons la contrainte que la transformation de Fourier  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f$  d'une  $f \in \text{Dom}W_{\text{max}}$  n'a aucune singularité logarithmique en les points singuliers en une condition sur le comportement asymptotique de  $f$  en  $l'\infty$ . Pour simplifier, nous ne traitons que les fonctions paires, et pour des raisons de commodité de notation, on prend  $\lambda = 1$ .

On peut alors trouver l'expansion asymptotique en  $l'\infty$  en utilisant la condition aux limites que le terme dominant à cet endroit est  $\frac{\sin(2\pi\lambda y)}{y}$ . On prend pour des raisons de simplicité  $\lambda = 1$  et on utilise [13] pour vecteur propre potentiel pour la fonction propre  $\mu$  l'expansion à  $l'\infty$

$$\xi_\mu(x) \sim \frac{\sin(2\pi x)}{x} + \frac{(\mu - 4\pi^2)\cos(2\pi x)}{4\pi x^2} + \frac{-\mu^2 + 8\pi^2\mu + 2\mu - 16\pi^4 + 8\pi^2}{32\pi^2 x^3} \sin(2\pi x) + 0(x^{-4})$$

En fait, comme cela est montré dans la proposition 14 de [13], les coefficients de cette expansion sont directement reliés aux coefficients de l'expansion de la solution finie en  $\lambda$  et en prenant pour simplifier  $\lambda = 1$ , si ce dernier est de la forme

$$f_\mu(x) = \sum U_n(\mu)(x-1)^n, \quad U_0(\mu) = 1, \quad U_1(\mu) = \frac{\mu - 4\pi^2}{2}$$

$$U_2(\mu) = \frac{\mu^2 - 8\pi^2\mu - 2\mu + 16\pi^4 - 8\pi^2}{16}, \dots$$

alors la série asymptotique à l'infini qui gouverne la solution qui a un terme dominant en  $\exp(-2\pi ix)/x$  est égale à  $v(x) \exp(-2\pi ix)/x$  où

$$v(x) \sim \sum n! U_n(\mu) (2\pi ix)^{-n}$$

Quand on applique une sommation de Borel à cette série, la première étape consiste à la remplacer par sa transformée de Borel qui est, à normalisation près,

$$B(y) := \sum U_n(\mu) y^n$$

et est reliée à  $v(x)$  par  $\int_0^\infty t^n \exp(-zt) dt = z^{-n-1} \Gamma(n+1)$  i.e. la transformée de Laplace

$$\frac{v(x)}{2\pi ix} = \int_0^\infty \exp(-2\pi ixt) B(t) dt$$

LEMME 3.1. *Pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$  l'expansion asymptotique de l'unique solution  $\xi_\mu$  qui en  $l^\infty$  est asymptotiquement  $\sim -\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$  est sommable au sens de Borel et est égale à la transformée de Fourier de l'unique solution paire  $\phi_\mu$  qui est nulle sur  $[-1, 1]$  et est en accord avec  $f_\mu(x)$  pour  $x > 1$ .*

*Preuve.* On a l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{v(x)}{2\pi ix} &= \int_0^\infty \exp(-2\pi ixt) B(t) dt = \int_0^\infty \exp(-2\pi ixt) f_\mu(t+1) dt = \\ &= \int_1^\infty \exp(-2\pi ix(y-1)) f_\mu(y) dy \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$v(x) \exp(-2\pi ix) / (2\pi ix) = \int_1^\infty \exp(-2\pi ixy) f_\mu(y) dy$$

La fonction  $\phi_\mu$  est paire et s'évanouit sur  $[-1, 1]$  de telle façon que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \exp(-2\pi ixy) \phi_\mu(y) dy &= \int_1^\infty \exp(-2\pi ixy) f_\mu(y) dy + \overline{\int_1^\infty \exp(-2\pi ixy) f_\mu(y) dy} = \\ &= v(x) \exp(-2\pi ix) / (2\pi ix) + \overline{v(x) \exp(-2\pi ix) / (2\pi ix)} \end{aligned}$$

Maintenant ces deux termes sont des solutions asymptotiques puisque  $\mu$  est réelle et  $v(x) \exp(-2\pi ix) / (2\pi ix)$  est une solution asymptotique. De plus, le comportement dominant à l'infini est en

$$\exp(-2\pi ix) / (2\pi ix) - \exp(2\pi ix) / (2\pi ix) = -\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$$

Donc il en découle que la transformée de Fourier  $\mathbb{F}_{c_{\mathbb{R}}} \phi_\mu = \xi_\mu$ . □

COROLLAIRE 3.2. *Avec les notations ci-dessus, supposons que  $\mu$  est une valeur propre négative. Alors  $\phi_\mu$  appartient à l'espace de Sonin.*

*Preuve.* En fait, l'espace de Sonin est l'orthogonal des espaces propres de  $W_{sa}$  associés aux fonctions prolates classiques et à leurs transformations de Fourier.

Nous devrions noter ici que nous ne prétendons pas (bien que cela soit corroboré par l'évidence numérique) que toutes les valeurs propres de la restriction de  $W_{sa}$  à l'espace de Sonin sont négatives, pourtant il ne pourrait y avoir seulement qu'un nombre fini d'exceptions.

#### 4. Approximation semi-classique et fonction de comptage

Dans ce paragraphe, nous utilisons l'estimée semi-classique pour la fonction comptant le nombre de valeurs propres et recherchons les valeurs propres négatives de l'opérateur  $W_{sa}$ . Nous considérons l'hamiltonien classique

$$H_\lambda(p, q) = (p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2) \quad (19)$$

et nous l'utilisons comme une approximation semi-classique de  $W_{sa}$  à travers la relation formelle

$$W_\lambda \sim -4\pi^2 H_\lambda + 4\pi^2 \lambda^4 \quad (20)$$

en utilisant la correspondance  $q \rightarrow x$  et  $p \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \partial_x$  associée au choix de la transformée de Fourier  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ . L'espace de Sonin correspond aux conditions  $p^2 - \lambda^2 \geq 0$  et  $q^2 - \lambda^2 \geq 0$  et la région intéressante pour le comptage des valeurs propres est par conséquent

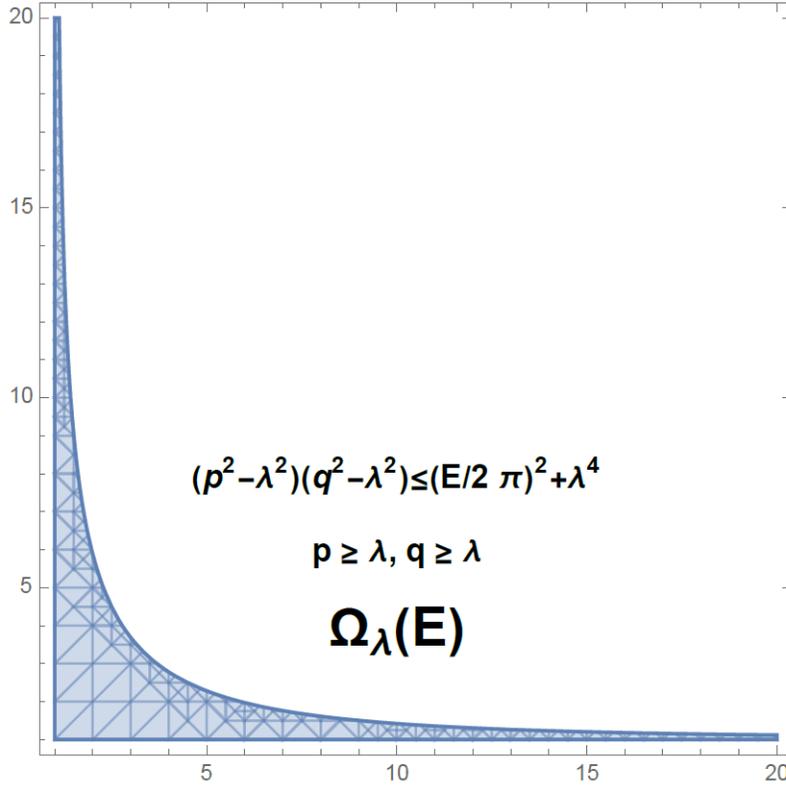


FIGURE 1 : Le sous-ensemble  $\Omega_\lambda(E)$  dans le premier quadrant

$$\Omega_\lambda(E) := \{(q, p) \mid q \geq \lambda, p \geq \lambda, H_\lambda(p, q) \leq \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 + \lambda^4\}$$

L'aire de  $\Omega_\lambda(E)$  est donnée, avec  $a = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 + \lambda^4$ , par l'intégrale convergente

$$I_\lambda(a) = \int_\lambda^\infty \left( \frac{\sqrt{a + \lambda^2 x^2 - \lambda^4}}{\sqrt{x^2 - \lambda^2}} - \lambda \right) dx$$

On a, avec  $x = \lambda y$ , l'égalité

$$I_\lambda(a) = \lambda \int_1^\infty \left( \frac{\sqrt{a + \lambda^4 y^2 - \lambda^4}}{\sqrt{\lambda^2 y^2 - \lambda^2}} - \lambda \right) dy = \lambda^2 \int_1^\infty \left( \frac{\sqrt{a \lambda^{-4} + y^2 - 1}}{\sqrt{y^2 - 1}} - 1 \right) dy$$

Ainsi, on obtient l'égalité

$$I_\lambda(a) = \lambda^2 I_1(a \lambda^{-4}) \quad (21)$$

On rappelle que les intégrales elliptiques  $E(m)$  et  $K(m)$  sont définies par

$$E(m) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta, \quad K(m) := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} d\theta$$

LEMME 4.1. *L'intégrale  $I(a) = I_1(a)$  est donnée par la somme des intégrales elliptiques*

$$I(a) = aK(1 - a) - E(1 - a) + 1 \quad (22)$$

*Preuve.* On a, avec  $m = 1 - a$ ,  $x = 1/t$

$$I(a) = \int_0^1 \left( \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} - 1 \right) \frac{dt}{t^2}$$

Appelons

$$g(t) := -\frac{\sqrt{1 - t^2} (mt^2 + \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2} - 1)}{t \sqrt{1 - mt^2}}$$

On a  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 0$  et la dérivée de  $g$  est égale à

$$g'(t) = -\left( \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} - 1 \right) t^{-2} + \frac{1 - m}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2}} - \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} + 1$$

de telle façon que l'égalité  $\int_0^1 g'(t) dt = 0$  donne (22).

Ainsi on obtient la

PROPOSITION 4.2 : *L'approximation semi-classique du nombre de valeurs propres négatives  $\xi$  de  $W_{\text{sa}}$  avec  $-\xi \leq E^2$  sur les fonctions paires est la même que sur les fonctions impaires et est égale à  $2\sigma(E, \lambda)$  où*

$$\sigma(E, \lambda) \sim \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E}{2\pi} \right) - 1 + \log(4) - 2 \log(\lambda) \right) + \lambda^2 + o(1) \quad (23)$$

*Preuve.* L'approximation semi-classique correspond, pour la restriction aux fonctions paires (ou aux fonctions impaires), à deux fois l'aire de  $\Omega_\lambda(E)$  et par conséquent à  $I_\lambda(a) = \lambda^2 I(a \lambda^{-4})$ , pour  $a = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 + \lambda^4$ . On a l'expansion asymptotique pour  $a \rightarrow \infty$

$$I(a) \sim \frac{1}{2} \sqrt{a} (\log(a) - 2 + 4 \log(2)) + 1 + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{a}} (-\log(a) - 4 \log(2)) + o\left(\frac{1}{a}\right) \quad (24)$$

de telle façon que

$$I_\lambda(a) \sim \frac{1}{2}\sqrt{a} (\log(a) - 2 + 4 \log(2) - 4 \log \lambda) + \lambda^2 + o(1) \quad (25)$$

Nous utilisons alors les expansions

$$\sqrt{a} = \frac{E}{2\pi} + O(1/E), \quad \log(a) = 2 \log\left(\frac{E}{2\pi}\right) + O(1/E^2)$$

et obtenons (23).

## 5. Opérateurs de Dirac

Les résultats du paragraphe 4 montrent que pour des valeurs adéquates de  $\lambda$ , le spectre négatif de  $W_{\text{sa}}$  a le même comportement ultraviolet que les carrés des zéros de la fonction zeta de Riemann. Puisque  $W_{\text{sa}}$  est un opérateur différentiel du second ordre, on le compare à l'opérateur de Klein-Gordon et on construit l'analogue de l'opérateur de Dirac. D'abord, on utilise le processus de Darboux (voir [7], [8]) pour factoriser  $W_{\text{sa}}$  comme un produit de deux opérateurs différentiels du premier ordre.

LEMME 5.1. *Soit  $p(x) = x^2 - \lambda^2$ ,  $V(x) = 4\pi^2\lambda^2x^2$ ,  $L = \partial(p(x)\partial) + V(x)$ ,  $(\nabla f)(x) := p(x)^{1/2}\partial f(x)$  et  $U$  l'opérateur unitaire*

$$U : L^2([\lambda, \infty), dx) \rightarrow L^2([\lambda, \infty), p(x)^{-1/2}dx), \quad U(\xi)(x) := p(x)^{1/4}\xi(x).$$

Soit  $w(x)$  une solution de l'équation

$$\nabla w(x) + w(x)^2 = -V(x) + \left(\frac{p''(x)}{4} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)}\right), \quad \forall x \in [\lambda, \infty) \quad (26)$$

alors on a  $L = U^*(\nabla + w)(\nabla - w)U$ .

*Preuve.* Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et considérons les opérateurs différentiels  $T_1 := f\partial_x f$  et  $T_2 := \partial_x f^4 \partial_x$ . Montrons que  $T_1^2 - T_2$  est un opérateur d'ordre zéro : on a

$$\begin{aligned} T_1^2 &= f\partial_x f^2 \partial_x f = -f' f^2 \partial_x f + \partial_x f^3 \partial_x f \\ -f' f^2 \partial_x f &= -f'^2 f^2 - f' f^3 \partial_x, \quad \partial_x f^3 \partial_x f = \partial_x f^4 \partial_x + \partial_x f^3 f' \end{aligned}$$

de telle façon que  $T_1^2 - T_2$  est la multiplication par  $2f'^2 f^2 + f^3 f''$ . Appliquer cela pour  $f(x) = p(x)^{1/4}$  donne

$$(U^*\nabla U)^2 = \partial_x p(x) \partial_x + \frac{p''(x)}{4} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)}$$

pour lequel la conclusion découle de l'utilisation de (26).

Nous déterminons maintenant toutes les solutions de l'équation de Riccati (26) qui donne

$$\sqrt{x^2 - \lambda^2} w'(x) + w(x)^2 = -4\pi^2\lambda^2x^2 - \frac{1}{4} \frac{x^2}{x^2 - \lambda^2} + \frac{1}{2} \quad (27)$$

Le prochain lemme est standard en utilisant la réduction d'une équation de Riccati à une équation de Bernoulli.

LEMME 5.2. *Soit  $u_j$  deux solutions à valeurs réelles de  $Lu = 0$  qui engendrent l'espace linéaire des solutions dans  $(\lambda, \infty)$ .*

(i) *Pour  $z \in \mathbb{C}$  et  $u = u_1 + zu_2$ , la solution  $u$  n'a pas de zéro dans  $(\lambda, \infty)$  si  $z \notin \mathbb{R}$  et une infinité de zéros sinon.*

(ii) *Toutes les solutions de l'équation de Riccati (27) sont données par*

$$w_z(x) = \frac{(x^2 - \lambda^2)^{1/4} \partial \left( (x^2 - \lambda^2)^{1/4} u(x) \right)}{u(x)} \quad (28)$$

où  $u = u_1 + zu_2$  et  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

(iii) *L'application  $z \mapsto w_z$  de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  vers l'espace des solutions de (27) est un homéomorphisme.*

*Preuve.* (i) Soit  $x \in (\lambda, \infty)$  et  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $u = u_1 + zu_2$ . Supposons que  $u(x) = 0$ . Alors  $u_1(x) + zu_2(x) = 0$  et puisque  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , cela implique  $u_1(x) = 0$  et  $u_2(x) = 0$ . Le Wronskien  $p(x)(u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x))$  est constant et non nul puisque les  $u_j$  sont des solutions indépendantes. Par conséquent, nous obtenons une contradiction et  $u$  n'a aucun zéro. De plus, puisque l'équation  $Lu = 0$  est dans le cas LCO, n'importe quelle solution de valeur réelle a une infinité de zéros.

(ii) La solution standard de l'équation de Riccati (26) est de la forme

$$w(x) = \frac{p(x)^{1/4} \partial \left( p(x)^{1/4} u(x) \right)}{u(x)} \quad (29)$$

ce qui donne

$$\nabla w(x) + w(x)^2 = \frac{p''(x)}{4} + \frac{p'(x)u'(x)}{u(x)} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)} + \frac{p(x)u''(x)}{u(x)}$$

de telle façon que

$$Lu = 0 \Rightarrow \nabla w(x) + w(x)^2 = -V(x) + \left( \frac{p''(x)}{4} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)} \right)$$

Par conséquent, par (i), n'importe quel  $w_z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est une solution de (27). En utilisant les trois valeurs  $\{i, -i, j\}$  pour  $z$  et la réduction à une équation de Bernoulli, on peut exprimer la solution générale de (27) selon la forme

$$w = w_i + \frac{(w_{-i} - w_i)(w_j - w_i)}{(1-t)(w_j - w_i) + t(w_{-i} - w_i)} = w_{z(t)} \quad (30)$$

où

$$z(t) = \frac{i(i(t-1) + j(t+1))}{i(t+1) + j(t-1)} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

(iii) La formule (30) établit un homéomorphisme entre l'espace des solutions de l'équation de Riccati et le complémentaire dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  du cercle

$$\{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid z(t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$$

et ainsi l'application  $z \mapsto w_z$  de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  dans l'espace des solutions de (27) est un homéomorphisme.

**PROPOSITION 5.3 :** Soit  $w$  une solution de l'équation de Riccati (27) et  $\mathcal{D}$  la matrice d'ordre un d'opérateurs

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla + w(x) \\ \nabla - w(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Alors le carré de  $\mathcal{D}$  est diagonal avec chaque terme de la diagonale spectralement équivalent à  $L$ ,

$$U^* \mathcal{D}^2 U = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L + 2\nabla w(x) \end{pmatrix}$$

La preuve est évidente. L'utilisation du procédé de Darboux dans cette construction est relié à la théorie des déformations spectrales [7], [8].

## 6. Comportement ultraviolet du spectre de Dirac, dans le cas $\lambda = \sqrt{2}$

Dans cette section on prend  $\lambda = \sqrt{2}$ , et on considère l'opérateur  $2\mathcal{D}$  où  $\mathcal{D}$  est comme défini dans la Proposition 5.3.

**THÉORÈME 6.1 :** *L'opérateur  $2\mathcal{D}$  a un spectre simple discret contenu dans  $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ . Ses valeurs propres imaginaires sont symétriques selon la conjugaison complexe et la fonction de comptage  $N(E)$  comptant ceux de partie imaginaire positive moindre que  $E$  est telle que*

$$N(E) \sim \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + O(1) \quad (32)$$

*Preuve.* Par la Proposition 5.3, le spectre de  $2\mathcal{D}$  est constitué des nombres complexes de la forme  $\xi = \pm 2\sqrt{\alpha}$  où  $\alpha$  varie dans le spectre de  $L$ . Ce dernier est réel et le nombre des valeurs propres négatives  $\alpha \geq -E^2$  est donné par la Proposition 4.2 comme étant égal à  $2\sigma(E, \lambda)$ , par conséquent en sélectionnant la racine de partie imaginaire positive on obtient

$$0 < \Im(\xi) \leq E \iff \alpha \geq -(E/2)^2$$

et le nombre  $N(E)$  de tels  $\xi$  est donc

$$\begin{aligned} 2\sigma(E/2, \sqrt{2}) &= \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E/2}{2\pi} \right) - 1 + \log(4) - 2\log(\sqrt{2}) \right) + O(1) = \\ &= \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + O(1) \end{aligned}$$

qui fournit l'estimation requise. □

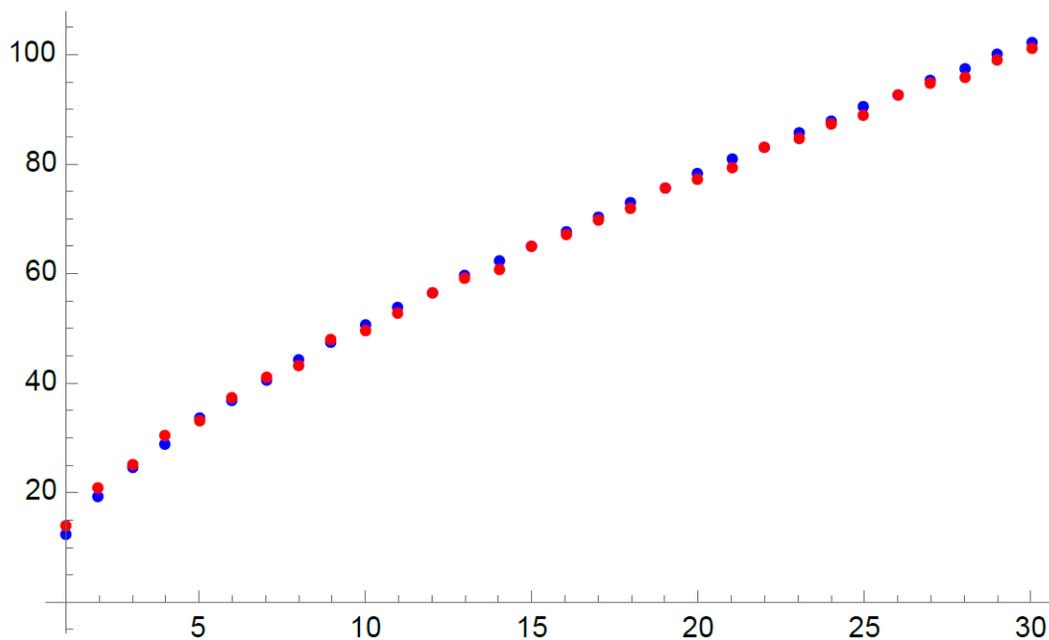


FIGURE 2 : Graphique de la (partie imaginaire de la)  $n^{\text{ième}}$  valeur propre (en bleu) et du  $n^{\text{ième}}$  zéro de zeta (en rouge). Quand le point rouge cache le point bleu, les deux valeurs sont trop proches l'une de l'autre pour être distinguées.

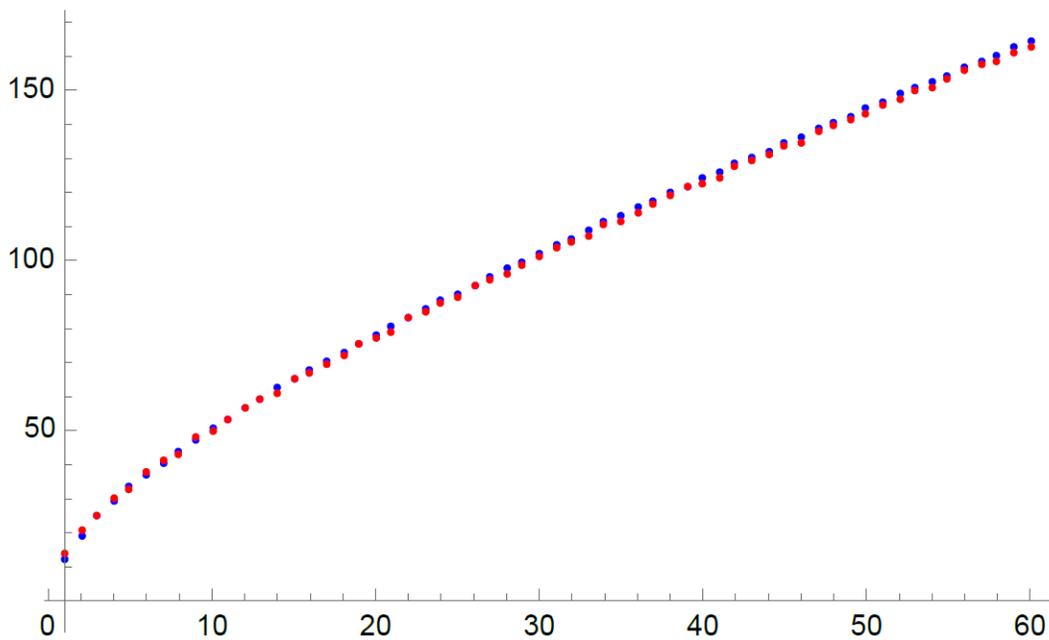


FIGURE 3 : Le spectre comparé aux zéros de zeta

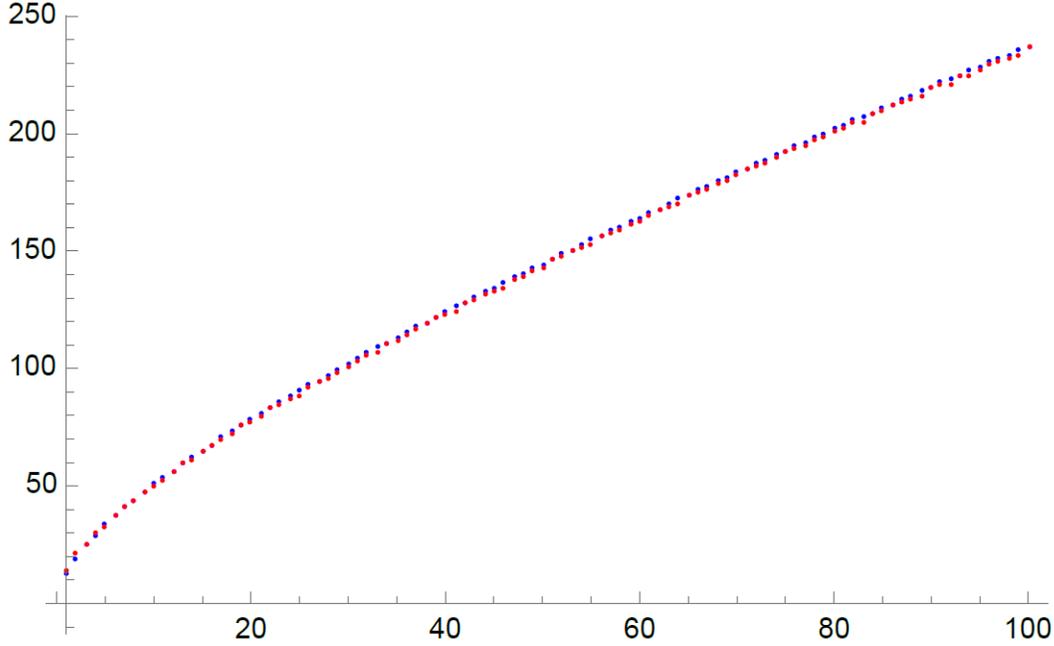


FIGURE 4 : Le spectre comparé aux zéros de zeta

## 7. Remarques finales

Nous rassemblons dans ce dernier paragraphe un certain nombre de remarques spéculatives.

### 7.1. Signification géométrique du théorème 6.1

L'opérateur  $2\mathcal{D}$  du théorème 6.1 avec l'action par multiplication des fonctions continues sur l'intervalle  $[\sqrt{2}, \infty)$  définirait un triplet spectral si  $2\mathcal{D}$  était self-adjoint (ou adjoint oblique) mais son spectre contient à la fois des éléments imaginaires et des éléments réels. Toujours, la propriété clef que le résolvant est compact est satisfaite et de plus, puisque le terme dominant  $\nabla = (2\sqrt{x^2 - 2}) \partial_x$  est équivalent à  $2x\partial_x$  pour  $x \rightarrow \infty$ , l'algèbre des fonctions ayant un commutateur borné avec  $2\mathcal{D}$  contient des fonctions continues qui sont Lipchitz pour la métrique d'invariance d'échelle  $dx/x$ . La métrique classique associée à  $2\mathcal{D}$  est

$$ds^2 = -\frac{1}{4}dx^2/(x^2 - 2) = \frac{1}{\alpha(x)}dx^2, \quad \alpha(x) = -4(x^2 - 2)$$

Cette  $ds^2$  change de signe quand il y a traversée de la frontière  $x = \sqrt{2}$  et cela suggère, dans le but de gérer toutes les fonctions paires sur  $\mathbb{R}$  et de prendre en compte les valeurs propres réelles et imaginaires du carré de  $2\mathcal{D}$ , de chercher une métrique deux-dimensionnelle avec signature  $(-1, 1)$  de la forme

$$ds^2 = -\alpha(x)dt^2 + \frac{1}{\alpha(x)}dx^2$$

Cette géométrie correspond à un trou noir en deux dimensions d'espace-temps avec horizon en  $x = \pm\sqrt{2}$ . Il respecte l'analogie 2-dimensionnel de l'équation d'Einstein avec constante cosmologique

= 8 et pas de source [10]. On peut regarder les courbes nulles ce qui signifie  $\frac{dx}{dt} = \pm\alpha(x)$  et utiliser

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) = -4(x^2 - 2) \Rightarrow t(x) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \log \left( \frac{(\sqrt{2} + x)}{(x - \sqrt{2})} \right) + c$$

pour passer aux nouvelles coordonnées  $v = t - t(x)$ , et  $x$  inchangé. Dans ces nouvelles coordonnées, on réexprime la métrique sous la forme continue

$$ds^2 = 4(x^2 - 2) dv^2 - 2dvdx$$

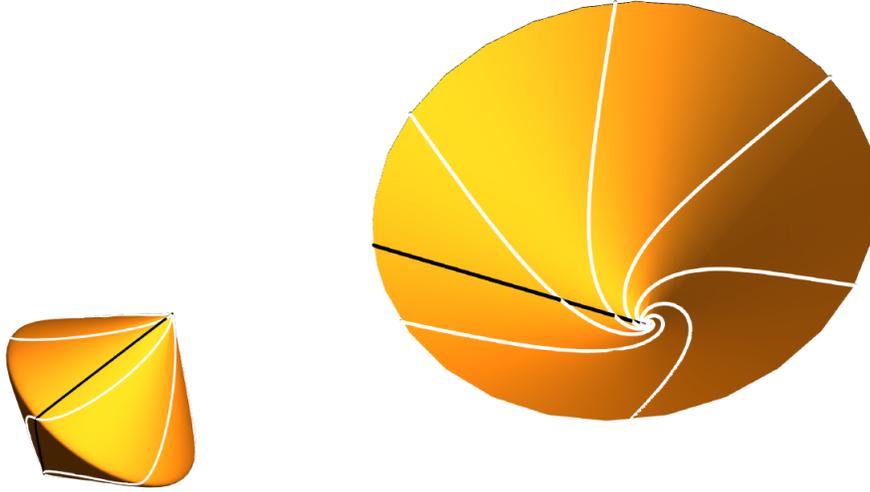


FIGURE 5 : Rayons lumineux dans la géométrie deux dimensionnelle, et en noir la courbe originale. Les lignes verticales sont les horizons en  $x = \pm\sqrt{2}$ .

Dans cette métrique, les rayons lumineux sont donnés par  $v = v_0$  (*i.e.* les lignes d'horizon de la Figure 5) et par les courbes

$$v(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + c$$

*i.e.* les solutions de l'équation  $dv = \frac{dx}{2(x^2-2)}$ . La courbe originale donnée par  $t = 0$  correspond au graphe de  $v = -t(x)$  comme montré en noir dans la Figure 5.

## 7.2. Valeurs propres positives de $W_{sa}$ et zéros triviaux de Zeta

Les valeurs propres  $\chi(n)$  de la restriction de  $W_{sa}$  aux fonctions paires dans l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$  ont une forme asymptotique bien comprise qui par le théorème 3.11 de [12] implique que, indépendamment de la valeur de  $\lambda$ , (notons que nous ne considérons que les fonctions paires de telle façon que l'index  $n$  de *op.cit.* est remplacé par  $2n$ )

$$\chi(n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 + O(1), \quad n \rightarrow \infty$$

Ce comportement est le même que celui des carrés des zéros triviaux<sup>2</sup> de la fonction zeta de Riemann avec le même décalage de  $\frac{1}{2}$  comme pour la ligne critique. Pour obtenir une relation convaincante,

<sup>2</sup>non triviaux ?

on devrait analyser l'extension de  $2\mathcal{D}$  à (deux copies) des fonctions paires sur  $\mathbb{R}$  ainsi qu'aux conditions que doit respecter l'espace de Hilbert pour éliminer les racines carrées positives de  $\chi(n)$ .

### 7.3. Troncature spectrale

Pour éliminer les valeurs propres réelles de  $2\mathcal{D}$  provenant des valeurs propres positives de  $W_{\text{sa}}$  on peut effectuer une troncature spectrale [6], l'algèbre des fonctions agissant par multiplication est alors remplacée par le système d'opérateurs obtenu par compression sur l'espace de Sonin. De façon similaire, on peut utiliser la troncature spectrale pour éliminer les racines carrées positives avec les notations du paragraphe 7.2.

### Bibliographie

- [1] A. Connes, *Formules explicites, formules de trace et réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta*. Cours au Collège de France (1998). [https://alainconnes.org/wp-content/uploads/UPL8550790458066685627\\_AN\\_99\\_connes.pdf](https://alainconnes.org/wp-content/uploads/UPL8550790458066685627_AN_99_connes.pdf)
- [2] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. *Selecta Math.* (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106.
- [3] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.
- [4] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*. *Selecta Math.* (N.S.) **27** (2021) no 4.
- [5] A. Connes, C. Consani, *Spectral triples and  $\zeta$ -cycles*. Preprint (2021). Available at <https://arxiv.org/pdf/2106.01715.pdf>
- [6] A. Connes, W. van Suijlekom, *Spectral truncations in noncommutative geometry and operator systems*. *Comm. Math. Phys.* **383** (2021), no. 3, 2021–2067.
- [7] P. A. Deift, *Applications of a commutation formula*. *Duke Math. J.* **45** (1978), no. 2, 267–310.
- [8] F. A. Grünbaum, *Commuting integral and differential operators and the master symmetries of the Korteweg-de Vries equation*. *Inverse Problems* **37** (2021), no 8.

- [9] V. Katsnelson, *Self-adjoint boundary conditions for the prolate spheroid differential operator*, in: Indefinite inner product spaces, Schur analysis and differential equations, pp. 357-386, Oper. Theory Adv. Appl. **263**, Birkhäuser-Springer, 2018.
- [10] R. B. Mann, A. Shiekh, L. Tarasov, *Classical and Quantum properties of two-dimensional black holes*. Nuclear Physics B341 (1990), 134–154.
- [11] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators, Part II*, Ungar Publishing Company, New York, 1968.
- [12] A. Osipov, V. Rokhlin, H. Xiao, *Prolate spheroidal wave functions of order zero*. Mathematical tools for bandlimited approximation. Applied Mathematical Sciences, 187. Springer, New York, 2013. xii + 379 pp.
- [13] F. Richard-Jung, J.-P. Ramis, J. Thomann, F. Fauvet, *New characterization for the eigenvalues of the prolate spheroidal wave equation*. Stud. Appl. Math. **138** (2017), 3–42.
- [14] D. Slepian, H. Pollak, *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty*, The Bell System technical Journal (1961), 43–63.
- [15] D. Slepian, *Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions*, J. Math. Phys. Vol. **44** (1965), 99–140.
- [16] D. Slepian, *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling*, Siam Review. Vol. 23 (1983), 379–393.
- [17] J. Weidmann, *Spectral theory of ordinary differential operators*, Lecture Notes in Mathematics **1258**, Springer, Berlin, 1987.
- [18] A. Zettl, *Sturm-Liouville Theory*, AMS Surv. Mono. **121**, American Mathematical Society, 2005.

**Formule de Trace en géométrie non-commutative  
et zéros de la fonction zeta de Riemann**  
Alain CONNES

**Abstract** *Nous donnons une interprétation spectrale des zéros critiques de la fonction zêta de Riemann qui les fait voir comme les raies d'un spectre d'absorption, alors que les éventuels zéros non-critiques apparaissent comme des résonances. Nous donnons une interprétation géométrique des formules explicites de la théorie des nombres qui deviennent des formules de trace sur l'espace des classes d'adèles. Cela réduit l'hypothèse de Riemann à la validité de la formule de trace et élimine le paramètre  $\delta$  de notre approche précédente.*

**Table des matières**

**Introduction.**

- I** Chaos quantique et flot hypothétique de Riemann.
- II** Géométrie algébrique et corps globaux de caractéristique nulle.
- III** Interprétation spectrale des zéros critiques.
- IV** Formule de trace d'une distribution pour les flots sur des variétés.
- V** L'action  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  de  $K^*$  d'un corps local  $K$ .
- VI** Le cas global, et le calcul de la formule de trace.
- VII** Preuve de la formule de trace dans le cas  $S$ -local.
- VIII** Formule de trace dans le cas global, et élimination de  $\delta$ .

**Remarques générales.**

- Appendice I** Preuve du théorème 1.
- Appendice II** Formules explicites.
- Appendice III** Formules de trace d'une distribution.

**Introduction**

Nous allons donner dans cet article une interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann et un cadre géométrique dans lequel on peut transposer les idées de la géométrie algébrique impliquant l'action du Frobenius et la formule de Lefschetz. L'interprétation spectrale des zéros de zêta les considèrera comme les raies noires d'un spectre d'absorption. Tous les zéros joueront un rôle du côté spectral de la formule de trace, mais alors que les zéros critiques apparaîtront per-se, les zéros non-critiques apparaîtront comme des résonances et interviendront dans la formule de trace à travers leur potentiel harmonique par rapport à la droite critique. Ainsi, le versant spectral est entièrement

---

article original de référence Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, Sel. Math. New ser. 5 (1999), p. 29-106.

lisible sur la page <http://alainconnes.org/fr/bibliography.php>  
référence n° 132.

Traduction corrigée en décembre 2020, Denise Vella-Chemla.

canonique, et en prouvant la positivité de la distribution de Weil, nous montrerons que cette égalité avec le côté géométrique, i.e. la formule de trace globale, est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions  $L$  à Grössencharakter. Nous prendrons modèle dans notre présentation sur la formule des traces de Selberg, mais notre formule diffère de celle-ci selon plusieurs aspects importants. Nous expliquerons d'abord en particulier dans quelle mesure un signe négatif crucial dans l'analyse des fluctuations statistiques des zéros de zêta indique que l'interprétation spectrale devrait être un spectre d'absorption, ou de façon équivalente, devrait être de nature cohomologique. Cela se combinera dans un cadre géométrique qui sera un espace à l'air innocent, l'espace  $X$  des classes d' adèles, dans lequel deux adèles qui appartiennent à la même orbite d'action de  $GL_1(k)$  ( $k$  un corps global), sont considérées comme équivalentes. Le groupe  $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$  des classes d'idèles (qui est le correspondant dans la théorie des corps de classes du groupe de Galois) agit par multiplication sur  $X$ .

Notre premier résultat préliminaire (théorème 1 de la section III) fournit une interprétation spectrale des zéros de zêta et des fonctions  $L$  sur un corps global  $k$ , à partir de l'action du groupe des classes d'idèles sur un espace de fonctions de carré intégrable, sur l'espace  $X = A/k^*$  des classes d'adèles. Le corollaire 2 fournit le calcul correspondant de la trace spectrale. Ce résultat est seulement préliminaire parce qu'il nécessite un paramètre non naturel  $\delta$  qui joue le rôle d'un exposant de Sobolev et permet de voir le spectre d'absorption comme un point du spectre.

Notre second résultat préliminaire est un calcul formel (section VI) du caractère de la représentation du groupe des classes d'idèles sur l'espace sous-jacent  $L^2$ . Ce calcul formel donne la distribution de Weil qui est l'ingrédient essentiel de la formule explicite de Riemann-Weil. À ce point-là des recherches (qui était la situation dans [Co]), les problèmes principaux consistent à donner une signification rigoureuse au calcul de la formule de trace et à éliminer ce paramètre non souhaité  $\delta$ .

Ces deux problèmes seront résolus dans le présent article. Nous démontrons d'abord une formule de trace (théorème 3 de la section V) pour l'action du groupe multiplicatif  $K^*$  sur un corps local  $K$  sur l'espace de Hilbert  $L^2(K)$ , et (théorème 4 de la section VII) une formule de trace pour l'action du groupe multiplicatif  $C_S$  des classes d'idèles associées à un ensemble fini  $S$  de places d'un corps global  $k$ , sur l'espace de Hilbert des fonctions à carré intégrable  $L^2(X_S)$ , où  $X_S$  est le quotient de  $\prod_{v \in S} k_v$  par l'action du groupe  $O_S^*$  des S-unités de  $k$ . Dans les deux cas, nous obtenons exactement les termes des formules explicites de Weil qui appartiennent à l'ensemble fini des places. Ce résultat est plutôt important puisque l'espace  $X_S$  est hautement non trivial lorsque  $S$  est supérieur ou égal à 3. Par exemple, cet espace-quotient n'est pas de type I au sens de la géométrie non-commutative et il est rassurant que la formule de trace continue d'être alors valable dans ce cas.

Nous testons en détail (théorème 6 de l'Appendice II) que la réécriture des formules explicites de Weil qui est prédite par la formule de trace globale est correcte.

Finalement, nous éliminons dans la section VIII, en utilisant des idées qui sont communes et à la formule des traces de Selberg, et à l'explication standard des raies d'absorption en physique, le paramètre problématique  $\delta$  qui est apparu comme un paramètre des espaces de fonctions de la section III. Nous écrivons la formule globale de trace de manière analogue à la formule des traces

de Selberg. La validité de la formule de trace pour n'importe quel ensemble fini de places découle du théorème 4 de la section VII, mais le cas global est laissé ouvert et on montre (Théorème 5 de la section VIII) qu'il est équivalent à la validité de l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions  $L$  à Grössencharakter. Cette équivalence, avec la plausibilité de l'obtention d'une preuve directe de la formule de trace selon les lignes du théorème 4 (section VII) constitue le résultat principal de cet article. L'élimination du paramètre  $\delta$  est l'amélioration principale du présent article relativement à [Co].

C'est une idée ancienne, due à Polya et Hilbert, que dans le but de comprendre la localisation des zéros de la fonction zêta de Riemann, il conviendrait de trouver un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et un opérateur  $D$  sur  $\mathcal{H}$  dont le spectre est donné par les zéros non triviaux de la fonction zêta. L'espoir est alors que des propriétés convenables d'auto-adjonction de  $D$  (de  $i(D - \frac{1}{2})$  plus précisément) ou bien des propriétés de positivité de  $\Delta = D(1 - D)$  seraient plus aisées à traiter que la conjecture originale. Les raisons principales qui doivent nous faire prendre ces idées très au sérieux sont d'une part le travail de A. Selberg ([Se]) dans lequel un Laplacien  $\Delta$  est relié de la façon décrite ci-dessous à un analogue de la fonction zêta, et d'autre part l'évidence théorique ([M][B][KS]) et expérimentale ([O][BG]) des fluctuations de l'espacement entre les zéros consécutifs de zêta. Le nombre de zéros de zêta dont la partie imaginaire est inférieure à  $E > 0$ ,

$$(1) \quad N(E) = \# \text{ de zéros } \rho, \quad 0 < \text{Im } \rho < E$$

a une expression asymptotique ([R]) donnée par

$$(2) \quad N(E) = \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + \frac{7}{8} + o(1) + N_{\text{osc}}(E)$$

où la partie oscillatoire de la fonction  $N$  étagée est

$$(3) \quad N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \log \zeta \left( \frac{1}{2} + iE \right)$$

en assumant que  $E$  n'est pas la partie imaginaire d'un zéro et en prenant comme logarithme la branche qui vaut 0 à  $l'+\infty$ .

On montre (cf. [Pat]) que  $N_{\text{osc}}(E)$  est en  $O(\log E)$ . Dans la décomposition (2), les deux termes  $\langle N(E) \rangle = N(E) - N_{\text{osc}}(E)$  et  $N_{\text{osc}}(E)$  jouent un rôle indépendant. Le premier  $\langle N(E) \rangle$ , qui fournit la densité moyenne des zéros, provient de la formule de Stirling et est parfaitement contrôlé. Le second  $N_{\text{osc}}(E)$  est une manifestation du caractère vraiment aléatoire de la localisation des zéros, et pour éliminer le rôle de la densité, on retourne à une situation de densité uniforme par la transformation

$$(4) \quad x_j = \langle N(E_j) \rangle \quad (E_j \text{ la partie imaginaire du } j^{\text{eme}} \text{ zéro de zêta}).$$

Alors, l'espacement entre deux  $x_j$  consécutifs est 1 en moyenne et la seule information qui reste est dans la fluctuation statistique. Il s'avère que ([M][O]), ces fluctuations sont identiques aux fluctuations d'une matrice hermitienne de très grande taille.

H. Montgomery [M] a démontré (en assumant RH) une forme faible de la conjecture suivante (avec  $\alpha, \beta > 0$ ),

$$(5) \quad \text{Card} \{(i, j); i, j \in 1, \dots, M; x_i - x_j \in [\alpha, \beta]\} \sim M \int_{\alpha}^{\beta} \left( 1 - \left( \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right)^2 \right) du$$

Cette loi (5) est précisément identique à la corrélation entre les valeurs propres de matrices hermitiennes de l'ensemble unitaire gaussien ([M]). De plus, des tests numériques établis par A. Odlyzko ([O][BG]) ont confirmé avec une grande précision le comportement (5) ainsi qu'un comportement analogue pour plus de deux zéros. In [KS], N. Katz et P. Sarnak ont prouvé une loi analogue à celle de Montgomery-Odlyzko pour les fonctions zêta et pour les fonctions  $L$  sur des corps de fonctions.

C'est alors une excellente motivation que d'essayer de trouver une paire naturelle  $(\mathcal{H}, D)$  ; par naturelle, on veut dire par exemple que l'on pourrait ne même pas avoir à définir la fonction zêta, mais simplement son prolongement analytique, pour obtenir une telle paire (dans le but par exemple d'éviter la farce de définir  $\mathcal{H}$  comme l'espace  $\ell^2$  fabriqué à partir des zéros de zêta).

## I. Chaos quantique et flot hypothétique de Riemann

Décrivons tout d'abord en suivant [B] la tentative directe de construire l'espace de Polya-Hilbert à partir de la quantification d'un système dynamique classique. La motivation initiale de la théorie des matrices aléatoires vient de la mécanique quantique. Dans cette théorie, la quantification d'un système dynamique classique donné par son espace des phases  $X$  et son hamiltonien  $h$  permet d'obtenir un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et un opérateur auto-adjoint  $H$  dont le spectre est l'observable principal du système. Pour des systèmes compliqués, la seule information utile à propos de ce spectre est que, alors que la partie moyenne de la fonction de comptage,

$$(1) \quad N(E) = \# \text{ valeurs propres de } H \text{ dans } [0, E]$$

est calculée par une approximation semi-classique comme un volume dans l'espace des phases, la partie oscillatoire,

$$(2) \quad N_{\text{osc}}(E) = N(E) - \langle N(E) \rangle$$

est la même que pour une matrice aléatoire, gouvernée par les statistiques dictées par les symétries du système.

En l'absence de champ magnétique, i.e. pour un hamiltonien classique de la forme,

$$(3) \quad h = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

où  $V$  est un potentiel à valeurs réelles sur l'espace des configurations, il y a une symétrie naturelle de l'espace classique des phases, appelée la symétrie temporelle inverse,

$$(4) \quad T(p, q) = (-p, q)$$

qui préserve  $h$ , et implique que l'ensemble correct sur les matrices aléatoires n'est pas le GUE ci-dessous mais plutôt l'ensemble orthogonal Gaussien : GOE. De ce fait, la partie oscillatoire  $N_{\text{osc}}(E)$  se comporte de la même manière qu'une matrice aléatoire *réelle symétrique*.

Bien sûr,  $H$  est juste un opérateur spécifique dans  $\mathcal{H}$  et, pour qu'il se comporte de façon *générique*, il est nécessaire (cf. [B]) que le système hamiltonien classique  $(X, h)$  soit *chaotique* avec des *orbites périodiques* isolées dont les exposants d'instabilité (i.e. les logarithmes des valeurs propres de l'application de Poincaré inverse agissant sur l'espace transverse aux orbites) soient différents de 0.

On peut alors ([B]) écrire une approximation semi-classique de la fonction oscillatoire  $N_{\text{osc}}(E)$

$$(5) \quad N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \int_0^\infty \text{Trace}(H - (E + i\eta))^{-1} i d\eta$$

en utilisant l'approximation de la phase stationnaire de l'intégrale fonctionnelle correspondante. Pour un système dont la configuration est de dimension 2, cela donne ([B] (15)),

$$(6) \quad N_{\text{osc}}(E) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2\text{sh}\left(\frac{m\lambda_p}{2}\right)} \sin(S_{\text{pm}}(E))$$

où les  $\gamma_p$  sont les orbites périodiques primitives,  $m$  correspondant au nombre de fois où l'orbite est traversée, alors que les exposants d'instabilité sont les  $\pm\lambda_p$ . La phase  $S_{\text{pm}}(E)$  est à un facteur constant près, égale à  $m E T_\gamma^\#$  où  $T_\gamma^\#$  est la période de l'orbite primitive  $\gamma_p$ .

La formule (6) donne des informations très précieuses ([B]) sur le "flot de Riemann" hypothétique dont la quantification devrait fournir l'espace de Polya-Hilbert. On note particulièrement que la formule du produit d'Euler pour la fonction zêta amène (cf. [B]) une formule asymptotique similaire pour  $N_{\text{osc}}(E)$  (3),

$$(7) \quad N_{\text{osc}}(E) \simeq \frac{-1}{\pi} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m/2}} \sin(m E \log p).$$

La comparaison de (6) et (7) fournit les informations suivantes

(A) Les orbites périodiques primitives devraient être étiquetées par les nombres premiers  $p = 2, 3, 5, 7, \dots$ , les périodes devraient être les  $\log p$  et les exposants d'instabilité devraient être les  $\lambda_p = \pm \log p$ .

De plus, puisque chaque orbite est comptée seulement une fois, le flot de Riemann ne devrait pas présenter la symétrie  $T$  de (4) dont l'effet serait de dupliquer le nombre d'orbites. Ce dernier point exclut en particulier les flots géodésiques puisqu'ils respectent la symétrie temporelle  $T$ . Ainsi nous obtenons que :

(B) Le flot de Riemann ne peut pas satisfaire la symétrie de renversement du temps.

Pourtant, il y a deux importants problèmes (cf. [B]) entre les formules (6) et (7). Le premier est le signe *moins* au début de la formule (7), et le second est que bien que  $2\text{sh}\left(\frac{m\lambda_p}{2}\right) \sim p^{m/2}$  quand  $m \rightarrow \infty$ , nous n'avons pas une égalité pour les valeurs finies de  $m$ .

Il y a donc deux difficultés fondamentales et pour les éliminer, nous utiliserons la stratégie bien connue consistant à élargir le problème au cas des *corps globaux* arbitraires. En restreignant alors le domaine au cas des corps de fonctions, nous obtiendrons une précieuse information supplémentaire.

## II. Géométrie algébrique et corps globaux de caractéristique nulle

Les propriétés de base de la fonction zêta de Riemann s'étendent aux fonctions zêta associées à un corps global arbitraire, et il est peu probable que l'on puisse régler le problème de l'interprétation spectrale des zéros puis trouver le flot de Riemann pour le cas particulier des corps globaux  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels, sans du même coup régler ces problèmes pour tous les corps globaux simultanément.

La définition conceptuelle d'un tel corps  $k$ , est :

*Un corps  $k$  est un corps global si et seulement s'il est discret et cocompact dans un anneau abélien semi-simple localement compact (non discret)  $A$ .*

De cela découle que  $A$  dépend alors fonctoriellement de  $k$  et est appelé l'anneau des adèles de  $k$ , souvent noté  $k_A$ . Aussi, bien que le corps  $k$  lui-même n'ait aucune topologie intéressante, il y a un anneau, et avec une topologie hautement non triviale, qui est canoniquement associé à  $k$ .

Quand la caractéristique  $p$  d'un corps global  $k$  est  $> 0$ , le corps  $k$  est le corps des fonctions sur une courbe algébrique non-singulière  $\Sigma$  définie sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$  inclus dans  $k$  comme sous-corps fini maximal, appelé le corps des constantes. On peut alors appliquer les idées de la géométrie algébrique, d'abord développée sur  $\mathbb{C}$ , à la géométrie de la courbe  $\Sigma$  et obtenir une interprétation des propriétés de base de la fonction zêta de  $k$  ; le dictionnaire contient en particulier les lignes suivantes :

Interprétation spectrale des zéros	Valeurs propres de l'action de Frobenius sur la cohomologie $\ell$ -adique
Équation fonctionnelle	Théorème de Riemann Roch (Dualité de Poincaré)
Formules explicites de la théorie des nombres	Formule de Lefschetz pour le Frobenius
Hypothèse de Riemann	Positivité de Castelnuovo

Puisque  $\mathbb{F}_q$  n'est pas algébriquement clos, les points de  $\Sigma$  définis sur  $\mathbb{F}_q$  ne suffisent pas et on a besoin de considérer  $\bar{\Sigma}$ , les points de  $\Sigma$  sur la fermeture algébrique  $\bar{\mathbb{F}}_q$  de  $\mathbb{F}_q$ , qui sont obtenus en adjoignant à  $\mathbb{F}_q$  les racines de l'unité d'ordre premier à  $q$ . Cet ensemble de points est une union dénombrable d'orbites périodiques sous l'action de l'automorphisme de Frobenius, ces orbites étant paramétrées

par l'ensemble des places de  $k$  et leurs périodes sont dans ce cas données par les analogues des  $\log p$  de (A). Comme c'est un ensemble dénombrable, il ne se qualifie pas comme analogue du flot de Riemann et il acquiert seulement une structure intéressante de la géométrie algébrique. Le signe moins qui était problématique dans la discussion ci-dessus admet ici une belle résolution puisque l'analogue de l'espace de Polya-Hilbert est donné, si l'on remplace  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{Q}_\ell$  le corps des nombres  $\ell$ -adiques  $\ell \neq p$ , par le groupe de cohomologie

$$(2) \quad H_{\text{et}}^1(\bar{\Sigma}, \mathbb{Q}_\ell)$$

qui apparaît avec un signe couvrant moins dans la formule de Lefschetz

$$(3) \quad \sum (-1)^j \text{Trace } \varphi^* / H^j = \sum_{\varphi(x)=x} 1.$$

Pour le cas général, cela suggère que :

(C) L'espace de Polya-Hilbert  $\mathcal{H}$  devrait provenir de son espace  $\ominus \mathcal{H}$ .

En d'autres termes, l'interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann devrait être un spectre d'absorption plutôt qu'un spectre d'émission, pour emprunter le langage de la spectroscopie.

L'élément suivant que l'on apprend de cette excursion dans la caractéristique  $p > 0$  est que dans ce cas, on ne travaille pas avec un flot mais plutôt avec une simple transformation. En fait, en tirant parti des couvertures de  $\Sigma$  et de l'isomorphisme fondamental de la théorie des corps de classes, on trouve que le groupe naturel qui devrait remplacer  $\mathbb{R}$  pour le flot général de Riemann est le groupe des classes d'idèles :

$$(D) \quad C_k = \text{GL}_1(A)/k^* .$$

Nous pouvons alors mémoriser les informations (A) (B) (C) (D) que nous avons obtenues jusque-là et chercher le flot de Riemann comme étant une action de  $C_k$  sur un espace hypothétique  $X$ .

### III. Interprétation spectrale des zéros critiques

Il y a une troisième approche au problème des zéros de la fonction zêta de Riemann, due à G. Pólya [P] et à M. Kac [K] et poursuivie plus tard dans [J] [BC]. Elle est basée sur la mécanique statistique et sur la construction d'un système quantique statistique dont la *fonction de partition* est la fonction zêta de Riemann. Un tel système a été construit naturellement dans [BC] et il indique, en utilisant la première ligne du dictionnaire de Géométrie non-commutative (notamment la correspondance entre les espaces-quotients et les algèbres non-commutatives) que l'espace  $X$  devrait en général être :

$$(1) \quad X = A/k^*$$

littéralement le quotient de l'espace  $A = k_A$  des adèles par l'action du groupe multiplicatif  $k^*$ ,

$$(2) \quad a \in A, q \in k^* \rightarrow aq \in A.$$

Cet espace  $X$  apparaît déjà d'une manière très implicite dans le travail de Tate et Iwasawa sur l'équation fonctionnelle. C'est un espace non-commutatif en ce que, même au niveau de la théorie de la mesure, c'est un espace-quotient très "sioux". Par exemple, au niveau de la théorie de la mesure, l'algèbre de von Neumann correspondante,

$$(3) \quad R_{01} = L^\infty(A) \rtimes k^*$$

où  $A$  est doté de sa mesure de Haar comme groupe additif, est le facteur hyperfini de type  $\text{II}_\infty$ .

Le groupe des classes d'idèles  $C_k$  agit sur  $X$  par

$$(4) \quad (j, a) \rightarrow ja \quad \forall j \in C_k, a \in X$$

et il était impératif de diviser  $A$  par  $k^*$  pour que (4) ait le bon sens.

Nous reviendrons ultérieurement sur l'analogie entre l'action de  $C_k$  sur  $R_{01}$  et l'action du groupe de Galois sur l'extension abélienne maximale de  $k$ .

Ce que nous allons faire maintenant va consister à construire l'espace de Hilbert  $L_\delta^2$  des fonctions sur  $X$  avec une croissance indexée par  $\delta > 1$ . Puisque  $X$  est un espace-quotient, nous apprendrons d'abord dans la variété habituelle comment obtenir l'espace de Hilbert  $L^2(M)$  des fonctions de carré intégrable sur une variété  $M$  en travaillant seulement sur la couverture universelle  $\widetilde{M}$  avec l'action de  $\Gamma = \pi_1(M)$ . Chaque fonction  $f \in C_c^\infty(\widetilde{M})$  donne naissance à une fonction  $\widetilde{f}$  sur  $M$  par

$$(5) \quad \widetilde{f}(x) = \sum_{\pi(\widetilde{x})=x} f(\widetilde{x})$$

et toutes les  $g \in C^\infty(M)$  apparaissent de cette manière. De plus, on peut écrire le produit intérieur de l'espace de Hilbert  $\int_M \widetilde{f}_1(x) \widetilde{f}_2(x) dx$ , en terme de  $f_1$  et  $f_2$  seules. Ainsi  $\|\widetilde{f}\|^2 = \int \left| \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x) \right|^2 dx$  où l'intégrale est calculée sur un domaine fondamental pour  $\Gamma$  agissant sur  $M$ . Cette formule définit une norme d'espace préhilbertien sur  $C_c^\infty(\widetilde{M})$  et  $L^2(M)$  est juste la complétion de  $C_c^\infty(\widetilde{M})$  pour cette norme. Noter que toute fonction de la forme  $f - f_\gamma$  a une norme qui s'évanouit et qui, de ce fait, disparaît pendant le processus de complétion. Dans notre cas où  $X = A/k^*$ , nous avons du coup besoin de définir une norme analogue sur l'espace de Bruhat-Schwartz  $\mathcal{S}(A)$  des fonctions sur  $A$  (cf. Appendice I pour une définition générale de l'espace de Bruhat-Schwartz). Puisque 0 reste fixe par l'action de  $k^*$ , l'expression  $\sum_{\gamma \in k^*} f(\gamma x)$  n'a pas de sens pour  $x = 0$  à moins que l'on ait  $f(0) = 0$ . De plus, quand  $|x| \rightarrow 0$ , les sommes ci-dessus approximent, en tant que sommes de Riemann, le produit des  $|x|^{-1}$  par  $\int f dx$  pour la mesure additive de Haar, et alors on a aussi besoin que  $\int f dx = 0$ . Nous pouvons maintenant définir l'espace de Hilbert  $L_\delta^2(X)_0$  comme la complétion du sous-espace de codimension 2

$$(6) \quad \mathcal{S}(A)_0 = \{f \in \mathcal{S}(A) ; f(0) = 0, \int f dx = 0\}$$

pour la norme  $\|\cdot\|_\delta$  donnée par

$$(7) \quad \|f\|_\delta^2 = \int \left| \sum_{q \in k^*} f(qx) \right|^2 (1 + \log^2 |x|)^{\delta/2} |x| d^*x$$

où l'intégrale calculée sur  $A^*/k^*$  et  $d^*x$  est la mesure de Haar multiplicative sur  $A^*/k^*$ . L'horrible terme  $(1 + \log^2 |x|)^{\delta/2}$  est alors là pour contrôler la croissance des fonctions sur le quotient non-compact. Nous verrons comment supprimer ce terme plus tard dans la section VII. Noter que  $|qx| = |x|$  pour tout  $q \in k^*$ .

Le point-clé est que nous utilisons la mesure  $|x| d^*x$  plutôt que la mesure de Haar additive  $dx$ . Bien sûr, pour un corps local  $K$ , on a  $dx = |x| d^*x$  mais cela ne sert à rien dans la situation globale ci-dessus. On a plutôt,

$$(8) \quad dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon |x|^{1+\varepsilon} d^*x.$$

Une représentation naturelle de  $C_k$  sur  $L_\delta^2(X)_0$  est donnée par :

$$(9) \quad (U(j)f)(x) = f(j^{-1}x) \quad \forall x \in A, j \in C_k$$

et le résultat est indépendant du choix d'un relèvement de  $j$  dans  $J_k = \text{GL}_1(A)$  parce que les fonctions  $f - f_q$  sont dans le noyau de la norme. Les conditions (6) qui définissent  $\mathcal{S}(A)_0$  sont invariantes sous l'action de  $C_k$  et elles fournissent l'action suivante de  $C_k$  sur le complémentaire à 2 dimensions de  $\mathcal{S}(A)_0 \subset \mathcal{S}(A)$  ; ce complémentaire est  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1)$  où  $\mathbb{C}$  est le module trivial  $C_k$  (correspondant à  $f(0)$ ) alors que le twist de Tate  $\mathbb{C}(1)$  est le module

$$(10) \quad (j, \lambda) \rightarrow |j| \lambda$$

provenant de l'égalité

$$(11) \quad \int f(j^{-1}x) dx = |j| \int f(x) dx.$$

Dans le but d'analyser la représentation (9) de  $C_k$  sur  $L_\delta^2(X)_0$ , nous allons la relier à la représentation gauche régulière du groupe  $C_k$  sur l'espace de Hilbert  $L_\delta^2(C_k)$  obtenue de l'espace de Hilbert suivant des fonctions de norme carrée,

$$(12) \quad \|\xi\|_\delta^2 = \int_{C_k} |\xi(g)|^2 (1 + \log^2 |g|)^{\delta/2} d^*g$$

où nous avons normalisé la mesure de Haar du groupe  $C_k$ , avec comme module,

$$(13) \quad | \cdot | : C_k \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

de telle façon que l'on ait (cf. [W3])

$$(14) \quad \int_{|g| \in [1, \Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \text{quand} \quad \Lambda \rightarrow +\infty.$$

La représentation régulière gauche  $V$  de  $C_k$  sur  $L_\delta^2(C_k)$  est

$$(15) \quad (V(a)\xi)(g) = \xi(a^{-1}g) \quad \forall g, a \in C_k.$$

Noter qu'à cause du poids  $(1 + \log^2 |x|)^{\delta/2}$ , cette représentation est *non* unitaire mais qu'elle satisfait l'estimation de la croissance

$$(16) \quad \|V(g)\| = O(\log |g|)^{\delta/2} \quad \text{quand} \quad |g| \rightarrow \infty$$

qui découle de l'inégalité (valable pour  $u, v \in \mathbb{R}$ )

$$(17) \quad \rho(u+v) \leq 2^{\delta/2} \rho(u) \rho(v), \quad \rho(u) = (1+u^2)^{\delta/2}.$$

Nous définissons  $E$  comme l'isométrie linéaire de  $L_\delta^2(X)_0$  dans  $L_\delta^2(C_k)$  donnée par l'égalité,

$$(18) \quad E(f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \quad \forall g \in C_k.$$

En comparant (7) à (12), on voit que  $E$  est une isométrie et le facteur  $|g|^{1/2}$  est imposé par la comparaison des mesures  $|g| d^*g$  de (7) et  $d^*g$  de (12).

$$\text{On a } E(U(a)f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} (U(a)f)(qg) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(a^{-1}qg) = |a|^{1/2} |a^{-1}g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} (V(a)E(f))(g).$$

Ainsi,

$$(19) \quad EU(a) = |a|^{1/2} V(a)E.$$

Cette équivariance montre que l'image de  $E$  dans  $L_\delta^2(C_k)$  est un espace clos invariant pour la représentation  $V$ .

Le théorème ci-dessous et son corollaire montrent que le conoyau  $\mathcal{H} = L_\delta^2(C_k) / \text{Im}(E)$  de l'isométrie  $E$  joue le rôle de l'espace de Polya-Hilbert. Puisque  $\text{Im } E$  est invariant sous la représentation  $V$ , on définit  $W$  comme la représentation correspondante de  $C_k$  sur  $\mathcal{H}$ .

Le groupe localement compact abélien  $C_k$  est (de façon non canonique) isomorphe à  $K \times N$  où

$$(20) \quad K = \{g \in C_k ; |g| = 1\}, \quad N = \text{image } | \cdot | \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Pour des corps de nombres, on a  $N = \mathbb{R}_+^*$  alors que pour des corps de caractéristique non-nulle,  $N \simeq \mathbb{Z}$  est le sous-groupe  $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$  (où  $q = p^\ell$  est la cardinalité du corps des constantes).

Nous choisissons (de façon non canonique) un isomorphisme

$$(21) \quad C_k \simeq K \times N.$$

Par construction, la représentation  $W$  satisfait (en utilisant (16)),

$$(22) \quad \|W(g)\| = O(\log |g|)^{\delta/2}$$

et sa restriction à  $K$  est unitaire. Aussi,  $\mathcal{H}$  se scinde en une somme directe canonique de sous-espaces orthogonaux 2 à 2,

$$(23) \quad \mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{K}} \mathcal{H}_\chi, \quad \mathcal{H}_\chi = \{\xi ; W(g)\xi = \chi(g)\xi, \forall g \in K\}$$

où  $\chi$  parcourt le groupe dual de Pontrjagin  $K$ , qui est le groupe abélien discret  $\widehat{K}$  des caractères de  $K$ . En utilisant l'isomorphisme non canonique (21), i.e. l'inclusion correspondante  $N \subset C_k$ , on peut maintenant restreindre la représentation  $W$  à n'importe lequel des secteurs  $\mathcal{H}_\chi$ . Quand

la caractéristique de  $k$  est  $> 0$ , alors  $N \simeq \mathbb{Z}$  et la condition (22) montre que l'action de  $N$  sur  $\mathcal{H}_\chi$  est donnée par un seul opérateur à spectre *unitaire* (on utilise la formule du rayon spectral  $|\text{Spec } w| = \overline{\text{Lim}} \|w^n\|^{1/n}$ ). Quand la caractéristique de  $k$  est nulle, on travaille avec une action de  $\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}$  sur  $\mathcal{H}_\chi$  et la condition (22) montre que cette représentation est engendrée par un opérateur clos non-borné  $D_\chi$  à spectre purement imaginaire. Le résolvant  $R_\lambda = (D_\chi - \lambda)^{-1}$  est donné, pour  $\text{Re } \lambda > 0$ , par l'égalité

$$(24) \quad R_\lambda = \int_0^\infty W_\chi(e^s) e^{-\lambda s} ds$$

et pour  $\text{Re } \lambda < 0$  par,

$$(25) \quad R_\lambda = \int_0^\infty W_\chi(e^{-s}) e^{\lambda s} ds$$

alors que l'opérateur  $D_\chi$  est défini par

$$(26) \quad D_\chi \xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (W_\chi(e^\varepsilon) - 1) \xi.$$

**Théorème 1.** *Soient  $\chi \in \widehat{K}$ ,  $\delta > 1$ ,  $\mathcal{H}_\chi$  et  $D_\chi$  comme ci-dessus. Alors  $D_\chi$  a un spectre discret,  $\text{Sp } D_\chi \subset i\mathbb{R}$  est l'ensemble des parties imaginaires des zéros de la fonction  $L$  à Grössencharakter  $\tilde{\chi}$  de partie réelle  $\frac{1}{2}$ ;  $\rho \in \text{Sp } D \Leftrightarrow L(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) = 0$  et  $\rho \in i\mathbb{R}$ , où  $\tilde{\chi}$  est l'unique extension de  $\chi$  à  $C_k$  qui est égale à 1 sur  $N$ . De plus, la multiplicité des  $\rho$  dans  $\text{Sp } D$  est égale au plus grand entier  $n < \frac{1+\delta}{2}$ ,  $n$  étant inférieur à la multiplicité de  $n \leq \frac{1}{2} + \rho$  comme zéro de  $L$ .*

Le théorème 1 a une formulation similaire quand la caractéristique de  $k$  est non-nulle. Le corollaire suivant est valide pour les corps globaux  $k$  de caractéristique arbitraire.

**Corollaire 2.** *Pour toute fonction de Schwartz  $h \in \mathcal{S}(C_k)$  l'opérateur  $W(h) = \int W(g) h(g) d^* g$  dans  $\mathcal{H}$  appartient à la classe des traces, et sa trace est donnée par*

$$\text{Trace } W(h) = \sum_{\substack{L(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) = 0 \\ \rho \in i\mathbb{R}/N^\perp}} \widehat{h}(\tilde{\chi}, \rho)$$

où la multiplicité est comptée comme dans le Théorème 1 et où la transformée de Fourier  $\widehat{h}$  de  $h$  est définie par,

$$\widehat{h}(\tilde{\chi}, \rho) = \int_{C_k} h(u) \tilde{\chi}(u) |u|^\rho d^* u.$$

Noter que nous n'avons pas eu à définir les fonctions  $L$ , mais seulement leur prolongement analytique, avant d'établir le théorème, qui montre que la paire

$$(27) \quad (\mathcal{H}_\chi, D_\chi)$$

se qualifie certainement comme un espace de Polya-Hilbert.

Le cas de la fonction zêta de Riemann correspond au caractère trivial  $\chi = 1$  pour le corps global  $k = \mathbb{Q}$  des nombres rationnels.

En général, les zéros des fonctions  $L$  peuvent avoir des multiplicités mais l'on s'attend à ce que pour un Grössencharacter  $\chi$ , cette multiplicité soit bornée, de telle façon que pour une valeur suffisamment grande de  $\delta$ , la multiplicité spectrale de  $D$  sera la bonne. Quand la caractéristique de  $k$  est  $> 0$ , cela est certainement vrai.

Si l'on modifie le choix de l'isomorphisme non canonique (21), cela change l'opérateur  $D$  en

$$(28) \quad D' = D - i s$$

où  $s \in \mathbb{R}$  est déterminé par l'égalité

$$(29) \quad \tilde{\chi}'(g) = \tilde{\chi}(g) |g|^{i s} \quad \forall g \in C_k.$$

La cohérence de l'établissement du théorème est assurée par l'égalité

$$(30) \quad L(\tilde{\chi}', z) = L(\tilde{\chi}, z + i s) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Quand les zéros de  $L$  apparaissent de façon multiple et quand  $\delta$  est assez grand, l'opérateur  $D$  est *non* semi-simple et il a une forme de Jordan non triviale (cf. Appendice I). Cela est compatible avec la condition presque unitaire (22) mais pas avec une symétrie biaisée pour  $D$ .

La preuve du théorème 1, fournie dans l'Appendice I, est basée sur l'interprétation de la distribution théorique par A. Weil [W2] de l'équation fonctionnelle basée sur l'idée de Tate et Iwasawa. Notre construction devrait être comparée à [Bg] et [Z].

Comme on s'y attend du fait de (C), l'espace de Polya-Hilbert  $\mathcal{H}$  apparaît comme un conoyau. Puisqu'on obtient l'espace de Hilbert  $L_\delta^2(X)_0$  en imposant deux conditions linéaires sur  $\mathcal{S}(A)$ ,

$$(31) \quad 0 \rightarrow \mathcal{S}(A)_0 \rightarrow \mathcal{S}(A) \xrightarrow{L} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \rightarrow 0,$$

nous définirons  $L_\delta^2(X)$  de telle manière qu'il apparaisse dans une séquence exacte de  $C_k$ -modules

$$(32) \quad 0 \rightarrow L_\delta^2(X)_0 \rightarrow L_\delta^2(X) \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(1) \rightarrow 0.$$

Nous pouvons alors utiliser la séquence exacte de  $C_k$ -modules

$$(33) \quad 0 \rightarrow L_\delta^2(X)_0 \rightarrow L_\delta^2(C_k) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

avec le Corollaire 2 pour calculer de manière formelle quel devrait être le caractère du module  $L_\delta^2(X)$ . En utilisant (32) et (33), nous obtenons,

$$(34) \quad \text{Trace}(U(h)) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\chi, \rho)=0 \\ \text{Re } \rho = \frac{1}{2}}} \hat{h}(\chi, \rho) + \infty h(1)$$

où  $\hat{h}(\chi, \rho)$  est défini par le Corollaire 2 et

$$(35) \quad U(h) = \int_{C_k} U(g) h(g) d^* g$$

alors que la fonction test  $h$  est dans un espace de fonctions convenable. Noter que la trace du côté gauche de (34) n'a de sens qu'après qu'on ait procédé à une régularisation adéquate puisque la représentation régulière gauche de  $C_k$  n'est pas traçable. Cette situation est similaire à celle rencontrée par Atiyah et Bott ([AB]) dans leur preuve de la formule de Lefschetz. Nous devons d'abord apprendre comment calculer la trace ci-dessus de manière formelle à partir des points fixes de l'action de  $C_k$  sur  $X$ . Dans la section VII, nous montrerons comment régulariser la trace et éliminer complètement le paramètre  $\delta$ .

#### IV. Formule de trace d'une distribution pour les flots sur des variétés

Dans le but de comprendre comment le côté gauche de l'égalité (34) devrait être calculé, nous devrions d'abord rendre compte de la preuve de la formule habituelle de Lefschetz par Atiyah-Bott ([AB]) et décrire le calcul de la trace théorique de la distribution sur les variétés, qui est une variation sur le thème de [AB] et qui a été fournie par Guillemin-Sternberg [GS]. Nous nous référons à l'Appendice III pour un traitement plus détaillé indépendant des coordonnées [GS].

Commençons par un difféomorphisme  $\varphi$  d'une variété lisse compacte  $M$  et supposons que le graphe de  $\varphi$  est transverse à la diagonale sur  $M \times M$ . On peut alors aisément définir et calculer la trace de la distribution théorique de l'opérateur  $U : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ,

$$(1) \quad (U\xi)(x) = \xi(\varphi(x)).$$

Par exemple, soit  $k(x, y)$  la distribution de Schwartz sur  $M \times M$  telle que

$$(2) \quad (U\xi)(x) = \int k(x, y) \xi(y) dy,$$

La trace de la distribution sur  $U$  est simplement

$$(3) \quad \text{Trace}(U) = \int k(x, x) dx,$$

Près de la diagonale et en coordonnées locales, on obtient :

$$(4) \quad k(x, y) = \delta(y - \varphi(x))$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac.

Puisque, par hypothèse, les points fixes de  $\varphi$  sont isolés, on peut calculer la trace (3) comme une somme finie  $\sum_{x, \varphi(x)=x}$  et obtenir la contribution de chaque point fixe  $x \in M$ ,  $\varphi(x) = x$ , comme

$$(5) \quad \frac{1}{|1 - \varphi'(x)|}$$

où  $\varphi'(x)$  est le Jacobien de  $\varphi$  et  $|A| = |\det A|$ .

On utilise simplement l'inversibilité de  $\text{id} - \varphi'(x)$  pour effectuer un changement de variables dans l'intégrale,

$$(6) \quad \int \delta(y - \varphi(y)) dy.$$

On obtient alors (cf. [AB]),

$$(7) \quad \text{Trace}(U) = \sum_{x, \varphi(x)=x} \frac{1}{|1 - \varphi'(x)|}.$$

Ce calcul s'étend immédiatement à l'action de  $\varphi$  sur les sections d'un fibré vectoriel équivariant  $E$  tel que le fibré  $\wedge^k T^*$ , dont les sections  $C^\infty(M, E)$  sont les formes lisses de degré  $k$ . La somme alternée des traces théoriques de la distribution correspondante constitue la trace *ordinaire* de l'action de  $\varphi$  sur la cohomologie de de Rham, amenant ainsi à la formule habituelle de Lefschetz,

$$(8) \quad \sum (-1)^j \text{Trace} \varphi^* / H^j = \sum_{\varphi(x)=x} \text{sign} \det(1 - \varphi'(x)).$$

Référons-nous à l'appendice qui utilise des notations plus pédantes pour montrer que la trace théorique de la distribution est indépendante des coordonnées.

Nous allons maintenant écrire l'analogie de la formule (7) dans le cas d'un flot  $F_t = \exp(tv)$  de difféomorphismes de  $M$ , où  $v \in C^\infty(M, T)$  est un champ de vecteurs sur  $M$ . Nous obtenons un groupe à un paramètre d'opérateurs agissant sur  $C^\infty(M)$ ,

$$(9) \quad (U_t \xi)(x) = \xi(F_t(x)) \quad \forall \xi \in C^\infty(M), x \in M, t \in \mathbb{R},$$

et nous avons besoin de la formule pour,

$$(10) \quad \rho(h) = \text{Trace} \left( \int h(t) U_t dt \right), \quad h \in C_c^\infty(\mathbb{R}), h(0) = 0.$$

La condition  $h(0) = 0$  est nécessaire parce que nous ne pouvons pas être assurés que la fonction Identité  $F_0$  est transverse à la diagonale.

Pour définir  $\rho$  comme une distribution évaluée sur la fonction test  $h$ , choisissons  $f$  comme étant la fonction suivante,

$$(11) \quad f : X = M \times \mathbb{R} \rightarrow Y = M, \quad f(x, t) = F_t(x).$$

Le graphe de  $f$  est la sous-variété  $Z$  de  $X \times Y$ ,

$$(12) \quad Z = \{(x, t, y) ; y = F_t(x)\}.$$

Soit  $\varphi$  l'application diagonale,

$$(13) \quad \varphi(x, t) = (x, t, x), \quad \varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow X \times Y$$

et supposons la transversalité  $\varphi \pitchfork Z$  en dehors de  $M \times (0)$ .

Soit  $\tau$  la distribution,

$$(14) \quad \tau = \varphi^*(\delta(y - F_t(x)) dy),$$

et  $q$  la seconde projection,

$$(15) \quad q(x, t) = t \in \mathbb{R},$$

alors, par définition,  $\rho$  est le foncteur image directe  $q_*(\tau)$  de la distribution  $\tau$ .

On peut vérifier (cf. Appendice III) que  $q_*(\tau)$  est une fonction généralisée.

Exactement comme dans le cas d'une transformation simple, les contributions à (10) viendront des points fixes de  $F_t$ . Ces dernières viendront soit d'un zéro du champ vectoriel  $v$ , (i.e.  $x \in M$  tel que  $v_x = 0$ ) soit d'une orbite périodique  $\gamma$  du flot et nous appellerons  $T_\gamma^\#$  la longueur d'une telle orbite périodique.

Sous l'hypothèse de transversalité ci-dessus, la formule pour (10) est (cf. [GS], [G] et l'Appendice III),

$$(16) \quad \text{Trace} \left( \int h(t) U_t dt \right) = \sum_{x, v_x=0} \int \frac{h(t)}{|1 - (F_t)_*|} dt + \sum_\gamma \sum_T T_\gamma^\# \frac{1}{|1 - (F_T)_*|} h(T)$$

où dans la seconde somme,  $\gamma$  est une orbite périodique de longueur  $T_\gamma^\#$ , et  $T$  varie dans  $\mathbb{Z} T_\gamma^\#$  tandis que  $(F_T)_*$  est l'application inverse de Poincaré, i.e. la restriction du plan tangent à la transverse à l'orbite.

On peut réécrire (16) sous une forme plus simple ainsi,

$$(17) \quad \text{Trace} \left( \int h(t) U_t dt \right) = \sum_\gamma \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1 - (F_u)_*|} d^*u,$$

où les zéros  $x \in M$ ,  $v_x = 0$ , sont aussi considérés comme des orbites périodiques  $\gamma$ , alors que  $I_\gamma \subset \mathbb{R}$  est le sous-groupe d'isotopie d'un  $x \in \gamma$ , et où  $d^*u$  est l'unique mesure de Haar dans  $I_\gamma$  telle que le covolume de  $I_\gamma$  soit égal à 1, i.e. tel que pour l'unique mesure de Haar  $d\mu$  de masse totale 1 sur  $\mathbb{R}/I$  et pour tout  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$(18) \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}/I} \left( \int_I f(u + s) d^*u \right) d\mu(s).$$

On écrit également  $(F_u)_*$  pour la restriction du plan tangent  $F_u$  à l'espace transverse aux orbites.

Pour comprendre à quoi ressemble  $(F_t)_*$  en un zéro de  $v$ , on peut remplacer  $v(x)$  pour  $x$  proche de  $x_0$  par son image tangentielle. Pour des raisons de simplicité, prenons le cas en dimension 1, avec  $v(x) = x \frac{\partial}{\partial x}$ , agissant sur  $\mathbb{R} = M$ .

On a  $F_t(x) = e^t x$ . Puisque  $F_t$  est linéaire, le plan tangent  $(F_t)_*$  est

$$(19) \quad (F_t)_* = e^t$$

et (12) devient

$$(20) \quad \text{Trace} \left( \int h(t) U_t dt \right) = \int \frac{h(t)}{|1 - e^t|} dt.$$

Ainsi, pour ce flot, la formule de trace de la distribution est

$$(21) \quad \text{Trace}(U(h)) = \int \frac{h(u)}{|1-u|} d^*u$$

où nous utilisons une notation multiplicative de telle façon que  $\mathbb{R}_+^*$  agisse sur  $\mathbb{R}$  par multiplication, alors que  $U(h) = \int U(v)h(v) d^*v$  et  $d^*v$  est la mesure de Haar du groupe  $\mathbb{R}_+^*$ .

On peut traiter de manière similaire l'action, par multiplication, du groupe des nombres complexes non-nuls de la variété  $\mathbb{C}$ .

Nous allons maintenant étudier le cas plus général d'un corps local arbitraire.

### V. L'action $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $K^*$ d'un corps local $K$ .

Soit  $K$  un corps local et considérons l'application,

$$(1) \quad f : K \times K^* \rightarrow K, \quad f(x, \lambda) = \lambda x$$

ainsi que l'application diagonale,

$$(2) \quad \varphi : K \times K^* \rightarrow K \times K^* \times K, \quad \varphi(x, \lambda) = (x, \lambda, x)$$

comme dans IV (11) et (12) ci-dessous.

Quand  $K$  est archimédien, on est dans le cadre des variétés et on peut associer à  $f$  une  $\delta$ -section de support  $Z = \text{Graphe}(f)$ ,

$$(3) \quad \delta_Z = \delta(y - \lambda x) dy.$$

En utilisant la projection  $q(x, \lambda) = \lambda$  de  $K \times K^*$  sur  $K^*$ , on considère alors comme ci-dessus la fonction généralisée sur  $K^*$  donnée par,

$$(4) \quad q_*(\varphi^* \delta_Z).$$

Le calcul formel de cette fonction généralisée de  $\lambda$  est

$$\begin{aligned} \int \delta(x - \lambda x) dx &= \int \delta((1 - \lambda)x) dx = \int \delta(y) d((1 - \lambda)^{-1} y) \\ &= |1 - \lambda|^{-1} \int \delta(y) dy = |1 - \lambda|^{-1}. \end{aligned}$$

Nous devons justifier cela en calculant la convolution des transformées de Fourier de  $\delta(x - y)$  et  $\delta(y - \lambda x)$  puisque c'est la manière correcte de définir le produit de deux distributions dans ce contexte local.

Calculons d'abord la transformée de Fourier de  $\delta(ax + by)$  où  $(a, b) \in K^2 (\neq 0)$ . L'appariement de  $K^2$  et de son dual  $K^2$  est donné par

$$(5) \quad \langle (x, y), (\xi, \eta) \rangle = \alpha(x\xi + y\eta) \in U(1).$$

où  $\alpha$  est un caractère fixe non trivial du groupe additif  $K$ .

Soit  $(c, d) \in K^2$  tel que  $ad - bc = 1$  et considérons la transformation linéaire inversible de  $K^2$ ,

$$(6) \quad L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

La transformée de Fourier de  $\varphi \circ L$  est donnée par

$$(7) \quad (\varphi \circ L)^\wedge = |\det L|^{-1} \widehat{\varphi} \circ (L^{-1})^t.$$

Ici, on a  $\det L = 1$  et  $(L^{-1})^t$  définie par

$$(8) \quad (L^{-1})^t = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

On calcule d'abord la transformée de Fourier de  $\delta(x)$ , la mesure de Haar additive  $dx$  est normalisée de façon à être auto-duale et en une seule variable,  $\delta(x)$  et 1 sont transformées de Fourier l'une de l'autre, de telle sorte que

$$(9) \quad (\delta \otimes 1)^\wedge = 1 \otimes \delta.$$

En utilisant (7), on obtient que la transformée de Fourier de  $\delta(ax + by)$  est  $\delta(-b\xi + a\eta)$ . On doit alors calculer la convolution des deux fonctions généralisées,  $\delta(\xi + \eta)$  et  $\delta(\xi + \lambda\eta)$ . Maintenant,

$$\int f(\xi, \eta) \delta(\xi + \eta) d\xi d\eta = \int f(\xi, -\xi) d\xi$$

et

$$\int f(\xi, \eta) \delta(\xi + \lambda\eta) d\xi d\eta = \int f(-\lambda\eta, \eta) d\eta$$

de telle manière que l'on doit gérer deux mesures portées respectivement par deux lignes distinctes. Leur convolution évaluée sur  $f \in C_c^\infty(K^2)$  est

$$\begin{aligned} \int f(\alpha + \beta) d\mu(\alpha) d\nu(\beta) &= \int \int f((\xi, -\xi) + (-\lambda\eta, \eta)) d\xi d\eta \\ &= \int \int f(\xi - \lambda\eta, -\xi + \eta) d\xi d\eta \\ &= \left( \int \int f(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right) \times |J|^{-1} \end{aligned}$$

où  $J$  est le déterminant de la matrice  $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = L$ , de telle manière que  $\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ . On a  $J = 1 - \lambda$  et alors, la convolution des fonctions généralisées  $\delta(\xi + \eta)$  et  $\delta(\xi + \lambda\eta)$  donne comme attendu la fonction constante

$$(10) \quad |1 - \lambda|^{-1} 1.$$

De manière correspondante, le produit des distributions  $\delta(x - y)$  et  $\delta(y - \lambda x)$  donne  $|1 - \lambda|^{-1} \delta_0$  de façon que,

$$(11) \quad \int \delta(x - y) \delta(y - \lambda x) dx dy = |1 - \lambda|^{-1}.$$

Dans ce cas local, la transformée de Fourier seule était suffisante pour donner un sens pertinent au produit des distributions. En fait, cela continuerait d'avoir du sens que de remplacer  $\delta(y - \lambda x)$  par

$$\int h(\lambda^{-1}) \delta(y - \lambda x) d^* \lambda$$

où  $h(1) = 0$ .

Nous allons maintenant traiter en détail le cas général plus délicat dans lequel  $h(1)$  est arbitraire.

Nous allons démontrer un résultat général précis (théorème 3) qui gère le manque de transversalité lorsque  $h(1) \neq 0$ . On travaille directement avec l'opérateur suivant dans  $L^2(K)$ ,

$$(12) \quad U(h) = \int h(\lambda) U(\lambda) d^* \lambda,$$

où l'opérateur d'échelle  $U(\lambda)$  est défini par

$$(13) \quad (U(\lambda) \xi)(x) = \xi(\lambda^{-1} x) \quad \forall x \in K$$

et où la mesure de Haar multiplicative  $d^* \lambda$  est normalisée par,

$$(14) \quad \int_{|\lambda| \in [1, \Lambda]} d^* \lambda \sim \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

Pour interpréter la "trace" de  $U(h)$ , nous allons procéder comme dans le cas de la formule de trace de Selberg ([Se]) et utiliser une coupure (cut-off). Pour cela, nous utilisons la projection orthogonale  $P_\Lambda$  sur le sous-espace,

$$(15) \quad P_\Lambda = \{ \xi \in L^2(K); \xi(x) = 0 \quad \forall x, |x| > \Lambda \}.$$

Alors,  $P_\Lambda$  est l'opérateur multiplicatif par la fonction  $\rho_\Lambda$ , où  $\rho_\Lambda(x) = 1$  si  $|x| \leq \Lambda$ , et  $\rho(x) = 0$  pour  $|x| > \Lambda$ . Cela donne une coupure (cut-off) infrarouge et pour obtenir une coupure (cut-off) ultraviolette, on utilise  $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$  où  $F$  est la transformée de Fourier (qui dépend du caractère de base  $\alpha$ ). On pose

$$(16) \quad R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda.$$

Le résultat principal de cette section est alors,

**Théorème 3.** *Soit  $K$  un corps local de caractère de base  $\alpha$ . Soit  $h \in \mathcal{S}(K^*)$  à support compact. Alors  $R_\Lambda U(h)$  est un opérateur de classe trace et quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on a*

$$\text{Trace}(R_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^* u + o(1)$$

où  $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in K^*, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$ , et où la valeur principale  $\int'$  est uniquement déterminée par l'appariement avec l'unique distribution sur  $K$  qui coïncide avec  $\frac{du}{|1-u|}$  pour  $u \neq 1$  et dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1.

*Preuve.* On normalise comme ci-dessus la mesure de Haar additive pour qu'elle soit auto-duale sur  $K$ . Soit la constante  $\rho > 0$  déterminée par l'égalité,

$$(17) \quad \int_{1 \leq |\lambda| \leq \Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|} \sim \rho \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

de telle manière que  $d^* \lambda = \rho^{-1} \frac{d\lambda}{|\lambda|}$ . Soit  $L$  l'unique distribution, extension de  $\rho^{-1} \frac{du}{|1-u|}$  dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1,  $\widehat{L}(1) = 0$ . On a alors, par définition,

$$(18) \quad \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^* u = \left\langle L, \frac{h(u^{-1})}{|u|} \right\rangle,$$

où  $\frac{h(u^{-1})}{|u|} = 0$  pour  $u^{-1}$  en dehors du support de  $h$ .

Soit  $T = U(h)$ . On peut écrire le noyau de Schwartz de  $T$  comme,

$$(19) \quad k(x, y) = \int h(\lambda^{-1}) \delta(y - \lambda x) d^* \lambda.$$

Étant donné n'importe quel tel noyau  $k$ , on introduit son symbole,

$$(20) \quad \sigma(x, \xi) = \int k(x, x + u) \alpha(u\xi) du$$

comme sa transformée de Fourier partielle. Le noyau de Schwartz  $r_\Lambda^t(x, y)$  de la transposée  $R_\Lambda^t$  est donné par,

$$(21) \quad r_\Lambda^t(x, y) = \rho_\Lambda(x) (\widehat{\rho_\Lambda})(x - y).$$

Ainsi, le symbole  $\sigma_\Lambda$  de  $R_\Lambda^t$  est simplement,

$$(22) \quad \sigma_\Lambda(x, \xi) = \rho_\Lambda(x) \rho_\Lambda(\xi).$$

L'opérateur  $R_\Lambda$  est de classe trace et l'on a,

$$(23) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \int k(x, y) r_\Lambda^t(x, y) dx dy.$$

En utilisant la formule de Parseval, on obtient,

$$(24) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \int_{|x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \sigma(x, \xi) dx d\xi.$$

Maintenant, le symbole  $\sigma$  de  $T$  est donné par,

$$(25) \quad \sigma(x, \xi) = \int h(\lambda^{-1}) \left( \int \delta(x + u - \lambda x) \alpha(u\xi) du \right) d^* \lambda.$$

On a,

$$(26) \quad \int \delta(x + u - \lambda x) \alpha(u\xi) du = \alpha((\lambda - 1)x\xi),$$

aussi (25) donne,

$$(27) \quad \sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \int_K g(\lambda) \alpha(\lambda x \xi) d\lambda$$

où,

$$(28) \quad g(\lambda) = h((\lambda + 1)^{-1}) |\lambda + 1|^{-1}.$$

Puisque  $h$  est lisse à support compact sur  $K^*$ , la fonction  $g$  appartient à  $C_c^\infty(K)$ .

Alors  $\sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \widehat{g}(x\xi)$  et,

$$(29) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \rho^{-1} \int_{|x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \widehat{g}(x\xi) dx d\xi.$$

Avec  $u = x\xi$ , on a  $dx d\xi = du \frac{dx}{|x|}$  et, pour  $|u| \leq \Lambda^2$ ,

$$(30) \quad \rho^{-1} \int_{\frac{|u|}{\Lambda} \leq |x| \leq \Lambda} \frac{dx}{|x|} = 2 \log' \Lambda - \log |u|$$

(en utilisant la définition précise de  $\log' \Lambda$  pour gérer les termes aux bornes). Ainsi, nous pouvons réécrire (29) comme,

$$(31) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \int_{|u| \leq \Lambda^2} \widehat{g}(u) (2 \log' \Lambda - \log |u|) du$$

Puisque  $g \in C_c^\infty(K)$ , on a,

$$(32) \quad \int_{|u| \geq \Lambda^2} |\widehat{g}(u)| du = O(\Lambda^{-N}) \quad \forall N$$

et de façon similaire, pour  $|\widehat{g}(u) \log |u||$ . Ainsi,

$$(33) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = 2 g(0) \log' \Lambda - \int \widehat{g}(u) \log |u| du + o(1).$$

Maintenant, pour n'importe quel corps local  $K$  et pour n'importe quel caractère de base  $\alpha$ , si nous prenons comme mesure de  $da$  la mesure auto-duale, la transformée de Fourier de la distribution  $\varphi(u) = -\log |u|$  est donnée ailleurs qu'en 0 par

$$(34) \quad \widehat{\varphi}(a) = \rho^{-1} \frac{1}{|a|},$$

avec  $\rho$  déterminée par (17). Pour connaître celui-ci, appelons  $P$  la distribution sur  $K$  donnée par,

$$(35) \quad P(f) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in \text{Mod}(K)}} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) d^*x + f(0) \log \varepsilon \right).$$

On a  $P(f_a) = P(f) - \log |a| f(0)$ , ce qui est suffisant pour montrer que  $\widehat{P}(x)$  est égal à  $-\log |x| + \text{Cte}$ , et que  $\widehat{\varphi}$  diffère de  $P$  par un multiple de  $\delta_0$ .

Alors, la formule de Parseval donne, avec les conventions du théorème 3,

$$(36) \quad - \int \widehat{g}(u) \log |u| du = \frac{1}{\rho} \int' g(a) \frac{da}{|a|}.$$

En remplaçant  $a$  par  $\lambda - 1$  et en appliquant (28), on obtient le résultat escompté. ■

Nous montrerons dans l'Appendice II que la valeur principale à privilégier, qui dépend du caractère de base  $\alpha$ , est la même que dans les formules explicites de Weil.

## VI. Le cas global, et le calcul de la formule de trace.

Nous allons maintenant considérer l'action de  $C_k$  sur  $X$  et écrire l'analogie de IV (17)<sup>1</sup> pour la formule de trace de la distribution.

---

<sup>1</sup>III (17) dans l'original.

$X$  et  $C_k$  sont tous les deux définis comme des quotients et l'on définit

$$(1) \quad \pi : A \rightarrow X, \quad c : \mathrm{GL}_1(A) \rightarrow C_k$$

comme les applications quotients correspondantes.

Comme ci-dessus, on considère le graphe  $Z$  de l'action

$$(2) \quad f : X \times C_k \rightarrow X, \quad f(x, \lambda) = \lambda x$$

et l'application diagonale

$$(3) \quad \varphi : X \times C_k \rightarrow X \times C_k \times X \quad \varphi(x, \lambda) = (x, \lambda, x).$$

Recherchons d'abord les points fixes,  $\varphi^{-1}(Z)$ , i.e. les paires  $(x, \lambda) \in X \times C_k$  telles que  $\lambda x = x$ . Choisissons  $x = \pi(\tilde{x})$  et  $\lambda = c(j)$ . Alors l'égalité  $\lambda x = x$  signifie que  $\pi(j\tilde{x}) = \pi(\tilde{x})$  et alors, il existe  $q \in k^*$  tel qu'avec  $\tilde{j} = qj$ , on a

$$(4) \quad \tilde{j}\tilde{x} = \tilde{x}.$$

Rappelons maintenant que  $A$  est le produit direct restreint  $A = \prod_{\mathrm{res}} k_v$  des corps locaux  $k_v$  obtenu par complétion de  $k$  par rapport à la place  $v$ . L'égalité (4) signifie que  $\tilde{j}_v \tilde{x}_v = \tilde{x}_v$ ; ainsi, si  $\tilde{x}_v \neq 0$  pour tout  $v$ , il s'ensuit que  $\tilde{j}_v = 1 \forall v$  et  $\tilde{j} = 1$ . Cela montre que la projection de  $\varphi^{-1}(Z) \cap C_k \setminus \{1\}$  sur  $X$  est l'union des hyperplans

$$(5) \quad \cup H_v; \quad H_v = \pi(\tilde{H}_v), \quad \tilde{H}_v = \{x; x_v = 0\}.$$

Chaque  $\tilde{H}_v$  est clos dans  $A$  et est invariant par la multiplication par des éléments de  $k^*$ . De cela, il découle que  $H_v$  est un sous-ensemble clos de  $X$  et on vérifie que c'est la fermeture de l'orbite sous  $C_k$  de n'importe quel point générique

$$(6) \quad x, x_u = 0 \quad \iff \quad u = v.$$

Pour n'importe quel tel point  $x$ , le groupe d'isotropie  $I_x$  est l'image dans  $C_k$  du groupe multiplicatif  $k_v^*$ ,

$$(7) \quad I_x = k_v^*$$

par l'application  $\lambda \in k_v^* \rightarrow (1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots)$ . Cette application apparaît aussi dans la théorie des corps de classes (cf. [W1]) pour relier la théorie de Galois locale à la théorie globale.

Les deux groupes  $k_v^*$  et  $C_k$  sont commensurables à  $\mathbb{R}_+^*$  par l'homomorphisme de modules, qui est propre à image cocompacte,

$$(8) \quad G \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}_+^*.$$

Puisque la restriction à  $k_v^*$  du module de  $C_k$  est le module de  $k_v^*$ , il s'ensuit que

$$(9) \quad I_x \text{ est un sous-groupe cocompact de } C_k.$$

Cela autorise à normaliser les mesures de Haar respectives de telle manière que le covolume de  $I_x$  vaille 1. Cela est en fait assuré par la normalisation canonique des mesures de Haar des groupes modulés (cf. [W3]),

$$(10) \quad \int_{|g| \in [1, \Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \text{quand} \quad \Lambda \rightarrow +\infty.$$

Il est important de noter que bien que  $I_x$  soit cocompact dans  $C_k$ , l'orbite de  $x$  n'est pas fermée et qu'il est nécessaire de la fermer, le résultat de cette fermeture étant  $H_v$ . Nous expliquerons comment justifier ce point plus tard dans la section VII, dans la situation similaire de l'action de  $C_S$  sur  $X_S$ . Nous pouvons maintenant au vu des résultats des deux sections précédentes écrire la contribution de chaque  $H_v$  à la trace de la distribution.

Puisque  $\tilde{H}_v$  est un hyperplan, on peut identifier l'espace transverse  $N_x$  à  $H_v$  en  $x$  avec le quotient

$$(11) \quad N_x = A/\tilde{H}_v = k_v$$

qui est plus précisément le groupe additif du corps local  $k_v$ . Étant donné  $j \in I_x$ , on a  $j_u = 1 \forall u \neq v$ , et  $j_v = \lambda \in k_v^*$ . L'action de  $j$  sur  $A$  est linéaire et rend  $x$  fixe, ce qui a pour conséquence que l'action sur l'espace transverse  $N_x$  est donnée par

$$(12) \quad (\lambda, a) \rightarrow \lambda a \quad \forall a \in k_v.$$

Nous pouvons alors espérer aboutir en écrivant la contribution de  $H_v$  à la trace de la distribution ainsi,

$$(13) \quad \int_{k_v^*} \frac{h(\lambda)}{|1 - \lambda|} d^*\lambda$$

où  $h$  est la fonction test sur  $C_k$  qui s'évanouit en 1. Nous devons alors prêter attention à une contradiction en terme de notations avec la troisième section (formule 9), quand nous avons utilisé le symbole  $U(j)$  pour l'opération

$$(14) \quad (U(j)f)(x) = f(j^{-1}x)$$

tandis que nous avons utilisé  $j$  dans la discussion ci-dessus. Cela revient à remplacer la fonction test  $h(u)$  par  $h(u^{-1})$  et alors, nous obtenons comme analogue formel de IV (17)<sup>2</sup> l'expression suivante pour la trace de la distribution

$$(15) \quad \text{Trace}(U(h)) = \sum_v \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1 - u|} d^*u.$$

Maintenant, le côté droit de (15) devient, quand on le restreint à l'hyperplan  $h(1) = 0$ , la distribution obtenue par André Weil [W3] comme synthèse des formules explicites de la théorie des nombres pour toutes les fonctions  $L$  à Grössencharakter. En particulier, nous pouvons la réécrire en

$$(16) \quad \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_{L(\chi, \rho)=0} \hat{h}(\chi, \rho) + \infty h(1)$$

où cette fois, la restriction  $\text{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$  a été éliminée.

---

<sup>2</sup>noté III (17) dans l'article original.

Ainsi, rendre égales (34) de la section III et (16) pour  $h(1) = 0$ , devrait permettre d'obtenir l'information souhaitée sur les zéros. Bien sûr, cela nécessite au préalable d'éliminer le rôle de  $\delta$ , et (comme dans [AB]) de prouver que la trace coïncide avec la trace théorique d'un opérateur ordinaire sur le conoyau de  $E$ . On effectue cela pour la formulation connue du théorème du point-fixe de Lefschetz en utilisant les familles.

Une propriété très importante de la partie droite de (15) (et de IV (17) en général) est que si la fonction test  $h$ , avec  $h(1) = 0$ , est positive,

$$(17), \quad h(u) \geq 0 \quad \forall u \in C_k$$

alors le côté droit est *positif*. Cela indique dès le début que, dans le but d'obtenir l'espace de Poly-Hilbert à partir du flot de Riemann, *ce n'est pas* la quantification qui devrait être en jeu mais simplement le passage à l'espace  $L^2$ ,  $X \rightarrow L^2(X)$ . Effectivement, la positivité de IV (17) est typique des *matrices de permutation* plutôt qu'associée à la quantification. Cette distinction joue un rôle crucial dans la discussion ci-dessus au sujet de la formule de trace, en particulier par le fait que la formule de trace attendue n'est pas une formule semi-classique mais une formule de Lefschetz dans l'esprit de [AB].

La discussion ci-dessus *n'est pas* une justification rigoureuse de cette formule. Le premier obstacle évident est que la trace de la distribution est seulement formelle et que, pour lui donner une signification rigoureuse liée aux opérateurs sur les espaces de Hilbert, on a besoin, comme dans la section V, d'effectuer une coupure (cut-off).

La seconde difficulté provient de la présence du paramètre  $\delta$  comme paramètre de l'espace de Hilbert, alors que  $\delta$  n'apparaît pas dans la formule de trace.

Comme nous le verrons dans les deux prochaines sections, la coupure (cut-off) éliminera complètement le rôle de  $\delta$ , et nous montrerons néanmoins (en démontrant la positivité de la distribution de Weil) que la validité de la formule de trace (indépendante de  $\delta$ ) est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour tous les Grössencharaktere de  $k$ .

## VII. Preuve de la formule de trace dans le cas $S$ -local.

Dans le calcul de la trace formelle de la section VI, nous passons sur les difficultés inhérentes à la structure "sioux" de l'espace  $X$ .

Pour comprendre comment gérer les formules de traces sur de tels espaces, nous allons considérer la situation légèrement plus simple qui advient lorsqu'on considère seulement un ensemble fini  $S$  de places de  $k$ .

Dès que la cardinalité de  $S$  est plus grande que 3, l'espace correspondant  $X_S$  présente la plupart des propriétés "sioux" de  $X$ . En particulier, il n'est plus de type I au sens de la Géométrie non-commutative.

Néanmoins, nous pourrions démontrer un résultat général précis (théorème 4) qui montre que la gestion des orbites périodiques ci-dessus, et de leur contribution à la trace, est celle qui convient.

Cela montrera en particulier pourquoi les orbites du point fixe 0, ou des éléments  $x \in A$ , tels que  $x_v$  s'évanouit en au moins deux places, ne contribuent pas à la formule de trace.

En même temps, nous gèrerons, comme dans la section V, l'absence de transversalité quand  $h(1) \neq 0$ .

Décrivons d'abord le contexte réduit pour la formule de trace. Prenons  $k$  un corps global et  $S$  un ensemble fini de places de  $k$  contenant toutes les places infinies. Le groupe  $O_S^*$  des  $S$ -unités est défini comme le sous-groupe de  $k^*$ ,

$$(1) \quad O_S^* = \{q \in k^*, |q_v| = 1, v \notin S\}$$

Il est cocompact dans  $J_S^1$  où,

$$(2) \quad J_S = \prod_{v \in S} k_v^*$$

et,

$$(3) \quad J_S^1 = \{j \in J_S, |j| = 1\}.$$

Ainsi, le groupe-quotient  $C_S = J_S/O_S^*$  joue le même rôle que  $C_k$ , et agit sur le quotient  $X_S$  de  $A_S = \prod_{v \in S} k_v$  par  $O_S^*$ .

Pour avoir à l'esprit un exemple simple, on peut prendre  $k = \mathbb{Q}$ , avec  $S$  constitué des trois places 2, 3, et  $\infty$ . On vérifie sur cet exemple que la topologie de  $X_S$  n'est pas de type I puisque par exemple, le groupe  $O_S^* = \{\pm 2^n 3^m; n, m \in \mathbb{Z}\}$  agit ergodiquement sur  $\{0\} \times \mathbb{R} \subset A_S$ .

On normalise la mesure de Haar  $d^* \lambda$  de  $C_S$  par,

$$(4) \quad \int_{|\lambda| \in [1, \Lambda]} d^* \lambda \sim \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty,$$

et on normalise la mesure de Haar multiplicative  $d^* \lambda$  de  $J_S$  de telle manière qu'elle coïncide sur le domaine fondamental  $D$  avec l'action de  $O_S^*$  sur  $J_S$ .

Il n'y a pas de difficulté à définir l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$  des fonctions de carré intégrable sur  $X_S$ . Nous procédons comme dans la section III (sans le  $\delta$ ), et nous complétons (et séparons) l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(A_S)$  pour la structure préhilbertienne donnée par,

$$(5) \quad \|f\|^2 = \int \left| \sum_{q \in O_S^*} f(qx) \right|^2 |x| d^* x$$

où l'intégrale est calculée sur  $C_S$  ou, de manière équivalente, sur un domaine fondamental  $D$  pour l'action de  $O_S^*$  sur  $J_S$ .

Pour montrer que (5) fait sens, on prouve que pour  $f \in \mathcal{S}(A_S)$ , la fonction  $E_0(f)(x) = \sum_{q \in O_S^*} f(qx)$  est bornée supérieurement par une puissance de  $\log |x|$  quand  $|x|$  tend vers zéro. Pour voir cela quand

$f$  est la fonction caractéristique de  $\{x \in A_S, |x_v| \leq 1, \forall v \in S\}$ , on utilise la cocompacité de  $O_S^*$  dans  $J_S^1$ , pour remplacer la somme par une intégrale. Cette dernière intégrale est alors comparable à,

$$(6) \quad \int_{u_i \geq 0, \sum u_i = -\log|x|} \prod du_i,$$

où l'indice  $i$  varie dans  $S$ . Le cas général découle de cela.

L'opérateur d'échelle  $U(\lambda)$  est défini par,

$$(7) \quad (U(\lambda)\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}x) \quad \forall x \in A_S$$

et la même formule, avec  $x \in X_S$ , définit son action sur  $L^2(X_S)$ .

Se donner une fonction lisse  $h$  supportée de façon compacte sur  $C_S$ ,  $U(h) = \int h(g)U(g)dg$ , consiste à se donner un opérateur agissant sur  $L^2(X_S)$ .

Nous allons maintenant montrer que la transformée de Fourier  $F$  sur  $\mathcal{S}(A_S)$  s'étend à un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$ .

**Lemme 1.** *a) Pour toute fonction  $f_i \in \mathcal{S}(A_S)$ , les séries  $\sum_{O_S^*} \langle f_1, U(q)f_2 \rangle_A$  des produits intérieurs sur  $L^2(A_S)$  convergent géométriquement sur le groupe commutatif fini engendré  $O_S^*$ . De plus, leur somme est égale au produit intérieur de  $f_1$  et  $f_2$  dans l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$ .*

*b) Soit  $\alpha = \prod \alpha_v$  un caractère de base du groupe additif  $A_S$  et  $F$  la transformée de Fourier lui correspondant. La fonction  $f \rightarrow F(f)$ ,  $f \in \mathcal{S}(A_S)$  étend de façon unique l'espace de Hilbert  $L^2(X_S)$ .*

*Preuve.* La fonction  $L : O_S^* \rightarrow \mathbb{R}^S$ , donnée par  $L(u)_v = \log|u_v|$  a un noyau fini et son image est un treillis sur l'hyperplan  $H = \{(y_v), \sum_S y_v = 0\}$ . Sur  $H$ , on a  $Sup_S y_v \geq 1/2n \sum |y_v|$ , où  $n = \text{card}(S)$ . Alors, on a l'inégalité

$$(8) \quad Sup_S |q_v| \geq \exp(d(q, 1)) \quad \forall q \in O_S^*$$

pour une métrique spatiale adéquate  $d$  sur  $O_S^*$ .

Soit  $K_n = \{x \in A_S; |x_v| \leq n, \forall v \in S\}$  et  $k_n$  la fonction caractéristique de  $K_n$ . Soit  $(\lambda_n)$  une suite à décroissance rapide telle que,

$$(9) \quad |f_i(x)| \leq \sum \lambda_n k_n(x) \quad \forall x \in A_S.$$

On a pour une constante adéquate  $c$ ,

$$(10) \quad |\langle k_n, U(q^{-1})k_n \rangle| \leq c n^m (Sup_S |q_v|)^{-1}$$

où  $m = \text{Card}(S)$ .

En utilisant (9), on voit alors que  $\langle f_1, U(q)f_2 \rangle_A$  décroît exponentiellement sur  $O_S^*$ . En appliquant le théorème de Fubini, on aboutit à l'égalité,

$$(11) \quad \int \left| \sum_{q \in O_S^*} f(qx) \right|^2 |x| d^*x = \sum_{O_S^*} \langle f, U(q)f \rangle_A.$$

Cela prouve a). Pour prouver b), on utilise seulement (11) et les égalités  $\langle Ff, Ff \rangle_A = \langle f, f \rangle_A$  et  $F(U(q)f) = U(q^{-1})F(f)$ . ■

Maintenant, exactement comme dans le cas des corps locaux ci-dessus (théorème V.3), on a besoin d'utiliser une coupure (cut-off). Pour cela, on utilise la projection orthogonale  $P_\Lambda$  sur le sous-espace,

$$(12) \quad P_\Lambda = \{\xi \in L^2(X_S); \xi(x) = 0 \quad \forall x, |x| > \Lambda\}.$$

Ainsi,  $P_\Lambda$  est l'opérateur multiplicatif par la fonction  $\rho_\Lambda$ , où  $\rho_\Lambda(x) = 1$  si  $|x| \leq \Lambda$ , et  $\rho(x) = 0$  pour  $|x| > \Lambda$ . Cela donne une coupure (cut-off) infrarouge et pour obtenir une coupure ultraviolette, on utilise  $\widehat{P}_\Lambda = FP_\Lambda F^{-1}$  où  $F$  est la transformée de Fourier (lemme 1) qui dépend du choix du caractère de base  $\alpha = \prod \alpha_v$ . On pose,

$$(13) \quad R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda.$$

Le résultat principal de cette section est alors,

**Théorème 4.** *Soit  $A_S$  défini comme précédemment, avec un caractère de base  $\alpha = \prod \alpha_v$ . Soit  $h \in \mathcal{S}(C_S)$  possédant un support compact. Alors quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on a*

$$\text{Trace}(R_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

où  $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_S, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$ , chaque  $k_v^*$  est envoyé sur  $C_S$  par la fonction  $u \rightarrow (1, 1, \dots, u, \dots, 1)$  et la valeur principale  $\int'$  est déterminée de manière unique par l'appariement avec l'unique distribution sur  $k_v$  qui coïncide avec  $\frac{du}{|1-u|}$  pour  $u \neq 1$  et dont la transformée de Fourier relative à  $\alpha_v$  s'évanouit en 1.

*Preuve.* On normalise comme ci-dessus la mesure de Haar additive  $dx$  pour qu'elle soit la mesure auto-duale sur le groupe abélien  $A_S$ . On détermine la constante  $\rho > 0$  par l'égalité (où le domaine fondamental  $D$  est comme ci-dessus),

$$\int_{\lambda \in D, 1 \leq |\lambda| \leq \Lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|} \sim \rho \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

de telle façon que  $d^* \lambda = \rho^{-1} \frac{d\lambda}{|\lambda|}$ .

On prend  $f$  une fonction compacte lisse supportée par  $J_S$  et telle que

$$(14) \quad \sum_{q \in O_S^*} f(qg) = h(g) \quad \forall g \in C_S.$$

L'existence d'une telle fonction  $f$  découle du caractère discret de  $O_S^*$  dans  $J_S$ . Nous avons alors l'égalité  $U(f) = U(h)$ , où

$$(15) \quad U(f) = \int f(\lambda) U(\lambda) d^* \lambda,$$

Pour calculer la trace de  $U(h)$  agissant sur les fonctions de l'espace quotient  $X_S$ , on procède comme dans le calcul de la formule de trace de Selberg (cf. [Se]). Ainsi pour un opérateur  $T$ , agissant sur les fonctions sur  $A_S$ , qui commute avec l'action de  $O_S^*$  et qui est représenté par un noyau entier,

$$(16) \quad T(\xi) = \int k(x, y) \xi(y) dy,$$

la trace de son action sur  $L^2(X_S)$  est donnée par,

$$(17) \quad \text{Trace}(T) = \sum_{q \in O_S^*} \int_D k(x, qx) dx.$$

où  $D$  est comme ci-dessus le domaine fondamental de l'action de  $O_S^*$  sur le sous-ensemble  $J_S$  de  $A_S$ , dont le complément est négligeable. Posons  $T = U(f)$ . On peut écrire le noyau de Schwartz de  $T$  comme,

$$(18) \quad k(x, y) = \int f(\lambda^{-1}) \delta(y - \lambda x) d^* \lambda.$$

Par construction, on a,

$$(19) \quad k(qx, qy) = k(x, y) \quad q \in O_S^*.$$

Pour n'importe quel  $q \in O_S^*$ , nous évaluerons l'intégrale,

$$(20) \quad I_q = \int_{x \in D} k(qx, y) r_\Lambda^t(x, y) dy dx$$

où le noyau de Schwartz  $r_\Lambda^t(x, y)$  pour la transposée  $R_\Lambda^t$  est donné par,

$$(21) \quad r_\Lambda^t(x, y) = \rho_\Lambda(x) (\widehat{\rho_\Lambda})(x - y).$$

Pour évaluer l'intégrale ci-dessus, on pose  $y = x + a$  et on calcule la transformée de Fourier en  $a$ .

Pour la transformée de Fourier en  $a$  de  $r_\Lambda^t(x, x + a)$ , on obtient,

$$(22) \quad \sigma_\Lambda(x, \xi) = \rho_\Lambda(x) \rho_\Lambda(\xi).$$

Pour la transformée de Fourier en  $a$  de  $k(qx, x + a)$ , on obtient,

$$(23) \quad \sigma(x, \xi) = \int f(\lambda^{-1}) \left( \int \delta(x + a - \lambda qx) \alpha(a\xi) da \right) d^* \lambda.$$

On a,

$$(24) \quad \int \delta(x + a - \lambda qx) \alpha(a\xi) da = \alpha((\lambda q - 1)x\xi),$$

ainsi (23) donne,

$$(25) \quad \sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \int_{A_S} g_q(u) \alpha(ux\xi) du$$

où,

$$(26) \quad g_q(u) = f(q(u + 1)^{-1}) |u + 1|^{-1}.$$

Puisque  $f$  est lisse à support compact sur  $A_S^*$ , la fonction  $g_q$  appartient à  $C_c^\infty(A_S)$ .

Ainsi  $\sigma(x, \xi) = \rho^{-1} \widehat{g}_q(x\xi)$  et, en utilisant la formule de Parseval, on obtient,

$$(27) \quad I_q = \int_{x \in D, |x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \sigma(x, \xi) dx d\xi.$$

Cela donne,

$$(28) \quad I_q = \rho^{-1} \int_{x \in D, |x| \leq \Lambda, |\xi| \leq \Lambda} \widehat{g}_q(x\xi) dx d\xi.$$

Avec  $u = x\xi$ , on a  $dx d\xi = du \frac{dx}{|x|}$  et, pour  $|u| \leq \Lambda^2$ ,

$$(29) \quad \rho^{-1} \int_{x \in D, \frac{|u|}{\Lambda} \leq |x| \leq \Lambda} \frac{dx}{|x|} = 2 \log' \Lambda - \log |u|$$

(en utilisant la définition précise de  $\log' \Lambda$  pour gérer les termes aux limites). Ainsi, on peut réécrire (28) comme,

$$(30) \quad \text{Trace}(R_\Lambda T) = \sum_{q \in O_S^*} \int_{|u| \leq \Lambda^2} \widehat{g}_q(u) (2 \log' \Lambda - \log |u|) du$$

Maintenant  $\log |u| = \sum_{v \in S} \log |u_v|$ , et nous allons d'abord prouver que,

$$(31) \quad \sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u) du = h(1),$$

alors que pour tout  $v \in S$ ,

$$(32) \quad \sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u) (-\log |u_v|) du = \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

En fait, toutes les sommes dans  $q$  auront seulement des termes non-nuls certains nombres finis de fois.

Il restera alors à contrôler le terme d'erreur, c'est-à-dire à montrer que,

$$(33) \quad \sum_{q \in O_S^*} \int \widehat{g}_q(u) (\log |u| - 2 \log' \Lambda)^+ du = 0(\Lambda^{-N})$$

pour tout  $N$ , où nous avons utilisé la notation  $x^- = 0$  si  $x \leq 0$  et  $x^+ = x$  si  $x > 0$ .

Maintenant, on rappelle que,

$$g_q(u) = f(q(u+1)^{-1}) |u+1|^{-1},$$

de telle façon que  $\int \widehat{g}_q(u) du = g_q(0) = f(q)$ . Puisque  $f$  est à support compact dans  $A_S^*$ , l'intersection de  $O_S^*$  avec le support de  $f$  est finie et par (14), on obtient l'égalité (31).

Pour prouver (32), on considère la projection naturelle  $pr_v$  de  $\prod_{l \in S} k_l^*$  sur  $\prod_{l \neq v} k_l^*$ . L'image  $pr_v(O_S^*)$  est encore un sous-groupe discret de  $\prod_{l \neq v} k_l^*$ , (puisque  $k_v^*$  est cocompact dans  $C_S$ ); ainsi, il y a seulement un nombre fini de  $q \in O_S^*$  tels que  $k_v^*$  rencontre le support  $f_q$ , c'est-à-dire tels que  $f_q(a) = f(qa)$  pour tout  $a$ .

Pour chaque  $q \in O_S^*$ , on a, comme dans la section V,

$$(34) \quad \int \widehat{g}_q(u) (-\log |u_v|) du = \int'_{k_v^*} \frac{f_q(u^{-1})}{|1-u|} d^*u,$$

et comme nous venons de le voir, cette intégrale s'évanouit excepté pour un nombre fini de  $q$ , de telle manière que, par (14), on obtienne l'égalité (32).

Prouvons (33). Soient  $\varepsilon_\Lambda(u) = (\log |u| - 2 \log' \Lambda)^+$ , et,

$$(35) \quad \delta_q(\Lambda) = \int \widehat{g}_q(u) \varepsilon_\Lambda(u) du$$

le terme d'erreur. Nous allons démontrer le

**Lemme 2.** *Pour tout  $\Lambda$ , les séries  $\sum_{O_S^*} |\delta_q(\Lambda)|$  convergent géométriquement sur le groupe commutatif fini engendré  $O_S^*$ .*

*De plus, la somme  $\sigma(\Lambda)$  est en  $O(\Lambda^{-N})$  pour un  $N$  au moins.*

*Preuve.* Soit  $d$  une métrique adéquate sur  $O_S^*$  (cf. (8)) telle que,

$$(36) \quad \text{Sup}_S |q_v| \geq \exp(d(q, 1)) \quad \forall q \in O_S^*$$

Soit  $\xi \in \mathcal{S}(A_S)$  définie par  $\xi(x) = f(x^{-1})|x^{-1}|$  pour tout  $x \in A_S^*$  et étendue par la valeur 0 partout ailleurs. On a  $g_q(x) = \xi(q^{-1}(1+x))$  pour tout  $x \in A_S$ , de telle sorte que  $\widehat{g}_q(u) = \int g_q(x) \alpha(ux) dx = \alpha(-u) \widehat{\xi}(qu)$ . Maintenant,

$$\delta_q(\Lambda) = \int \widehat{g}_q(u) \varepsilon_\Lambda(u) du = \int \widehat{\xi}(qu) \alpha(-u) \varepsilon_\Lambda(u) du = \int \widehat{\xi}(y) \alpha(-q^{-1}y) \varepsilon_\Lambda(y) dy,$$

puisque  $\varepsilon_\Lambda(qu) = \varepsilon_\Lambda(u)$  pour tout  $u$ .

Ainsi, nous obtenons, en utilisant le symbole  $\overline{F}\eta$  pour la transformée de Fourier inverse de  $\eta$ , l'égalité,

$$(37) \quad \delta_q(\Lambda) = \overline{F}(\varepsilon_\Lambda \widehat{\xi})(q^{-1}).$$

Soit  $\alpha \in ]0, 1/2[$  et considérons la norme,

$$(38) \quad \|\eta\| = \text{Sup}_{x \in A_S} |F(\eta)(x) \text{Sup}_S |x_v|^\alpha|.$$

Dans le but d'estimer (38), choisissons une fonction lisse  $\psi$  sur  $\mathbb{R}$ , égale à 1 dans un voisinage de 0, et avec support dans  $[-1, 1]$ , et introduisons les opérateurs de convolution,

$$(39) \quad (C_{\alpha, v} * \eta)(x) = \int_{k_v} \psi(|\varepsilon|) (\eta(x + \varepsilon) - \eta(x)) \frac{d\varepsilon}{|\varepsilon|^{1+\alpha}},$$

et les normes,

$$(40) \quad \|\eta\|_{(1, \alpha, v)} = \|C_{\alpha, v} * \eta\|_1,$$

où  $\|\cdot\|_1$  est la  $L^1$ -norme.

La transformée de Fourier  $k_v$  de la distribution  $C_{\alpha, v}$  se comporte comme  $|x_v|^\alpha$  pour  $|x_v| \rightarrow \infty$ . Ainsi, en utilisant  $F(C_{\alpha, v} * \eta) = F(C_{\alpha, v}) F(\eta)$ , et le contrôle de la norme supérieure  $F(g)$  par la  $L^1$ -norme de  $g$ , nous obtenons une inégalité de la forme,

$$(41) \quad \text{Sup}_{x \in A_S} |F(\eta)(x) \text{Sup}_S |x_v|^\alpha| \leq c_\alpha \sum_S \|\eta\|_{(1, \alpha, v)}.$$

Montrons maintenant que, pour tout  $\eta \in \mathcal{S}(A_S)$ , et  $\alpha < 1/2$ , on a,

$$(42) \quad \|\varepsilon_\Lambda \eta\|_{(1,\alpha,v)} = O(\Lambda^{-N}),$$

pour un certain  $N$ .

On a

$$|(\varepsilon_\Lambda(x + \varepsilon)\eta(x + \varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x)\eta(x)) - \varepsilon_\Lambda(x)(\eta(x + \varepsilon) - \eta(x))| \leq |(\varepsilon_\Lambda(x + \varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x))||\eta(x + \varepsilon)|.$$

De plus, en utilisant l'inégalité,

$$(43) \quad |a^+ - b^+| \leq |a - b|,$$

on voit que  $|(\varepsilon_\Lambda(x + \varepsilon) - \varepsilon_\Lambda(x))| \leq |\log|x_v + \varepsilon| - \log|x_v||$ , pour  $\varepsilon \in k_v$ .

Posons alors,

$$(44) \quad c'_\alpha = \int_{k_v} \log|1 + y| \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}.$$

Ce nombre est fini pour toutes les places  $v \in S$  dans la mesure où  $\alpha < 1/2$ , et on a,

$$(45) \quad \int_{k_v} \psi(|\varepsilon|)(|\log|x + \varepsilon| - \log|x|) \frac{d\varepsilon}{|\varepsilon|^{1+\alpha}} \leq c'_\alpha |x|^{-\alpha}.$$

Ainsi, on obtient l'inégalité,

$$(46) \quad |C_{\alpha,v} * \varepsilon_\Lambda \eta - \varepsilon_\Lambda(C_{\alpha,v} * \eta)|(x) \leq c'_\alpha |x_v|^{-\alpha} \text{Sup}_{\varepsilon \in k_v, |\varepsilon| \leq 1} |\eta(x + \varepsilon)|.$$

Puisque la fonction  $|x_v|^{-\alpha}$  est localement intégrable, pour  $\alpha < 1$ , on a pour  $\eta \in \mathcal{S}(A_S)$ , et pour tout  $N$ ,

$$(47) \quad \int_{X_\Lambda} |x_v|^{-\alpha} \text{Sup}_{\varepsilon \in k_v, |\varepsilon| \leq 1} |\eta(x + \varepsilon)| dx = O(\Lambda^{-N}),$$

où  $X_\Lambda = \{y + \varepsilon; |y| \geq \Lambda, \varepsilon \in k_v, |\varepsilon| \leq 1\}$ .

De plus, on a pour un certain  $N$ ,

$$(48) \quad \|\varepsilon_\Lambda(C_{\alpha,v} * \eta)\|_1 = O(\Lambda^{-N}).$$

Ainsi, en utilisant (46), on obtient l'inégalité (42).

En prenant  $\eta = \widehat{\xi}$  et en utilisant (41), on obtient des nombres  $\delta_\Lambda$ , tels que  $\delta_\Lambda = O(\Lambda^{-N})$  pour tout  $N$  et tels que,

$$(49) \quad \|\overline{F}(\varepsilon_\Lambda \widehat{\xi}) \text{Sup}_S |x_v|^\alpha\| \leq \delta_\Lambda \quad \forall x \in A_S \forall \Lambda.$$

En prenant  $x = q \in O_S^*$ , et en utilisant (36) et (37), on obtient,

$$(50) \quad |\delta_q(\Lambda)| \leq \delta_\Lambda \exp(-d(q, 1)) \quad \forall q \in O_S^*,$$

qui est l'inégalité souhaitée. ■

### VIII. Formule de trace dans le cas global, et élimination de $\delta$ .

La principale difficulté amenée par le paramètre  $\delta$  dans le Théorème 1 est que le calcul de la trace formelle de la section VI est indépendant de  $\delta$ , et ainsi ne peut pas donner en général la valeur attendue pour la trace, du fait du théorème 1, puisque dans ce dernier, tout zéro critique  $\rho$  est compté avec une multiplicité égale au plus grand entier  $n < \frac{1+\delta}{2}$ ,  $n \leq$  la multiplicité de  $\rho$  comme zéro de  $L$ . En particulier, avec les fonctions  $L$  à zéros multiples, la  $\delta$ -dépendance du côté spectral est non-triviale. Il est également clair que l'introduction du paramètre  $\delta$  élimine artificiellement les zéros non-critiques de l'espace des fonctions  $L_\delta^2(X)$ .

Comme nous le verrons, tous ces problèmes sont éliminés par la coupure (cut-off). Cette dernière sera directement pratiquée sur l'espace de Hilbert  $L^2(X)$  de telle manière que la seule valeur de  $\delta$  qui sera utilisée est  $\delta = 0$ . Tous les zéros joueront un rôle du côté spectral de la formule de trace, mais, alors que les zéros critiques apparaîtront per-se, les zéros non-critiques apparaîtront en tant que résonances, et ils seront pris en compte dans la formule de trace à travers leur potentiel harmonique par rapport à la droite critique. Ainsi, le côté spectral est entièrement canonique et indépendant de  $\delta$ , et en prouvant la positivité de la distribution de Weil, nous montrerons que cette égalité avec le côté géométrique, i.e. l'analogie global du théorème 4, est équivalente à l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions  $L$  à Grössencharakter.

Le groupe abélien  $A$  des adèles de  $k$  est son propre dual de Pontrjagin du fait de l'appariement

$$(1) \quad \langle a, b \rangle = \alpha(ab)$$

où  $\alpha : A \rightarrow U(1)$  est un caractère non-trivial qui s'évanouit sur  $k \subset A$ . Noter qu'un tel caractère est *non canonique*, mais que n'importe quels deux tels caractères  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont reliés par  $k^*$ ,

$$(2) \quad \alpha'(a) = \alpha(qa) \quad \forall a \in A.$$

Il suit de cela que les transformées de Fourier correspondantes sur  $A$  sont reliées par

$$(3) \quad \widehat{f}' = \widehat{f}_q.$$

C'est une raison de plus pour quotienter par des fonctions de la forme  $f - f_q$ , i.e. pour considérer l'espace-quotient  $X$ .

Fixons le caractère additif  $\alpha$  comme ci-dessus,  $\alpha = \prod \alpha_v$  et choisissons  $d$  une idèle différentielle,

$$(4) \quad \alpha(x) = \alpha_0(dx) \quad \forall x \in A,$$

où  $\alpha_0 = \prod \alpha_{0,v}$  est le produit des caractères normalisés locaux (cf. [W1]). Soit  $S_0$  l'ensemble fini des places auxquelles  $\alpha_v$  est ramifié.

Nous nous concentrerons d'abord sur le cas de caractéristique positive, i.e. sur le cas des corps de fonctions, à la fois parce qu'il est techniquement plus simple, mais également parce qu'il permet de garder la trace de la signification géométrique de la construction (cf. section II).

De façon à comprendre comment réaliser, dans le cas global, la coupure (cut-off)  $R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$  de la section VII, nous allons d'abord analyser la position relative de la paire de projections  $\widehat{P}_\Lambda, P_\Lambda$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Ainsi, appelons  $S \supset S_0$  un ensemble fini de places de  $k$ , suffisamment grand pour que  $\text{mod}(C_S) = \text{mod}(C_k) = q^{\mathbb{Z}}$  et tel que, pour tout domaine fondamental quelconque  $D$  pour l'action de  $O_S^*$  sur  $J_S$ , le produit  $D \times \prod R_v^*$  soit un domaine fondamental pour l'action de  $k^*$  sur  $J_k$ .

$\widehat{P}_\Lambda$  et  $P_\Lambda$  commutent toutes deux avec la décomposition de  $L^2(X_S)$  comme sommes directes des sous-espaces, indexées par les caractères  $\chi_0$  de  $C_{S,1}$ ,

$$(5) \quad L_{\chi_0}^2 = \{\xi \in L^2(X_S); \xi(a^{-1}x) = \chi_0(a) \xi(x), \forall x \in X_S, a \in C_{S,1}\}$$

qui correspondent aux projections  $P_{\chi_0} = \int \overline{\chi_0}(a) U(a) d_1 a$ , où  $d_1 a$  est la mesure de Haar de masse totale 1 sur  $C_{S,1}$ .

**Lemme 1.** *Soit  $\chi_0$  un caractère de  $C_{S,1}$ , alors pour  $\Lambda$  suffisamment grand,  $\widehat{P}_\Lambda$  et  $P_\Lambda$  commutent sur l'espace de Hilbert  $L_{\chi_0}^2$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{U}_S$  l'image dans  $C_S$  du sous-groupe ouvert  $\prod R_v^*$ . C'est un sous-groupe d'indice fini  $l$  dans  $C_{S,1}$ . Fixons un caractère  $\chi$  de  $\mathcal{U}_S$  et considérons la somme directe finie des espaces de Hilbert  $L_{\chi_0}^2$  où  $\chi_0$  varie parmi les caractères de  $C_{S,1}$  dont la restriction à  $\mathcal{U}_S$  est égale à  $\chi$ ,

$$(6) \quad L^2(X_S)_\chi = \{\xi \in L^2(X_S); \xi(a^{-1}x) = \chi(a) \xi(x), \forall x \in X_S, a \in \mathcal{U}_S\}$$

La projection orthogonale correspondante est  $U(h_\chi)$ , où  $h_\chi \in \mathcal{S}(C_S)$  est telle que,

$$(7) \quad \text{Supp}(h_\chi) = \mathcal{U}_S \quad h_\chi(x) = \lambda \overline{\chi}(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}_S$$

et la constante  $\lambda = l/\log q$ , correspond à la normalisation standard de la mesure de Haar sur  $C_S$ . Choisissons comme dans la section VII,  $f \in \mathcal{S}(J_S)$  avec un support  $\prod R_v^*$  tel que  $U(f) = U(h)$  et prenons  $\xi \in \mathcal{S}(A_S)$  définie par  $\xi(x) = f(x^{-1})|x^{-1}|$  pour tout  $x \in A_S^*$  et étendue par la valeur 0 partout ailleurs.

Puisque  $\xi$  est localement constante, sa transformée de Fourier est de support compact et l'égalité (37) de la section VII montre que pour  $\Lambda$  suffisamment grand, on a l'égalité,

$$(8) \quad \text{Trace}(\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda U(h_\chi)) = 2h_\chi(1) \log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int_{k_v^*}' \frac{h_\chi(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

Avec  $\Lambda = q^N$ , on a  $2 \log' \Lambda = (2N+1) \log q$  de telle sorte que,

$$(9) \quad 2h_\chi(1) \log' \Lambda = (2N+1)l$$

Le caractère  $\chi$  de  $\prod R_v^*$  est un produit,  $\chi = \prod \chi_v$  et si l'on utilise le caractère standard additif  $\alpha_0$  pour prendre la valeur principale, on a (cf. [W1] Appendice IV),

$$(10) \quad \int_{R_v^*}' \frac{\chi_v(u)}{|1-u|} d^*u = -f_v \log q_v$$

où  $f_v$  est l'ordre de ramification de  $\chi_v$ . Nous obtenons ainsi,

$$(11) \quad \int_{k_v^*}' \frac{h_\chi(u^{-1})}{|1-u|} d^*u = -f_v \deg(v) l + l \frac{\log |d_v|}{\log q}$$

où  $q_v = q^{\deg(v)}$ , et puisque nous utilisons le caractère additif  $\alpha_v$ , nous devons prendre en compte le décalage  $\log |d_v| h_\chi(1)$  dans la valeur principale.

Maintenant, on a  $|d| = \prod |d_v| = q^{2-2g}$ , où  $g$  est le genre de la courbe. Ainsi, nous obtenons,

$$(12) \quad \text{Trace}(\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda U(h_\chi)) = (2N+1)l - fl + (2-2g)l$$

où  $f = \sum_S f_v \deg(v)$  est l'ordre de ramification de  $\chi$ , i.e. le degré de son conducteur.

Soit  $B_\Lambda = \text{Im}(P_\Lambda) \cap \text{Im}(\widehat{P}_\Lambda)$  l'intersection des images par les projections  $P_\Lambda$  et  $\widehat{P}_\Lambda$ , et  $B_\Lambda^\chi$  l'intersection avec  $L^2(X_S)_\chi$ . Nous allons exhiber pour tout caractère  $\chi$  de  $\mathcal{U}_S$  un vecteur  $\eta_\chi \in L^2(X_S)_\chi$  tel que,

$$(13) \quad U(g)(\eta_\chi) \in B_\Lambda \quad \forall g \in C_S, |g| \leq \Lambda, |g^{-1}| \leq q^{2-2g-f} \Lambda,$$

alors que les vecteurs  $U(g)(\eta_\chi)$  sont linéairement indépendants pour  $g \in D_S$ , où  $D_S$  est le quotient de  $C_S$  par le sous-groupe ouvert  $\mathcal{U}_S$ .

Avec  $\Lambda = q^N$  comme ci-dessus, le nombre d'éléments  $g$  de  $D_S$  tels que  $|g| \leq \Lambda, |g^{-1}| \leq q^{2-2g-f} \Lambda$  est précisément égal à  $(2N+1)l - fl + (2-2g)l$ , ce qui autorise à conclure que les projections  $\widehat{P}_\Lambda$  et  $P_\Lambda$  commutent dans  $L^2(X_S)_\chi$  et que le sous-espace  $B_\Lambda^\chi$  est l'extension linéaire des vecteurs  $U(g)(\eta_\chi)$ .

Construisons maintenant les vecteurs  $\eta_\chi \in L^2(X_S)_\chi$ . Avec les notations de [W1] Proposition VII.13, soit,

$$(14) \quad \eta_\chi = \prod_S \phi_v$$

la fonction standard associée à  $\chi = \prod \chi_v$  de telle sorte que  $v, \phi_v$  non-ramifiée soit la fonction caractéristique de  $R_v$ , alors que pour  $v$  ramifiée, elle s'évanouisse en dehors de  $R_v^*$  et coïncide avec  $\bar{\chi}_v$  sur  $R_v^*$ . Par construction, le support de  $\eta_\chi$  est contenu dans  $R = \prod R_v$ , de telle façon que l'on a  $U(g)(\eta_\chi) \in \text{Im}(P_\Lambda)$  si  $|g| \leq \Lambda$ . De façon similaire, par [W1] Proposition VII.13, on obtient que  $U(g)(\eta_\chi) \in \text{Im}(\widehat{P}_\Lambda)$  dès que  $|g^{-1}| \leq q^{2-2g-f} \Lambda$ . Cela montre que  $\eta_\chi$  satisfait (13) et il reste à montrer que les vecteurs  $U(g)(\eta_\chi)$  sont linéairement indépendants pour  $g \in D_S$ .

Commençons par une relation non-triviale de la forme,

$$(15) \quad \left\| \sum \lambda_g U(g)(\eta_\chi) \right\| = 0$$

où la norme est prise dans  $L^2(X_S)$ , (cf. VII.5). Posons alors  $\xi_\chi = \prod_S \phi_v \otimes 1_R$  où  $R = \prod_{v \notin S} R_v$ . Assumons d'abord que  $\chi \neq 1$ . Alors  $\xi_\chi$  donne un élément de  $L_\delta^2(X)_0$  qui est cyclique pour la représentation  $U$  de  $C_k$  dans la somme directe des sous-espaces  $L_{\delta, \chi_0}^2(X)_0$  où  $\chi_0$  varie parmi les caractères de  $C_{k,1}$  dont la restriction à  $\mathcal{U}$  est égale à  $\chi$ .

Maintenant, (15) implique que dans  $L^2_\delta(X)_0$ , on a  $\sum \lambda_g U(g)(\xi_\chi) = 0$ . Par la cyclicité de  $\xi_\chi$ , on obtient  $\sum \lambda_g U(g) = 0$  sur tout  $L^2_{\delta, \chi_0}(X)_0$  ce qui donne une contradiction (cf. Appendice I, Lemme 3).

La preuve que  $\chi = 1$  est similaire mais nécessite plus d'attention car  $1_R \notin \mathcal{S}_0(A)$ . ■

On peut alors écrire le Théorème 4 dans le cas de la caractéristique positive par le

**Corollaire 2.** *Soit  $Q_\Lambda$  la projection orthogonale sur le sous-espace de  $L^2(X_S)$  fibré par les  $f \in \mathcal{S}(A_S)$  qui s'évanouissent aussi bien que leur transformée de Fourier pour  $|x| > \Lambda$ . Posons que  $h \in \mathcal{S}(C_S)$  est à support compact. Alors, quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on a*

$$\text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_{v \in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

où  $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_S, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$ , et les autres notations sont les mêmes que celles du Théorème VII.4.

En fait, la preuve du lemme 1 montre que les sous-espaces  $B_\Lambda$  se stabilisent très rapidement, de telle manière que l'application naturelle  $\xi \rightarrow \xi \otimes 1_R$  de  $L^2(X_S)$  dans  $L^2(X'_S)$  pour  $S \subset S'$  envoie  $B_\Lambda^S$  sur  $B_\Lambda^{S'}$ .

On obtient alors du corollaire 2 une formulation globale, indépendante de  $S$ , de la coupure (cut-off), et de la formule de trace. Soit  $L^2(X)$  l'espace de Hilbert  $L^2_\delta(X)$  de la section III pour la valeur triviale  $\delta = 0$  qui, bien sûr, élimine le terme déplaisant du produit intérieur, et soit  $Q_\Lambda$  la projection orthogonale sur le sous-espace  $B_\Lambda$  de  $L^2(X)$  fibré par  $f \in \mathcal{S}(A)$  qui s'évanouissent comme leur transformée de Fourier pour  $|x| > \Lambda$ . Comme on l'a mentionné précédemment, la preuve du lemme 1 montre que pour  $S$  et  $\Lambda$  suffisamment grands (et pour un caractère fixé  $\chi$ ), l'application naturelle  $\xi \rightarrow \xi \otimes 1_R$  de  $L^2(X_S)_\chi$  dans  $L^2(X)_\chi$  envoie  $B_\Lambda^S$  sur  $B_\Lambda$ .

Il est alors naturel de s'attendre à ce que l'analogie globale suivant de la formule de trace du corollaire 2 soit vraiment vérifié, i.e. que quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on ait,

$$(16) \quad \text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

où  $2 \log' \Lambda = \int_{\lambda \in C_k, |\lambda| \in [\Lambda^{-1}, \Lambda]} d^* \lambda$ , et les autres notations sont celles du Théorème VII.4.

Nous pouvons prouver directement que (16) est vérifiée quand  $h$  est supporté par  $C_{k,1}$  mais nous ne pouvons prouver (16) directement pour un  $h$  arbitraire (même si le côté droit de la formule ne contient qu'un nombre fini de termes non-nuls puisque  $h \in \mathcal{S}(C_k)$  est à support compact). Ce que nous allons cependant montrer, c'est que la formule de trace (16) implique la positivité de la distribution de Weil, et ainsi la validité de RH pour  $k$ . Rappelons-nous que nous sommes encore en caractéristique positive et qu'alors RH est un théorème de A. Weil. Il sera alors important de vérifier l'équivalence effective entre la validité de RH et la formule (16). Cela se fait par le,

**Théorème 5.** Soit  $k$  un corps global de caractéristique positive et  $Q_\Lambda$  la projection orthogonale sur le sous-espace de  $L^2(X)$  fibré par les  $f \in \mathcal{S}(A)$  tels que  $f(x)$  et  $\widehat{f}(x)$  s'évanouissent pour  $|x| > \Lambda$ . Soit  $h \in \mathcal{S}(C_k)$  à support compact. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes,

a) Quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on a

$$\text{Trace}(Q_\Lambda U(h)) = 2h(1) \log' \Lambda + \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

b) Toutes les fonctions  $L$  à Grössencharakter sur  $k$  satisfont l'hypothèse de Riemann.

*Preuve.* Pour prouver que a) implique b), nous allons prouver (en assumant a)) la positivité de la distribution de Weil (cf. Appendice II),

$$(17) \quad \Delta = \log |d^{-1}| \delta_1 + D - \sum_v D_v.$$

D'abord, le théorème III.1 est appliqué pour  $\delta = 0$ . L'application  $E$ ,

$$(18) \quad E(f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \quad \forall g \in C_k,$$

définit une isométrie surjective de  $L^2(X)_0$  dans  $L^2(C_k)$  de telle sorte que,

$$(19) \quad EU(a) = |a|^{1/2} V(a) E,$$

où la représentation régulière gauche  $V$  de  $C_k$  sur  $L^2(C_k)$  est donnée par,

$$(20) \quad (V(a)\xi)(g) = \xi(a^{-1}g) \quad \forall g, a \in C_k.$$

Soit  $S_\Lambda$  le sous-espace de  $L^2(C_k)$  donné par,

$$(21) \quad S_\Lambda = \{\xi \in L^2(C_k); \xi(g) = 0, \forall g, |g| \notin [\Lambda^{-1}, \Lambda]\}.$$

Nous noterons par la même lettre la projection orthogonale correspondante.

Soit  $B_{\Lambda,0}$  le sous-espace de  $L^2(X)_0$  fibré par les  $f \in \mathcal{S}(A)_0$  de telle façon que  $f(x)$  et  $\widehat{f}(x)$  s'évanouissent pour  $|x| > \Lambda$  et soit  $Q_{\Lambda,0}$  la projection orthogonale correspondante. Soit  $f \in \mathcal{S}(A)_0$  telle que  $f(x)$  et  $\widehat{f}(x)$  s'évanouissent pour  $|x| > \Lambda$ , alors  $E(f)(g)$  s'évanouit pour  $|g| > \Lambda$ , et l'égalité (Appendice I)

$$(22) \quad E(f)(g) = E(\widehat{f})\left(\frac{1}{g}\right) \quad f \in \mathcal{S}(A)_0,$$

montre que  $E(f)(g)$  s'évanouit pour  $|g| < \Lambda^{-1}$ .

Cela montre que  $E(B_{\Lambda,0}) \subset S_\Lambda$ , de telle manière que si l'on prend  $Q'_{\Lambda,0} = EQ_{\Lambda,0}E^{-1}$ , on obtient l'inégalité,

$$(23) \quad Q'_{\Lambda,0} \leq S_\Lambda$$

et que pour un  $\Lambda$  donné, la distribution suivante sur  $C_k$  est de type positif,

$$(24) \quad \Delta_\Lambda(f) = \text{Trace}((S_\Lambda - Q'_{\Lambda,0})V(f)),$$

i.e. on a,

$$(25) \quad \Delta_\Lambda(f * f^*) \geq 0,$$

où  $f^*(g) = \bar{f}(g^{-1})$  pour tout  $g \in C_k$ .

Prenons alors  $f(g) = |g|^{-1/2}h(g^{-1})$ , de telle façon que par (19), on ait  $EU(h) = V(\tilde{f})E$  où  $\tilde{f}(g) = f(g^{-1})$  pour tout  $g \in C_k$ . Par le lemme 3 de l'Appendice II, on a,

$$(26) \quad \sum_v D_v(f) - \log |d^{-1}| = \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

On a  $\text{Trace}(S_\Lambda V(f)) = 2f(1) \log' \Lambda$ . Aussi, en utilisant a), on voit que la limite de  $\Delta_\Lambda$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  est la distribution de Weil  $\Delta$  (cf.(17)). Le terme  $D$  dans la dernière équation provient de la nuance entre les sous-espaces  $B_\Lambda$  et  $B_{\Lambda,0}$ . Cela montre, en utilisant (24), que la distribution  $\Delta$  est de type positif de telle façon que b) est vérifiée (cf. [W3]).

Montrons maintenant que b) implique a). Nous allons calculer à partir des zéros des fonctions  $L$ , et indépendamment d'une quelconque hypothèse, la limite des distributions  $\Delta_\Lambda$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Nous choisissons (de manière non canonique) un isomorphisme

$$(27) \quad C_k \simeq C_{k,1} \times N.$$

où  $N = \text{image } | \cdot | \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $N \simeq \mathbb{Z}$  est le sous-groupe  $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$ .

Pour  $\rho \in \mathbb{C}$ , soit  $d\mu_\rho(z)$  la mesure harmonique de  $\rho$  par rapport à la ligne  $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . C'est une mesure de probabilité sur la ligne  $i\mathbb{R}$  et elle coïncide avec la masse de Dirac de  $\rho$  quand  $\rho$  est sur la ligne.

L'implication b) $\Rightarrow$ a) découle immédiatement des formules explicites (Appendice II) et du lemme suivant,

**Lemme 3.** *La limite des distributions  $\Delta_\Lambda$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$  est donnée par,*

$$\Delta_\infty(f) = \sum_{\substack{L(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) = 0 \\ \rho \in B/N^\perp}} N(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) \int_{z \in i\mathbb{R}} \hat{f}(\tilde{\chi}, z) d\mu_\rho(z)$$

où  $B$  est la bande ouverte  $B = \{\rho \in \mathbb{C}; \text{Re}(\rho) \in ]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[ \}$ ,  $N(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho)$  est la multiplicité du zéro,  $d\mu_\rho(z)$  est la mesure harmonique de  $\rho$  par rapport à la ligne  $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , et la transformée de Fourier  $\hat{f}$  de  $f$  est définie par,

$$\hat{f}(\tilde{\chi}, \rho) = \int_{C_k} f(u) \tilde{\chi}(u) |u|^\rho d^*u.$$

*Preuve.* Soit  $\Lambda = q^N$ . La preuve du Lemme 1 donne la borne inférieure  $(2N + 1) - f + (2 - 2g)$  pour la dimension de  $B_{\Lambda, \chi}$  en fonction de l'ordre de la ramification  $f$  du caractère  $\chi$  de  $C_{k,1}$ , pour lequel nous supposons d'abord que  $\chi \neq 1$ .

Nous avons vu plus haut que  $E(B_{\Lambda, \chi}) \subset S_{\Lambda, \chi}$  alors que la dimension de  $S_{\Lambda, \chi}$  est  $2N + 1$ .

Maintenant, par le Lemme 3 de l'Appendice I, tout élément  $\xi \in E(B_{\Lambda, \chi})$  satisfait les conditions,

$$(28) \quad \int \xi(x) \chi(x) |x|^\rho d^*x = 0 \quad \forall \rho \in B/N^\perp, L\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right) = 0.$$

Cela donne  $2g - 2 + f$  conditions linéairement indépendantes (pour  $N$  suffisamment grand), en utilisant le Théorème VII.6 de [W1], et cela montre que ces conditions caractérisent le sous-espace  $E(B_{\Lambda, \chi})$  de  $S_{\Lambda, \chi}$ .

Cela réduit la preuve du lemme au simple calcul suivant : soit  $F$  un ensemble fini (contenant d'éventuelles multiplicités) de  $\mathbb{C}^*$  et  $E_N$  le sous-espace de  $S_N = \{\xi \in l^2(\mathbb{Z}); \xi(n) = 0 \forall n > N\}$  défini par les conditions  $\sum \xi(n) z^n = 0 \forall z \in F$ . On doit alors calculer la limite quand  $N \rightarrow \infty$  de  $\text{Trace}((S_N - E_N)V(f))$  où  $V$  est la représentation régulière de  $\mathbb{Z}$  (de telle manière que  $V(f) = \sum f_k V^k$  où  $V$  est le décalage,  $V(\xi)_n = \xi_{n-1}$ ).

On vérifie alors que les vecteurs unités  $\eta_z \in S_N$ ,  $z \in F$ ,  $\eta_z(n) = \bar{z}^n (|z^{2N+1}| - |z^{-(2N+1)}|)^{-\frac{1}{2}} (|z| - |z^{-1}|)^{\frac{1}{2}} \forall n \in [-N, N]$ , sont asymptotiquement orthogonaux et étendent  $(S_N - E_N)$  (quand  $F$  présente des multiplicités, on doit faire très attention). La conclusion découle alors de,

$$(29) \quad \text{Lim}_{N \rightarrow \infty} \langle V(f)\eta_z, \eta_z \rangle = \int_{|u|=1} P_z(u) \widehat{f}(u) du,$$

où  $P_z(u)$  est le noyau de Poisson, et  $\widehat{f}$  la transformée de Fourier de  $f$ . ■

On devrait comparer ce lemme avec le Corollaire 2 du Théorème III.1. Dans ce dernier, seuls les zéros critiques entrent en jeu et avec une multiplicité contrôlée par  $\delta$ . Dans le lemme ci-dessus, tous les zéros apparaissent avec leur multiplicité complète, mais alors que les zéros critiques apparaissent per-se, les zéros non-critiques jouent le rôle de résonances, comme dans la théorie de Fermi.

Expliquons maintenant comment les résultats ci-dessus s'étendent aux corps de nombres  $k$ . Nous avons d'abord besoin d'analyser, comme ci-dessus, la position relative des projections  $P_\Lambda$  et  $\widehat{P}_\Lambda$ . Rappelons à la lectrice la géométrie bien connue des paires de projecteurs. Rappelons qu'une paire de projections orthogonales  $P_i$  dans l'espace de Hilbert est la même chose qu'une représentation unitaire du groupe diédral  $\Gamma = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ . Aux générateurs  $U_i$  de  $\Gamma$  correspondent des opérateurs  $2P_i - 1$ .

Le groupe  $\Gamma$  est le produit semi-direct du sous-groupe engendré par  $U = U_1 U_2$ , par le groupe  $\mathbb{Z}/2$ , agissant sur  $U \mapsto U^{-1}$ . Ses représentations unitaires irréductibles sont paramétrées par un angle  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , les projections orthogonales correspondantes  $P_i$  étant associées aux sous-espaces de dimension 1 de la forme  $y = 0$  et  $y = x \tan(\theta)$  dans le plan euclidien  $x, y$ . En particulier, ces représentations sont au plus de dimension 2. Une représentation unitaire générale est caractérisée

par l'opérateur  $\Theta$  dont la valeur est l'angle  $\theta$  ci-dessus dans le cas irréductible. Il est uniquement défini par l'égalité,

$$(30) \quad \text{Sin}(\Theta) = |P_1 - P_2|,$$

et commute avec  $P_i$ .

La première difficulté évidente est que, quand  $v$  est une place archimédienne, il n'existe pas de fonction non-nulle sur  $k_v$  qui s'évanouisse ainsi que sa transformée de Fourier pour  $|x| > \Lambda$ . Cela serait un obstacle difficile, s'il n'y avait eu le travail de Landau, Pollak et Slepian ([LPS]) au début des années soixante, motivés par des problèmes d'ingénierie électrique, qui les a amenés à surpasser leur problème en montrant que même si les projections  $P_\Lambda$  et  $\widehat{P}_\Lambda$  ne commutent pas exactement même pour  $\Lambda$  grand, leur angle se comporte suffisamment bien pour que le sous-espace  $B_\Lambda$  fasse sens.

Pour des raisons de simplicité, nous prendrons  $k = \mathbb{Q}$ , de telle façon que la seule place infinie soit réelle. Soit  $P_\Lambda$  la projection orthogonale sur le sous-espace,

$$(31) \quad P_\Lambda = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}); \xi(x) = 0, \forall x, |x| > \Lambda\}.$$

et  $\widehat{P}_\Lambda = FP_\Lambda F^{-1}$  où  $F$  est la transformée de Fourier associée au caractère de base  $\alpha(x) = e^{-2\pi i x}$ . Ce que les auteurs ci-dessus ont fait a consisté à analyser la position relative des projections  $P_\Lambda$ ,  $\widehat{P}_\Lambda$  pour  $\Lambda \rightarrow \infty$  de manière à pouvoir rendre compte de l'existence de signaux évidents (tels qu'un morceau de musique enregistrée par exemple) qui sont de support fini à la fois selon la variable temporelle, et selon la variable duale fréquence.

L'observation-clé de ([LPS]) est que l'opérateur différentiel de second ordre sur  $\mathbb{R}$  commute effectivement avec les projections  $P_\Lambda$ ,  $\widehat{P}_\Lambda$ ,

$$(32) \quad H_\Lambda \psi(x) = -\partial((\Lambda^2 - x^2) \partial) \psi(x) + (2\pi \Lambda x)^2 \psi(x),$$

où  $\partial$  est la différenciation ordinaire en une variable.

Exactement comme le générateur  $x \partial$  d'échelle commute avec la projection orthogonale sur l'espace des fonctions à support positif, l'opérateur  $\partial((\Lambda^2 - x^2) \partial)$  commute avec  $P_\Lambda$ . De plus,  $H_\Lambda$  commute avec la transformée de Fourier  $F$ , et la commutativité de  $H_\Lambda$  avec  $\widehat{P}_\Lambda$  en découle alors.

Si on le recolle à des fonctions à support dans  $[-\Lambda, \Lambda]$ , l'opérateur  $H_\Lambda$  a un spectre simple discret, et a été étudié longtemps avant le travail de [LPS]. Il apparaît dans la factorisation de l'équation de Helmholtz  $\Delta \psi + k^2 \psi = 0$  dans l'un des peu nombreux systèmes de coordonnées séparables dans l'espace euclidien de dimension 3, qu'on appelle le système des coordonnées sphéroïdales. Ses valeurs propres  $\chi_n(\Lambda)$ ,  $n \geq 0$  sont simples, positives, et de l'ordre de  $n^2$  pour  $n \rightarrow \infty$ . Les fonctions propres correspondantes sont appelées les fonctions d'ondes sphéroïdales et comme  $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$  commute avec  $H_\Lambda$ , ce sont les fonctions propres de  $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ . On connaît beaucoup de choses sur ces fonctions, en particulier, on peut les prendre à valeurs réelles, et elles sont mêmes paires pour  $n$  pair et impaires pour  $n$  impair. Le résultat-clé de [LPS] est que les valeurs propres correspondantes  $\lambda_n$  de l'opérateur  $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$  décroissent très lentement de  $\lambda_0 \simeq 1$  jusqu'à la valeur  $n \simeq 4\Lambda^2$  de l'index  $n$ , elles décroissent ainsi de  $\simeq 1$  à  $\simeq 0$  dans un intervalle de longueur  $\simeq \log \Lambda$  et restent alors proches

de 0. Bien sûr, cela donne les valeurs propres de  $\Theta$ , cela fournit l'analogie du sous-espace  $B_\Lambda$  du lemme 1, comme le fibré linéaire des  $\psi_n$ ,  $n \leq 4\Lambda^2$ , et cela fournit la justification du comptage dans le cas semi-classique des nombres d'états de la mécanique quantique qui sont localisés sur l'intervalle  $[-\Lambda, \Lambda]$  ainsi que leur transformée de Fourier comme l'aire du carré correspondant dans l'espace des phases.

Nous savons maintenant quel est le sous-espace  $B_\Lambda$  pour la seule place  $\infty$ , et pour l'obtenir pour un ensemble de places arbitraire (contenant la place infinie), nous avons juste à utiliser la même règle que dans le cas des corps de fonctions, i.e. nous considérons l'application,

$$(33) \quad \psi \mapsto \psi \otimes 1_R,$$

qui suffit si on souhaite ne gérer que la fonction zêta de Riemann. Noter aussi que dans ce cas, nous nous restreignons aux fonctions paires sur  $\mathbb{R}$ . Cela donne l'analogie du Lemme 1, Théorème 5, et du Lemme 3.

Pour terminer cette section, nous allons revenir à notre motivation initiale de la section I et montrer comment la formule pour le nombre de zéros

$$(34) \quad N(E) \sim (E/2\pi)(\log E/2\pi - 1) + 7/8 + o(1) + N_{osc}(E)$$

apparaît à partir de notre interprétation spectrale.

Faisons d'abord un calcul dans le cas semi-classique du nombre d'états de la mécanique quantique à un degré de liberté et qui remplissent la condition suivante,

$$(35) \quad |q| \leq \Lambda, |p| \leq \Lambda, |H| \leq E,$$

où  $H = qp$  est l'hamiltonien engendrant le groupe des transformations d'échelle,

$$(36) \quad (U(\lambda)\xi)(x) = \xi(\lambda^{-1}x) \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*, x \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}),$$

comme dans notre cadre général.

Pour nous conformer à notre analyse de la section III, nous devons nous restreindre aux fonctions paires de manière à exclure la région  $pq \leq 0$  du plan semi-classique  $(p, q)$ .

Maintenant, la région qui respecte la condition ci-dessus est égale à  $D = D_+ \cup (-D_+)$  où,

$$(37) \quad D_+ = \{(p, q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, p \leq \Lambda, q \leq \Lambda, pq \leq E\},$$

Calculons l'aire de  $D_+$  de la forme symplectique canonique,

$$(38) \quad \omega = \frac{1}{2\pi} dp \wedge dq.$$

Par construction,  $D_+$  est l'union d'un rectangle ayant pour côtés  $E/\Lambda$ ,  $\Lambda$  avec la portion sous la courbe, de  $q = E/\Lambda$  à  $q = \Lambda$ , de l'hyperbole  $pq = E$ . Ainsi,

$$(39) \quad \int_{D_+} \omega = \frac{1}{2\pi} E/\Lambda \times \Lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{E/\Lambda}^{\Lambda} \frac{E dq}{q} = \frac{E}{2\pi} + \frac{2E}{2\pi} \log \Lambda - \frac{E}{2\pi} \log E.$$

Maintenant, le calcul ci-dessus correspond à la normalisation standard de la transformée de Fourier avec le caractère de base de  $\mathbb{R}$  donné par

$$(40) \quad \alpha(x) = \exp(ix).$$

Mais nous devons nous conformer à la normalisation naturelle à la place infinie,

$$(41) \quad \alpha_0(x) = \exp(-2\pi ix).$$

Nous devons ainsi effectuer la transformation,

$$(41) \quad P = p/2\pi, \quad Q = q.$$

La forme symplectique est maintenant  $dP \wedge dQ$  et le domaine,

$$(42) \quad D' = \{(P, Q); |Q| \leq \Lambda, |P| \leq \Lambda, |PQ| \leq E/2\pi\}.$$

Le calcul est similaire et amène au résultat suivant,

$$(43) \quad \int_{D'_+} \omega = \frac{2E}{2\pi} \log \Lambda - \frac{E}{2\pi} \left( \frac{\log E}{2\pi - 1} \right).$$

Dans cette formule, on voit que le terme principal  $\langle N(E) \rangle$ , qui apparaît avec un signe *moins*, montre que le nombre d'états mécaniques quantiques correspondant à  $D'$  est inférieur à  $\frac{4E}{2\pi} \log \Lambda$  par la première approximation du nombre de zéros de zêta dont la partie imaginaire est inférieure à  $E$  en valeur absolue (on a juste à multiplier par 2 l'égalité (43) puisque  $D' = D'_+ \cup (-D'_+)$ ).

Maintenant  $\frac{1}{2\pi} (2E)(2 \log \Lambda)$  est le nombre d'états quantiques de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*x)$  qui sont localisés dans  $\mathbb{R}_+^*$  entre  $\Lambda^{-1}$  et  $\Lambda$ , ainsi que localisés dans le groupe dual  $\mathbb{R}$  (pour l'appariement  $\langle \lambda, t \rangle = \lambda^{it}$ ) entre  $-E$  et  $E$ . Ainsi, on voit clairement que la première approximation de  $N(E)$  apparaît comme le manque de surjectivité de l'application qui associe aux états quantiques  $\xi$  appartenant à  $D'$  la fonction sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$(44) \quad E(\xi)(x) = |x|^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(nx)$$

où l'on assume les conditions supplémentaires  $\xi(0) = \int \xi(x) dx = 0$ .

Une analyse plus précise, qui est juste ce que fait la formule de trace, amènera les termes additionnels  $7/8 + o(1) + N_{osc}(E)$ . La discussion ci-dessus fournit la construction explicite d'une grande matrice dont le spectre approche les zéros de zêta lorsque  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Il est assez remarquable que les valeurs propres de l'opérateur angle  $\Theta$  dont nous avons discuté ci-dessus, jouent également un rôle-clé dans la théorie des matrices aléatoires unitaires. Pour être plus précis, soit  $E(n, s)$  la grande probabilité limite  $N$  qu'il y ait exactement  $n$  valeurs propres d'une matrice hermitienne de taille  $N \times N$  dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{\sqrt{2N}}t, \frac{\pi}{\sqrt{2N}}t]$ ,  $t = s/2$ . Clairement,  $\sum_n E(n, s) = 1$ . Soit  $P_t$  comme ci-dessus l'opérateur de multiplication par  $1_{[-t, t]}$  - la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-t, t]$  dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ . En général (cf. [Me]),  $E(n, s)$  est le produit de  $(-1)^n$  par le  $n$ -ième coefficient de l'expansion de Taylor en  $z = 1$  de  $\zeta_s(z) = \prod_1^\infty (1 - z\lambda_j(s))$ ,

où  $\lambda_j(s)$  sont les valeurs propres de l'opérateur  $\widehat{P}_\pi P_t$  (ici, on note  $\widehat{P}_\lambda = \mathcal{F}P_\lambda\mathcal{F}^{-1}$ , et  $\mathcal{F}$  la transformée de Fourier,  $\mathcal{F}\xi(u) = \int e^{ixu}\xi(x)dx$ . Noter également que les valeurs propres de  $\widehat{P}_a P_b$  dépendent seulement du produit  $ab$  de manière à ce que les relations avec les valeurs propres de  $\Theta$  soient bien claires).

### Remarques générales.

a) Il y a une forte analogie entre la construction de l'espace de Hilbert  $L^2(X)$  dans la section III, et la construction de l'espace physique ([S] théorème 2.1) dans la théorie quantique des champs constructive, dans le cas des théories de jauge. Dans les deux cas, l'action du groupe d'invariance (le groupe  $k^* = GL_1(k)$  dans notre cas, le groupe de jauge dans le cas des théories de jauge) est balayé par la véritable définition du produit intérieur. Comparer les commentaires après III (9) avec ([S]) en haut de la page 17.

b) Pour les corps globaux de caractéristique 0, le groupe des classes d'idèles a un composant connexe non évident de l'identité et ce groupe connexe n'a jusque-là pas reçu d'interprétation par la théorie de Galois (cf. [W4]). L'apparition de facteurs de type III dans [BC] indique que la classification des facteurs hyperfinis de type III [C] devrait être vue comme une restriction de la théorie des corps de classes locaux pour les places archimédiennes, et fournir l'interprétation manquante de la composante connexe de l'identité du groupe des classes d'idèles. En particulier, les facteurs hyperfinis de type III sont classifiés par des sous-groupes fermés (virtuels) de  $\mathbb{R}_+$  (cf. [C]) et ils apparaissent tous comme des extensions "non-ramifiées" de l'hyperfacteur de type III<sub>1</sub>.

c) Notre construction de l'espace d'Hilbert-Polya présente quelque ressemblance avec [Z] et en fait, il faudrait clarifier cette relation, ainsi que la relation de l'espace des classes d'adèles avec le site arithmétique de Deninger [D]. Noter que la division de  $A$  par  $k^*$  élimine la structure linéaire de  $A$  et qu'elle transforme drastiquement les formules pour les espaces de fonctions, en remplaçant les produits par des sommes (cf. théorème 4 de la section VII). Il devrait être clair à la lecture que l'action du groupe des classes d'idèles sur l'espace des classes d'adèles est l'analogue (à travers le dictionnaire habituel de la théorie des corps de classes) de l'action du Frobenius sur la courbe (pour être plus précis, on a besoin de diviser d'abord l'espace des classes d'adèles par l'action du sous-groupe maximal du groupe des classes d'idèles).

d) Il y a une ressemblance superficielle entre la manière dont  $N(E)$  apparaît dans le dernier calcul de la section VIII et la discussion dans [BK], directement inspirée de [Co]. Il est amusant de noter que le calcul de [BK] coïncide vraiment, les deux rectangles sont éliminés sans raison, ce qui change adéquatement le signe du terme dans  $E$ . Ce que [BK] n'a pas pris en compte, c'est l'interprétation spectrale de [Co] comme un *spectre d'absorption* plutôt que comme un spectre d'émission.

e) Il y a une ressemblance encore plus superficielle entre ce travail et celui de D. Goldfeld [G] ; dans ce dernier, la distribution de Weil est utilisée pour définir un produit intérieur correspondant à un espace de fonctions sur le groupe des classes d'idèles. La positivité du produit intérieur est bien-sûr équivalente à la positivité de la distribution de Weil (et par le résultat de Weil à RH) mais

cela ne donne aucun indice sur la manière de prouver cette positivité, et aucune explication n'est fournie (exceptée pour une jolie observation aux places archimédiennes) sur ce qu'est la distribution de Weil, puisqu'elle est introduite à la main dans la formule pour le produit intérieur.

f) Le cadre proposé ci-dessus s'étend naturellement du cas de  $GL(1)$  au cas  $GL(n)$  pour lequel l'espace des classes d'adèles est remplacé par le quotient de  $M_n(A)$  par l'action à droite de  $GL_n(k)$ . Le travail préliminaire de C. Soulé montre que l'analogie du théorème III.1 reste valide, la prochaine étape étant de trouver l'analogie de la formule de trace de Lefschetz dans ce contexte.

g) J'ai appris de P. Sarnak et E. Bombieri que Paul Cohen a considéré l'espace des classes d'adèles en connexion avec RH, mais n'ai obtenu aucun détail des idées non publiées de celui-ci.

Tous les résultats du présent article ont été annoncés à la conférence au sujet de l'hypothèse de Riemann de septembre 1998 au Schrödinger Institute de Vienne et ont été publiés dans un preprint du Schrödinger Institute. Nous sommes reconnaissant à l'Institut Américain de Mathématiques d'avoir sponsorisé cette conférence.

## Appendices

### Appendice I. Preuve du théorème 1.

Dans cet appendice, nous donnons la preuve du théorème 1. Rappelons au préalable les résultats de Tate et Iwasawa à trouver dans [W2]

#### fonctions $L$ et distributions homogènes sur $A$

En général, pour un corps local non archimédien  $K$ , nous utilisons les notations  $R$  pour le sous-anneau compact maximal,  $P$  pour l'idéal maximal de  $R$ ,  $\pi$  pour un générateur de l'idéal  $P$  (i.e.  $P = \pi R$ ).

Soit  $k$  un corps global et  $A$  l'anneau des adèles de  $k$ . C'est le produit restreint des corps locaux  $k_v$  indexé par l'ensemble des places  $v$  de  $k$ , par rapport aux sous-anneaux compacts maximaux  $R_v$ . Similairement, l'espace de Bruhat-Schwartz  $\mathcal{S}(A)$  est le produit tensoriel restreint des espaces locaux de  $\mathcal{S}(k_v)$ , par rapport aux vecteurs  $1_{R_v}$ .

Aux fonctions  $L$  sur  $k$  sont associés des Grössencharakters, i.e. des caractères du groupe des classes d'idèles,

$$(1) \quad C_k = J_k/k^* .$$

Soit  $\mathcal{X}$  un caractère du groupe des classes d'idèles, nous considérons  $\mathcal{X}$  comme un caractère de  $J_k$  qui vaut 1 sur  $k^*$ . Puisqu'il peut être écrit comme un produit,

$$(2) \quad \mathcal{X}(j) = \prod \mathcal{X}_v(j_v) \quad j = (j_v) \in J_k .$$

En considérant la restriction de  $\mathcal{X}$  au sous-groupe compact

$$(3) \quad G_0 = \prod R_v^* \times 1 \subset J_k ,$$

il découle que pour tout  $v$  fini sauf pour un nombre fini d'entre elles, on a

$$(4) \quad \mathcal{X}_v/R_v^* = 1.$$

On dit que  $\mathcal{X}$  est non-ramifié en  $v$  quand cela a lieu.

Alors  $\mathcal{X}_v(x)$  dépend seulement du module  $|x|$ , puisque

$$(5) \quad k_v^*/R_v^* = \text{mod}(k_v).$$

Ainsi  $\mathcal{X}_v$  est déterminé par

$$(6) \quad \mathcal{X}_v(\pi_v)$$

qui ne dépend pas du choix de  $\pi_v \pmod{R_v^*}$ .

Soit  $\mathcal{X}$  un quasi-caractère de  $C_k$ , il est de la forme,

$$(7) \quad \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x) |x|^s$$

où  $s \in \mathbb{C}$  et  $\mathcal{X}_0$  est un caractère de  $C_k$ . La partie réelle  $\sigma$  de  $s$  est uniquement déterminée par

$$(8) \quad |\mathcal{X}(x)| = |x|^\sigma.$$

Soit  $P$  l'ensemble fini des places finies auxquelles  $\mathcal{X}_0$  est ramifié. La  $L$ -fonction  $L(\mathcal{X}_0, s)$  est définie pour  $\sigma = \text{Re}(s) > 1$  par

$$(9) \quad L(\mathcal{X}_0, s) = \left( \prod_{\substack{v \text{ fini} \\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_{0,v}(\pi_v) q_v^{-s})^{-1} \right) = \left( \prod_{\substack{v \text{ fini} \\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_v(\pi_v))^{-1} \right)$$

où

$$(10) \quad |\pi_v| = q_v^{-1}.$$

Rappelons (cf. [W2]) comment  $L(\mathcal{X}_0, s)$  apparaît comme un facteur de normalisation pour les distributions homogènes sur  $A$ .

D'abord, soit  $K$  un corps local et  $\mathcal{X}$  un quasi-caractère de  $K^*$ ,

$$(11) \quad \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x) |x|^s, \quad \mathcal{X}_0 : K^* \rightarrow U(1).$$

Une distribution  $D$  sur  $K$  est homogène de poids  $\mathcal{X}$  ssi on a

$$(12) \quad \langle f^a, D \rangle = \mathcal{X}(a)^{-1} \langle f, D \rangle$$

pour toutes les fonctions test  $f$  et pour tout  $a$  dans  $K^*$ , où par définition

$$(13) \quad f^a(x) = f(ax)$$

Quand  $\sigma = \text{Re}(s) > 0$ , il existe, moyennant normalisation seulement, une distribution homogène de poids  $\mathcal{X}$  sur  $K$  (cf. [W2]). Elle est donnée par l'intégrale absolument convergente,

$$(14) \quad \int_{K^*} f(x) \mathcal{X}(x) d^*x = \Delta_{\mathcal{X}}(f)$$

En particulier, soit  $K$  non-archimédien, alors, pour n'importe quelle fonction localement constante supportée de façon compacte  $f$  par  $K$ , on a,

$$(15) \quad f(x) - f(\pi^{-1}x) = 0 \quad \forall x, |x| \leq \delta.$$

Ainsi, pour tout  $s \in \mathbb{C}$ , l'intégrale

$$(16) \quad \int_{K^*} (f(x) - f(\pi^{-1}x)) |x|^s d^*x = \Delta'_s(f)$$

avec comme mesure de Haar multiplicative  $d^*x$ , normalisée par

$$(17) \quad \langle 1_{R^*}, d^*x \rangle = 1$$

définit une distribution sur  $K$  avec les propriétés,

$$(18) \quad \langle 1_R, \Delta'_s \rangle = 1,$$

$$(19) \quad \langle f^a, \Delta'_s \rangle = |a|^{-s} \langle f, \Delta'_s \rangle,$$

et

$$(20) \quad \Delta'_s = (1 - q^{-s}) \Delta_s,$$

où  $|\pi| = q^{-1}$ .

(Vérifions (18)...(20). Avec  $f = 1_R$ , on a  $f(\pi^{-1}x) = 1$  ssi  $\pi^{-1}x \in R$  i.e.  $x \in \pi R = P$ . Ainsi,  $\Delta'_s(1_R) = \int_{R^*} d^*x = 1$ . Vérifions (20), on a  $\int f(\pi^{-1}x) |x|^s d^*x = \int f(y) |\pi|^s |y|^s d^*y = |\pi|^s \Delta_s(f)$ . Mais  $|\pi| < 1$ ,  $|\pi| = \frac{1}{q}$ . Noter alors que pour  $s = 1$  et  $f = 1_R$ , on obtient  $\int_{R^*} dx = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_R dx$ ).

Soit alors  $\mathcal{X}$  un quasi-caractère de  $C_k$  et écrivons comme ci-dessus

$$(21) \quad \mathcal{X} = \Pi \mathcal{X}_v, \quad \mathcal{X}(x) = \mathcal{X}_0(x) |x|^s$$

où  $s \in \mathbb{C}$  et  $\mathcal{X}_0$  est un caractère.

Soit  $P$  l'ensemble fini des places finies où  $P$  se ramifie.

Pour toute place  $v \notin P$ , soit  $\Delta'_v(s)$  l'unique distribution homogène de poids  $\mathcal{X}_v$  normalisée par

$$(22) \quad \langle \Delta'_v(s), 1_{R_v} \rangle = 1.$$

Pour tout  $v \in P$  ou pour toute place infinie, soit, pour  $\sigma = \text{Re}(s) > 0$ ,  $\Delta'_v$  donnée par (14) homogène de poids  $\mathcal{X}_v$  mais non normalisée. Alors le produit tensoriel infini,

$$(23) \quad \Delta'_s = \Pi \Delta'_v(s)$$

prend sens comme une forme linéaire continue sur  $\mathcal{S}(A)$  et est homogène de poids  $\mathcal{X}$ .

Cette solution n'est pas égale à 0 puisque  $\Delta'_v \neq 0$  pour tout  $v \in P$  ainsi que pour n'importe quelle place infinie. Elle est finie par construction sur l'espace  $\mathcal{S}(A)$  des fonctions test comme produit tensoriel infini

$$(24) \quad \mathcal{S}(A) = \otimes (\mathcal{S}(k_v), 1_{R_v}).$$

**Lemme 1.** (cf. [W2]) Pour  $\sigma = \text{Re}(s) > 1$ , les intégrales suivantes convergent absolument

$$\int f(x) \mathcal{X}_0(x) |x|^s d^*x = \Delta_s(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)$$

et  $\Delta_s(f) = L(\mathcal{X}_0, s) \Delta'_s(f)$ .

*Preuve.* Pour obtenir la convergence absolue, on peut supposer que  $f = 1_R$  et  $\mathcal{X}_0 = 1$ . Alors, on doit contrôler un produit infini de termes locaux, donnés localement pour la mesure de Haar  $d^*x$  sur  $k_v^*$  tels que  $\int_{R \cap k_v^*} d^*x = 1$ , par

$$(25) \quad \int_{R \cap k_v^*} |x|^s d^*x \quad (s \text{ réel})$$

qui est égal à  $1 + q_v^{-s} + q_v^{-2s} + \dots = (1 - q_v^{-s})^{-1}$ . Ainsi, la convergence de  $\sigma > 1$  est la même que celle de la fonction zêta.

Pour prouver la seconde égalité, on a seulement besoin de considérer le produit tensoriel infini pour les places finies  $v \notin P$ . Alors, par (20), on a  $\Delta'_v = (1 - q_v^{-\alpha v}) \Delta_v$  où

$$(26) \quad q_v^{-\alpha v} = \mathcal{X}_v(\pi) = \mathcal{X}_{0,v}(\pi) q_v^{-s}$$

avec  $|\pi| = q_v^{-1}$ .

$$\text{Ainsi, on obtient } \Delta_s = \left( \prod_{\substack{v \text{ fini} \\ v \notin P}} (1 - \mathcal{X}_{0,v}(\pi) q_v^{-s})^{-1} \right) \Delta'_s = L(\mathcal{X}_0, s) \Delta'_s. \blacksquare$$

Par construction,  $\Delta'_s$  fait sens à chaque fois que  $\sigma > 0$  et est une fonction holomorphe de  $s$  (pour  $f$  fixée). Revoyons brièvement (cf. [W2]) comment étendre la définition de  $\Delta_s$ .

Nous définissons comme ci-dessus  $k$  comme un corps global, nous fixons un caractère trivial non-additif  $\alpha$  de  $A$ , trivial sur  $k$ ,

$$(27) \quad \alpha(x + y) = \alpha(x) \alpha(y) \in U(1), \quad \alpha(q) = 1, q \in k.$$

Nous identifions alors le dual du groupe additif localement compact  $A$  avec  $A$  lui-même par l'appariement,

$$(28) \quad \langle x, y \rangle = \alpha(xy).$$

On montre (cf.[W1]) que le treillis  $k \subset A$ , i.e. le sous-groupe additif cocompact discret  $k$ , est son propre dual,

$$(29) \quad \langle x, q \rangle = 1 \quad \forall q \in k \quad \Leftrightarrow \quad x \in k.$$

Puisque  $A$  est le produit restreint des corps locaux  $k_v$ , on peut écrire  $\alpha$  comme un produit infini,

$$(30) \quad \alpha = \prod \alpha_v$$

où pour presque tout  $v$ , on a  $\alpha_v = 1$  sur  $R_v$ . Rappelons la définition de l'espace  $\mathcal{S}(A)_0$ ,

$$(31) \quad \mathcal{S}(A)_0 = \{f \in \mathcal{S}(A) ; f(0) = 0, \int f dx = 0\}$$

**Lemme 2.** Soit  $f \in \mathcal{S}(A)_0$ , alors les séries

$$E(f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(qg) \quad \forall g \in C_k$$

convergent absolument et on a

$$\forall n, \exists c, \quad |E(f)(g)| \leq c e^{-n|\log|g||} \quad \forall g \in C_k$$

et  $E(\widehat{f})(g) = E(f)(g^{-1})$ .

*Preuve.* Rappelons d'abord la définition formelle ([Br]) de l'espace de Bruhat-Schwartz  $\mathcal{S}(G)$  pour un groupe abélien arbitraire localement compact  $G$ . On considère toutes les paires de sous-groupes  $G_1, G_2$  de  $G$  telles que  $G_1$  est engendré par un voisinage compact de 0 dans  $G$ , tandis que  $G_2$  est un sous-groupe compact de  $G_1$  tel que le groupe-quotient est élémentaire, i.e. est de la forme  $\mathbb{R}^a \mathbb{T}^b \mathbb{Z}^c F$  pour  $F$  un groupe fini. Par définition, l'espace de Schwartz,  $\mathcal{S}(G)$  est la limite inductive des espaces de Schwartz  $\mathcal{S}(G_1/G_2)$ , où ces derniers sont définis comme habituellement en terme de décroissance rapide de leurs dérivées. Puisque  $G_1$  est ouvert dans  $G$ , tout élément de  $\mathcal{S}(G_1/G_2)$  étendu par la valeur 0 en dehors de  $G_1$  définit une fonction continue sur  $G$ . Par construction,  $\mathcal{S}(G)$  est l'union des sous-espaces  $\mathcal{S}(G_1/G_2)$  et il est muni de la limite topologique inductive.

Soit  $\widehat{G}$  le dual de Pontrjagin de  $G$ , alors la transformée de Fourier, qui dépend de la normalisation de la mesure de Haar sur  $G$ , fournit un isomorphisme de  $\mathcal{S}(G)$  dans  $\mathcal{S}(\widehat{G})$ .

Soit  $\Gamma$  un treillis dans le groupe abélien localement compact  $G$ . Alors, toute fonction  $f \in \mathcal{S}(G)$  est admissible pour l'appariement  $G, \Gamma$  au sens de [W1], et la formule de sommation de Poisson (cf. [W1]) est l'égalité,

$$(32) \quad \text{Covol}(\Gamma) \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\beta \in \Gamma^\perp} \widehat{f}(\beta)$$

où  $\Gamma^\perp$  est le dual du treillis  $\Gamma$ , et

$$(33) \quad \widehat{f}(\beta) = \int f(a) \beta(a) da.$$

Les deux côtés de l'égalité (32) dépendent de la normalisation de la mesure de Haar sur  $G$ .

Dans notre cas, on définit  $A$  comme le groupe additif des adèles sur  $k$ .

On normalise la mesure de Haar  $dx$  sur  $A$  par

$$(34) \quad \text{Covol}(k) = 1.$$

On prend alors  $\Gamma = xk$ , pour quelque  $x \in A^{-1}$ . On a

$$(35) \quad \text{Covol}(xk) = |x|$$

Le dual  $\Gamma^\perp$  du treillis  $xk$ , pour  $x$  inversible dans  $A$ , est le treillis  $\Gamma^\perp = x^{-1}k$ . Alors, la formule de Poisson (32) se lit, pour tout  $f \in \mathcal{S}(A)$ ,

$$(36) \quad |x| \sum_{q \in k} f(xq) = \sum_{q \in k} \widehat{f}(x^{-1}q).$$

Ce que nous pouvons réécrire en,

$$(37) \quad |x| \sum_{k^*} f(xq) = \sum_{k^*} \widehat{f}(x^{-1}q) + \delta$$

$$\delta = -|x| f(0) + \int f(y) dy.$$

Nous pouvons alors réécrire (37) comme l'égalité, valide pour tout  $f \in \mathcal{S}(A)_0$

$$(38) \quad E(f)(x) = E(\widehat{f})\left(\frac{1}{x}\right) \quad f \in \mathcal{S}(A)_0.$$

Il reste à contrôler la croissance de  $E(f)(x)$  sur  $C_k$ , mais par (38), il suffit de comprendre ce qui se passe pour  $|x|$  grand.

Nous traitons seulement le cas des corps de nombres, le cas général est similaire. Soit  $A = A_f \times A_\infty$  la décomposition de l'anneau des adèles correspondant aux places finies et infinies, ainsi  $A_\infty = \prod_{S_\infty} k_v$  où  $S_\infty$  est l'ensemble des places infinies.

Tout élément de  $\mathcal{S}(A)$  est une combinaison linéaire finie de fonctions test de la forme,

$$(39) \quad f = f_0 \otimes f_1$$

où  $f_0 \in \mathcal{S}(A_f)$ ,  $f_1 \in \mathcal{S}(A_\infty)$  (cf. [W5] 39), ainsi, cela suffit à contrôler la croissance de  $E(f)(x)$  pour une telle  $f$  et  $|x|$  grand.

Soit  $J_{k,1} = \{x \in J_k; |x| = 1\}$  le groupe des idèles de module 1, puisque  $J_{k,1}/k^*$  est compact (cf. [W1]), nous allons prendre un ensemble compact  $K_1$  de  $J_{k,1}$  dont l'image dans  $J_{k,1}/k^*$  est ce groupe compact.

Soit  $\mu$  l'immersion diagonale :

$$(40) \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\mu} (\lambda, \dots, \lambda) \in \prod_{S_\infty} k_v^*$$

qui fournit l'isomorphisme

$$(41) \quad J_k = J_{k,1} \times \text{Im } \mu.$$

On a  $f_0 \in \mathcal{S}(A_f)$ , puisque (cf. [W5]),  $f_0 \in C_c(A_f)$  et on pose  $K_0 = \text{Support } f_0$ . Puisque  $K_0$  est compact, on peut trouver un sous-ensemble fini  $P$  de l'ensemble des places finies et  $C < \infty$  tel que :

$$(42) \quad y \in K = (K_f)^{-1}K_0 \Rightarrow |y_v| \leq 1, v \notin P, \quad |y_v| \leq C, \quad \forall v.$$

où  $K_f$  est la projection de  $K_1$  sur  $A_f$ .

Définissons  $\Omega$  comme le sous-groupe ouvert compact de  $A_f$  déterminé par

$$(43) \quad |a_v| \leq 1, v \notin P, \quad |a_v| \leq C, \quad \forall v.$$

Par construction,  $E(f)(x)$  dépend seulement de la classe de  $x$  dans  $J_k/k^*$ . Ainsi, pour contrôler le comportement de  $E(f)(x)$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ , on peut prendre  $x = (x_f, x_\infty) \in K_1$  et considérer  $E(f)(\lambda x)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \rightarrow \infty$ . Maintenant, soit  $q = (q_f, q_\infty) \in k$ , alors,

$$(44) \quad f(q \lambda x) = f_0(q_f x_f) f_1(q_\infty \lambda x_\infty)$$

et cela s'évanouit, à moins que  $q_f x_f \in K_0$ , i.e. à moins que  $q_f \in K$ . Mais alors, par (42), on a  $q_f \in \Omega$ . Soit  $\Gamma$  le treillis sur  $\prod_{S_\infty} k_v$  déterminé par

$$(45) \quad \Gamma = \{q_\infty; q \in k, q_f \in \Omega, \}$$

La taille de  $E(f)(\lambda x)$  est ainsi contrôlée (jusqu'à la racine carrée de  $|\lambda x|$ ) par

$$(46) \quad C \sum_{n \in \Gamma^*} |f_1(\lambda x_\infty n)|$$

où  $x_\infty$  varie sur la projection  $K_\infty$  de  $K_1$  sur  $\prod_{S_\infty} k_v^*$ .

Puisque  $f_1 \in \mathcal{S}(A_\infty)$ , cela montre que  $E(f)(x)$  décroît plus vite que n'importe quelle puissance de  $|x|$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ .

Nous avons montré que  $E(f)$  décroît rapidement par rapport à  $|x|$ , pour  $|x| \rightarrow \infty$ . En utilisant (38) et la stabilité de  $\mathcal{S}(A)_0$  sous Fourier, nous voyons qu'il décroît aussi rapidement par rapport à  $|\log |x||$  quand  $|\log |x|| \rightarrow \infty$ .

Nous obtenons alors,

**Lemme 3.** (cf. [W2]) *Pour  $\sigma = \text{Re}(s) > 0$ , et n'importe quel caractère  $\mathcal{X}_0$  de  $C_k$ , on a*

$$\int E(f)(x) \mathcal{X}_0(x) |x|^{s-1/2} d^*x = cL(\mathcal{X}_0, s) \Delta'_s(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0$$

où la constante non nulle  $c$  dépend de la normalisation de la mesure de Haar  $d^*x$  sur  $C_k$ .

*Preuve.* Pour  $\sigma = \text{Re}(s) > 1$ , l'égalité découle du lemme 1, mais puisque les deux côtés sont analytiques dans  $s$ , cela est vérifié en général.

Comme dans le lemme 1, nous continuerons d'utiliser la notation  $\Delta_s(f)$  pour  $\sigma = \text{Re}(s) > 0$ .

### Unités approchées dans les espaces de Sobolev $L_\delta^2(C_k)$

On considère d'abord, pour  $\delta > 1$ , l'espace de Hilbert  $L_\delta^2(\mathbb{R})$  de fonctions  $\xi(u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$  de norme carrée donnée par

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2 (1 + u^2)^{\delta/2} du.$$

Posons  $\rho(u) = (1 + u^2)^{\delta/2}$ . Il est comparable à  $(1 + |u|)^\delta$  et en particulier,

$$(2) \quad \frac{\rho(u+a)}{\rho(u)} \leq c \rho(a) \quad \forall u \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$$

avec  $c = 2^{\delta/2}$ .

Soit alors  $V(v)$  l'opérateur de translation,

$$(3) \quad (V(v)\xi)(u) = \xi(u-v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

on a  $\int_{\mathbb{R}} |\xi(u-v)|^2 \rho(u) du = \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2 \rho(u+v) du$  de telle manière que par (2), il est inférieur à  $c \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^2 \rho(u) \rho(v) du = c \rho(v) \|\xi\|^2$ ,

$$(4) \quad \|V(v)\| \leq (c \rho(v))^{1/2}.$$

Cela montre que  $V(f) = \int f(v) V(v) dv$  a du sens dès que

$$(5) \quad \int |f(v)| \rho(v)^{1/2} dv < \infty.$$

Cela est vérifié pour tout  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

**Lemme 4.** *Il existe une unité approchée  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , telle que  $\widehat{f}_n$  est à support compact,  $\|V(f_n)\| \leq C, \forall n$ , et*

$$V(f_n) \rightarrow 1 \text{ fortement dans } L^2_\delta(\mathbb{R}).$$

*Preuve.* Soit  $f$  une fonction,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , dont la transformée de Fourier  $\widehat{f}$  est à support compact, et telle que  $\int f dx = 1$  (i.e.  $\widehat{f}(0) = 1$ ). Alors soit

$$(6), \quad f_n(v) = n f(nv) \quad n = 1, 2, \dots$$

on a  $\int |f_n(v)| \rho(v)^{1/2} dv = \int |f(u)| \rho(\frac{u}{n})^{1/2} du \leq \int |f(u)| \rho(u)^{1/2} du$ . Ainsi  $\|V(f_n)\|$  est uniformément bornée.

Nous pouvons supposer que  $\widehat{f}$  est égale à 1 sur  $[-1, 1]$ , alors  $\widehat{f}_n$  est égale à 1 sur  $[-n, n]$  et  $V(f_n)\xi = \xi$  pour n'importe quel  $\xi$  avec  $\text{Supp } \widehat{\xi} \subset [-n, n]$ . Par uniformité, on obtient que  $V(f_n) \rightarrow 1$  fortement.

■

Identifions maintenant le dual  $(L^2_\delta)^*$  de l'espace de Hilbert  $L^2_\delta$  avec  $L^2_{-\delta}$  au moyen de l'appariement,

$$(7) \quad \langle \xi, \eta \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}} \xi(u) \eta(u) du.$$

Puisque  $L^2_\delta$  est un espace de Hilbert, il est son propre dual en utilisant l'appariement,

$$(8) \quad \langle \xi, \eta_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi(u) \eta_1(u) (1 + u^2)^{\delta/2} du.$$

Si l'on pose  $\eta(u) = \eta_1(u)(1 + u^2)^{\delta/2}$ , alors

$$\int |\eta_1(u)|^2 (1 + u^2)^{\delta/2} du = \int |\eta(u)|^2 (1 + u^2)^{-\delta/2} du$$

qui est la norme carrée naturelle pour  $L_{-\delta}^2$ .

Étant donné un groupe quasi-compact tel que  $C_k$  avec comme module,

$$(9) \quad | \cdot | : C_k \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

on choisit  $d^*g$  la mesure de Haar sur  $C_k$  normalisée par

$$(10) \quad \int_{|g| \in [1, \Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \Lambda \rightarrow \infty$$

et on pose  $L_\delta^2(C_k)$  définie comme la norme de,

$$(11) \quad \int_{C_k} |\xi(g)|^2 (1 + \log |g|^2)^{\delta/2} d^*g.$$

C'est, quand le module de  $k$  est  $\mathbb{R}_+^*$ , une somme directe d'espaces (1), étiquetée par les caractères  $\mathcal{X}_0$  du groupe compact

$$(12) \quad C_{k,1} = \text{Ker mod}.$$

L'appariement entre  $L_\delta^2(C_k)$  et  $L_{-\delta}^2(C_k)$  est donné par

$$(13) \quad \langle \xi, \eta \rangle = \int \xi(g) \eta(g) d^*g.$$

La représentation naturelle  $V$  de  $C_k$  par les translations est donnée par

$$(14) \quad (V(a)\xi)(g) = \xi(a^{-1}g) \quad \forall g, a \in C_k.$$

Elle est unitaire, mais par (4), on a,

$$(15) \quad \|V(g)\| = 0 \text{ si } |\log |g||^{\delta/2}, \text{ si } |\log |g|| \rightarrow \infty.$$

Finalement, on a, en utilisant le lemme 4 et la décomposition  $C_k = C_{k,1} \times N$ ,

**Lemme 5.** *Il existe une unité approchée  $f_n \in \mathcal{S}(C_k)$ , telle que  $\widehat{f}_n$  est à support compact,  $\|V(f_n)\| \leq C, \forall n$ , et*

$$V(f_n) \rightarrow 1 \text{ fortement dans } L_\delta^2(C_k).$$

### Preuve du théorème III.1

On considère d'abord le sous-espace de codimension 2 de  $\mathcal{S}(A)$  donné par

$$(1) \quad f(0) = 0, \int f dx = 0.$$

On munit ce sous-espace  $\mathcal{S}(A)_0$  du produit intérieur,

$$(2) \quad \int_{C_k} |E(f)(x)|^2 (1 + \log |x|^2)^{\delta/2} d^*x.$$

Soit  $U$  la représentation de  $C_k$  sur  $\mathcal{S}(A)$  donnée par

$$(3) \quad (U(a)\xi)(x) = \xi(a^{-1}x) \quad \forall a \in C_k, x \in A.$$

Soit  $L_\delta^2(X)_0$  la complétion séparée de  $\mathcal{S}(A)_0$  pour le produit intérieur donné par (2). L'application linéaire  $E : \mathcal{S}(A)_0 \rightarrow L_\delta^2(C_k)$  satisfait

$$(4) \quad \|E(f)\|_\delta^2 = \|f\|_\delta^2$$

par construction. Aussi, elle s'étend à une isométrie, toujours notée  $E$ ,

$$(5) \quad E : L_\delta^2(X)_0 \hookrightarrow L_\delta^2(C_k).$$

On a

$$\begin{aligned} E(U(a)f)(g) &= |g|^{1/2} \sum_{k^*} (U(a)f)(qg) = |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(a^{-1}qg) \\ &= |g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} |a^{-1}g|^{1/2} \sum_{k^*} f(qa^{-1}g) = |a|^{1/2} (V(a)E(f))(g) \end{aligned}$$

$$(6) \quad EU(a) = |a|^{1/2} V(a)E.$$

L'égalité (6) montre que la représentation naturelle  $U$  de  $C_k$  sur  $L_\delta^2(X)_0$  correspond par l'isométrie  $E$  à la restriction de  $|a|^{1/2} V(a)$  au sous-espace invariant donné par l'image de  $E$ .

Pour comprendre  $\text{Im } E$ , on considère son orthogonal dans l'espace dual  $L_{-\delta}^2(C_k)$ .

Le sous-groupe compact

$$(7) \quad C_{k,1} = \{g \in C_k; |g| = 1\}$$

agit par la représentation  $V$  qui est unitaire quand elle est restreinte à  $C_{k,1}$ . Ainsi, on peut décomposer  $L_\delta^2(C_k)$  et son dual  $L_{-\delta}^2(C_k)$ , en la somme directe de sous-espaces,

$$(8) \quad L_{\delta, \mathcal{X}_0}^2 = \{\xi \in L_\delta^2(C_k); \xi(a^{-1}g) = \mathcal{X}_0(a)\xi(g) \quad \forall g \in C_k, a \in C_{k,1}\}$$

et,

$$(9) \quad L_{-\delta, \mathcal{X}_0}^2 = \{\xi \in L_{-\delta}^2(C_k); \xi(ag) = \mathcal{X}_0(a)\xi(g) \quad \forall g \in C_k, a \in C_{k,1}\}$$

qui correspondent aux projections  $P_{\mathcal{X}_0} = \int \overline{\mathcal{X}_0}(a) V(a) d_1 a$  pour  $L_\delta^2$  et  $P_{\mathcal{X}_0}^t = \int \overline{\mathcal{X}_0}(a) V(a)^t d_1 a$  pour l'espace dual  $L_{-\delta}^2$ .

Dans (9), nous utilisons la formule

$$(10) \quad (V(g)^t \eta)(x) = \eta(gx)$$

qui découle de la définition de la transposée,  $\langle V(g)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, V(g)^t \eta \rangle$  en utilisant

$$\int \xi(g^{-1}x) \eta(x) d^*x = \int \xi(y) \eta(gy) d^*y$$

Dans ces formules, on utilise seulement le caractère  $\mathcal{X}_0$  comme un caractère du sous-groupe compact  $C_{k,1}$  de  $C_k$ . Maintenant, choisissons, non canoniquement, une extension  $\tilde{\mathcal{X}}_0$  de  $\mathcal{X}_0$  comme caractère de  $C_k$

$$(11) \quad \tilde{\mathcal{X}}_0(g) = \mathcal{X}_0(g) \quad \forall g \in C_{k,1}.$$

Ce choix n'est pas unique mais deux telles extensions diffèrent par un caractère qui est principal, i.e. de la forme :  $g \rightarrow |g|^{is_0}$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}$ .

Fixons une factorisation  $C_k = C_{k,1} \times \mathbb{R}_+^*$ , et définissons  $\tilde{\mathcal{X}}_0$  comme étant égal à 1 sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Nous écrivons alors n'importe quel élément de  $L_{-\delta, \mathcal{X}_0}^2(C_k)$  sous la forme

$$(12) \quad g \in C_k \rightarrow \eta(g) = \tilde{\mathcal{X}}_0(g) \psi(|g|)$$

où

$$(13) \quad \int |\psi(|g|)|^2 (1 + (\log |g|)^2)^{-\delta/2} d^*g < \infty$$

Ce vecteur est dans l'orthogonal de  $\text{Im } E$  ssi

$$(14) \quad \int E(f)(x) \tilde{\mathcal{X}}_0(x) \psi(|x|) d^*x = 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0.$$

Nous procédons d'abord de manière formelle et écrivons  $\psi(|x|) = \int \hat{\psi}(t) |x|^{it} dt$  de manière à ce que le côté gauche de (14) devienne

$$(15) \quad \int \int E(f)(x) \tilde{\mathcal{X}}_0(x) |x|^{it} \hat{\psi}(t) d^*x dt = \int \Delta_{1/2+it}(f) \hat{\psi}(t) dt$$

(en utilisant les notations des lemmes 1 et 3).

Justifions cette manipulation formelle ; puisque nous travaillons avec l'orthogonal de l'espace invariant, nous pouvons assumer que

$$(16) \quad V^t(h) \eta = \eta,$$

pour un  $h$  tel que  $\hat{h}$  est à support compact. Nous pouvons effectivement utiliser le lemme 5 pour ne considérer que les vecteurs qui appartiennent à l'image de

$$V^t(h) = \int h(g) V(g)^t d^*g, \quad \hat{h} \text{ à support compact.}$$

Alors, en utilisant (16), la transformée de Fourier de la distribution tempérée  $\psi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est à support compact dans  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $E(f)(x)$  est à décroissance rapide, l'égalité entre (14) et (15) découle de la définition de la transformée de Fourier de la distribution tempérée  $\psi$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Décrivons maintenant les fonctions test qui conviennent  $f \in \mathcal{S}(A)_0$  de façon à tester la distribution,

$$(17) \quad \int \Delta_{\frac{1}{2}+it} \widehat{\psi}(t) dt$$

Nous traitons le cas en caractéristique 0, le cas général est similaire. Pour les places finies, nous prenons,

$$(18) \quad f_0 = \bigotimes_{v \notin P} 1_{R_v} \otimes f_{\mathcal{X}_0}$$

où  $f_{\mathcal{X}_0}$  est le produit tensoriel sur les places ramifiées des fonctions nulles en dehors de  $R_v^*$  et en  $\overline{\mathcal{X}}_{0,v}$  sur  $R_v^*$ . Il découle de la définition de  $\Delta'_s$  que,

$$(19) \quad \langle \Delta'_s, f_0 \otimes f \rangle = \int f(x) \mathcal{X}_{0,\infty}(x) |x|^s d^*x$$

pour tout  $f \in \mathcal{S}(A_\infty)$ .

De plus, si l'ensemble  $P$  des places ramifiées finies n'est pas vide, on a,

$$(20) \quad f_0(0) = 0, \quad \int_{A_f} f_0(x) dx = 0$$

de telle sorte que  $f_0 \otimes f \in \mathcal{S}(A)_0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(A_\infty)$ .

Maintenant, soit  $\ell$  le nombre de places infinies de  $k$  et considérons l'application  $\rho : (\mathbb{R}_+^*)^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  donnée par

$$(21) \quad \rho(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = \lambda_1 \dots \lambda_\ell.$$

Dès que  $\ell > 1$ , cette application est non propre. Étant donnée une fonction lisse à support compact,  $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ , nous avons besoin de trouver  $a \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^*)^\ell)$  telle que l'image directe de la mesure  $a(x) d^*x$  est  $b(y) d^*y$  où  $d^*x = \prod d^*x_i$  est le produit des mesures de Haar multiplicatives.

On traite de manière équivalente un espace vectoriel de dimension finie  $E$  et une forme linéaire  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ .  $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  est donné et on doit le relever. On peut écrire  $E = \mathbb{R} \times E_1$  et le relèvement peut être pris comme  $a = b \otimes b_1$  où  $b_1 \in C_c^\infty(E_1)$ ,  $\int b_1 dx = 1$ .

Ainsi, nous pouvons dans (19) prendre une fonction  $f$  de la forme,

$$(22) \quad f(x) = g(x) \overline{\mathcal{X}}_{0,\infty}(x)$$

où la fonction  $g \in C_c^\infty(A_\infty)$  dépend seulement de  $(|x|_v)$ ,  $v \in S_\infty$  et est lisse à support compact, disjointe de l'ensemble fermé

$$\left\{ x \in \prod_{v \in S_\infty} k_v; \exists v, x_v = 0 \right\}.$$

Ainsi, à toute fonction  $b \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ , nous pouvons assigner une fonction test  $f = f_b$  telle que pour tout  $s$  ( $\text{Re } s > 0$ )

$$(23) \quad \langle \Delta'_s, f_0 \otimes f_b \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^*} b(x) |x|^s d^*x.$$

Par le lemme 3, on obtient,

$$\begin{aligned} \left\langle \int \Delta_{\frac{1}{2}+it} \widehat{\psi}(t) dt, f_0 \otimes f_b \right\rangle &= \left\langle \int L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it) \Delta'_{\frac{1}{2}+it} \widehat{\psi}(t) dt, f_0 \otimes f_b \right\rangle \\ &= \int \int L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it) \widehat{\psi}(t) b(x) |x|^{\frac{1}{2}+it} d^*x dt. \end{aligned}$$

Ainsi, de (14) et (15), on conclut, en utilisant des fonctions test arbitraires  $b$  que la transformée de Fourier de la distribution  $L(\mathcal{X}_0, 1/2 + it) \widehat{\psi}(t)$  s'évanouit vraiment,

$$(24) \quad L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it) \widehat{\psi}(t) = 0$$

Pour justifier l'égalité ci-dessus, nous avons besoin de contrôler la croissance de la fonction  $L$  en la variable  $t$ . On a,

$$(25) \quad |L(\frac{1}{2} + it)| = O(|t|^N).$$

En particulier, puisque  $L(\frac{1}{2} + it)$  est une fonction analytique de  $t$ , nous voyons que c'est un multiplicateur de l'algèbre  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  des fonctions de Schwartz en la variable  $t$ . Ainsi, le produit  $L(\frac{1}{2} + it) \widehat{\psi}(t)$  est encore une distribution tempérée, ainsi que sa transformée de Fourier. Dire que cette dernière s'évanouit quand on la teste sur des fonctions arbitraires qui sont lisses à support compact implique qu'elle s'évanouisse.

L'argument ci-dessus utilise l'hypothèse  $\mathcal{X}_0/C_{k,1} \neq 1$ .

Dans le cas  $\mathcal{X}_0/C_{k,1} = 1$ , nous avons besoin d'imposer à la fonction test  $f$  utilisée dans (22) la condition  $\int f dx = 0$  qui signifie que

$$(26) \quad \int b(x) |x| d^*x = 0.$$

Mais l'espace des fonctions  $b(x) |x|^{1/2} \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$  telles que (26) est vérifiée est toujours dense dans l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$ .

Pour comprendre l'équation (24), considérons une équation pour les distributions  $\alpha(t)$  de la forme

$$(27) \quad \varphi(t) \alpha(t) = 0$$

où l'on travaille d'abord avec des distributions  $\alpha$  sur  $S^1$  et où l'on assume que  $\varphi \in C^\infty(S^1)$  a un nombre fini de zéros  $x_i \in Z(\varphi)$ , d'ordre fini  $n_i$ . Soit  $J$  l'idéal de  $C^\infty(S^1)$  engendré par  $\varphi$ . On a  $\psi \in J \Leftrightarrow$  l'ordre de  $\psi$  en  $x_i$  est  $\geq n_i$ .

Ainsi, les distributions  $\delta_{x_i}, \delta'_{x_i}, \dots, \delta_{x_i}^{(n_i-1)}$  forment une base de l'espace des solutions de (27).

Maintenant,  $\widehat{\psi}(t)$  est, pour  $\eta$  orthogonal à  $\text{Im}(E)$  et satisfaisant (16), une distribution à support compact, et  $L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it) \widehat{\psi}(t) = 0$ . Ainsi, par l'argument ci-dessus, nous obtenons que  $\widehat{\psi}$  est une combinaison linéaire finie des distributions,

$$(28) \quad \delta_t^{(k)}, L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it\right) = 0, \quad k < \text{ordre du zéro}, \quad k < \frac{\delta - 1}{2}.$$

La condition  $k < \text{ordre du zéro}$  est nécessaire et suffisante pour obtenir l'évanouissement sur l'image de  $E$ . La condition  $k < \frac{\delta-1}{2}$  est nécessaire et suffisante pour assurer que  $\psi$  appartient à  $L^2_{-\delta}$ , i.e. que

$$(29) \quad \int (\log |x|)^{2k} (1 + |\log |x||^2)^{-\delta/2} d^*x < \infty$$

qui est  $2k + \delta < -1$ , i.e.  $k < \frac{\delta-1}{2}$ .

Inversement, soit  $s$  un zéro de  $L(\mathcal{X}_0, s)$  et  $k > 0$  son ordre. Par le lemme 3 et par le fait que  $\Delta'_s$  soit finie et analytique (pour  $\text{Re } s > 0$ ), on obtient

$$(30) \quad \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a \Delta_s(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0, \quad a = 0, 1, \dots, k-1.$$

On peut alors différencier l'égalité du lemme 3 et obtenir,

$$(31) \quad \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a \Delta_s(f) = \int_{C_k} E(f)(x) \mathcal{X}_0(x) |x|^{s-1/2} (\log |x|)^a d^*x.$$

Ainsi,  $\eta$  appartient à l'orthogonal de  $\text{Im}(E)$  et satisfait (16) ssi c'est une combinaison linéaire de fonctions de la forme,

$$(32) \quad \eta_{t,a}(x) = \mathcal{X}_0(x) |x|^{it} (\log |x|)^a,$$

où,

$$(33) \quad L\left(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + it\right) = 0, \quad a < \text{ordre du zéro}, \quad a < \frac{\delta-1}{2}.$$

La restriction au sous-groupe  $\mathbb{R}_+^*$  de  $C_k$  de la transposée de  $W$  est ainsi donnée dans la base ci-dessus par :

$$(34) \quad W(\lambda)^t \eta_{t,a} = \sum_{b=0}^a C_a^b \lambda^{it} (\log \lambda)^b \eta_{t,a-b}.$$

L'opérateur de multiplication par une fonction à dérivées bornées est un opérateur borné dans n'importe quel espace de Sobolev ; ainsi, on peut vérifier directement, en utilisant la densité dans l'orthogonal de  $\text{Im}(E)$  des vecteurs satisfaisant (16), que si  $L(\mathcal{X}_0, \frac{1}{2} + is) \neq 0$  alors  $is$  n'appartient pas au spectre de  $D_{\mathcal{X}_0}^t$ .

Cela détermine le spectre de l'opérateur  $D_{\mathcal{X}_0}^t$  et par conséquent celui de son transposé  $D_{\mathcal{X}_0}$  comme indiqué dans le Théorème 1 et cela termine la preuve du théorème 1.

Prouvons maintenant le corollaire. Fixons  $h_0 \in \mathcal{S}(C_k)$  de telle façon que  $\widehat{h}_0$  a son support compact contenu dans  $\{\mathcal{X}_0\} \times \mathbb{R}$  et  $\widehat{h}_0(\mathcal{X}_0, s) = 1$  pour  $s$  petit.

Prenons alors  $h_s$  donné par  $h_s(g) = h_0(g) |g|^{is}$ . La transformée de Fourier  $\widehat{h}_s$  est alors le translaté de  $\widehat{h}_0$ , et on peut choisir  $h_0$  de telle façon que,

$$(35) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{h}_n(\mathcal{X}_0, u) = 1, \quad u \in \mathbb{R}$$

Quand  $|s| \rightarrow \infty$ , la dimension de l'image de  $W^t(h_s)$  est de l'ordre de  $\log |s|$  comme l'est le nombre de zéros de la fonction  $L$  dans le translaté d'un intervalle donné (cf. [W3]).

Choisissons  $h \in \mathcal{S}(C_k)$ . On a  $W^t(h) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} W^t(h * h_n)$ .

Il suit de là, de la croissance polynomiale de la norme  $W^t(g)$ , que l'opérateur

$$(36) \quad \int h(g) W(g)^t d^*g$$

est de classe trace pour tout  $h \in \mathcal{S}(C_k)$ .

De plus, en utilisant la forme triangulaire donnée par (34), nous obtenons sa trace, et par conséquent la trace de son transposé  $W(h)$  comme,

$$(37) \quad \text{Trace } W(h) = \sum_{\substack{L(\mathcal{X}, \frac{1}{2} + \rho) = 0 \\ \rho \in i\mathbb{R}}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho)$$

où la multiplicité est comptée comme dans le Théorème 1 et où la transformée de Fourier  $\widehat{h}$  de  $h$  est définie par,

$$(38) \quad \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) = \int_{C_k} h(u) \widetilde{\mathcal{X}}(u) |u|^\rho d^*u.$$

## Appendice II. Formules explicites.

Rappelons d'abord les formules explicites de Weil ([W3]). Soit  $k$  un corps global. On identifie le quotient  $C_k/C_{k,1}$  avec l'image du module,

$$(1) \quad N = \{|g|; g \in C_k\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

On munit  $N$  de sa mesure de Haar normalisée  $d^*x$ . Étant donnée une fonction  $F$  sur  $N$  telle que, pour  $b > \frac{1}{2}$ ,

$$(2) \quad |F(\nu)| = o(\nu^b) \quad \nu \rightarrow 0, \quad |F(\nu)| = o(\nu^{-b}), \quad \nu \rightarrow \infty,$$

on définit,

$$(3) \quad \Phi(s) = \int_N F(\nu) \nu^{1/2-s} d^*\nu.$$

Étant donné un Grössencharakter  $\mathcal{X}$ , i.e. un caractère de  $C_k$ , et quel que soit  $\rho$  dans la bande  $0 < \text{Re}(\rho) < 1$ , appelons  $N(\mathcal{X}, \rho)$  l'ordre de  $L(\mathcal{X}, s)$  en  $s = \rho$ . Soit,

$$(4) \quad S(\mathcal{X}, F) = \sum_{\rho} N(\mathcal{X}, \rho) \Phi(\rho)$$

où la somme est prise sur les  $\rho$  de la bande ouverte ci-dessus. On définit alors une distribution  $\Delta$  sur  $C_k$  par,

$$(5) \quad \Delta = \log |d^{-1}| \delta_1 + D - \sum_v D_v,$$

où  $\delta_1$  est la masse de Dirac en  $1 \in C_k$ , où  $d$  est l'idèle différentielle de  $k$  de telle façon que  $|d|^{-1}$  est au signe près le discriminant de  $k$  quand  $\text{carac}(k) = 0$  et vaut  $q^{2g-2}$  quand  $k$  est un corps de fonctions sur une courbe de genre  $g$  avec ses coefficients dans le corps fini  $\mathbb{F}_q$ .

La distribution  $D$  est donnée par,

$$(6) \quad D(f) = \int_{C_k} f(w) (|w|^{1/2} + |w|^{-1/2}) d^*w$$

où la mesure de Haar  $d^*w$  est normalisée (cf. IIb). Les distributions  $D_v$  sont paramétrées par les places  $v$  de  $k$  et s'obtiennent comme suit. Pour chaque  $v$ , on considère l'homomorphisme propre naturel,

$$(7) \quad k_v^* \rightarrow C_k, \quad x \rightarrow \text{classe de } (1, \dots, x, 1 \dots)$$

du groupe multiplicatif du corps local  $k_v$  dans le groupe des classes d'idèles  $C_k$ .

On a alors,

$$(8) \quad D_v(f) = Pfw \int_{k_v^*} \frac{f(u)}{|1-u|} |u|^{1/2} d^*u$$

où la mesure de Haar  $d^*u$  est normalisée (cf. IIb), et où la valeur principale de Weil  $Pfw$  de l'intégrale s'obtient comme suit, pour un corps local  $K = k_v$ ,

$$(9) \quad Pfw \int_{k_v^*} 1_{R_v^*} \frac{1}{|1-u|} d^*u = 0,$$

si le corps local  $k_v$  est non archimédien, et sinon :

$$(10) \quad Pfw \int_{k_v^*} \varphi(u) d^*u = PF_0 \int_{\mathbb{R}_+^*} \psi(\nu) d^*\nu,$$

où  $\psi(\nu) = \int_{|u|=\nu} \varphi(u) d_\nu u$  est obtenu en intégrant  $\varphi$  sur les fibres, tandis que

$$(11) \quad PF_0 \int \psi(\nu) d^*\nu = 2 \log 2\pi c + \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int (1 - f_0^{2t}) \psi(\nu) d^*\nu - 2c \log t \right),$$

où l'on suppose que  $\psi - c f_1^{-1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et

$$f_0(\nu) = \inf(\nu^{1/2}, \nu^{-1/2}) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_1 = f_0^{-1} - f_0.$$

La formule explicite de Weil est alors,

**Théorème 1.** ([W]) *Avec les notations ci-dessus, on a  $S(\mathcal{X}, F) = \Delta(F(|w|)) \mathcal{X}(w)$ .*

Nous allons maintenant travailler sur cette formule et en particulier, comparer les valeurs principales  $Pfw$  avec celles du théorème V.3.

Effectuons le changement de variables suivant,

$$(12) \quad |g|^{-1/2} h(g^{-1}) = F(|g|) \mathcal{X}_0(g),$$

et réécrivons l'égalité ci-dessus en fonction de  $h$ .

Par (3), on a,

$$(13) \quad \Phi\left(\frac{1}{2} + is\right) = \int_{C_k} F(|g|) |g|^{-is} d^*g,$$

Ainsi, en fonction de  $h$ ,

$$(14) \quad \int h(g) \mathcal{X}_1(g) |g|^{1/2+is} d^*g = \int F(|g^{-1}|) \mathcal{X}_0(g^{-1}) \mathcal{X}_1(g) |g|^{is} d^*g,$$

qui est égal à 0 si  $\mathcal{X}_1/C_{k,1} \neq \mathcal{X}_0/C_{k,1}$  et pour  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0$ ,

$$(15) \quad \int h(g) \mathcal{X}_0(g) |g|^{1/2+is} d^*g = \Phi\left(\frac{1}{2} + is\right).$$

Ainsi, avec nos notations, nous voyons que,

$$(16) \quad \text{Supp } \widehat{h} \subset \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R}, \quad \widehat{h}(\mathcal{X}_0, \rho) = \Phi(\rho).$$

Et alors, nous pouvons écrire,

$$(17) \quad S(\mathcal{X}_0, F) = \sum_{\substack{L(\mathcal{X}, \rho)=0, \\ 0 < \text{Re } \rho < 1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho)$$

en utilisant une décomposition fixe  $C_k = C_{k,1} \times N$ .

Evaluons maintenant chaque terme dans (5).

Le premier devient  $(\log |d^{-1}|) h(1)$ . On a, en utilisant (6) et (12),

$$\begin{aligned} \langle D, F(|g|) \mathcal{X}_0(g) \rangle &= \int_{C_k} |g|^{-1/2} h(g^{-1}) (|g|^{1/2} + |g|^{-1/2}) d^*g \\ &= \int_{C_k} h(u) (1 + |u|) d^*u = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1), \end{aligned}$$

où, pour le caractère trivial de  $C_{k,1}$  on utilise la notation

$$(18) \quad \widehat{h}(z) = \widehat{h}(1, z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, les deux premiers termes de (5) donnent

$$(19) \quad (\log |d^{-1}|) h(1) + \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1).$$

Soit  $v$  une place de  $k$ , on a par (8) et (12),

$$\langle D_v, F(|g|) \mathcal{X}_0(g) \rangle = Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

Nous pouvons alors écrire la contribution des derniers termes de (5) comme,

$$(20) \quad - \sum_v Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

Ainsi, l'égalité de Weil peut être réécrite en,

$$(21) \quad \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\mathcal{X}, \rho)=0, \\ 0 < \operatorname{Re} \rho < 1}} \sum_{\mathcal{X} \in \widehat{C}_{k,1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) = (\log |d|) h(1) + \sum_v Pfw \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

qui est vérifiée maintenant pour des combinaisons linéaires de fonctions  $h$  de la forme (12).

Ceci est suffisant pour conclure quand  $h(1) = 0$ .

Comparons maintenant les valeurs principales de Weil, avec celles dictées par le théorème V.3. Nous travaillons d'abord avec un corps local  $K$  et comparons (9), (10) avec notre prescription. Supposons d'abord  $K$  non archimédien. Soit  $\alpha$  un caractère de  $K$  tel que,

$$(22) \quad \alpha/R = 1, \quad \alpha/\pi^{-1}R \neq 1.$$

Alors, pour la transformée de Fourier donnée par,

$$(23) \quad (Ff)(x) = \int f(y) \alpha(y) dy,$$

avec  $dy$  la mesure auto-duale de Haar, on a

$$(24) \quad F(1_R) = 1_R.$$

**Lemme 2.** Avec le choix ci-dessus de  $\alpha$ , on a

$$\int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u = Pfw \int \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

avec les notations du théorème 3.

*Preuve.* Par construction, les deux côtés peuvent seulement différer par un multiple de  $h(1)$ . Rappelons du théorème 3 que le côté gauche est donné par

$$(25) \quad \left\langle L, \frac{h(u^{-1})}{|u|} \right\rangle,$$

où  $L$  est l'unique extension de  $\rho^{-1} \frac{du}{|1-u|}$  dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1,  $\widehat{L}(1) = 0$ . Ainsi, de (9), nous devons seulement vérifier que (25) s'évanouit pour  $h = 1_{R^*}$ , i.e. que

$$(26) \quad \langle L, 1_{R^*} \rangle = 0.$$

De façon équivalente, si l'on pose  $Y = \{y \in K; |y-1| = 1\}$ , on a juste à montrer, en utilisant Parseval, que,

$$(27) \quad \langle \log |u|, \widehat{1}_Y \rangle = 0.$$

On a  $\widehat{1}_Y(x) = \int_Y \alpha(xy) dy = \alpha(x) \widehat{1}_{R^*}(x)$ , et  $1_{R^*} = 1_R - 1_P$ ,  $\widehat{1}_{R^*} = 1_R - |\pi| 1_{\pi^{-1}R}$ , ainsi, avec  $q^{-1} = |\pi|$ ,

$$(28) \quad \widehat{1}_Y(x) = \alpha(x) \left( 1_R - \frac{1}{q} 1_{\pi^{-1}R} \right) (x).$$

Nous devons maintenant calculer  $\int \log |x| \widehat{1}_Y(x) dx = A + B$ ,

$$(29) \quad A = -\frac{1}{q} \int_{\pi^{-1}R^*} \alpha(x) (\log q) dx, \quad B = \left( 1 - \frac{1}{q} \right) \int_R \log |x| dx.$$

Montrons que  $A + B = 0$ . On a  $\int_R dx = 1$ , et

$$\begin{aligned} A &= - \int_{R^*} \alpha(\pi^{-1}y) (\log q) dy = -\log q \left( \int_R \alpha(\pi^{-1}y) dy - \int_P dy \right) \\ &= \frac{1}{q} \log q, \text{ puisque } \int_R \alpha(\pi^{-1}y) dy = 0 \text{ lorsque } \alpha/\pi^{-1}R \neq 1. \end{aligned}$$

Pour calculer  $B$ , il convient de noter que  $\int_{\pi^n R^*} dy = q^{-n} \left( 1 - \frac{1}{q} \right)$  de telle manière que

$$B = \left( 1 - \frac{1}{q} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-n \log q) q^{-n} = -q^{-1} \log q.$$

et  $A + B = 0$ . ■

Traisons maintenant le cas des corps archimédiens. On prend d'abord  $K = \mathbb{R}$ , et on normalise la transformée de Fourier comme,

$$(30) \quad (Ff)(x) = \int f(y) e^{-2\pi ixy} dy$$

de telle façon que la mesure de Haar  $dx$  soit auto-duale.

Avec les notations de (10), on a,

$$(31) \quad Pfw \int_{\mathbb{R}^*} f_0^3(|u|) \frac{|u|^{1/2}}{|1-u|} d^*u = \log \pi + \gamma$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler,  $\gamma = -\Gamma'(1)$ . Par conséquent, l'intégration sur les fibres donne  $f_0^4 \times (1 - f_0^4)^{-1}$ , et on obtient,

$$\begin{aligned} PF_0 \int_{\mathbb{R}_+^*} f_0^4 \times (1 - f_0^4)^{-1} d^*u &= \left( \log 2\pi + \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} (1 - f_0^{2t}) f_0^4 (1 - f_0^4)^{-1} d^*u - \log t \right) \right) \\ &= \log 2\pi + \gamma - \log 2. \end{aligned}$$

Maintenant, soit  $\varphi(u) = -\log |u|$ , c'est une distribution tempérée sur  $\mathbb{R}$  et on a,

$$(32) \quad \langle \varphi, e^{-\pi u^2} \rangle = \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2,$$

puisque'on obtient que  $\frac{\partial}{\partial s} \int |u|^{-s} e^{-\pi u^2} du = \frac{\partial}{\partial s} \left( \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \right)$  évalué en  $s = 0$ , en utilisant que  $\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\gamma - 2 \log 2$ .

Alors, par la formule de Parseval, on a,

$$(33) \quad \langle \widehat{\varphi}, e^{-\pi x^2} \rangle = \frac{1}{2} \log \pi + \frac{\gamma}{2} + \log 2,$$

qui donne, pour toute fonction test  $f$ ,

$$(34) \quad \langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) d^*x + (\log \varepsilon) f(0) \right) + \lambda f(0)$$

où  $\lambda = \log 2\pi + \gamma$ . Dans le but d'obtenir (34), on utilise l'égalité,

$$(35) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) d^*x + (\log \varepsilon) f(0) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int f(x) |x|^\varepsilon d^*x - \frac{1}{\varepsilon} f(0) \right),$$

qui est vérifiée puisque les deux côtés s'évanouissent pour  $f(x) = 1$  et pour  $|x| \leq 1$ ,  $f(x) = 0$  sinon.

Ainsi, de (34), on obtient,

$$(36) \quad \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u = \lambda f(1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|1-u| \geq \varepsilon} \frac{f(u)}{|1-u|} d^*u + (\log \varepsilon) f(1) \right).$$

En prenant  $f(u) = |u|^{1/2} f_0^3(|u|)$ , le côté droit de (36) donne  $\lambda - \log 2 = \log \pi + \gamma$ , et ainsi, nous pouvons conclure en utilisant (31) que, pour toute fonction test  $f$ ,

$$(37) \quad \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u = Pfw \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u.$$

Considérons finalement le cas  $K = \mathbb{C}$ . Nous choisissons le caractère de base  $\alpha$  comme

$$(38) \quad \alpha(z) = \exp 2\pi i(z + \bar{z}),$$

la mesure de Haar auto-duale est  $dz d\bar{z} = |dz \wedge d\bar{z}|$ , et la fonction  $f(z) = \exp -2\pi|z|^2$  est auto-duale.

La mesure de Haar multiplicative normalisée est :

$$(39) \quad d^*z = \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2\pi|z|^2}.$$

Calculons la transformée de Fourier de la distribution

$$(40) \quad \varphi(z) = -\log |z|_{\mathbb{C}} = -2 \log |z|.$$

On a

$$(41) \quad \langle \varphi, \exp -2\pi|z|^2 \rangle = \log 2\pi + \gamma,$$

comme on le voit en utilisant  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \int e^{-2\pi|z|^2} |z|^{-2\varepsilon} |dz \wedge d\bar{z}| \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} ((2\pi)^\varepsilon \Gamma(1 - \varepsilon))$ .

Ainsi,  $\langle \widehat{\varphi}, \exp -2\pi|u|^2 \rangle = \log 2\pi + \gamma$  et l'on obtient,

$$(42) \quad \langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|u|_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon} f(u) d^*u + \log \varepsilon f(0) \right) + \lambda' f(0)$$

où  $\lambda' = 2(\log 2\pi + \gamma)$ .

Pour voir cela, on utilise l'analogie de (35) pour  $K = \mathbb{C}$ , pour calculer le côté droit de (42) pour  $f(z) = \exp -2\pi|z|^2$ .

Ainsi, pour toute fonction test  $f$ , on a,

$$(43) \quad \int_{\mathbb{C}}' f(u) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = \lambda' f(1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|1-u|_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon} \frac{f(u)}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u + (\log \varepsilon) f(1) \right).$$

Comparons cela à  $Pfw$ . Quand on intègre sur les fibres de  $\mathbb{C}^* \xrightarrow{|\cdot|_{\mathbb{C}}} \mathbb{R}_+^*$  la fonction  $|1-z|_{\mathbb{C}}^{-1}$ , on obtient,

$$(44) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{i\theta}z|^2} d\theta = \frac{1}{1-|z|^2} \text{ si } |z| < 1, \text{ et } \frac{1}{|z|^2-1} \text{ si } |z| > 1.$$

Ainsi, pour toute fonction test  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a, par (10),

$$(45) \quad Pfw \int f(|u|_{\mathbb{C}}) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = PF_0 \int f(\nu) \frac{1}{|1-\nu|} d^*\nu$$

avec les notations de (11). Avec  $f_2(\nu) = \nu^{\frac{1}{2}} f_0(\nu)$ , on obtient alors, en utilisant (11),

$$(46) \quad Pfw \int f_2(|u|_{\mathbb{C}}) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = PF_0 \int f_0 f_1^{-1} d^*\nu = 2(\log 2\pi + \gamma).$$

Nous allons maintenant montrer que,

$$(47) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|1-u|_{\mathbb{C}} \geq \varepsilon} \frac{f_2(|u|_{\mathbb{C}})}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u + \log \varepsilon \right) = 0,$$

d'où il découlera que, en utilisant (43),

$$(48) \quad \int_{\mathbb{C}}' f(u) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u = Pfw \int f(u) \frac{1}{|1-u|_{\mathbb{C}}} d^*u.$$

Pour prouver (47), il suffit d'évaluer l'intégrale,

$$(49) \quad \int_{|z| \leq 1, |1-z| \geq \varepsilon} ((1-z)(1-\bar{z}))^{-1} |dz \wedge d\bar{z}| = j(\varepsilon)$$

et de montrer que  $j(\varepsilon) = \alpha \log \varepsilon + o(1)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Un énoncé similaire est alors vérifié

$$\int_{|z| \leq 1, |1-z^{-1}| \geq \varepsilon} ((1-z)(1-\bar{z}))^{-1} |dz \wedge d\bar{z}|.$$

On a  $j(\varepsilon) = \int_D |dZ \wedge d\bar{Z}|$ , où  $Z = \log 1-z$  et le domaine  $D$  est contenu dans le rectangle,

$$(50) \quad \{Z = (x+iy); \log \varepsilon \leq x \leq \log 2, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\} = R_\varepsilon$$

et borné par la courbe  $x = \log 2 \cos y$  qui vient de l'équation du cercle  $|z| = 1$  en coordonnées polaires centrées en  $z = 1$ . On obtient alors,

$$(51) \quad j(\varepsilon) = 4 \int_{\log \varepsilon}^{\log 2} \text{Arc cos}(e^x/2) dx,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a  $j(\varepsilon) \sim 2\pi \log 1/\varepsilon$ , qui est l'aire du rectangle suivant (selon la mesure  $|dz \wedge d\bar{z}|$ ),

$$(52) \quad \{Z = (x + iy); \log \varepsilon \leq x \leq 0, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\}$$

on a  $|R_\varepsilon| - 2\pi \log 2 = 2\pi \log 1/\varepsilon$ . Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'aire de  $R_\varepsilon \setminus D$  converge vers

$$(53) \quad 4 \int_{-\infty}^{\log 2} \text{Arc sin}(e^x/2) dx = -4 \int_0^{\pi/2} \log \sin u du = 2\pi \log 2,$$

de telle façon que  $j(\varepsilon) = 2\pi \log 1/\varepsilon + o(1)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ainsi, nous pouvons affirmer qu'avec le choix ci-dessus des caractères de base pour les corps locaux, on a, pour toute fonction test  $f$ ,

$$(54) \quad \int_K f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u = Pfw \int f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u.$$

**Lemme 3.** Soit  $K$  un corps local,  $\alpha_0$  un caractère normalisé comme ci-dessus et  $\alpha$ ,  $\alpha(x) = \alpha_0(\lambda x)$  un caractère arbitraire de  $K$ . Soit  $f'$  définie comme dans le théorème V.3 relative à  $\alpha$ , alors, pour toute fonction test  $f$ ,

$$\int_K f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u = \log |\lambda| f(1) + Pfw \int f(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u.$$

*Preuve.* La nouvelle mesure de Haar auto-duale est

$$(55) \quad da = |\lambda|^{1/2} d_0 a$$

avec  $d_0 a$  auto-duale pour  $\alpha_0$ .

De façon similaire, la nouvelle transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{f}(x) = \int \alpha(xy) f(y) dy = \int \alpha_0(\lambda xy) f(y) |\lambda|^{1/2} d_0 y,$$

ainsi

$$(56) \quad \widehat{f}(x) = |\lambda|^{1/2} \widehat{f}^0(\lambda x).$$

Soit alors  $\varphi(u) = -\log |u|$ . Sa transformée de Fourier comme distribution est donnée par,

$$(57) \quad \langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \int (-\log |u|) \widehat{f}(u) du.$$

On a

$$\begin{aligned} \int (-\log |u|) \widehat{f}(u) du &= \int (-\log |u|) \widehat{f}^0(\lambda u) |\lambda| d_0 u \\ &= \int (-\log |v|) \widehat{f}^0(v) d_0 v + \int \log |\lambda| \widehat{f}^0(v) d_0 v \\ &= \int (-\log |v|) \widehat{f}^0(v) d_0 v + \log |\lambda| f(0). \end{aligned}$$

Ainsi, le lemme découle de (54). ■

Passons maintenant au cas global, rappelons que si  $\alpha$ ,  $\alpha \neq 1$ , est un caractère de  $A$  tel que  $\alpha/k = 1$ , il existe une idèle différentielle  $d = (d_v)$  telle que (cf. [W1]),

$$(58) \quad \alpha_v(x) = \alpha_{0,v}(d_v x)$$

où  $\alpha = \prod \alpha_v$  et où chaque caractère  $\alpha_{0,v}$  est normalisé comme ci-dessus.

Nous pouvons alors réécrire la formule de Weil (théorème 1) comme,

**Théorème 6.** *Soit  $k$  un corps global,  $\alpha$  un caractère non-trivial de  $A/k$  et  $\alpha = \prod \alpha_v$  ses facteurs locaux.*

Soit  $h \in \mathcal{S}(C_k)$  à support compact, alors

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{L(\mathcal{X}, \rho) = 0 \\ 0 < \operatorname{Re} \rho < 1}} \widehat{h}(\mathcal{X}, \rho) = \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

où la normalisation de  $\int'$  est donnée par  $\alpha_v$  comme dans le théorème V.3, et  $\widehat{h}(\mathcal{X}, z) = \int h(u) \mathcal{X}(u) |u|^z d^*u$ .

*Preuve.* Cela découle de la formule (21), lemme 3 et de l'égalité  $\log |d| = \sum_v \log |d_v|$ . ■

### Normalisation de la mesure de Haar sur le groupe modulé

Soit  $G$  un groupe abélien localement compact avec un morphisme propre,

$$(1) \quad g \rightarrow |g|, \quad G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

dont l'image est cocompacte dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Il existe une unique mesure de Haar  $d^*g$  sur  $G$  telle que

$$(2) \quad \int_{|g| \in [1, \Lambda]} d^*g \sim \log \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow +\infty.$$

Soit  $G_0 = \operatorname{Ker} \operatorname{mod} = \{g \in G; |g| = 1\}$ . C'est un groupe compact par hypothèse, et l'on peut identifier  $G/G_0$  avec l'image  $N$  du module. Déterminons la mesure  $d^*n$  sur  $N \subset \mathbb{R}_+^*$  telle que (2) soit vérifiée pour

$$(3) \quad \int f d^*g = \int \left( \int f(n g_0) d g_0 \right) d^*n$$

où la mesure de Haar  $d g_0$  est normalisée par

$$(4) \quad \int_{G_0} d g_0 = 1.$$

Soit  $\rho_\Lambda$  la fonction sur  $G$  définie par

$$(5) \quad \rho_\Lambda(g) = 0 \quad \text{si } |g| \notin [1, \Lambda], \quad \rho_\Lambda(g) = \frac{1}{\log \Lambda} \quad \text{si } g \in [1, \Lambda].$$

La normalisation (2) signifie que  $\int \rho_\Lambda d^*g \rightarrow 1$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Posons d'abord  $N = \mathbb{R}_+^*$  ; alors l'unique mesure satisfaisant (2) est

$$(6) \quad d^*\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Posons alors  $N = \mu^{\mathbb{Z}}$  pour un certain  $\mu > 1$ . Considérons la mesure

$$(7) \quad \int f d^*g = \alpha \sum f(\mu^n).$$

On prend  $f = \rho_\Lambda$ , alors, le côté droit est  $\alpha \frac{N}{\log \Lambda}$  où  $N$  est le nombre de  $\mu^n \in [1, \Lambda]$ , i.e.  $\sim \frac{\log \Lambda}{\log \mu}$ . Cela montre que (2) est vérifiée ssi

$$(8) \quad \alpha = \log \mu.$$

Montrons plus généralement que si  $H \subset G$  est un sous-groupe compact de  $G$  et si à la fois  $d^*g$  et  $d^*h$  sont normalisées par (2), on a

$$(9) \quad \int \left( \int f(hy) d^*h \right) d_0 y = \int f d^*g$$

où  $d_0 y$  est la mesure de Haar de l'intégrale 1 sur  $G/H$ ,

$$(10) \quad \int_{G/H} d_0 y = 1.$$

Le côté gauche de (9) définit une mesure de Haar sur  $G$  et il est juste nécessaire de montrer qu'il satisfait (2).

On a  $\|\rho_\Lambda(\cdot y) - \rho_\Lambda\|_1 \rightarrow 0$  quand  $\Lambda \rightarrow \infty$ , et

$$(11) \quad \int \rho_\Lambda(hy) d^*h \rightarrow 1 \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty$$

uniformément sur les ensembles compacts de  $y \in G$ , ainsi

$$(12) \quad \int \left( \int \rho_\Lambda(hy) d^*h \right) d_0 y \rightarrow 1 \quad \text{quand } \Lambda \rightarrow \infty.$$

### Appendice III. Formules de trace d'une distribution.

Dans cet appendice, nous rappelons pour le confort de la lectrice le traitement des distributions indépendantes des coordonnées de [GS] et donnons des détails pour les conditions de transversalité.

Étant donné un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\dim E = n$ , une densité est une application,  $\rho \in |E|$ ,

$$(1) \quad \rho : \wedge^n E \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que  $\rho(\lambda v) = |\lambda| \rho(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \wedge^n E$ .

Étant donnée une fonction linéaire  $T : E \rightarrow F$ , soit  $|T| : |F| \rightarrow |E|$  l'application linéaire correspondante, elle dépend de façon contravariante de  $T$ .

Étant donnée une variété  $M$  et  $\rho \in C_c^\infty(M, |TM|)$  sur une intégrale canonique,

$$(2) \quad \int \rho \in \mathbb{C}.$$

Étant donné un fibré vectoriel  $L$  sur  $M$ , on définit les sections généralisées sur  $M$  comme l'espace dual de  $C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|)$

$$(3) \quad C^{-\infty}(M, L) = \text{dual de } C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|)$$

où  $L^*$  est le fibré dual. On a une inclusion naturelle,

$$(4) \quad C^\infty(M, L) \subset C^{-\infty}(M, L)$$

étant donné l'appariement,

$$(5) \quad \sigma \in C^\infty(M, L), \quad s \in C_c^\infty(M, L^* \otimes |TM|) \rightarrow \int \langle s, \sigma \rangle$$

où  $\langle s, \sigma \rangle$  est vu comme une densité,  $\langle s, \sigma \rangle \in C_c^\infty(M, |TM|)$ .

On a la notion similaire de section généralisée sur les supports compacts.

Étant donnée une application lisse  $\varphi : X \rightarrow Y$ , alors si  $\varphi$  est *propre*, elle a une application (contravariante) associée :

$$(6) \quad \varphi^* : C_c^\infty(Y, L) \rightarrow C_c^\infty(X, \varphi^*(L)), \quad (\varphi^* \xi)(x) = \xi(\varphi(x))$$

où  $\varphi^*(L)$  est le pullback du fibré vectoriel  $L$ .

Ainsi, étant donnée une forme linéaire sur  $C_c^\infty(X, \varphi^*(L))$ , on a une forme linéaire (covariante) associée sur  $C_c^\infty(Y, L)$ . En particulier, avec  $L$  trivial, on voit que si on a une densité généralisée  $\rho \in C^{-\infty}(X, |T|)$ , on a un pushforward

$$(7) \quad \varphi_*(\rho) \in C^{-\infty}(Y, |T|)$$

avec  $\langle \varphi_*(\rho), \xi \rangle = \langle \rho, \varphi^* \xi \rangle \quad \forall \xi \in C_c^\infty(X)$ .

Ensuite, si  $\varphi$  est une fibration et  $\rho \in C_c^\infty(X, |T|)$  est une densité, alors, on peut intégrer  $\rho$  le long des fibres ; la densité obtenue sur  $Y$ ,  $\varphi_*(\rho)$  est donnée comme dans (7) par

$$(8) \quad \langle \varphi_*(\rho), f \rangle = \langle \rho, \varphi^* f \rangle \quad \forall f \in C^\infty(Y)$$

mais l'important est que ce n'est pas seulement une section généralisée mais également une section lisse  $\varphi_*(\rho) \in C_c^\infty(Y, |T|)$ .

Il suit de cela que si  $f \in C^{-\infty}(Y)$  est une fonction généralisée, alors on obtient une fonction généralisée  $\varphi^*(f)$  sur  $X$  par,

$$(9) \quad \langle \varphi^*(f), \rho \rangle = \langle f, \varphi_*(\rho) \rangle \quad \forall \rho \in C_c^\infty(X, |T|).$$

En général, le pullback  $\varphi^*(f)$  continue d'avoir du sens tant que la condition de transversalité tient,

$$(10) \quad d(\varphi^*(l)) \neq 0 \quad \forall l \in WF(f).$$

où  $WF(f)$  est l'ensemble des fronts d'onde de  $f$  ([GS]). Le point suivant est la construction de la section généralisée d'un fibré vectoriel  $L$  sur une variété  $X$  associée à une sous-variété  $Z \subset X$  et un symbole,

$$(11) \quad \sigma \in C^\infty(Z, L \otimes |N_Z^*|).$$

où  $N_Z$  est le fibré normal de  $Z$ . La construction est la même que celle de l'intégration habituelle sur un cycle. Étant donné  $\xi \in C_c^\infty(X, L^* \otimes |T|)$ , le produit  $\sigma \xi / Z$  est une densité sur  $Z$ , puisque c'est une section de  $|T_Z| = |T_X| \otimes |N_Z^*|$ . On peut alors l'intégrer sur  $Z$ . Quand  $Z = X$ , on a  $N_Z^* = \{0\}$  et  $|N_Z^*|$  a une section canonique, de telle manière que le courant associé à  $\sigma$  est juste donné par (5). Quand  $Z = \text{pt}$  est un point singulier  $x \in X$ , une section généralisée de  $L$  donnée par une distribution de Dirac en  $x$  nécessite non seulement un vecteur  $\xi_x \in L_x$  mais également une densité duale, i.e. un volume multi-vectoriel  $v \in |T_x^*|$ .

Maintenant, soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  avec  $Z$  une sous-variété de  $Y$  et  $\sigma$  comme dans (11).

Assumons que  $\varphi$  est transverse à  $Z$ , de telle sorte que pour tout  $x \in X$  avec  $y = \varphi(x) \in Z$ , on ait

$$(12) \quad \varphi_*(T_x) + T_{\varphi(x)}(Z) = T_y Y.$$

Soit

$$(13) \quad \tau_x = \{X \in T_x, \varphi_*(X) \in T_y(Z)\}.$$

Alors,  $\varphi_*$  est un isomorphisme canonique,

$$(14) \quad \varphi_* : T_x(X)/\tau_x \simeq T_y(Y)/T_y(Z) = N_y(Z).$$

Et  $\varphi^{-1}(Z)$  est une sous-variété de  $X$  de la même codimension que  $Z$  avec un isomorphisme naturel de fibrés normaux

$$(15) \quad N_{\varphi^{-1}(Z)} \simeq \varphi^* N_Z.$$

En particulier, si est donnée une  $\delta$ -section généralisée d'un fibré  $L$  à support  $Z$  et un symbole  $\sigma \in C^\infty(Z, L \otimes |N_Z^*|)$ , on a le symbole correspondant sur  $\varphi^{-1}(Z)$  qui est donné par

$$(16) \quad \varphi^* \sigma(x) = \sigma(\varphi(x)) \in (\varphi^* L)_x \otimes |N_x^*|$$

en utilisant l'isomorphisme (15) i.e.  $N_x^* \simeq N_{\varphi(x)}^*$ .

Maintenant, pour toute  $\delta$ -section associée à  $Z, \sigma$ , l'ensemble des fronts d'onde est contenu dans le fibré conormal de la sous-variété  $Z$ , ce qui montre que si  $\varphi$  est transverse à  $Z$ , le pullback  $\varphi^* \delta_{Z, \sigma}$

de la distribution sur  $Y$  associée à  $Z, \sigma$  fait sens, il est égal à  $\delta_{\varphi^{-1}(Z), \varphi^*(\sigma)}$ .

Formulons alors maintenant le théorème du noyau de Schwartz. On considère une application linéaire continue,

$$(17) \quad T : C_c^\infty(Y) \rightarrow C^{-\infty}(X),$$

l'énoncé du théorème peut s'écrire

$$(18) \quad (T\xi)(x) = \int k(x, y) \xi(y) dy$$

où  $k(x, y) dy$  est une section généralisée,

$$(19) \quad k \in C^{-\infty}(X \times Y, \text{pr}_Y^*(|T|)).$$

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse, et  $T = f^*$  l'opérateur

$$(20) \quad (T\xi)(x) = \xi(f(x)) \quad \forall \xi \in C_c^\infty(Y).$$

Montrons que le  $k$  correspondant est la  $\delta$ -section associée à la sous-variété de  $X \times Y$  donnée par

$$(21) \quad \text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) ; x \in X\} = Z$$

et identifions son symbole,  $\sigma \in C^\infty(Z, \text{pr}_Y^*(|T|) \otimes |N_Z^*|)$ .

Étant donné  $\xi \in T_x^*(X)$ ,  $\eta \in T_y^*(Y)$ , on a  $(\xi, \eta) \in N_Z^*$  ssi il est orthogonal à  $(v, f_*v)$  pour tout  $v \in T_x(X)$ , i.e.  $\langle v, \xi \rangle + \langle f_*v, \eta \rangle = 0$  de telle façon que

$$(22) \quad \xi = -f_*^t \eta.$$

Ainsi, on a un isomorphisme canonique  $j : T_y^*(Y) \simeq N_Z^*$ ,  $\eta \xrightarrow{j} (-f_*^t \eta, \eta)$ . La transposée  $(j^{-1})^t$  est donnée par  $(j^{-1})^t(Y) = \text{classe de } (0, Y) \text{ dans } N_Z, \forall Y \in T_y(Y)$ . Ainsi, on a le choix canonique pour le symbole  $\sigma$ ,

$$(23) \quad \sigma = |j^{-1}| \in C^\infty(Z, \text{pr}_Y^*(|T|) \otimes |N_Z^*|).$$

On note la  $\delta$ -distribution correspondante par

$$(24) \quad k(x, y) dy = \delta(y - f(x)) dy.$$

On vérifie alors la formule,

$$(25) \quad \int \delta(y - f(x)) \xi(y) dy = \xi(f(x)) \quad \forall \xi \in C_c^\infty(Y).$$

Considérons maintenant une variété  $M$  avec un flot  $F_t$

$$(26) \quad F_t(x) = \exp(tv) x \quad v \in C^\infty(M, T_M)$$

et l'application correspondante  $f$ ,

$$(27) \quad f : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad f(x, t) = F_t(x).$$

On applique les éléments ci-dessus avec  $X = M \times \mathbb{R}$ ,  $Y = M$ . Le graphe de  $f$  est la sous-variété  $Z$  de  $X \times Y$ ,

$$(28) \quad Z = \{(x, t, y) ; y = F_t(x)\}.$$

Si  $\varphi$  est l'application diagonale,

$$(29) \quad \varphi(x, t) = (x, t, x), \quad \varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow X \times Y$$

et le premier résultat est la transversalité  $\varphi \pitchfork Z$ .

Nous avons alors besoin de considérer (12) pour chaque  $(x, t)$  tel que  $\varphi(x, t) \in Z$ , i.e. tel que  $x = F_t(x)$ . On regarde l'image par  $\varphi_*$  de l'espace tangent  $T_x M \times \mathbb{R}$  sur  $M \times \mathbb{R}$  en  $(x, t)$ . On prend  $\partial_t$  le champ de vecteurs naturel sur  $\mathbb{R}$ . L'image de  $(X, \lambda \partial_t)$  est  $(X, \lambda \partial_t, X)$  pour  $X \in T_x M, \lambda \in \mathbb{R}$ . En divisant l'espace tangentiel de  $M \times \mathbb{R} \times M$  par l'image de  $\varphi_*$ , on obtient un isomorphisme,

$$(30) \quad (X, \lambda \partial_t, Y) \rightarrow Y - X$$

avec  $T_x M$ . L'espace tangent à  $Z$  est  $\{(X', \mu \partial_t, (F_t)_* X' + \mu v_{F_t(x)}); X' \in T_x M, \mu \in \mathbb{R}\}$ . Ainsi, la condition de transversalité signifie que tout élément de  $T_x M$  est de la forme

$$(31) \quad (F_t)_* X - X + \mu v_x \quad X \in T_x M, \mu \in \mathbb{R}.$$

On a

$$(32) \quad (F_t)_* \mu v_x = \mu v_x$$

de telle manière que  $(F_t)_*$  définit une application quotient, l'application inverse de Poincaré

$$(33) \quad P : T_x / \mathbb{R} v_x \rightarrow T_x / \mathbb{R} v_x = N_x$$

et la condition de transversalité (31) signifient exactement,

$$(34) \quad 1 - P \quad \text{est inversible.}$$

Faisons cette hypothèse et calculons le symbole  $\sigma$  de la distribution,

$$(35) \quad \tau = \varphi^*(\delta(y - F_t(x)) dy).$$

D'abord, comme ci-dessus, posons  $W = \varphi^{-1}(Z) = \{(x, t) ; F_t(x) = x\}$ . La codimension de  $\varphi^{-1}(Z)$  dans  $M \times \mathbb{R}$  est la même que la codimension de  $Z$  dans  $M \times \mathbb{R} \times M$ , et elle est donc égale à  $\dim M$ , ce qui montre que  $\varphi^{-1}(Z)$  est de dimension 1. Si  $(x, t) \in \varphi^{-1}(Z)$  alors  $(F_s(x), t) \in \varphi^{-1}(Z)$ . Ainsi, si l'on suppose que  $v$  ne s'évanouit pas en  $x$ , l'application,

$$(36) \quad (x, t) \xrightarrow{q} t$$

est localement constante sur la composante connexe de  $\varphi^{-1}(Z)$  qui contient  $(x, t)$ .

Cela autorise à identifier l'espace transverse à  $W = \varphi^{-1}(Z)$  comme le produit

$$(37) \quad N_{x,t}^W \simeq N_x \times \mathbb{R}$$

dans lequel à  $(X, \lambda \partial_t) \in T_{x,t}(M \times \mathbb{R})$ , on associe la paire  $(\tilde{X}, \lambda)$  donnée par la classe de  $X$  dans  $N_x = T_x/\mathbb{R}v_x$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Le symbole  $\sigma$  de la distribution (35) est une section lisse de  $|N^{W*}|$  tensorisée par le pullback  $\varphi^*(L)$  où  $L = \text{pr}_Y^* |T_M|$ , et on a

$$(38) \quad \varphi^*(L) \simeq |p^* T_M|$$

où

$$(39) \quad p(x, t) = x \quad \forall (x, t) \in M \times \mathbb{R}.$$

Pour calculer  $\sigma$ , on a besoin de l'isomorphisme,

$$(40) \quad N_{(x,t)}^W \xrightarrow{\varphi_*} T_{\varphi(x,t)}(M \times \mathbb{R} \times M)/T_{\varphi(x,t)}(Z) = N^Z.$$

L'application  $\varphi_* : N_{x,t}^W \rightarrow N^Z$  est donnée par

$$(41) \quad \varphi_*(X, \lambda \partial_t) = (1 - (F_t)_*) X - \lambda v \quad X \in N_x, \lambda \in \mathbb{R}$$

et le symbole  $\sigma$  est juste

$$(42) \quad \sigma = |\varphi_*^{-1}| \in |p^* T_M| \otimes |N^{W*}|.$$

Cela fait sens puisque  $\varphi_*^{-1} : p^* T_M \rightarrow N^W$ .

Considérons maintenant la seconde projection,

$$(43) \quad q(x, t) = t \in \mathbb{R}$$

et calculons le pushforward  $q_*(\tau)$  de la distribution  $\tau$ .

Par construction,  $\delta(y - F_t(x)) dy$  est une section généralisée de  $\text{pr}_Y^* |T|$ , de telle façon que  $\tau$  est une section généralisée de  $p^* |T| = \varphi^* \text{pr}_Y^* |T|$ .

Ainsi,  $q_*(\tau)$  est une fonction généralisée.

On regarde d'abord la contribution d'une orbite périodique, la partie correspondante de  $\varphi^{-1}(Z)$  est de la forme,

$$(44) \quad \varphi^{-1}(Z) = V \times \Gamma \subset M \times \mathbb{R}$$

où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret cocompact de  $\mathbb{R}$ , tandis que  $V \subset M$  est une sous-variété compacte de  $M$  de dimension 1.

Pour calculer  $q_*(\tau)$ , on définit  $h(t) |dt|$  comme une 1-densité sur  $\mathbb{R}$  et on la pullback par  $q$  comme la section sur  $M \times \mathbb{R}$  du fibré  $q^* |T|$ ,

$$(45) \quad \xi(x, t) = h(t) |dt|.$$

On a alors besoin de calculer  $\int_{\varphi^{-1}(Z)} \xi \sigma$ . On peut regarder la contribution de chaque composant :  $V \times \{T\}$ ,  $T \in \Gamma$ .

On obtient

$$(46) \quad T^\# \frac{1}{|1 - P_T|} h(T).$$

où  $T^\#$  est la longueur de l'orbite primitive, ou, de manière équivalente, le covolume de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}$  pour la mesure de Haar  $|dt|$ . On peut alors écrire les contributions des orbites périodiques comme

$$(47) \quad \sum_{\gamma_p} \sum_{\Gamma} \text{Covol}(\Gamma) \frac{1}{|1 - P_T|} h(T).$$

où la fonction test  $h$  s'évanouit en 0.

Le prochain cas à considérer est celui où le champ de vecteurs  $v_x$  a un zéro isolé 0,  $v_{x_0} = 0$ . Dans ce cas, la condition de transversalité (31) devient

$$(48) \quad 1 - (F_t)_* \text{ inversible (en } x_0).$$

On a  $F_t(x_0) = x_0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et maintenant, le composant pertinent de  $\varphi^{-1}(Z)$  est  $\{x_0\} \times \mathbb{R}$ . L'espace transverse  $N^W$  est identifié à  $T_x$  et l'application  $\varphi_* : N^W \simeq N^Z$  est donnée par :

$$(49) \quad \varphi_* = 1 - (F_t)_*.$$

Ainsi, le symbole  $\sigma$  est la fonction scalaire  $|1 - (F_t)_*|^{-1}$ . La section généralisée  $q_* \varphi^*(\delta(y - F_t(x)) dy)$  est la fonction,  $t \rightarrow |1 - (F_t)_*|^{-1}$ . Nous pouvons alors écrire la contribution des zéros du flot comme,

$$(50) \quad \sum_{\text{zéros}} \int \frac{h(t)}{|1 - (F_t)_*|} dt$$

où  $h$  est une fonction test s'évanouissant en 0.

Nous pouvons alors rassembler les contributions (47) et (50) en

$$(51) \quad \sum_{\gamma} \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1 - (F_u)_*|} d^*u$$

où  $h$  est comme ci-dessus,  $I_\gamma$  est le groupe d'isotropie de l'orbite périodique  $\gamma$ , la mesure de Haar  $d^*u$  sur  $I_\gamma$  est normalisée de telle façon que le covolume  $I_\gamma$  soit égal à 1 et nous remplaçons à nouveau  $(F_u)_*$  par sa restriction à l'espace transverse  $\gamma$ .

## Bibliographie

- [AB] M.F. Atiyah et R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I, *Annals of Math*, **86** (1967), 374-407.
- [B] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, *Lecture Notes in Physics*, **263**, Springer (1986).
- [Bg] A. Beurling, A closure problem related to the Riemann zeta function, *Proc. Nat. Ac. Sci.* **41** (1955), 312-314.
- [B-C] J.-B. Bost et A. Connes, Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, *Selecta Mathematica, New Series* **1**, No.3 (1995), 411-457.
- [BG] O. Bohigas et M. Giannoni, Chaotic motion and random matrix theories, *Lecture Notes in Physics*, **209** (1984), 1-99.
- [BK] M. Berry et J. Keating,  $H = qp$  and the Riemann zeros, "Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder", edited by J.P. Keating, D.E. Khmelnitskii and I.V. Lerner (Plenum Press).
- [Br] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes  $p$ -adiques. *Bull. Soc. Math. france.* **89** (1961), 43-75.
- [C] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press (1994).
- [Co] A. Connes, Formule de trace en Géométrie non commutative et hypothèse de Riemann, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* (1996)
- [D] C. Deninger, Local  $L$ -factors of motives and regularised determinants, *Invent. Math.*, **107** (1992), 135-150.
- [G] D. Goldfeld, A spectral interpretation of Weil's explicit formula, *Lecture Notes in Math.*, **1593**, Springer Verlag (1994), 135-152.
- [GS] V. Guillemin et S. Sternberg, Geometric asymptotics, *Math. Surveys*, **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1977)
- [Gu] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.*, **44**, No.3 (1977), 485-517.
- [H] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, *Invent. Math.*, **101** (1990), 697-703.
- [J] B. Julia, Statistical theory of numbers, *Number Theory and Physics, Springer Proceedings in Physics*, **47** (1990).

- [K] M. Kac, Statistical Independence in Probability, *Analysis and Number Theory, Carus Math. Monographs* **18** (1959).
- [KS] N. Katz et P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues and Monodromy, (1996) , Book, to appear.
- [KS] N. Katz et P. Sarnak, Zeros of zeta functions, their spacings and spectral nature, (1997), to appear.
- [LPS1] D. Slepian et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).
- [LPS2] H.J. Landau et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).
- [LPS3] H.J. Landau et H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, *Bell Syst. Tech. J.* **41** (1962).
- [M] H. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic Number Theory*, AMS (1973).
- [Me] M.L. Mehta, Random matrices, Academic Press,(1991).
- [O] A. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of zeta functions, *Math. Comp.* **48** (1987), 273-308.
- [P] G. Pólya, Collected Papers, Cambridge, M.I.T. Press (1974).
- [Pat] S. Patterson, An introduction to the theory of the Riemann zeta function, *Cambridge Studies in advanced mathematics*, **14** Cambridge University Press (1988).
- [R] B. Riemann, *Mathematical Werke*, Dover, New York (1953).
- [S] E. Seiler, Gauge Theories as a problem of constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, *Lecture Notes in Physics* **159** Springer (1982).
- [Se] A. Selberg, *Collected papers*, Springer (1989).
- [W1] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer, New York (1974).
- [W2] A. Weil, Fonctions zêta et distributions, *Séminaire Bourbaki*, **312**, (1966).
- [W3] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres, *Izv. Mat. Nauk.*, (Ser. Mat.) **36**, 3-18.
- [W4] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, *J. Math. Soc. Japan*, **3**, (1951).
- [W5] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.* , **111**, (1964).
- [Z] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemannian zeta function, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata, Bombay (1979), 275-301.

## UNE VISION DES MATHÉMATIQUES ALAIN CONNES

Les mathématiques sont la colonne vertébrale de la science moderne et une source remarquablement efficace de nouveaux concepts et outils pour comprendre la “réalité” à laquelle nous participons.

Elles jouent un rôle fondamental dans les grandes nouvelles théories de la physique du XX<sup>e</sup> siècle telles que la relativité générale, et la mécanique quantique.

La nature et le fonctionnement interne de cette activité mentale sont souvent mal compris ou simplement ignorés, même parmi les scientifiques d’autres disciplines. Ils n’utilisent généralement que des outils mathématiques rudimentaires déjà connus au XIX<sup>e</sup> siècle et manquent complètement la force et la profondeur de l’évolution constante de nos concepts et outils mathématiques.

On m’a demandé d’écrire une introduction générale sur les mathématiques, ce que j’ai fini par faire d’un point de vue plutôt personnel plutôt que de produire l’interminable litanie habituelle “X a fait ceci et Y a fait cela”. L’évolution du concept “d’espace” en mathématiques sert de thème fédérateur est décrite, en partant de certaines de ses racines historiques et en allant vers des développements plus récents dans lesquels j’ai été plus ou moins directement impliqué.

### 1. L’UNITÉ DES MATHÉMATIQUES

Il pourrait être tentant au premier abord de voir les mathématiques comme l’union de parties distinctes comme la Géométrie, l’Algèbre, l’Analyse, la Théorie des nombres etc... où la première est dominée par la compréhension du concept d’“espace”, la seconde par l’art de manipuler des “symboles”, la suivante par l’accès à “l’infini” et au “continuum” etc...

Cela ne rend cependant pas justice à l’une des caractéristiques les plus essentielles du monde mathématique, à savoir qu’il est pratiquement impossible d’isoler l’une des parties ci-dessus des autres sans les priver de leur essence. De cette façon, le corpus des mathématiques ressemble à une entité biologique qui ne peut survivre que comme un tout et périrait si elle était séparée en morceaux disjoints.

Le premier embryon d’image mentale du monde mathématique à partir duquel on peut partir est celui d’un réseau d’une complexité déconcertante entre des concepts de base. Ces concepts de base eux-mêmes sont assez simples et sont le résultat d’un long processus de “distillation” dans l’alambic de la pensée humaine.

Là où un dictionnaire procède de manière circulaire, définissant un mot par référence à un autre, les concepts de base des mathématiques sont infiniment plus proches d’“éléments indécomposables”, des sortes de “particules élémentaires” de la pensée avec un minimum d’ambiguïté dans leur forme.

C’est le cas par exemple pour les nombres naturels où le nombre 3 représente cette qualité qui est commune à tous les ensembles à trois éléments. Ce sont des ensembles qui deviennent vides exactement après que nous ayons supprimé un de leurs éléments, puis un autre, puis un autre. De cette façon, la qualité en

question devient indépendante du symbole 3 qui n'est qu'un dispositif utile pour coder le nombre.

Alors que les lettres que nous utilisons pour coder les nombres sont dépendantes des accidents sociologiques et historiques qui sont à l'origine de l'évolution de toute langue, le concept mathématique de nombre et même la spécificité d'un nombre particulier tel que 17 sont totalement indépendants de ces accidents.

La "pureté" de ce concept mathématique le plus simple a été utilisée par Hans Freudenthal pour concevoir un langage de communication cosmique qu'il a appelé "Lincos" [39].

La vie scientifique des mathématiciens peut être décrite comme un voyage à l'intérieur de la géographie de la "réalité mathématique" qu'ils dévoilent peu à peu dans leur cadre mental intime.

Cela commence souvent par un acte de rébellion à l'égard de la description dogmatique existante de cette réalité que l'on trouvera dans les livres existants. Le jeune "futur mathématicien" se rend compte dans son propre esprit que sa perception du monde mathématique capture certaines caractéristiques qui ne cadrent pas tout à fait avec le dogme existant. Ce premier acte est souvent dû dans la plupart des cas à l'ignorance mais il permet de s'affranchir du respect de l'autorité en se fiant à son intuition à condition qu'elle soit étayée par des preuves concrètes. Une fois que les mathématiciens connaissent vraiment, de manière originale et "personnelle", une petite partie du monde mathématique, aussi ésotérique qu'elle puisse paraître au premier abord<sup>1</sup> leur voyage peut vraiment commencer. Il est bien sûr primordial tout du long de ne pas rompre le "fil d'Ariane" qui permet de garder constamment un œil neuf sur tout ce que l'on rencontrera en chemin, et aussi de remonter à la source si l'on se sent parfois perdu...

Il est également essentiel de toujours bouger. Sinon, le risque est de se cantonner dans un domaine relativement restreint d'extrême spécialisation technique, réduisant ainsi sa perception du monde mathématique et de son ahurissante diversité.

Le point vraiment *fondamental* à cet égard est que si tant de mathématiciens ont passé toute leur vie scientifique à explorer ce monde, ils s'accordent tous sur ses contours et sur sa connexité : quelle que soit l'origine de son itinéraire, un jour ou l'autre si l'on marche assez longtemps, on est obligé d'atteindre une ville bien connue, c'est-à-dire par exemple de rencontrer des fonctions elliptiques, des formes modulaires, des fonctions zêta. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connecté".

En d'autres termes, il n'y a qu'"un" monde mathématique, dont l'exploration est la tâche de tous les mathématiciens et ils sont tous dans le même bateau en quelque sorte.

De plus, exactement comme l'existence de la réalité matérielle extérieure semble indéniable mais n'est en fait justifiée que par la cohérence et le consensus de nos perceptions, l'existence de la réalité mathématique découle de sa cohérence et du consensus des découvertes des mathématiciens. Le fait que les preuves soient un ingrédient nécessaire d'une théorie mathématique implique une forme de "consensus" beaucoup plus fiable que dans de nombreuses autres disciplines intellectuelles ou scientifiques. Il a jusqu'à présent été assez fort pour éviter la formation de grands rassemblements de chercheurs autour de certains dogmes scientifiques "à la manière religieuse", imposés par l'impérialisme sociologique.

---

<sup>1</sup>Mon point de départ était la localisation des racines des polynômes.

La plupart des mathématiciens adoptent une attitude pragmatique et se considèrent comme les explorateurs de ce “monde mathématique” dont ils n’ont aucune envie de remettre en cause l’existence, et dont ils découvrent la structure par un mélange d’intuition, pas si étranger au “désir poétique”<sup>2</sup>, et d’une grande rationalité nécessitant d’intenses moments de concentration.

Chaque génération construit une “image mentale” de sa propre compréhension de ce monde et construit des outils mentaux de plus en plus pénétrants pour explorer des aspects auparavant cachés de cette réalité.

Là où les choses deviennent vraiment intéressantes, c’est lorsque des ponts inattendus émergent entre des parties du monde mathématique que l’on croyait auparavant très éloignées les unes des autres dans l’image mentale naturelle qu’une génération avait élaborée. À ce moment-là, on a l’impression qu’un vent soudain a soufflé le brouillard qui cachait des parties d’un magnifique paysage.

Je décrirai à la fin de cet article un exemple récent d’un tel pont. Avant de faire cela, je prendrai le concept d’“espace” comme ligne directrice pour emmener le lecteur à travers une visite guidée menant au bord de l’évolution réelle de ce concept à la fois en géométrie algébrique et en géométrie non-commutative. Je passerai également en revue quelques-uns des outils “fondamentaux” dont nous disposons aujourd’hui comme la “positivité”, la “cohomologie”, le “calcul”, les “catégories abéliennes” et surtout les “symétries” qui seront un thème récurrent dans les trois parties différentes de ce texte.

Il est évidemment impossible de donner un “panorama” de l’ensemble des mathématiques dans un texte de taille raisonnable. Mais il est parfaitement possible, en choisissant un thème précis, de montrer la limite de certains concepts fondamentaux qui jouent un rôle central en mathématiques et continuent d’évoluer activement.

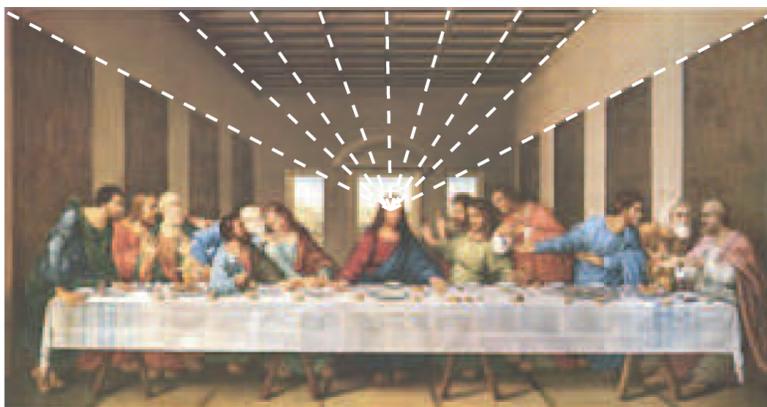


FIGURE 1. Perspective

Le concept “d’espace” est suffisamment polyvalent pour être un thème idéal pour montrer cette évolution active et nous confronterons le concept mathématique d’espace à son concept correspondant en physique et plus précisément à ce que la théorie des champs quantique nous enseigne et nous essaierons d’expliquer plusieurs des questions ouvertes et des découvertes récentes dans ce domaine.

---

<sup>2</sup>comme souligné par Paul Valéry.

## 2. LE CONCEPT D'ESPACE

Les images mentales de la géométrie sont faciles à créer en exploitant les zones visuelles du cerveau. Il serait cependant naïf de croire que la notion d'“espace”, c'est-à-dire l'étape où se développent les formes géométriques, est simple. En fait, comme nous le verrons plus loin, cette notion d'“espace” connaît encore une évolution drastique.

Le référentiel cartésien permet de coder un point du plan ou de l'espace euclidien par deux (ou trois) nombres réels  $x^\mu \in \mathbb{R}$ . Cette irruption des “nombres” dans la géométrie apparaît d'abord comme un acte de violence subi par la géométrie pensée comme une construction mentale synthétique.

Cet “acte de violence” inaugure la dualité entre géométrie et algèbre, entre l'œil du géomètre et les calculs de l'algébriste, calculs qui se déroulent dans le temps, en contraste avec la perception immédiate de l'intuition visuelle.

Loin d'être une opposition stérile, cette dualité devient extrêmement féconde lorsque géométrie et algèbre s'allient pour explorer des terres inconnues comme dans la nouvelle géométrie algébrique de la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle ou comme dans la géométrie non-commutative, deux façons d'appréhender la notion d'espace.

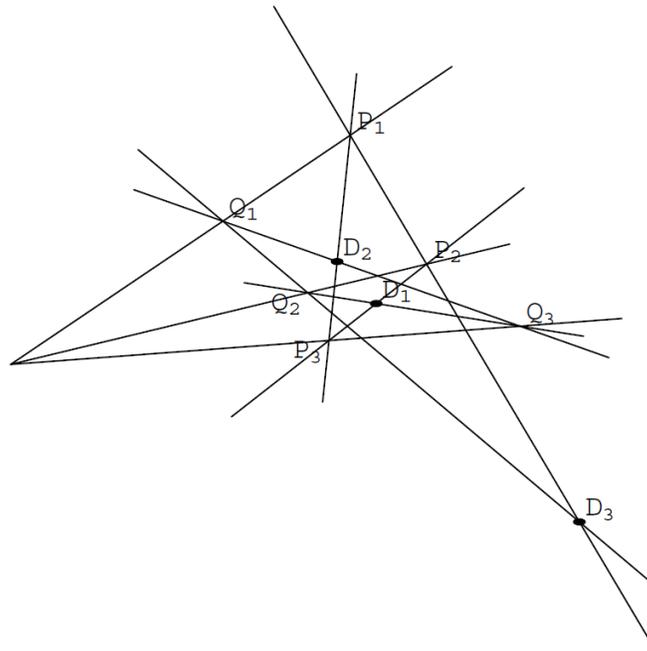


FIGURE 2. Théorème de Desargues : Soient  $P_j$  et  $Q_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$  des points tels que les trois droites  $(P_j, Q_j)$  ont une intersection. Alors les trois points  $D_j := (P_k, P_l) \cap (Q_k, Q_l)$  sont sur la même droite.

## 2.1. Géométrie projective.

Décrivons d'abord brièvement la géométrie projective, un exemple révélateur de la dualité ci-dessus entre la géométrie et l'algèbre.

Au milieu du XVII<sup>e</sup> siècle, G. Desargues, essayant de donner un fondement mathématique aux méthodes de perspective utilisées par les peintres et les architectes fonde la véritable géométrie projective. Le plan projectif réel de Desargues est l'ensemble  $P_2(\mathbb{R})$  des droites passant par l'origine dans l'espace tridimensionnel  $\mathbb{R}^3$ . Il ajoute aux points habituels du plan une "droite à l'infini" qui donne une formulation parfaite et un support pour les techniques empiriques de la perspective.

En fait, le théorème de Desargues (figure 2) peut être considéré comme la base de l'axiomatisation de la géométrie projective.

Ce théorème est une conséquence des quatre axiomes extrêmement simples qui définissent la géométrie projective, mais il nécessite pour sa démonstration que la dimension de la géométrie soit strictement supérieure à deux.

Ces axiomes expriment les propriétés de la relation " $P \in L$ " i.e. le point  $P$  appartient à la droite  $L$ , ce sont :

- l'existence et l'unicité de la droite contenant deux points distincts ;
- le fait que deux lignes définies par deux points chacune se rencontrent en un point ;
- le fait que chaque droite contient au moins trois points ;
- le fait qu'il existe un ensemble fini de points qui engendrent toute la géométrie, en itérant l'opération qui permet de passer de deux points à tous les points de la ligne à laquelle ces deux points appartiennent.

En dimension  $n = 2$ , le théorème de Desargues n'est plus une conséquence des axiomes ci-dessus et il faut l'ajouter comme cinquième axiome. Les géométries desarguiennes de dimension  $n$  sont exactement les espaces projectifs  $P_n(K)$  d'un corps  $K$  (pas nécessairement commutatif).

Elles sont ainsi en parfaite dualité avec le concept clé de l'algèbre : celui de corps.

Qu'est-ce qu'un corps ? C'est un ensemble de "nombres" que l'on peut additionner, multiplier et dans lequel tout élément non nul a un inverse de sorte que toutes les règles familières<sup>3</sup> sont valides. Un exemple de base est donné par le corps des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ , mais il en existe de nombreux autres, le corps à deux éléments  $\mathbb{F}_2$  ou le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Le corps des quaternions de Hamilton  $\mathbb{H}$  est un bel exemple de corps non-commutatif.

La géométrie projective complexe c'est-à-dire celle de  $P_n(\mathbb{C})$  prend sa forme définitive dans "La Géométrie" de Monge en 1795. La présence des points complexes à côté des réels simplifie considérablement le tableau d'ensemble et est d'une rare harmonie à la théorie générale par la simplicité et la généralité de ses résultats.

---

<sup>3</sup>sauf éventuellement la commutativité du produit.

Par exemple, tous les cercles du plan passent par les “points cycliques”, une paire de points (introduits par Poncelet) situés sur la droite à l’infini et ayant des coordonnées complexes. Ainsi, comme deux coniques arbitraires, deux cercles quelconques se rejoignent en fait en quatre points, une affirmation clairement fausse dans le plan réel.

La nécessité d’introduire et d’utiliser des nombres complexes même pour régler des problèmes dont la formulation est purement “réelle” était déjà apparue au XVI<sup>e</sup> siècle pour la résolution de l’équation du troisième degré. En effet, même lorsque les trois racines d’une telle équation sont réelles, la forme conceptuelle de ces racines en fonction des radicaux passe nécessairement par des nombres complexes (cf. chapitres 11 à 23 du livre de Cardano de 1545 *Ars magna sive de regulis algebraicis*).

## 2.2. L’ange de la géométrie et le diable de l’algèbre.

La dualité

(1) Géométrie | Algèbre

déjà présente dans la discussion ci-dessus au sujet de la géométrie projective permet, lorsqu’elle est considérée comme un enrichissement mutuel, de traduire dans les deux sens de la géométrie à l’algèbre et d’obtenir des énoncés qu’il serait difficile de deviner si l’on restait confiné dans l’un des deux domaines. Ceci est mieux illustré par un exemple très simple.

Le résultat géométrique, dû à Frank Morley, traite de la géométrie plane et est l’un des rares résultats sur la géométrie des triangles qui était apparemment inconnu des mathématiciens grecs. Vous commencez avec un triangle quelconque... Maintenant le théorème de Morley, qu’il a trouvé aux environs de 1899, dit que *quel que soit le triangle ABC dont vous partez, le triangle  $\alpha\beta\gamma$  est toujours équilatéral.* (fig.3).

Voici maintenant une “transcription” algébrique de ce résultat. On part d’un corps commutatif arbitraire et on prend trois transformations “affines” de  $K$ . Ce sont des applications  $g$  de  $K$  dans  $K$  de la forme  $g(x) = \lambda x + \mu$ , où  $\lambda \neq 0$ . Étant donnée une telle transformation la valeur de  $\lambda \in K$  est unique et notée  $\delta(g)$ . Pour  $g \in G$ ,  $g(x) = \lambda x + \mu$  n’étant pas une translation, i.e.  $\lambda \neq 1$ , on appelle  $\text{fix}(g) = \alpha$  l’unique point fixe  $g(\alpha) = \alpha$  de  $g$ .

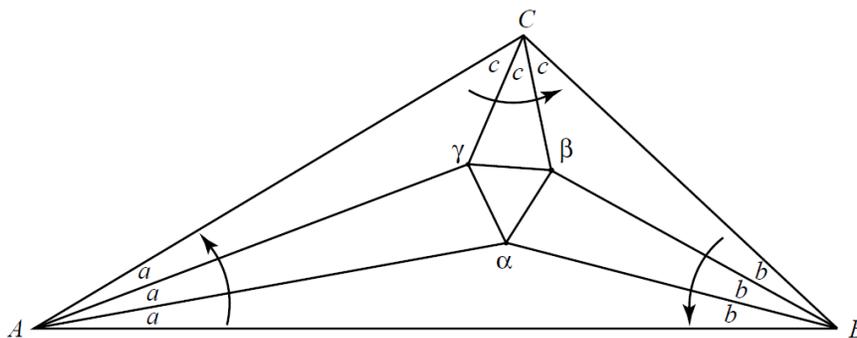


FIGURE 3. Théorème de Morley : *Le triangle  $\alpha\beta\gamma$  obtenu à partir de l’intersection des trisecteurs consécutifs d’un triangle quelconque ABC est toujours équilatéral.*

Ces applications forment un groupe  $G(K)$  (cf. sous-section 2.4) appelé le “groupe affine” et la contrepartie algébrique du théorème de Morley se lit ainsi

Soit  $f, g, h \in G$  tels que  $fg, gh, hf$  et  $fgh$  ne soient pas des translations et soit  $j = \delta(fgh)$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes,

a)  $f^3g^3h^3 = 1$ .

b)  $j^3 = 1$  et  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$  où  $\alpha = \text{fix}(fg), \beta = \text{fix}(gh), \gamma = \text{fix}(hf)$ .

C’est une affirmation suffisamment générale maintenant, impliquant un corps arbitraire et sa preuve est une simple “vérification”, qui est un bon test des compétences élémentaires en “algèbre”.

Il reste à montrer comment cela implique le résultat de Morley. Mais la propriété fondamentale de “planéité” de la géométrie euclidienne, à savoir

$$(2) \quad a + b + c = \pi$$

où  $a, b, c$  sont les angles d’un triangle  $(A, B, C)$  est mieux représentée algébriquement par l’égalité

$$FGH = 1$$

dans le groupe affine  $G(\mathbb{C})$  du corps  $K = \mathbb{C}$  des nombres complexes, où  $F$  est la rotation de centre  $A$  et d’angle  $2a$  et similairement pour  $G$  et  $H$ . Ainsi si on désigne par  $f$  la rotation de centre  $A$  et d’angle  $2a/3$  et similairement pour  $g$  et  $h$ , on obtient la condition  $f^3g^3h^3 = 1$ .

L’équivalence ci-dessus montre donc que  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ , où  $\alpha, \beta, \gamma$ , sont les points fixes de  $fg, gh$  et  $hf$  et où  $j = \delta(fgh)$  est une racine cubique non triviale de l’unité. La relation  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$  est une caractérisation bien connue des triangles équilatéraux (elle signifie  $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = -j^2$ , de telle sorte qu’on passe du vecteur  $\overrightarrow{\beta\gamma}$  à  $\overrightarrow{\beta\alpha}$  par une rotation d’angle  $\pi/3$ ).

Enfin il est facile de vérifier que le point fixe  $\alpha, f(g(\alpha)) = \alpha$  est l’intersection des trisectrices de  $A$  et  $B$  la plus proche du côté  $AB$ . En effet, la rotation  $g$  l’envoie sur son symétrique par rapport à  $AB$ , et  $f$  le ramène à sa place. Ainsi on a démontré que le triangle  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est équilatéral. En fait, on a aussi obtenu gratuitement 18 triangles équilatéraux obtenus en choisissant les autres solutions de  $f^3 = F$  etc...

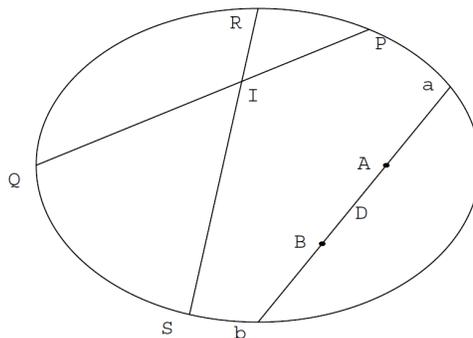


FIGURE 4. modèle de Klein

Cet exemple est typique de la puissance de la dualité entre d'une part la perception visuelle (où les faits géométriques peuvent être assez évidents) et d'autre part la compréhension algébrique. Ensuite, pourvu qu'on puisse écrire les choses en termes algébriques, on accroît leur puissance et on les rend applicables dans des circonstances totalement différentes. Par exemple, le théorème ci-dessus vaut pour un corps fini, il vaut par exemple pour tout corps qui a des racines cubiques d'unité... Donc en quelque sorte, passer de l'intuition géométrique à la formulation algébrique permet d'augmenter le pouvoir du fait "évident" original, un peu comme le langage peut augmenter la force de la perception, lorsqu'on utilise les "mots justes".

### 2.3. Géométrie non-euclidienne.

La découverte de la géométrie non-euclidienne au début du XIX<sup>e</sup> siècle libère les concepts géométriques dont le cadre s'ouvre dans deux directions différentes.

- la première ouverture est intimement liée à la notion de symétrie et à la théorie des groupes de Lie ;
- la seconde est la naissance de la géométrie des espaces courbes de Gauss et Riemann, qui devait jouer un rôle crucial peu après dans l'élaboration de la relativité générale par Einstein.

Un modèle particulièrement simple de géométrie non-euclidienne est le modèle de Klein. Les points de la géométrie sont les points du plan situés à l'intérieur d'une ellipse fixe  $E$  (cf. Fig. 4). Les lignes de la géométrie sont les intersections des lignes euclidiennes ordinaires avec l'intérieur de l'ellipse.

Le cinquième postulat d'Euclide sur la "planéité", c'est-à-dire sur la somme des angles d'un triangle (2), peut être reformulé comme l'unicité de la droite parallèle à <sup>4</sup> une droite donnée  $D$  passant par un point  $I \notin D$ . Sous cette forme, ce postulat est donc évidemment violé dans le modèle de Klein puisque par un point tel que  $I$  passent plusieurs droites telles que  $L = PQ$  et  $L' = RS$  ne croisent pas  $D$ .

Il ne suffit cependant pas de donner les points et les lignes de la géométrie pour la déterminer en entier. Il faut en effet aussi spécifier les relations de "congruence" entre deux segments <sup>5</sup>  $AB$  et  $CD$ . La congruence de segments signifie qu'ils ont la même "longueur" et cette condition est spécifiée dans le modèle de Klein par

$$(3) \quad \text{longueur de}(AB) = \log(\text{coefficient de croisement}(A, B; b, a))$$

où le rapport croisé de quatre points  $P_j$  sur la même ligne de coordonnées  $s_j$  est par définition

$$(4) \quad \text{coefficient de croisement}(P1, P2; P3, P4) := \frac{(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)}{(s_2 - s_3)(s_1 - s_4)}$$

La géométrie non-euclidienne a été découverte au début du XIX<sup>e</sup> siècle par Lobachevski et Bolyai, après de nombreux efforts de grands mathématiciens comme Legendre pour montrer que le cinquième axiome d'Euclide était inutile. Gauss l'a découvert de manière indépendante et n'a pas rendu sa découverte publique, mais en développant l'idée de "courbure intrinsèque", il avait déjà une longueur d'avance de

<sup>4</sup>i.e. n'intersectant pas.

<sup>5</sup>aussi bien qu'entre angles.

toute façon.

Tous les axiomes d'Euclide sont satisfaits par cette géométrie<sup>6</sup> sauf le cinquième. Il est frappant de constater, rétrospectivement, la fécondité de la question de l'indépendance du cinquième axiome, question qui aurait d'abord pu être écartée hâtivement comme une sorte de perversion mentale en essayant d'éliminer l'un des axiomes d'une longue liste qui n'aurait même pas l'air plus courte une fois ceci fait.

Ce que le temps a montré, c'est que loin de n'être qu'un contre-exemple ésothérique, la géométrie non-euclidienne est d'une richesse et d'une fécondité rares. En cassant le cadre traditionnel, elle a généré deux ouvertures conceptuelles auxquelles nous avons fait allusion plus haut et dont on discutera plus bas, à partir de l'approche de S. Lie.

## 2.4. Symétries.

Une façon de définir la congruence des segments dans le modèle de Klein ci-dessus, sans se référer à la "longueur", c'est-à-dire à la formule (3), est d'utiliser le groupe de symétrie naturelle  $G$  de la géométrie donnée par les transformations projectives  $T$  du plan qui préservent l'ellipse  $E$ . Alors, par définition, deux segments  $AB$  et  $CD$  sont congrus si et seulement s'il existe une transformation  $T \in G$  telle que  $T(A) = C, T(B) = D$ .

L'ensemble de ces transformations forme un groupe, c'est-à-dire qu'on peut composer de telles transformations et en obtenir une autre, i.e. on a une "loi de composition"

$$(5) \quad (S, T) \rightarrow S \circ T \in G, \quad \forall S, T \in G,$$

d'éléments de  $G$  dans lesquels plusieurs produits sont définis indépendamment des parenthèses, i.e.

$$(6) \quad (S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$$

une condition dite "d'associativité", tandis que la transformation d'identité  $\text{id}$  satisfait la condition

$$(7) \quad S \circ \text{id} = \text{id} \circ S = S$$

et chaque élément  $S$  du groupe admet un inverse, uniquement déterminé par

$$(8) \quad S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S = \text{id}$$

La théorie des groupes prend son essor avec les travaux d'Abel et Galois sur la résolution des équations polynomiales (cf. section 3.6). Dans ce cas, les groupes impliqués sont les groupes finis, c'est-à-dire les ensembles finis  $G$  munis d'une loi de composition vérifiant les axiomes ci-dessus.

---

<sup>6</sup>Ces axiomes d'Euclide sont notablement plus compliqués que ceux de la géométrie projective évoqués plus haut.

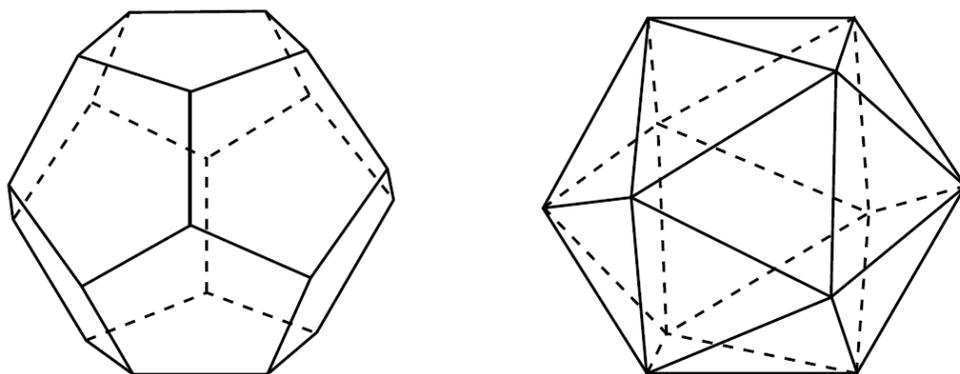


FIGURE 5. Dodécaèdre et icosaèdre

Exactement comme un entier peut être premier, c'est-à-dire ne pas avoir de diviseurs non triviaux, un groupe fini peut être "simple", c'est-à-dire ne pas pouvoir être envoyé de manière surjective vers un groupe non trivial plus petit tout en respectant la règle de composition.

La classification de tous les groupes finis simples est l'une des grandes réalisations des mathématiques du XX<sup>e</sup> siècle.

Le groupe de symétries de la géométrie de Klein ci-dessus n'est pas fini puisque spécifier une de ces transformations géométriques revient en fait à choisir trois paramètres continus. Il relève de la théorie de S. Lie qui était en fait une continuation directe des idées formulées par Galois.

Ces idées de Sophus Lie ont été reformulées dans le "programme d'Erlangen" de Félix Klein et développées avec succès par Elie Cartan, dont la classification des groupes de Lie est un autre grand succès des mathématiques du XX<sup>e</sup> siècle. À travers les travaux de Chevalley sur les groupes algébriques, la théorie des groupes de Lie a joué un rôle clé dans la classification des groupes finis simples.

## 2.5. Élément de longueur et géométrie riemannienne.

La congruence des segments en géométrie non-euclidienne peut également être définie en termes d'égalité de leur "longueur" selon (3). En fait, en s'appuyant sur la découverte de Gauss de la géométrie intrinsèque des surfaces, Riemann a pu étendre la géométrie bien au-delà des espaces qui admettent suffisamment de symétries pour se déplacer autour de corps rigides et permettent de définir la congruence des segments en termes de symétries.

Il a considéré des espaces beaucoup plus généraux dans lesquels on ne peut pas (en général) déplacer une forme géométrique comme un triangle par exemple sans la déformer c'est-à-dire modifier la longueur de certains de ses côtés ou de certains de ses angles.

La première nouvelle entrée géométrique est l'idée d'un espace comme une variété de points de dimension arbitraire, définie de manière intrinsèque indépendamment de tout plongement dans l'espace euclidien. D'une certaine manière, c'est une continuation de l'utilisation par Descartes des nombres réels comme coordonnées.

Dans le langage moderne, on appelle ces espaces des variétés différentiables, une notion qui modélise la gamme de variables continues de plusieurs dimensions. Les exemples les plus simples incluent les espaces de paramètres des systèmes mécaniques, les positions d'un corps solide <sup>7</sup>, etc...

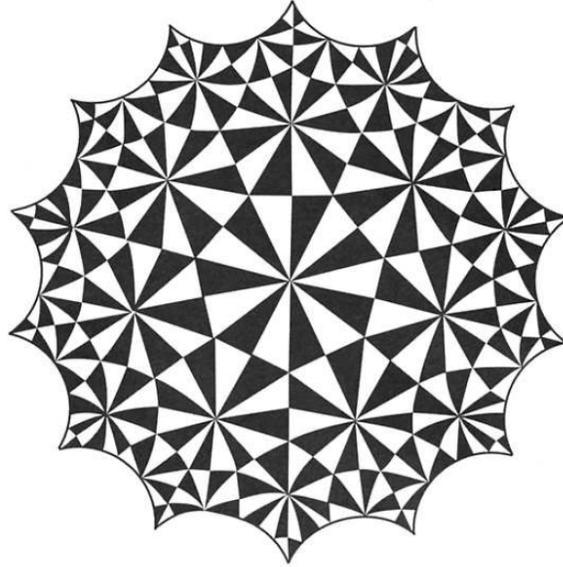


FIGURE 6. Triangles dans le disque de Poincaré

La deuxième idée clé du point de vue de Riemann est que si l'on ne peut pas transporter des corps rigides, on dispose d'une unité de longueur qui peut être transportée et permet de mesurer la longueur de petits intervalles. La distance  $d(x, y)$  entre deux points  $x$  et  $y$  est alors donnée en additionnant la longueur des petits intervalles le long d'un chemin entre  $x$  et  $y$  puis en recherchant la longueur minimale de cette distance,

$$(9) \quad d(x, y) = \text{Inf} \left\{ \int_{\gamma} ds \mid \gamma \text{ est un chemin entre } x \text{ et } y \right\}$$

Ainsi la donnée géométrique est entièrement codée par "l'élément de longueur" et on suppose que son carré  $ds^2$ , c'est-à-dire la longueur carrée des intervalles infinitésimaux en coordonnées locales  $x^\mu$  autour de tout point, est donné sous une forme quadratique,

$$(10) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Par exemple, la longueur des côtés les plus courts des triangles noirs apparaissant sur la figure 6 sont tous égaux pour la métrique riemannienne qu'on utilise pour le disque de Poincaré de la géométrie non-euclidienne. L'élément de longueur  $ds$  correspondant est donné par :

$$(11) \quad ds^2 = (R^2 - \rho^2)^{-2} ds_E^2$$

où  $ds_E$  est l'élément de longueur euclidienne et  $\rho$  est la distance euclidienne au centre du cercle de rayon  $R$  dont l'intérieur forme l'ensemble des points du disque de Poincaré de la géométrie non-euclidienne.

<sup>7</sup>comme exercice amusant, le lecteur donnera une borne inférieure pour la dimension de la variété des positions du corps.

La géométrie est entièrement spécifiée par la paire  $(M, ds)$  où  $M$  est la variété des points et où l'élément de longueur  $ds$  est donné par (10).

Ce point de vue "métrique", par rapport à l'étude des "espaces symétriques", admet une liberté supplémentaire considérable puisque le choix des  $g_{\mu\nu}$  est essentiellement arbitraire (sauf pour les "conditions de positivité" affirmant que la longueur du carré est positive, qui doit être relâchée pour s'adapter à la physique de l'espace-temps).

On comprend aisément comment l'avantage décisif donné par cette flexibilité permet un lien direct avec les lois de la physique en fournissant un modèle géométrique de la loi de Newton dans un potentiel arbitraire. Premièrement, la notion de droite est un concept de géométrie traditionnelle qui s'étend le plus directement en géométrie riemannienne sous le nom de "géodésiques". Une *géodésique* est un chemin  $\gamma$  qui atteint la valeur minimale de (9) entre deux points  $x, y \in \gamma$  suffisamment proches. Le calcul des variations permet de voir les géodésiques comme les solutions de l'équation différentielle suivante, qui continue d'avoir du sens pour une signature arbitraire de la forme quadratique (10),

$$(12) \quad \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha}) \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt}$$

où les  $g_{\alpha\nu,\rho}$  sont les dérivées partielles  $\partial_{x^\rho} g_{\alpha\nu}$  de  $g_{\alpha\nu}$ .

C'est la variabilité ou l'arbitraire dans le choix des  $g_{\mu\nu}$  qui empêche un espace riemannien général d'être homogène par symétries de sorte que le mouvement rigide est en général impossible, mais c'est ce même arbitraire qui permet d'englober, par l'équation géodésique, de nombreuses lois de la mécanique qui dépendent en général de fonctions assez arbitraires comme le potentiel newtonien.

En effet l'un des points de départ cruciaux de la relativité générale est l'identité entre l'équation géodésique et la loi de gravité de Newton<sup>8</sup> dans un potentiel  $V$ . Si dans la métrique de Minkowski de l'espace-temps, qui sert de modèle à la relativité restreinte, on modifie le coefficient de  $dt^2$  en ajoutant le potentiel Newtonien  $V$ , l'équation géodésique devient la loi de Newton. Autrement dit, en modifiant non la mesure de la longueur mais celle du temps, on peut modéliser la loi gravitationnelle le long des lignes d'un espace-temps courbe et exprimer géométriquement le principe d'équivalence comme l'existence d'un substrat géométrique indépendant de la nature de la matière, qui est utilisé pour le tester par son mouvement d'inertie.

La loi de Poisson exprimant le Laplacien de  $V$  à partir de la distribution de matière devient alors les équations d'Einstein, qui font intervenir le tenseur de courbure et ont été manquées au départ puisque les seules dérivées premières "covariantes" du potentiel gravitationnel  $g_{\mu\nu}$  s'évanouissent toutes identiquement<sup>9</sup>. La façon la plus simple de se souvenir des équations d'Einstein est de les dériver d'un principe d'action et dans le vide, cela est fourni par l'action de Hilbert-Einstein, qui en signature euclidienne est de la forme,

<sup>8</sup>cela vaut en négligeant les termes d'ordre supérieur.

<sup>9</sup>Einstein a écrit un article expliquant qu'alors il ne pouvait pas y avoir d'ensemble d'équations entièrement covariant, la courbure a heureusement sauvé la situation.

$$(13) \quad S_E[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{G} \int_M r \sqrt{g} d^4x$$

où  $G$  est une constante et  $\sqrt{g} d^4x$  est la forme riemannienne du volume et  $r$  la courbure scalaire que nous retrouverons plus loin, au paragraphe 4.1. Les équations d'Einstein en présence de matière s'obtiennent alors facilement en ajoutant l'action de la matière couplée de façon minimale aux  $g_{\mu\nu}$ , à la précédente (13).

Non seulement la géométrie riemannienne a joué un rôle fondamental dans le développement de la relativité générale mais elle est devenue le paradigme central de la géométrie au XX<sup>e</sup> siècle.

Après le théorème d'uniformisation de Poincaré et la classification des espaces symétriques de Cartan, M. Gromov a révolutionné la géométrie riemannienne par la puissance de sa vision. La conjecture de géométrisation de Thurston de trois variétés a été une autre grande force motrice derrière les progrès remarquables de la géométrie au cours des dernières années.

Il est intéressant de noter que Riemann était bien conscient des limites de son propre point de vue comme il l'a clairement exprimé dans la dernière page de sa leçon inaugurale [55] :

“Les questions sur l'immensément grand sont des questions vaines pour l'explication de la nature. Mais la situation est tout à fait différente avec des questions sur l'incommensurable petit. De l'exactitude avec laquelle nous poursuivons les phénomènes dans l'infiniment petit, dépend essentiellement notre connaissance de leurs relations causales. Les progrès des derniers siècles dans la compréhension des mécanismes de la Nature dépendent presque entièrement de l'exactitude de la construction rendue possible par l'invention de l'analyse de l'infini et par les principes simples découverts par Archimède, Galilée et Newton, dont la physique moderne se sert. En revanche, dans les sciences naturelles où les principes simples de telles constructions font encore défaut, pour découvrir des liens de causalité, on poursuit le phénomène dans l'espace infiniment petit, aussi loin que le microscope le permet. Les questions sur les relations métriques de l'espace dans l'immensément petit ne sont donc pas vaines.

Si l'on suppose que les corps existent indépendamment de leur position, alors la courbure est partout constante, et il résulte alors des mesures astronomiques qu'elle ne peut être différente de zéro ; ou du moins sa réciproque doit être une aire par rapport à laquelle la portée de nos télescopes peut être négligée. Mais si une telle indépendance des corps par rapport à la position n'existe pas, alors on ne peut pas tirer de conclusions sur les relations métriques dans l'infiniment petit de celles dans l'infiniment grand ; en tout point la courbure peut avoir des valeurs arbitraires dans trois directions, pourvu seulement que la courbure totale de chaque portion mesurable de l'espace ne soit pas sensiblement différente de zéro. Des relations encore plus compliquées peuvent se produire si l'élément de longueur ne peut pas être représenté, comme cela a été présupposé, par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. Or il semble que les notions empiriques sur lesquelles reposent les déterminations métriques de l'espace, la notion de corps solide et celle de rayon lumineux, perdent leur validité dans l'infiniment petit ; il est donc tout à fait concevable que les relations métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne soient pas conformes aux hypothèses de la géométrie ; et en effet on doit le supposer dès que cela permet une explication plus simple des phénomènes.

La question de la validité des hypothèses de la géométrie dans l'infiniment petit est liée à la question du fondement des relations métriques de l'espace. À propos de cette question, qui peut en effet encore être rangée dans le cadre de l'étude de l'espace, la remarque ci-dessus est applicable, que dans une variété discrète le principe des relations métriques est déjà contenu dans le concept de variété, mais dans une variété continue, celui-ci doit provenir d'autre chose. Par conséquent, soit la réalité sous-jacente à l'espace doit former une variété discrète, soit la base des relations métriques doit être recherchée en dehors d'elle, dans des forces contraignantes agissant sur elle.

Une réponse à ces questions ne peut être trouvée qu'en partant de cette conception des phénomènes jusqu'ici approuvée par l'expérience, dont Newton a posé les bases, et en la modifiant peu à peu sous la contrainte de faits qui ne peuvent être expliqués par elle. Des investigations comme celle qui vient d'être faite, qui partent de concepts généraux, ne peuvent servir qu'à s'assurer que ce travail n'est pas entravé par des concepts trop restreints, et que les progrès dans la compréhension de l'enchaînement des choses ne sont pas entravés par des préjugés traditionnels.

Cela nous entraîne dans le domaine d'une autre science, la physique, dans lequel la nature de l'occasion présente ne nous permet pas d'entrer".

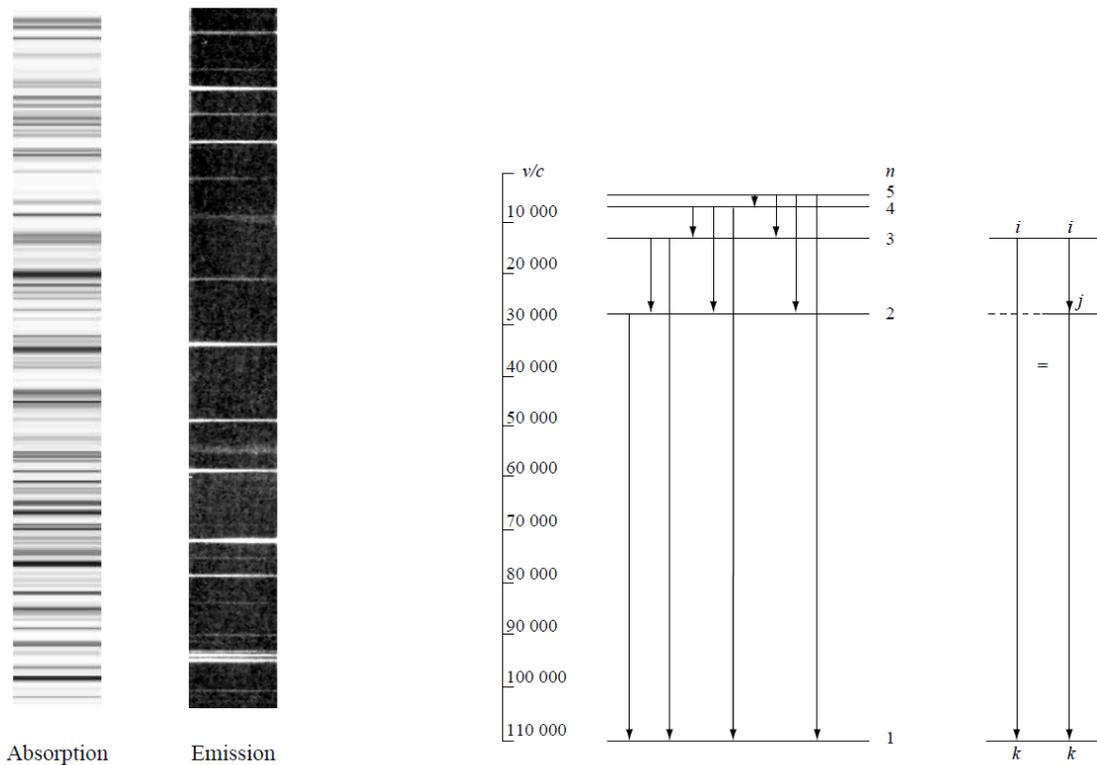


FIGURE 7. Spectres et loi de Ritz-Rydberg

Bien sûr Riemann ne pouvait pas<sup>10</sup> anticiper l'autre découverte majeure de la physique au XX<sup>e</sup>, à savoir la mécanique quantique qui débuta en 1900 avec la loi de Planck. Cette découverte, comme nous allons l'expliquer maintenant, a nécessité une extension des idées de Riemann à des espaces d'un type plus étendu que les variétés ordinaires.

## 2.6. Géométrie non-commutative.

Les premiers exemples de tels "nouveaux" espaces sont venus de la découverte de la nature quantique de l'espace des phases du système mécanique microscopique décrivant un atome. Un tel système se manifeste par son interaction avec le rayonnement et les spectres correspondants (Fig. 7). Les lois de base de la spectroscopie, telles que trouvées notamment par Ritz et Rydberg (Fig. 7), sont en contradiction avec l'image "variété classique" de l'espace des phases et Heisenberg a été le premier à comprendre que pour un système mécanique microscopique les coordonnées, notamment les nombres réels  $x^1, x^2, \dots$  tels que les positions et les impulsions que l'on voudrait utiliser pour paramétrer les points de l'espace des phases, ne

<sup>10</sup>pas plus que Hilbert dans sa liste des 23 problèmes du tournant du siècle.

commutent effectivement pas. Cela implique que le paradigme géométrique classique ci-dessus est trop étroit pour décrire de manière fidèle les espaces physiques de grand intérêt qui prévalent lorsqu'on traite des systèmes microscopiques. Cela incite à étendre la dualité

(14) Espace géométrique | Algèbre commutative

qui joue un rôle central en géométrie algébrique.

Le point de départ de la géométrie non-commutative est l'existence d'espaces naturels jouant un rôle essentiel à la fois en mathématiques et en physique mais dont "l'algèbre des coordonnées" n'est plus commutative. Les premiers exemples sont venus de Heisenberg et l'espace des phases en mécanique quantique mais il en existe bien d'autres, comme les espaces des feuilles de feuilletages, les duals des groupes discrets non abéliens, l'espace des pavages de Penrose, le tore non-commutatif  $\mathbb{T}_\theta^2$  qui joue un rôle dans l'effet de Hall quantique et dans la compactification de la théorie M [20] et l'espace des  $\mathbb{Q}$ -réseaux [31] qui est un espace géométrique naturel, avec une action du groupe d'échelle fournissant une interprétation spectrale des zéros des fonctions L de la théorie des nombres et une interprétation des formules explicites de Riemann-Weil comme formule de trace [19].

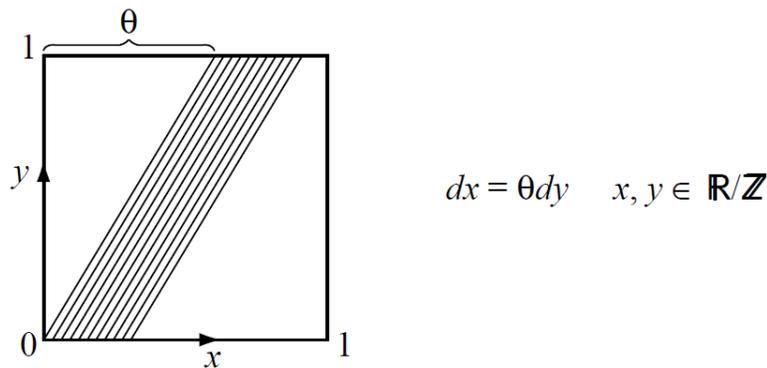


FIGURE 8. Feuilletage du tore à deux dimensions dont l'espacement des feuilles est  $\mathbb{T}_\theta^2$

Une autre riche classe d'exemples provient de la théorie de la déformation, comme la déformation des variétés de Poisson, des groupes quantiques et de leurs espaces homogènes. Les espaces de modules génèrent également de nouveaux exemples très intéressants comme dans [20] [50] ainsi que la fibre à l' $\infty$  en géométrie arithmétique [34].

La caractéristique commune de beaucoup de ces espaces est que, lorsqu'on essaie de les analyser du point de vue habituel de la théorie des ensembles, les outils usuels tombent en panne pour la simple raison suivante. Même si, en tant qu'ensemble, ils ont la cardinalité du continuum, il est impossible de distinguer leurs points par un ensemble fini (ou même dénombrable) de fonctions explicites. En d'autres termes, toute famille dénombrable *explicite* d'invariants échoue à séparer les points et la cardinalité *effective* n'est pas la même que celle du continuum.

Le principe général qui permet de construire l'algèbre des coordonnées sur de tels espaces quotients  $X = Y / \sim$  est de remplacer l'algèbre commutative des fonctions sur  $Y$  qui sont constantes le long des classes de la relation d'équivalence par l'algèbre de convolution *non-commutative* de la relation

d'équivalence  $\sim$  de sorte que la dualité ci-dessus s'étende ainsi

(15) Espace géométrique quotient | Algèbre non-commutative

Les nouveaux espaces non triviaux “les plus simples” sont les tores non-commutatifs qui ont été pleinement analysés à un stade très précoce de la théorie en 1980 ([9]). Ici  $X = \mathbb{T}_\theta^2$  est l'espace des feuilles du feuilletage  $dx = \theta dy$  du tore en deux dimensions  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  (cf. Fig. 8). Si on essaie de décrire  $X$  par une algèbre commutative de coordonnées, on trouve que quand  $\theta$  est irrationnel, toutes les “fonctions mesurables” sur  $X$  sont presque partout constantes et il n'y a pas de fonctions continues non constantes.

Si l'on applique le principe général ci-dessus, on trouve une algèbre très intéressante. Cet exemple a joué un rôle crucial comme point de départ de la théorie générale grâce au phénomène “d'intégralité” qui a été découverte en 1980 ([9]). En effet, même si “l'ombre” de  $\mathbb{T}_\theta^2$  obtenue à partir de la gamme des fonctions de Morse peut être un ensemble de Cantor totalement déconnecté, et que la dimension de l'analogie des fibrés vectoriels est en général irrationnelle, lorsqu'on forme la “courbure intégrale” de ces fibrés comme dans le théorème de Gauss-Bonnet, on trouve miraculeusement un entier.

Ce fait ainsi que la forme explicite des connexions et de la courbure sur les fibrés vectoriels sur  $\mathbb{T}_\theta^2$  ([9]) étaient suffisamment frappants pour suggérer que la géométrie différentielle ordinaire et la théorie de Chern-Weil pourraient être étendues avec succès au-delà de leur domaine commutatif “classique”.

Un débutant pourrait être tenté de se satisfaire de la compréhension d'exemples aussi simples que  $\mathbb{T}_\theta^2$  en ignorant la grande diversité du paysage général. Cependant la grande variété d'exemples oblige à se contenter du cas général et à étendre la plupart de nos concepts géométriques au cas général non-commutatif.

La géométrie usuelle n'est qu'un cas particulier de cette nouvelle théorie, au même titre que la géométrie euclidienne et non-euclidienne sont des cas particuliers de la géométrie riemannienne. Beaucoup de concepts géométriques familiers survivent dans la nouvelle théorie, mais ils acquièrent aussi une nouvelle signification inattendue.

En effet, même au niveau le plus grossier de compréhension d'un espace fourni par la théorie de la mesure, qui ne s'intéresse essentiellement qu'à la “quantité de points” dans un espace, on trouve des caractéristiques totalement nouvelles et inattendues dans le cas non-commutatif. Alors que les algébristes travaillant dans le domaine des algèbres d'opérateurs savent depuis bien longtemps que la théorie des algèbres de von Neumann représente une extension considérable de la théorie de la mesure, la principale surprise survenue au début des années 70 [5] est qu'une telle algèbre hérite de sa non-commutativité une évolution du temps donnée par Dieu :

$$(16) \quad \delta : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Out } M$$

où  $\text{Out } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$  est le quotient du groupe des automorphismes de  $M$  par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs. Cela a conduit dans ma thèse [6] à la réduction du type III au type II et à ses automorphismes et finalement à la classification des facteurs injectifs.

Le développement des idées topologiques a été rendu possible par les  $C^*$ -algèbres que Gelfand a décou-

vertes au début de sa vie mathématique et a été motivé par la conjecture de Novikov sur l’invariance d’homotopie des signatures supérieures des variétés ordinaires ainsi que par le théorème de l’indice d’Atiyah-Singer. Cela a conduit à la reconnaissance que non seulement la K-théorie d’Atiyah-Hirzebruch, mais plus important encore, la K-homologie duale telle que développée par Atiyah, Brown-Douglas-Fillmore et Kasparov admettent des  $C^*$ -algèbres non-commutatives comme leur cadre naturel. Les cycles en K-homologie sont donnés par les représentations de Fredholm de la  $C^*$ -algèbre  $A$  des fonctions continues. Un exemple de base est le groupe des  $C^*$ -algèbres d’un groupe discret et se cantonner aux algèbres commutatives, c’est-à-dire aux groupes commutatifs, est une hypothèse évidemment indésirable.

Le développement des idées géométriques différentielles, dont l’homologie de de Rham, les connexions et la courbure des fibrés vectoriels... a eu lieu au cours des années 80 grâce à la cohomologie cyclique. Elle a conduit par exemple à la preuve de la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques mais a trouvé de nombreuses autres applications. Fondamentalement, étendre les classes caractéristiques de Chern-Weil au cadre général permet de nombreux calculs concrets sur des espaces non-commutatifs.

La notion même de géométrie non-commutative vient de l’identification des deux concepts de base dans la formulation de la géométrie de Riemann, à savoir ceux de variété et d’élément de longueur infinitésimal. Il a été reconnu au début des années 80 que le formalisme de la mécanique quantique donne une place naturelle non seulement aux variables continues de dimension arbitraire mais aussi aux infinitésimaux (les opérateurs compacts dans l’espace de Hilbert) et à l’intégrale (la divergence logarithmique dans un opérateur trace) comme nous l’expliquerons plus loin dans la section 3.3. Il a également été reconnu depuis longtemps par les géomètres ([59], [53], [58]) que la principale qualité du type d’homotopie d’une variété (en plus d’être défini par une recette de cuisine) est de satisfaire la dualité de Poincaré non seulement en homologie ordinaire mais en K-homologie avec le module de Fredholm associé à l’opérateur de Dirac comme “classe fondamentale”.

Dans le cadre général de la géométrie non-commutative, la confluence des deux notions de métrique et de classe fondamentale en K-homologie pour une variété conduit très naturellement à l’égalité

$$(17) \quad ds = 1/D,$$

qui exprime l’élément de longueur infinitésimal  $ds$  comme l’inverse de l’opérateur de Dirac, donc sous des conditions aux limites convenables comme propagateur. L’importance de  $D$  est double. D’une part il définit l’élément de longueur par l’équation ci-dessus qui permet de calculer les distances par la formule (18) ci-dessous, d’autre part sa classe d’homotopie représente la classe fondamentale de K-homologie de l’espace considéré.

Il est intéressant d’expliquer en termes simples comment la géométrie non-commutative modifie la mesure des distances. Une description aussi simple est possible parce que l’évolution entre la manière riemannienne de mesurer les distances et la nouvelle manière (non-commutative) est exactement parallèle à l’amélioration de la norme de longueur<sup>11</sup> dans le système métrique. La définition originelle du mètre à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle était basée sur une petite portion (une quarante millionième partie) de la taille du plus grand objet macroscopique disponible (ici la circonférence terrestre). D’ailleurs cette “unité de longueur” est devenue concrètement représentée en 1799 comme “mètre des archives” par une barre de pla-

<sup>11</sup>ou de manière équivalente, pour la norme de temps utilisant la vitesse de la lumière comme facteur de conversion.

tine localisée près de Paris. Le prototype international était une copie plus stable du “mètre des archives” qui servait à définir le mètre. Le changement le plus radical dans la définition du mètre s’est produit en 1960 lorsqu’il a été redéfini comme un multiple de la longueur d’onde d’une certaine ligne orange dans la lumière émise par l’isotope 86 du krypton. Cette définition a ensuite été remplacée en 1983 par la définition actuelle qui utilise la vitesse de la lumière comme facteur de conversion et est exprimée en termes de fréquences inverses plutôt que de longueur d’onde, et est basée sur une transition hyperfine dans l’atome de césium. Les avantages de la nouvelle norme sont évidents. Aucune comparaison avec un “mètre des archives” localisé n’est nécessaire, les incertitudes sont estimées à  $10^{-15}$  et pour la plupart des applications un faisceau de césium commercial est suffisamment précis. Nous pourrions également (si une communication était possible) communiquer notre choix d’unité de longueur aux extraterrestres, et uniformiser les unités de longueur dans la galaxie sans avoir à envoyer des copies matérielles du “mètre des archives” ! Le concept de “métrique” en géométrie non-commutative repose précisément sur une telle donnée spectrale. Une distance ne se mesure plus par (9), c’est-à-dire comme infimum de l’intégrale de l’élément linéaire le long des arcs  $\gamma$  mais comme supremum des différences  $|f(x) - f(y)|$  de fonctions à valeurs scalaires soumises à la contrainte qu’elles ne varient pas trop rapidement sous le contrôle de la norme de l’opérateur du commutateur,  $\|[D, f]\| \leq 1$ , de sorte que

$$(18) \quad d(x, y) = \text{Sup} \{ |f(x) - f(y)| ; \|[D, f]\| \leq 1 \}$$

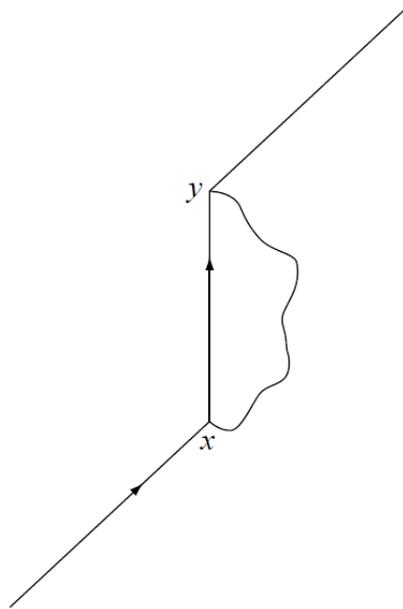


FIGURE 9.  $ds$  Fermion Propagator

Cela permet une extension considérable de la notion de variété riemannienne donnée en termes spectraux comme une représentation irréductible dans l’espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  non seulement de l’algèbre  $\mathcal{A}$  des coordonnées sur l’espace géométrique mais aussi de l’élément de longueur  $ds = D^{-1}$ . Ainsi une géométrie non-commutative est décrite comme un “triplet spectral”

$$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$$

Le paradigme obtenu de l’espace géométrique est très polyvalent et s’adapte aux situations suivantes :

- espaces des feuilles de feuilletages ;
- espaces de dimensions infinies (comme dans la supersymétrie) ;
- géométrie fractale ;
- variétés de drapeaux dans la théorie des groupes quantiques<sup>12</sup> ;
- zone de Brillouin en physique quantique ;
- espace-temps.

Cela permet également d’incorporer les “corrections quantiques” de la géométrie de l’espace-temps à partir de l’habillage de l’élément de longueur  $ds$  identifié au propagateur de fermions.

## 2.7. Motifs de Grothendieck.

Le paradigme de ce qu’est un espace en géométrie algébrique a considérablement évolué dans la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle sous l’impulsion de problèmes spécifiques tels que les conjectures de Weil finalement prouvées par Deligne en 1973.

Après les travaux fondamentaux de Serre qui a développé la théorie des faisceaux cohérents et une notion très souple de variété algébrique, basée sur la notion de faisceaux de Leray et celle d’“espace annelé” de Cartan, Grothendieck s’est attaché à étendre l’ensemble de la théorie au paradigme des *schémas* obtenus en regroupant la contrepartie géométrique d’anneaux commutatifs arbitraires.

Les “conjectures standard” de Grothendieck sont une vaste généralisation des conjectures de Weil à des correspondances arbitraires, alors que le cas de Weil se limite à une correspondance spécifique connue sous le nom de correspondance “de Frobenius”. Si elles sont vraies (avec les conjectures de Hodge et Tate), les conjectures standard permettraient la construction d’une catégorie abélienne de “motifs” qui unifie la cohomologie  $\ell$ -adique étale pour différentes valeurs de  $\ell$  avec les cohomologies de de Rham et Betti.

Jusqu’à présent, seule la “catégorie dérivée”  $DM(S)$  de la catégorie des motifs a été construite avec succès par Levine et Voevodski. À terme, l’un des objets d’étude essentiels de la théorie sera l’étude des fonctions associées à la  $m$ -ième cohomologie  $H^m$  d’une variété algébrique définie sur un corps de nombres. Leur définition implique diverses théories de cohomologie qui ne sont “unifiées” que par la théorie putative des motifs. De plus, leurs propriétés, incluant l’holomorphie, sont encore conjecturales et constituent une motivation clé du programme de Langlands.

On pourrait penser à première vue que la théorie des motifs est d’une tout autre nature que les objets “analytiques” impliqués dans la géométrie non-commutative. Cette impression est vite dissipée si l’on connaît la correspondance de Langlands où les représentations automorphes advenant du côté analytique apparaissent comme des réalisations potentielles des “motifs”. Dans la dernière section de ces notes, nous expliquerons comment la théorie des motifs apparaît (à partir de la théorie galoisienne motivique) dans la théorie de la renormalisation dans notre travail commun avec M. Marcolli [33].

---

<sup>12</sup>12 cf. (47).

Il existe en fait une analogie intrigante entre les constructions motiviques et celles de la théorie KK et de la cohomologie cyclique en géométrie non-commutative.

En effet les étapes de base dans la construction de la catégorie  $DM(S)$  de Voevodsky qui est la “catégorie dérivée” de ce qui est recherché pour la catégorie des motifs, sont parallèles aux étapes de base de la théorie bivariante de Kasparov KK. Les ingrédients de base sont les mêmes, notamment les correspondances qui, dans les deux cas, ont une propriété de finitude “d’un côté”. On passe alors dans les deux cas à des complexes qui dans le cas de KK s’obtiennent en prenant simplement des différences finies formelles de correspondances “infinies”. théorie des motifs. Aussi comme dans la théorie des motifs on obtient une catégorie additive qui peut être vue comme une “linéarisation” de la catégorie des algèbres. Enfin on notera dans le cas de KK, qu’une légère amélioration (concernant l’exactitude) et une grande simplification technique sont obtenus si l’on considère des “déformations” plutôt que des correspondances comme les “cycles” de base de la théorie, comme cela est réalisé dans la théorie E. Ensuite, lorsqu’au lieu de travailler sur on considère la catégorie  $DM(k)_{\mathbb{Q}}$  par tensorisation par  $\mathbb{Q}$ , on peut pousser l’analogie plus loin et établir un contact avec la cohomologie cyclique, où l’on travaille également rationnellement, avec un rôle similaire des filtrations. Là aussi, la “linéarisation” obtenue de la catégorie des algèbres est assez explicite et simple en géométrie non-commutative. La catégorie obtenue est simplement la catégorie des  $\Lambda$ -modules, basée sur la catégorie cyclique  $\Lambda$  qui sera décrite ci-dessous dans la section 3.5.

## 2.8. Théorie des topos.

Comme mentionné ci-dessus, la notion de *schéma* est obtenue en rapiéçant ensemble les contreparties géométriques d’anneaux commutatifs arbitraires. Ainsi on peut se demander d’abord pourquoi un tel rapiéçage n’est pas nécessaire dans une géométrie non-commutative dont les données de base sont simplement celles d’une algèbre non-commutative. L’essentiel ici est que la non-commutativité, présente déjà dans les matrices, permet d’effectuer ce rapiéçage sans sortir de la catégorie des algèbres.

Ainsi, exactement comme ci-dessus en définissant l’algèbre de coordonnées sur un quotient comme l’algèbre de convolution de la relation d’équivalence, on implémente le patching/rapiéçage de manière algébrique à partir de l’algèbre de convolution d’un groupoïde qui est spécifié par la recette géométrique. Dans le cas d’une variété projective  $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  par exemple, l’astuce de Karoubi-Jouanolou consiste à écrire  $X$  comme le quotient d’une sous-variété affine de la variété affine des idempotents  $e^2 = e, e \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ .

La notion conceptuelle clé qui permet de comparer les deux manières de procéder dans des cas “affines” simples est la notion d’équivalence de Morita due à M. Rieffel [54] dans le cadre des  $C^*$ -algèbres.

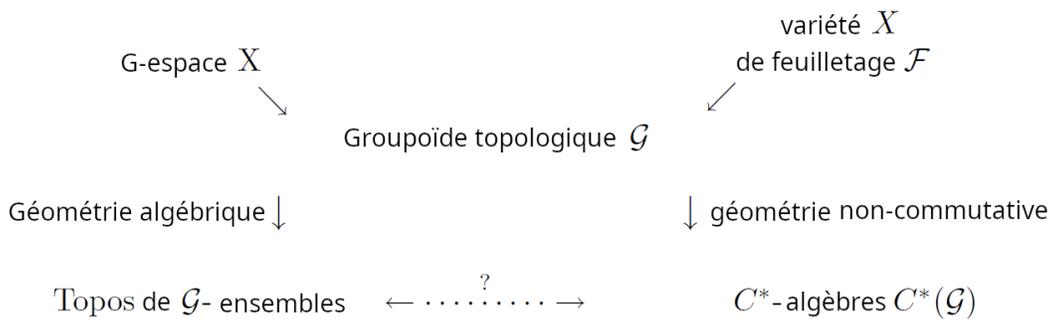
Ainsi, il n’est pas nécessaire en géométrie non-commutative de donner une “donnée de recollement” pour un tas d’algèbres commutatives, on s’en tient plutôt aux objets algébriques les plus “purs” en autorisant simplement des algèbres non-commutatives du côté algébrique de la dualité de base,

$$(19) \quad \underline{\text{Espace géométrique}} \quad | \quad \underline{\text{Algèbre non-commutative}}$$

Il serait cependant faux de penser que la géométrie algébrique n’a pas de place pour le nouveau type d’espaces associés aux groupoïdes ou simplement aux groupes. En effet, dans le prolongement de sa con-

struction de la cohomologie étale, Grothendieck a développé la théorie générale des sites<sup>13</sup> qui généralise la notion d'espace topologique, en remplaçant l'ensemble partiellement ordonné des ensembles ouverts par une catégorie dans laquelle la notion de "recouvrement ouvert" est assumée comme une donnée supplémentaire. Il est ensuite allé beaucoup plus loin en abstrayant sous le nom de "topos" les propriétés de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site, obtenant ainsi une vaste généralisation des espaces topologiques. Cette théorie a été utilisée avec succès en logique où elle permet une modélisation simple du résultat d'indépendance de Cohen.

Il existe quelques similitudes entre la géométrie non-commutative et la théorie des topoi comme le suggère le schéma proposé par Cartier dans [3], dans le cas du produit croisé d'un espace par une action de groupe ou d'un feuilletage qui peut être "traité" dans les deux sens,



Il est crucial de comprendre que l'algèbre associée à un topos ne permet en général pas de retrouver le topos lui-même dans le cas général non-commutatif.

Pour voir l'exemple le plus simple où deux topos différents donnent la même algèbre, il suffit de comparer le topos  $\mathcal{T}(X, \cdot)$  des faisceaux sur un ensemble fini  $X$  avec le topos  $\mathcal{T}(\cdot, G)$  des  $G$ -ensembles où  $G$  est un groupe fini. Si  $G$  est abélien de la même cardinalité que  $X$ , l'algèbre  $C^*(G)$  associée à  $G$  est isomorphe grâce à la transformée de Fourier à  $C(X)$  alors que les deux topos correspondants ne sont pas isomorphes, puisque l'ensemble des "points" de  $\mathcal{T}(X, \cdot)$  s'identifie à  $X$  alors que le topos  $\mathcal{T}(\cdot, G)$  a seulement un point<sup>14</sup>. Il devient alors clair que les invariants qui sont définis directement en termes d'algèbres possèdent de remarquables propriétés de "stabilité" qui ne seraient pas apparentes du côté topos. Pour prendre un exemple, la signature d'une variété non simplement connexe  $M$ , vue comme un élément du  $K$ -groupe  $C^*$ -algèbre  $C^*(\pi_1(M))$  du groupe fondamental  $\pi_1(M)$  de  $M$  est un invariant d'homotopie. Mais sa contrepartie du côté "topos" qui est la signature de Novikov la plus haute n'est pas connue comme étant invariant. D'une manière similaire, les outils de l'analyse tels que la "positivité" (cf. section 3.1) peuvent seulement être amenés à supporter la colonne du côté droit du diagramme ci-dessus comme cela devient apparent par exemple avec l'évanouissement du  $\hat{A}$ -genre de variétés admettant des feuilletages avec feuilles de courbure scalaire positive (cf. [13]).

Dans le contexte de la géométrie algébrique, la dualité de base (19) ne devrait bien sûr pas être restreinte aux algèbres "involutives" sur  $\mathbb{C}$ , et on devrait autoriser les algèbres avec un nil-radical non trivial comme on le fait dans le cadre commutatif. En fait, la procédure de rapiéçage fait naturellement intervenir des

<sup>13</sup>également appelées topologies de Grothendieck.

<sup>14</sup>cf. [49] exercice VII 2.

matrices triangulaires dans ce contexte. Il est cependant remarquable que, à l'exception de la "positivité", la plupart des outils qui ont été développés dans le contexte des algèbres d'opérateurs s'appliquent en fait dans ce cadre plus large des algèbres générales.

### 3. OUTILS FONDAMENTAUX

Je me souviens d'une discussion à la cafétéria de l'IHES il y a quelques années avec un groupe de mathématiciens. Nous discutons des outils que nous utilisons actuellement pour faire des mathématiques et pour simplifier les choses, chacun de nous n'était autorisé à n'en mentionner qu'un, avec bien sûr l'exigence qu'il soit suffisamment simple.

Inutile de vouloir en donner une liste exhaustive, je me contenterai plutôt d'illustrer quelques exemples de ces outils en prenant comme prétexte la géométrie non-commutative.

#### 3.1. Positivité.

C'est l'ingrédient clé de la théorie de la mesure. Les probabilités sont des nombres réels dans l'intervalle  $[0, 1]$  et il n'y a aucun moyen de s'amuser avec cela.

La théorie quantique nous dit que la raison de la positivité des probabilités est la présence d'*amplitudes de probabilités* complexes et que dans le monde quantique, ces amplitudes se comportent de manière additive alors que dans le monde classique, ce sont les probabilités qui se comportent de manière additive.

L'inégalité suivante est en fait la pierre angulaire de la théorie des algèbres d'opérateurs

$$(20) \quad Z^*Z \geq 0, \quad \forall Z \in A$$

Les  $C^*$ -algèbres de Gelfand sont ces algèbres abstraites sur  $\mathbb{C}$  dotées d'une involution anti-linéaire  $Z \rightarrow Z^*$  pour lesquelles l'inégalité ci-dessus "fait sens", c'est-à-dire définit un cône d'éléments positifs  $A^+ \subset A$  qui possède la propriété attendue. Grâce à l'analyse fonctionnelle, tout l'outillage de la théorie de la convexité peut alors s'appliquer : on utilise le théorème de Hahn-Banach pour obtenir des formes linéaires positives, on construit des espaces de Hilbert à partir de formes linéaires positives, et toutes les puissantes propriétés des opérateurs de l'espace de Hilbert peuvent alors être utilisées dans ce contexte apparemment abstrait.

De même, la positivité joue un rôle clé en physique sous le nom d'unitarité, qui exclut toute théorie physique dans laquelle les probabilités calculées ne remplissent pas la règle d'or

$$(21) \quad P(X) \in [0, 1]$$

#### 3.2. Cohomologie.

Pour comprendre ce qu'est la cohomologie, il faut partir d'une question simple et ressentir le besoin d'un outil abstrait. Comme exemple simple, nous partirons du théorème de la courbe de Jordan, qui stipule

que le complémentaire dans  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  d'une courbe fermée simple continue admet exactement deux composantes connexes. On peut essayer de le prouver avec des outils rudimentaires mais il faut être conscient de l'existence d'une courbe de Jordan  $C$  dont la mesure de Lebesgue bidimensionnelle est positive. Ceci montre que l'intersection générique  $C \cap L$  de  $C$  avec une droite  $L$  aura une longueur unidimensionnelle positive et évite de donner un argument trop naïf impliquant par exemple la parité du nombre d'éléments de  $C \cap L$ .

Les théories de cohomologie telles que la K-théorie par exemple donnent une preuve facile. Pour un espace compact  $X$ , la K-théorie d'Atiyah-Hirzebruch  $K(X)$  est obtenue comme le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphismes stables des fibrés vectoriels. Le résultat principal est la périodicité de Bott qui donne une suite exacte de six termes correspondant à tout sous-ensemble fermé  $Y \subset X$ . Le fait est que si  $K^j(X)$  et  $K^j(Y)$  donnent quatre de ces six termes, les deux autres ne dépendent que de l'ensemble ouvert  $X \setminus Y$  (ou si l'on veut de sa compactification en un point). Cette *excision* permet de gérer facilement des situations délicates comme celle fournie par la courbe de Jordan ci-dessus  $C$ .

La K-théorie d'Atiyah-Hirzebruch  $K(X)$  est en fait le  $K$ -groupe des  $C^*$ -algèbres associées à  $C(X)$  des fonctions continues sur  $X$  et la théorie garde ses caractéristiques essentielles telles que la périodicité de Bott et la suite exacte à six termes sur la catégorie de toutes les  $C^*$ -algèbres.

Il est cependant indispensable de développer dans ce cadre général l'analogue de la théorie de Chern-Weil sur la courbure et les classes caractéristiques des fibrés vectoriels. L'essentiel est de pouvoir faire des calculs de nature géométrique différentielle dans le cadre ci-dessus où l'analyse occupe la place centrale. Il vaut la peine de citer ce que dit Grothendieck [41] en comparant le paysage de l'analyse dans lequel il a d'abord travaillé avec celui de la géométrie algébrique dans laquelle il a passé le reste de sa vie mathématique :

“Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de “pays promis” aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller...”

Il est bien vrai que le cadre d'analyse est beaucoup moins généreux à première vue mais mon sentiment à la fin des années 70 était que la principale raison à cela était l'absence d'outils flexibles appropriés similaires à ceux fournis par le calcul qui permettraient de développer progressivement une compréhension en effectuant des calculs relativement faciles et significatifs.

Ce qui se produisait généralement, c'était que l'on était confronté à des problèmes qui seraient tout simplement trop difficiles à gérer, de sorte que le choix était soit d'abandonner soit de passer un temps considérable à essayer de résoudre des questions techniques qui n'auraient de sens que pour de vrais spécialistes.

La situation serait totalement différente si, comme c'était le cas en géométrie différentielle, on disposait d'outils souples comme les courants et les formes de de Rham, permettant de se familiariser avec des exemples simples et de voir son chemin.

C'est la principale raison “philosophique” pour laquelle j'ai entrepris en 1981 de développer la cohomologie cyclique qui joue exactement ce rôle en géométrie non-commutative.

### 3.3. Calcul.

Le calcul infinitésimal est construit sur la tension exprimée dans la formule de base

$$(22) \quad \int_a^b df = f(b) - f(a)$$

entre l'intégrale et la variation infinitésimale  $df$  d'une fonction  $f$ . On s'accommode à terme de cette tension en développant l'intégrale de Lebesgue et la notion de forme différentielle. Au niveau intuitif, l'image naïve de la "variation infinitésimale"  $df$  comme incrément de  $f$  pour des valeurs très proches de la variable est assez bonne pour la plupart des objectifs, de telle sorte qu'il n'est pas besoin de créer une théorie des infinitésimaux.

Le décor est différent dans la géométrie non-commutative, où la mécanique quantique offre d'emblée une étape naturelle dans laquelle la notion de *variable* acquiert un sens nouveau et suggestif.

Dans la formulation classique, une variable réelle  $X$  est considérée comme une application d'un ensemble vers la droite réelle. Il y a bien sûr une grande part d'arbitraire dans la mesure où cela n'affecte pas vraiment la variable  $X$ , c'est-à-dire, par exemple, cela ne modifie pas son domaine  $f(X)$  (le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  des valeurs atteintes). En mécanique quantique, le domaine est fixé une fois pour toutes, c'est un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$ . Notez que tous les espaces de Hilbert de dimension infinie sont isomorphes, de sorte que cette étape est assez *canonique*. Ce que les gens ont découvert en développant la mécanique quantique, c'est qu'au lieu de traiter des variables réelles qui ne sont que des applications  $f$  d'un ensemble  $X$  vers la droite réelle, on doit remplacer cette notion par celle d'opérateur *auto-adjoint* dans l'ensemble de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Ces "nouvelles" variables partagent de nombreuses caractéristiques avec les variables classiques, par exemple le rôle de l'intervalle  $f(X)$  est désormais joué par le *spectre* de l'opérateur auto-adjoint. Ce spectre est également un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  et certains de ses points peuvent être atteints plus souvent que d'autres. Le nombre de fois qu'un élément du spectre est atteint est connu sous le nom de multiplicité spectrale.

Une autre compatibilité assez étonnante de la nouvelle notion avec l'ancienne est que l'on peut composer n'importe quelle fonction (mesurable)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec une variable réelle au sens quantique. Cela revient au calcul fonctionnel de Borel pour les opérateurs auto-adjoints. Étant donné un tel  $T$ , non seulement  $p(T)$  a un sens de façon évidente quand  $p$  est un polynôme, mais en fait cette définition s'étend par continuité à toutes les fonctions boréliennes !!

Une fois que l'on s'est familiarisé avec la nouvelle notion de variable en mécanique quantique, on se rend facilement compte qu'il s'agit d'un foyer parfait pour les infinitésimaux, à savoir pour les variables qui sont plus petites que  $\epsilon$  pour tout  $\epsilon$ , sans être nulles. Bien sûr, requérir que la norme d'un opérateur soit plus petite que  $\epsilon$  est une condition trop forte, mais on peut être plus subtil et demander que, pour tout  $\epsilon$  positif, on puisse conditionner l'opérateur par un nombre fini de conditions linéaires, de sorte que sa norme devienne inférieure à  $\epsilon$ . Ceci est une caractérisation connue des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert, et ce sont des candidats évidents pour les infinitésimaux.

Les règles de base des infinitésimaux sont faciles à vérifier, par exemple la somme de deux opérateurs compacts est compacte, le produit compact en temps borné est compact et ils forment un idéal bilatère dans l'algèbre des opérateurs bornés en  $\mathcal{H}$ .

La taille d'un infinitésimal  $\epsilon \in \mathcal{K}$  est gouvernée par le taux de décroissance de la séquence décroissante de ses valeurs caractéristiques  $\mu_n = \mu_n(\epsilon)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . (Par définition  $\mu_n(\epsilon)$  est la  $n^{\text{me}}$  valeur propre de la valeur absolue  $|\epsilon| = \sqrt{\epsilon^* \epsilon}$ ). En particulier, pour tout réel positif  $\alpha$ , la condition suivante définit les infinitésimaux  $\epsilon$  d'ordre  $\alpha$  :

$$(23) \quad \mu_n(\epsilon) = o(n^{-\alpha}) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Les infinitésimaux d'ordre  $\alpha$  forment aussi un idéal bilatère et, de plus,

$$(24) \quad \epsilon_j \text{ d'ordre } \alpha_j \implies \epsilon_1 \epsilon_2 \text{ d'ordre } \alpha_1 + \alpha_2.$$

Ceci n'est qu'une traduction des propriétés bien connues des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert mais l'ingrédient vraiment nouveau dans le calcul des infinitésimaux en géométrie non-commutative est l'intégrale.

$$(25) \quad \int \epsilon \in \mathbb{C}.$$

où  $\epsilon$  est un infinitésimal d'ordre un. Sa construction [15] repose sur l'analyse de la divergence logarithmique de la trace ordinaire pour un infinitésimal d'ordre un, principalement due à Dixmier ([38]). Cette trace a les propriétés usuelles d'additivité et de positivité de l'intégrale ordinaire, mais elle permet de retrouver la puissance du calcul infinitésimal usuel, en négligeant automatiquement l'idéal des infinitésimaux d'ordre  $> 1$

$$(26) \quad \int \epsilon = 0, \quad \forall \epsilon, \quad \mu_n(\epsilon) = o(n^{-1}).$$

En filtrant ces opérateurs, on passe du stade originel du calcul quantifié décrit ci-dessus à un stade classique où la notion de localité trouve sa juste place.

En utilisant (26) on retrouve la tension mentionnée ci-dessus du calcul différentiel ordinaire, qui permet de négliger les infinitésimaux d'ordre supérieur (comme  $(df)^2$ ) dans une expression intégrale.

### 3.4. Formules de trace et d'indice.

La formule de l'indice d'Atiyah-Singer est une motivation essentielle et un ingrédient de la géométrie non-commutative.

Premièrement, la flexibilité que l'on gagne dans le cas non-commutatif en considérant des groupoïdes et pas seulement des espaces permet une formulation géométrique très simple du théorème d'indice d'Atiyah-Singer, dans lequel "l'analyse" est subsumée par une image géométrique. L'objet géométrique obtenu, appelé "groupoïde tangent"  $TG(M)$  d'une variété  $M$ , est obtenu en recollant le fibré tangent  $T(M)$  (vu comme le groupoïde qui est l'union des groupes additifs donnés par les espaces tangents  $T_x(M)$ ) avec l'espace  $M \times M \times ]0, 1]$ , vu comme l'union des groupoïdes "triviaux"  $M \times M$  où  $(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$ . À

l'inclusion  $T(M) \subset TG(M)$  correspond une suite exacte des  $C^*$ -algèbres correspondantes aux groupoïdes et on trouve sans effort que l'application de connexion pour la séquence exacte à six termes de la K-théorie est exactement l'indice analytique dans la formule d'indice d'Atiyah-Singer.

La preuve de la formulation de la K-théorie de la formule de l'indice d'Atiyah-Singer découle alors de l'analogie de l'isomorphisme de Thom dans le cas non-commutatif (cf. [15]).

La puissance de la formule d'indice d'Atiyah-Singer est cependant grandement accrue lorsqu'elle est formulée non pas en K-théorie mais lorsque le caractère de Chern est utilisé pour exprimer le côté topologique de la formule en termes "locaux" en utilisant des classes de caractéristiques. La première étape décisive dans cette direction avait été prise par Hirzebruch dans le cas particulier de l'opérateur de signature basé sur la théorie du cobordisme de Thom. En géométrie différentielle classique, la théorie de Chern-Weil était disponible avant la formule de l'indice et facilitait grandement la traduction de la K-théorie vers le langage cohomologique ordinaire.

En géométrie non-commutative, l'analogie de la théorie de Chern-Weil, à savoir la cohomologie cyclique, devait d'abord être développé comme un outil préliminaire nécessaire vers l'analogie de la formule d'indice "locale" d'Atiyah-Singer. La forme générale de la formule de l'indice local en géométrie non-commutative a été obtenue par H. Moscovici et moi-même en 1996, [25]. La notion conceptuelle de base qui a émergé de ces travaux est que la notion de localité est récupérée en l'absence de l'image habituelle "d'ensemble de points" en passant au dual de Fourier, c'est-à-dire en exprimant tout dans "l'espace de quantité de mouvement" où ce qui était local, c'est-à-dire ce qui se produisait "dans le petit" dans l'espace de coordonnées apparaît maintenant "dans le grand", c'est-à-dire comme asymptotique. De plus, les "expressions locales" sont exactement celles qui sont obtenues à partir de l'intégrale non-commutative donnée par la trace de Dixmier discutée ci-dessus, convenablement étendue (comme l'a d'abord étendue Wodzicki dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels classiques [60]) pour permettre l'intégration d'infinésimaux d'ordre inférieur à un <sup>15</sup>. La notion de courbure en géométrie non-commutative repose précisément sur ces formules.

De plus, alors que les espaces de feuilles des feuilletages étaient l'exemple motivant de ce théorème, une autre retombée a été le développement de la cohomologie cyclique pour les algèbres de Hopf, qui sera brièvement discutée ci-dessous.

Les formules de Lefschetz qui impliquent notamment des résultats en virgule fixe sont de même nature que la formule d'indice. Dans le cas le plus simple, ils sont obtenus en comparant les résultats du calcul de la trace d'un opérateur de deux manières différentes. L'une est "analytique" et consiste à additionner les valeurs propres de l'opérateur. L'autre est "géométrique" et s'obtient en additionnant les éléments diagonaux de la matrice de l'opérateur ou en général en intégrant le noyau de Schwartz de l'opérateur le long de la diagonale. La trace de Selberg et ses différents avatars jouent un rôle crucial dans le programme de Langlands, qui a été poursuivi avec succès dans les travaux de Drinfeld et Lafforgue dans le cas des corps de fonctions.

Un  $\mathbb{Q}$ -réseau  $n$ -dimensionnel ([31]) est constitué d'un réseau ordinaire  $\Lambda$  dans  $\mathbb{R}^n$  et d'un homomorphisme

$$\phi : \mathbb{Q}^n / \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Q}\Lambda / \Lambda.$$

---

<sup>15</sup>cf. formule (39) de la section 4.1.

Deux tels  $\mathbb{Q}$ -réseaux sont *commensurables* si et seulement si les réseaux correspondants sont commensurables et si les applications concordent modulo la somme des réseaux. L'espace non-commutatif  $\mathcal{L}_n$  des  $\mathbb{Q}$ -réseaux ([31]) est obtenu comme quotient par la relation de *commensurabilité*. Le groupe  $\mathbb{R}_+^*$  agit sur  $\mathcal{L}_n$  par mise à l'échelle. Il est assez remarquable que les zéros de la fonction zeta de Riemann apparaissent comme spectre d'absorption (cf. Fig. 7) de l'action de mise à l'échelle dans l'espace  $L^2$  de l'espace des classes de commensurabilité des  $\mathbb{Q}$ -réseaux de dimension 1 comme dans [19]. En fait le groupe de Galois  $G$  de  $\mathbb{Q}^{ab}$  agit sur  $\mathcal{L}_1$  de manière naturelle et l'espace  $L^2$  ci-dessus se décompose en une somme directe étiquetée par des caractères de  $G$  avec des spectres des fonctions  $L$  apparaissant dans chacun des secteurs. De plus les formules explicites de Riemann-Weil apparaissent à partir d'une formule trace ([19], [52]) profondément liée à la validité de l'hypothèse de Riemann.

Dans le cas des fonctions  $L$  associées à une variété arithmétique, la recherche d'une forme unifiée des facteurs locaux a conduit Deninger [37] à espérer la construction d'un hypothétique "site arithmétique" dont les propriétés attendues rappellent beaucoup l'espace des  $\mathbb{Q}$ -réseaux. Puisque ce dernier espace fournit une explication simple, comme formule de trace de type Lefschetz, pour les facteurs locaux des fonctions  $L$  de Hecke, il est naturel de l'étendre pour couvrir le cas des fonctions  $L$  associées à une variété arithmétique. Le premier pas dans cette direction est fait dans [32] et repose sur la confluence entre la théorie des motifs qui sous-tend les cohomologies impliquées dans la construction des fonctions  $L$  et la géométrie non-commutative qui sous-tend l'analyse d'espaces tels que l'espace des  $\mathbb{Q}$ -réseaux.

### 3.5. Catégories abéliennes.

Le langage des catégories est omniprésent dans la géométrie algébrique moderne. L'algèbre homologique est un outil d'une grande puissance qui est disponible dès que l'on traite des catégories abéliennes. De plus, la catégorie des représentations de dimension finie d'un schéma en groupes affines peut être caractérisée abstraitement comme une catégorie "tannakienne" c'est-à-dire une catégorie tensorielle remplissant certaines propriétés naturelles. Il est frappant que ce résultat ait été obtenu par les physiciens Doplicher et Roberts dans leurs travaux sur les secteurs de super-sélection en théorie algébrique quantique des champs et indépendamment par Deligne dans le contexte de la géométrie algébrique.

Exactement comme ce qui se passe pour les schémas, la catégorie des algèbres non-commutatives n'est même pas une catégorie additive puisque la somme de deux homomorphismes d'algèbres n'est en général pas un homomorphisme.

Afin de pouvoir utiliser l'arsenal de l'algèbre homologique, on plonge la catégorie ci-dessus dans une catégorie abélienne, la catégorie des  $\Lambda$ -modules, en utilisant la catégorie cyclique  $\Lambda$  [12].

Le foncteur résultant

$$A \rightarrow A^{\natural}$$

devrait être comparé à l'encastrement d'une variété dans un espace linéaire. Cela permet de traiter les algèbres comme des objets dans une catégorie abélienne pour laquelle de nombreux outils tels que les bifoncteurs

$$\text{Ext}^n(X, Y)$$

sont facilement disponibles. L'ingrédient clé est la *catégorie cyclique*. C'est une petite catégorie qui a le même espace classifiant que le groupe compact  $U(1)$ .

Elle peut être définie par ses générateurs et relations. Elle a les mêmes objets que la petite catégorie  $\Delta$  des ensembles finis totalement ordonnés et des fonctions croissantes qui jouent un rôle clé en topologie simpliciale. Rappelons que  $\Delta$  a un objet  $[n]$  pour tout nombre entier  $n$ , et est engendré par les faces  $\delta_i, [n-1] \rightarrow [n]$  (l'injection qui manque  $i$ ), et des dégénérescences  $\sigma_j, [n+1] \rightarrow [n]$  (la surjection qui identifie  $j$  avec  $j+1$ ), avec des relations élémentaires. Pour obtenir la catégorie cyclique  $\Lambda$ , on ajoute pour chaque  $n$  un nouveau morphisme  $\tau_n, [n] \rightarrow [n]$  tel que,

$$\begin{aligned}\tau_n \delta_i &= \delta_{i-1} \tau_{n-1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n \delta_0 = \delta_n \\ \tau_n \sigma_i &= \sigma_{i-1} \tau_{n+1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n \sigma_0 = \sigma_n \tau_{n+1}^2 \\ \tau_n^{n+1} &= 1_n.\end{aligned}$$

La définition originale de  $\Lambda$  (cf. [15]) utilisait des classes d'homotopie d'applications non décroissantes de  $S^1$  vers  $S^1$  de degré 1, envoyant  $\mathbb{Z}/n$  sur  $\mathbb{Z}/m$  et est trivialement équivalente à ce qui précède.

Étant donnée une algèbre  $A$ , on obtient un module  $A^\natural$  sur la petite catégorie  $\Lambda$  en affectant à chaque entier  $n \geq 0$  l'espace vectoriel  $C^n = A^{\otimes n+1}$ , tandis que les opérations de base sont données par

$$\begin{aligned}\delta_i(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) &= x^0 \otimes \dots \otimes x^i x^{i+1} \otimes \dots \otimes x^n, \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ \delta_n(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) &= x^n x^0 \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^{n-1} \\ \sigma_j(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) &= x^0 \otimes \dots \otimes x^j \otimes 1 \otimes x^{j+1} \otimes \dots \otimes x^n, \quad 0 \leq j \leq n \\ \tau_n(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) &= x^n \otimes x^0 \otimes \dots \otimes x^{n-1}.\end{aligned}$$

Ces opérations satisfont la forme contravariante des relations ci-dessus. Ceci montre que toute algèbre  $A$  donne canoniquement lieu à un  $\Lambda$ -module<sup>16</sup>  $A^\natural$  et donne un foncteur covariant naturel de la catégorie des algèbres vers la catégorie abélienne des  $\Lambda$ -modules. Cela donne [15] une interprétation des groupes de cohomologie cyclique  $HC^n(A)$  comme foncteurs  $\text{Ext}^n$  de sorte que

$$HC^n(A) = \text{Ext}^n(A^\natural, \mathbb{C}^\natural).$$

Toutes les propriétés générales de la cohomologie cyclique telles que la suite exacte longue la rapportant à la cohomologie de Hochschild sont partagées par les  $\text{Ext}$  des  $\Lambda$ -modules généraux et peuvent être attribuées à l'égalité de l'espace classifiant  $B\Lambda$  de la petite catégorie  $\Lambda$  avec l'espace classifiant  $BS^1$  du groupe de Lie compact uni-dimensionnel  $S^1$ . On a [12],

$$(27) \quad B\Lambda = BS^1 = P_\infty(\mathbb{C})$$

<sup>16</sup>La petite catégorie  $\Lambda$  étant canoniquement isomorphe à son contraire il n'y a pas de réelle différence entre foncteurs covariants et contravariants.

### 3.6. Symétries.

Il est difficile de surestimer la puissance de l'idée de symétrie en mathématiques. Dans de nombreux cas, elle permet de contourner des calculs compliqués en devinant la réponse à partir de ses propriétés d'invariance. C'est précisément dans la capacité de contourner les calculs que réside la puissance des mathématiques modernes inaugurées par les travaux d'Abel et de Galois. Écoutons Galois :

“Sauter à pieds joints sur ces calculs, grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non leurs formes, telle est suivant moi, la mission des géomètres futurs.”

Abel et Galois ont analysé les symétries des fonctions des racines des équations polynomiales et Galois a trouvé qu'une fonction des racines est une expression “rationnelle” si et seulement si elle est invariante par un groupe spécifique  $G$  des permutations naturellement associées à l'équation et à la notion de ce qui est considéré comme étant “rationnel”. Une telle notion définit un corps  $K$  contenant le corps  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels toujours présents en caractéristique zéro. Il exhibe d'abord une fonction rationnelle<sup>17</sup>

$$V(a, b, \dots, z)$$

des  $n$  racines distinctes  $(a, b, \dots, z)$  d'une équation de degré donné  $n$ , qui affecte  $n!$  différentes valeurs selon toutes les permutations des racines, i.e. qui casse la symétrie de façon “maximale”. Il montre alors qu'il existe des fonctions “rationnelles”  $\alpha(V), \beta(V), \dots$  de  $V$  qui redonne les racines  $(a, b, \dots, z)$ . Son groupe  $G$  est obtenu en décomposant en facteurs irréductibles sur le corps  $K$  le polynôme (sur  $K$ ) de degré  $n!$  dont  $V$  est une racine. Utiliser les fonctions rationnelles ci-dessus

$$\alpha(V_j), \beta(V_j), \dots$$

appliquées aux autres racines  $V_j$  du facteur irréductible qui admet  $V$  comme racine donne le groupe désiré de permutations<sup>18</sup> des  $n$  racines  $(a, b, \dots, z)$ .

Cette procédure a toutes les caractéristiques des mathématiques **fondamentales** :

- elle contourne les calculs compliqués.
- elle se concentre sur la propriété clé de la solution.
- elle a un pouvoir déconcertant : elle permet la création d'un nouveau concept.

En géométrie non-commutative, les symétries sont codées par des algèbres de Hopf qui ne doivent pas nécessairement être commutatives ou co-commutatives. Outre les groupes quantiques qui jouent en géométrie non-commutative un rôle analogue à celui des groupes de Lie en géométrie différentielle classique, certaines algèbres naturelles de Hopf de dimension infinie ni commutatives ni co-commutatives sont apparues naturellement dans la géométrie transverse des feuilletages. On a d'abord découvert au début des années quatre-vingt que la classe de Godbillon-Vey ou des classes plus générales de Gelfand-Fuchs apparaissait en fait dans la cohomologie cyclique des algèbres de feuilletage et permettait de mettre en relation des hypothèses de géométrie différentielle pure avec les invariants les plus fins de l'algèbre de von-Neumann

<sup>17</sup>que l'on peut prendre sous forme linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .

<sup>18</sup>La racine  $V_1 = V$  donne la permutation d'identité.

d'un feuilletage tel que son flux de poids [13].

La construction d'un triplet spectral associé à la géométrie transverse d'un feuilletage arbitraire a pris beaucoup de temps et a été réalisée dans [25]. Le calcul compliqué de la formule d'indice local pour un tel triplet spectral a nécessité de développer d'abord l'analogie de la cohomologie de l'algèbre de Lie dans le contexte des algèbres de Hopf qui ne sont pas tenues d'être commutatives ou co-commutatives. Ceci a été fait dans [26] et la cohomologie cyclique correspondante des algèbres de Hopf joue en général le même rôle que la théorie classique des classes caractéristiques pour les groupes de Lie. Cela nous a permis d'exprimer la formule de l'indice local pour la géométrie transverse des feuilletages en termes de classes de Gelfand-Fuchs. De plus, elle transite par la catégorie ci-dessus des  $\Lambda$ -modules qui semble jouer un rôle plutôt "universel" dans les constructions cohomologiques. La théorie a été étendue récemment au cadre beaucoup plus large des modules anti de Yetter-Drinfeld [42].

#### 4. LES ENTRÉES DE LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

La profondeur des concepts mathématiques qui viennent directement de la physique a été qualifiée en ces termes par Hadamard :

"Non pas cette nouveauté éphémère qui peut trop souvent influencer le mathématicien livré à lui-même, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses.

Il est en effet assez difficile pour un mathématicien de ne pas être attiré par le mystère apparent qui sous-tend la renormalisation, une technique combinatoire imaginée par des physiciens purs et durs à partir de 1947, pour se débarrasser des "divergences" indésirables qui tourmentaient les calculs de la théorie quantique des champs lorsqu'ils ont essayé d'aller au-delà de l'approximation "au niveau de l'arbre", une approximation qui avait tant de succès entre les mains de Dirac avec son calcul des coefficients A et B d'Einstein pour l'interaction de la matière avec le rayonnement.

Comme on le sait, la technique de renormalisation, lorsqu'elle est combinée avec le modèle standard lagrangien de la physique, est si efficace qu'elle prédit les résultats (tels que le moment anormal de l'électron) avec une précision déconcertante<sup>19</sup>. Il y a donc clairement "quelque chose qui va bien" et il est crucial d'essayer de comprendre quoi.

Comme nous l'expliquerons ci-dessous, la géométrie non-commutative a son mot à dire à la fois sur le modèle standard de la physique des particules et sur la renormalisation. Dans ce dernier cas, cela vient de mes travaux communs avec D. Kreimer [22] et avec M. Marcolli [33].

##### 4.1. Le modèle standard.

Une leçon claire de la relativité générale est que la "gravité" est codée par la géométrie de l'espace-temps, tandis que la courbure joue un rôle fondamental à travers la fonctionnelle d'action (13). La gravité n'est pas la seule "force fondamentale" et les trois autres (faible, électromagnétique et forte) se combinent en une action "matière" supplémentaire correspondant aux cinq types de termes du modèle standard lagrangien. Ainsi l'action complète est de la forme

---

<sup>19</sup>de l'épaisseur d'un cheveu sur la distance Paris-New York.

$$(28) \quad S = S_E + S_G + S_{GH} + S_H + S_{Gf} + S_{Hf}$$

où  $S_E$  est l'action de Hilbert-Einstein (13),  $S_G$  est l'auto-interaction Yang-Mills des bosons de jauge,  $S_H$  est l'auto-interaction quartique des bosons de Higgs,  $S_{GH}$  est le couplage minimal des bosons de jauge avec les bosons de Higgs, etc...

La géométrie de Minkowski de l'espace-temps a été déduite de la partie de Maxwell du lagrangien de la physique et notre but est d'incorporer dans le modèle de la géométrie de l'espace-temps les modifications qui correspondent aux termes supplémentaires des forces faibles et fortes. Nous n'aborderons pas le problème important de la relation entre les cadres euclidien et de Minkowski et travaillerons uniquement dans la signature euclidienne.

Notre point de départ est la fonctionnelle d'action (28) que nous considérons comme la meilleure approximation de la "physique jusqu'au TEV". Nous pouvons commencer à comprendre quelque chose en regardant le groupe de symétrie de cette fonctionnelle. Si nous avons affaire à la gravité pure, c'est-à-dire à la seule théorie d'Einstein, le groupe de symétrie de la fonctionnelle serait simplement le groupe des difféomorphismes de la variété usuelle de l'espace-temps, mais à cause de la contribution du modèle standard, les théories de jauge introduisent un autre grand groupe de symétrie, à savoir le groupe des applications<sup>20</sup> de la variété vers le petit groupe de jauge, ce qui amène à des énergies qui couvrent, à notre connaissance, un domaine jusqu'à quelques centaines de GeV, c'est le groupe  $U_1 \times SU_2 \times SU_3$ . Le groupe de symétrie  $G$  de la fonctionnelle complète  $S$  (28) n'est pas le produit du groupe de difféomorphismes par le groupe des transformations de jauge de seconde espèce, mais c'est leur produit semi-direct. Les transformations de jauge et les difféomorphismes se mélangent de la même manière que les translations et les transformations de Lorentz se rejoignent dans le groupe de Poincaré.

À ce stade, on peut se poser deux questions très simples :

- Existe-t-il un espace  $X$  tel que  $\text{Diff}(X)$  coïncide avec le groupe de symétrie  $G$  ?
- Existe-t-il une fonction d'action simple qui reproduit la fonction d'action (28) lorsqu'elle est appliquée à  $X$  ?

En d'autres termes, nous demandons de géométriser complètement le modèle effectif de l'espace-temps en tant que gravité pure de l'espace. Bien sûr nous ne croyons pas que le modèle standard couplé à la gravité soit le "dernier mot" mais nous pensons qu'il est crucial de rester dans la géométrie pure même au niveau "effectif" pour avoir une meilleure idée de la structure de l'espace-temps basée sur des preuves expérimentales.

Maintenant, si nous cherchons  $X$  parmi les variétés ordinaires, nous n'avons aucune chance de trouver une solution puisque par un résultat de Mather et Thurston, le groupe de difféomorphismes d'une variété (connexe) est un groupe simple. Un groupe simple n'a pas de sous-groupe normal non trivial et ne peut pas être un produit semi-direct de manière non triviale.

Cette obstruction disparaît dans le monde non-commutatif, où tout variant du groupe d'automorphismes  $\text{Aut}^+(\mathcal{A})$  contiendra automatiquement un sous-groupe normal non trivial  $\text{Int}^+(\mathcal{A})$  d'automorphismes in-

<sup>20</sup>appelées transformations de jauge de seconde espèce.

térieurs, à savoir ceux de la forme

$$\text{Ad}_u(x) = uxu^*$$

Il s'avère que, modulo une discussion soignée de la levée des éléments de  $\text{Aut}^+(\mathcal{A})$ , il y a une algèbre non-commutative très naturelle  $\mathcal{A}$  dont la symétrie est le groupe ci-dessus  $G$  [56] [57]. Le groupe des automorphismes intérieurs correspond au groupe des transformations de jauge et le quotient par les symétries internes correspond aux difféomorphismes. Il est réconfortant que le vocabulaire de la physique soit le même que celui des mathématiques. En physique on parle de symétries *internes* et en mathématiques d'automorphismes intérieurs.

L'espace correspondant est un produit  $X = M \times F$  d'une variété ordinaire  $M$  par un espace fini non-commutatif  $F$ . L'algèbre  $\mathcal{A}_F$  décrivant l'espace fini  $F$  est la somme directe des algèbres  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  (les quaternions), et  $M_3(\mathbb{C})$  des matrices complexes  $3 \times 3$ .

Les fermions du modèle standard et les paramètres de Yukawa (masse des fermions et matrice de mélange de Kobayashi Maskawa) déterminent la géométrie spectrale de l'espace fini de la manière suivante. L'espace de Hilbert est de dimension finie et admet comme base l'ensemble des fermions élémentaires. Par exemple pour la première génération de quarks, cet ensemble est (avec des étiquettes "couleur" appropriées),

$$(29) \quad u_L, u_R, d_L, d_R, \bar{u}_L, \bar{u}_R, \bar{d}_L, \bar{d}_R.$$

L'algèbre  $\mathcal{A}_F$  admet une représentation naturelle dans  $\mathcal{H}_F$  (voir [17]) et la matrice de couplage de Yukawa  $Y$  détermine l'opérateur  $D$ .

La structure détaillée de  $Y$  (et en particulier le fait que la couleur n'est pas brisée) permet de vérifier les propriétés algébriques de base de la géométrie non-commutative. Parmi celles-ci, une propriété importante est la condition "d'ordre un" qui signifie que pour une structure réelle appropriée  $J$  donnée par une involution anti-linéaire sur l'espace de Hilbert, les relations de commutation suivantes sont vérifiées,

$$(30) \quad [a, b^\circ] = 0, [D, a], b^\circ = 0, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad b^\circ = Jb^*J^{-1}.$$

Maintenant, de même que les difféomorphismes de  $X$  admettent des perturbations internes, les métriques (données par l'inverse de l'élément de longueur  $D$ ) admettent des perturbations internes. Celles-ci proviennent immédiatement de la tentative de transfert d'une métrique donnée sur une algèbre  $\mathcal{A}$  vers une algèbre  $\mathcal{B} = \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$  avec un  $\mathcal{A}$ -module projectif fini à droite équivalente à  $\mathcal{E}$  selon l'équivalence de Morita. En effet, alors que l'espace de Hilbert  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  est facile à définir en utilisant une structure hermitienne sur  $\mathcal{E}$ , l'extension de l'opérateur  $D$  à  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  nécessite le choix d'une "connexion" i.e. d'une application linéaire vérifiant la règle de Leibniz

$$(31) \quad \nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1, \quad \nabla(\xi a) = \nabla(\xi)a + \xi[D, a],$$

où  $\Omega^1$  est le  $\mathcal{A}$ -bimodule des combinaisons linéaires d'opérateurs sur  $\mathcal{H}$  de la forme  $a[D, b]$  pour  $a, b \in \mathcal{A}$ .

L'extension de  $D$  to  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$  est alors simplement donnée par

$$(32) \quad \bar{D}(\xi \otimes \eta) = \nabla(\xi)\eta + \xi \otimes D\eta.$$

Les “perturbations internes” de la métrique proviennent alors de l’évidente auto-équivalence de Morita de  $\mathcal{A}$  avec elle-même donnée par le module à droite  $\mathcal{A}$ , et celles qui préservent la structure réelle  $J$  sont alors de la forme,

$$(33) \quad D \rightarrow D + A + JAJ^{-1}, \quad \forall A = A^* \in \Omega^1.$$

Quand on calcule les perturbations internes de la géométrie produit  $M \times F$  où  $M$  est une variété de spin riemannienne 4-dimensionnelle, on trouve les bosons de jauge du modèle standard  $\gamma, W^\pm, Z$ , les huit gluons et les champs de Higgs  $\varphi$  avec des nombres quantiques précis.

Il s’avère que la deuxième des questions ci-dessus, à savoir trouver un principe d’action simple qui reproduit la fonctionnelle d’action (28) admet également une réponse remarquablement agréable. Pour le comprendre, il faut d’abord réfléchir un peu à la notion d’observable” en gravitation. L’invariance par difféomorphisme de la théorie prive l’idée de “point spécifique” de toute signification intrinsèque et seules des grandeurs telles que “diamètre” etc... qui peuvent être définies de façon invariante par rapport aux difféomorphismes sont “observables”. Il est facile de vérifier qu’il en est ainsi pour toutes les propriétés spectrales de l’opérateur de Dirac. Ainsi une forme assez forte d’invariance de difféomorphisme est obtenue en imposant que la fonctionnelle d’action soit “spectrale”, c’est-à-dire entièrement déduite du spectre de l’opérateur  $D$  définissant la métrique. Le spectre de  $D$  est analysé par la fonction de comptage,

$$(34) \quad N(\Lambda) = \# \text{ valeurs propres de } D \text{ dans } [-\Lambda, \Lambda].$$

Cette fonction en escalier  $N(\Lambda)$  est la superposition de deux termes.

$$(35) \quad N(\Lambda) = \langle N(\Lambda) \rangle + N_{\text{osc}}(\Lambda).$$

où la “partie moyenne” est donnée comme une somme étiquetée par le “spectre de dimension”  $S$  de l’espace non-commutatif  $X$  considéré comme,

$$(36) \quad \langle N(\Lambda) \rangle = S_\Lambda(D) = \sum_{k \in S} \frac{\Lambda^k}{k} \int |ds|^k + \zeta_D(0),$$

où  $\zeta_D(s) = \text{Trace}(|D|^{-s})$  et les différents termes  $\int |ds|^k$  sont donnés comme résidus de  $\zeta_D(s)$  aux éléments  $k \in S$  du spectre de dimension. La partie oscillante  $N_{\text{osc}}(\Lambda)$  est la même que pour une matrice aléatoire et n’est pas pertinente ici.

Le calcul détaillé de la fonctionnelle d’action spectrale  $S_\Lambda(D)$  dans le cas des perturbations internes de l’espace ci-dessus  $X = M \times F$  est assez complexe et nous renvoyons à ([4]) et ([46]) pour les détails précis. L’action de Hilbert-Einstein fonctionnelle pour la métrique riemannienne, l’action de Yang-Mills pour les potentiels vectoriels, l’auto-interaction et le couplage minimal pour le champ de Higgs apparaissent tous avec les signes corrects pour donner les quatre premiers termes “bosoniques”

$$(37) \quad S_{\text{bos}} = S_E + S_G + S_{GH} + S_H$$

tandis que les deux derniers termes “fermioniques” dans (28) sont simplement donnés dès le début comme

$$(38) \quad S_{\text{fer}} = S_{Gf} + S_{Hf} = \langle f, D f \rangle.$$

Par exemple, pour voir pourquoi l'action de Hilbert-Einstein apparaît, on peut vérifier le calcul suivant du volume bidimensionnel (i.e. l'"aire") d'une variété riemannienne compacte à quatre dimensions  $M_4$  (cf. [45]),

$$(39) \quad \int d s^2 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{M_4} r \sqrt{g} d^4 x$$

qu'il convient de comparer à (13). Notons que ce résultat permet de retrouver la pleine connaissance de la courbure scalaire puisque l'on obtient en fait pour toute fonction sur la variété  $M_4$  l'égalité,

$$(40) \quad \int f d s^2 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{M_4} r f \sqrt{g} d^4 x$$

Deux autres termes apparaissent en plus au-dessus de  $S_{\text{bos}} = S_E + S_G + S_{GH} + S_H$  dans le calcul de  $\langle N(\Lambda) \rangle$  pour les perturbations intérieures de l'espace ci-dessus  $X = M \times F$ , ce sont

- le terme "cosmologique"  $\Lambda^4 \int d s^4$  où  $\int d s^4$  est une constante universelle multipliée par le volume riemannien,
- les termes de gravité de Weyl faisant intervenir la courbure de Weyl et les termes topologiques.

La prochaine étape naturelle est d'essayer de donner un sens à une intégrale fonctionnelle "euclidienne" de la forme

$$(41) \quad \langle \sigma \rangle = \mathcal{N} \int \sigma(D, f) e^{-S_\Lambda(D) - \langle f, D f \rangle} D[D] D[f]$$

où  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation,  $\sigma(D, f)$  est une observable spectrale, c'est-à-dire une fonction unitairement covariante de l'opérateur auto-adjoint  $D$  et d'un vecteur  $f$ ,  $f \in \mathcal{H}$ . La première difficulté est d'écrire la contrainte sur l'opérateur hermitien aléatoire  $D$  en affirmant qu'il s'agit de l'inverse de l'élément de longueur pour une géométrie appropriée. C'est là que l'algèbre  $\mathcal{A}$  qui fait partie du triplet spectral doit entrer en scène. Son rôle est de permettre d'écrire une équation de nature cohomologique définissant la classe fondamentale d'homologie de l'espace géométrique i.e. un 4-cocycle de Hochschild<sup>21</sup>  $c = \sum a_0 d a_1 \dots d a_4$ . La contrainte de base de type "Heisenberg" est alors

$$(42) \quad a_0 [D, a_1] \dots [D, a_4] = \gamma_5$$

En fixant la forme volumique (comme la classe de Hochschild de  $c$ ), cela fige le degré de liberté "de Weyl" qui est le seul à avoir un mauvais signe dans l'intégrale fonctionnelle euclidienne qui n'est plus effectuée qu'entre "métriques" avec une forme de volume fixée. Notons que les  $a_j$  sont des "générateurs" de l'algèbre  $\mathcal{A}$  dont le seul rôle est de fournir le 4-cocycle de Hochschild de base  $c$  de sorte que l'équation remplie par les  $a_j$  vus comme opérateurs dans  $\mathcal{H}$  est l'annulation de la frontière de Hochschild de  $c$ . On a commencé dans [27], [28], [29] la recherche de solutions des équations ci-dessus et des analogues en dimension inférieure.

---

<sup>21</sup>si on travaille en dimension 4.

## 4.2. Renormalisation.

Bien sûr, l'obstacle fondamental dans le traitement des intégrales fonctionnelles se produisant dans la théorie quantique des champs est que les expressions obtenues à partir de l'expansion perturbative des intégrales fonctionnelles les plus simples sont généralement divergentes et nécessitent une "renormalisation". Il n'y a rien de "non physique" à cela, puisque les divergences viennent de la nature même de la théorie quantique des champs, et la suppression des divergences vient naturellement du point de vue de la physique qui enseigne à distinguer les grandeurs mesurées expérimentalement comme les masses, les charges etc... des données dépouillées (non expérimentales) dans les équations mathématiques.

Les subtilités de la technique de renormalisation étaient cependant suffisamment combinatoires pour empêcher une compréhension mathématique conceptuelle aisée. Cet état de fait a radicalement changé ces dernières années grâce aux étapes suivantes réalisées dans ma collaboration avec D. Kreimer :

- La découverte d'une algèbre de Hopf sous-jacente à la méthode de renormalisation BPHZ [48] [21];
- L'analyse du groupe  $\text{Difg}(\mathcal{T})$  des difféomorphismes d'une théorie quantique des champs donnée  $\mathcal{T}$  [21] ;
- La découverte de l'identité entre la décomposition de Birkhoff des lacets en groupes de Lie pro-unipotents et la combinatoire du schéma de soustraction minimale en régularisation dimensionnelle [22] ;
- La construction pour les théories sans masse d'une action de  $\text{Difg}(\mathcal{T})$  par les difféomorphismes formels des constantes de couplage de la théorie [22].

À la suite des développements ci-dessus, on peut exprimer le processus de renormalisation dans les termes conceptuels suivants, en prenant pour théorie une théorie sans masse  $\mathcal{T}$  avec une seule constante de couplage sans dimension  $g$ . Soit  $g_{\text{eff}}(z)$  la constante de couplage effective non renormalisée en dimension  $D - z$ , vue comme une séquence de puissances formelles en  $g$  et une fonction de la variable complexe  $z$ . Dénotons alors par

$$(43) \quad g_{\text{eff}}(z) = g_{\text{eff}_+}(z)(g_{\text{eff}_-}(z))^{-1}$$

la décomposition de Birkhoff de cette boucle dans le groupe des difféomorphismes formels, with  $g_+$  regular at  $z = 0$  and  $g_-$  regular outside  $z = 0$  and normalized to be 1 at  $\infty$ . Alors la boucle  $g_{\text{eff}_-}(z)$  est la constante de couplage nue et  $g_{\text{eff}_+(0)}$  est le couplage effectif renormalisé.

## 4.3. Symétries.

La décomposition de Birkhoff (c'est-à-dire une décomposition telle que (43)) joue un rôle clé dans le traitement du problème de Riemann-Hilbert, c'est-à-dire pour trouver une équation différentielle avec des singularités données et des monodromies données. Ainsi, le rôle de la décomposition de Birkhoff dans la

---

<sup>22</sup>et de son algèbre de Lie.

compréhension conceptuelle ci-dessus de la combinatoire de la procédure de soustraction dans la renormalisation a suggéré une relation potentielle entre la renormalisation et la correspondance de Riemann-Hilbert. Cette dernière est un thème très large en mathématiques impliquant la classification de données “géométriques” telles que les équations différentielles et les connexions plates sur des fibrés vectoriels en termes de données “théoriques de représentation” impliquant des variations sur l’idée de monodromie. Ces variations interviennent davantage dans le cas singulier “irrégulier” comme dans les travaux de Martinet-Ramis [51].

La correspondance de Riemann-Hilbert sous-jacente à la renormalisation a été dévoilée dans mon travail conjoint avec M. Marcolli [33]. Le côté “géométrique” de la correspondance est donné par des connexions plates “équisingulières” sur des fibrés vectoriels sur un espace de base  $B$  qui est décrit à la fois en termes mathématiques et en termes physiques.

En termes “mathématiques”,  $B$  est l’espace total d’un fibré  $\mathbb{G}_m$ -principal <sup>[23]</sup> sur un disque infinitésimal  $\Delta$  in  $\mathbb{C}$ . La connexion est  $\mathbb{G}_m$ -invariante et singulière sur la “fibre spéciale” sur  $0 \in \Delta$ . La propriété clé “d’équisingularité” est que les pull backs de la connexion sous les sections du faisceau  $B$  qui prennent la même valeur en  $0 \in \Delta$  ont tous les mêmes singularités en  $0$ .

En termes “physiques”, la base  $\Delta$  est l’espace des dimensions complexifié autour de  $D \in \mathbb{C}$ , la dimension où l’on voudrait faire de la physique. Les fibres du fibré  $\mathbb{G}_m$ -principal correspondent à la normalisation de l’intégrale en dimension complexe telle qu’utilisée par les physiciens dans la régularisation dimensionnelle (Dim. Reg.). L’entrée de la physique que les contre-termes sont indépendants du choix supplémentaire d’une unité de masse se traduit par la notion d’équisingularité pour la connexion naturellement fournie par les calculs de la théorie quantique des champs.

Le côté “théorique des représentations” de notre correspondance de Riemann-Hilbert est d’abord défini de manière abstraite et sans ambiguïté comme le schéma de groupe affine qui classe les connexions plates équisingulières sur des fibrés vectoriels de dimension finie. Ce que nous montrons [33], c’est qu’en travaillant avec des séries formelles de Laurent sur  $\mathbb{Q}$ , les données des fibrés vectoriels plats équisinguliers définissent une catégorie tannakienne dont les propriétés rappellent une catégorie de motifs de Tate mixtes. Cette catégorie est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie d’un schéma en groupe affine unique  $U^*$  et notre résultat principal est la détermination explicite du “groupe de Galois motivique”  $U^*$ , qui est déterminé de manière unique et universel par rapport à l’ensemble des théories physiques. Le groupe de renormalisation peut être identifié canoniquement avec un sous-groupe à un paramètre de  $U^*$ .

En tant que schéma de groupe algébrique,  $U^*$  est un produit semi-direct par le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$  d’un schéma de groupe pro-unipotent dont l’algèbre de Lie est engendrée librement par un générateur à chaque degré entier positif. En particulier,  $U^*$  non canoniquement isomorphe à  $G_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{O})$  i.e. est le groupe de Galois motivique ([40], [36]) du schéma  $S_4 = \text{Spec}(\mathcal{O})$  d’entiers 4-cyclotomiques.

Nous montrons qu’il existe un cadre singulier universel dans lequel, en utilisant la régularisation dimensionnelle et le schéma de soustraction minimale, toutes les divergences disparaissent. Lorsqu’ils sont calculés comme des intégrales itérées, les coefficients du repère singulier universel sont certains nombres rationnels qui sont les mêmes que les coefficients “mystérieux” dans la formule d’indice local [25] de la

<sup>23</sup>où  $\mathbb{G}_m$  désigne ici le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ .

géométrie non-commutative de la section 3.4. Cela suggère des relations plus profondes entre l'utilisation du groupe de renormalisation dans le cas de multiplicités plus élevées dans le spectre de dimension dans la preuve de la formule de l'indice local [25] et la théorie des anomalies dans les théories quantiques chirales des champs.

Ce travail réalise l'espoir formulé dans [23] de relier concrètement le groupe de renormalisation à un groupe de Galois et confirme une suggestion qu'a faite Cartier dans [3], qui est que dans la théorie de Connes-Kreimer de la renormalisation perturbative, on devrait trouver un "groupe de Galois cosmique" caché, structure étroitement liée au groupe de Grothendieck-Teichmüller.

L'ensemble de ces faits indique que les divergences de la théorie quantique des champs, loin d'être simplement des nuisances indésirables, sont un signe clair de la présence de symétries d'origine géométrique totalement inattendues. Cela montre, en particulier, qu'il faut essayer de comprendre comment le repère singulier universel "renormalise" la géométrie de l'espace-temps à l'aide du schéma de soustraction minimale Dim-Reg et des contre-termes universels. L'étape suivante consiste à combiner cette compréhension avec les discussions ci-dessus du modèle standard et l'appliquer à l'action spectrale considérée comme une théorie quantique des champs très spécifique dictée par des preuves expérimentales.

## Références

- [1] M.F. ATIYAH, Global theory of elliptic operators, *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics* (Tokyo, 1969), University of Tokyo press, Tokyo (1970), 21-30.
- [2] L.G. BROWN, R.G. DOUGLAS, P.A. FILLMORE, Extensions of  $C^*$ -algebras and K-homology, *Ann. of Math.* 2, **105** (1977), 265-324.
- [3] P. CARTIER, *A mad day's work : from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry*, in "Les relations entre les mathématiques et la physique théorique", 23-42, Inst. Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, 1998. (English translation in *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 38 (2001), no. 4, 389-408).
- [4] A. CHAMSEDDINE, A. CONNES, Universal formulas for non-commutative geometry actions, *Phys. Rev. Letters* **77** 24 (1996), 4868-4871.
- [5] A. CONNES, Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 274 (1972), 1923-1926.
- [6] A. CONNES, Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **6**, n. 4 (1973), 133-252.
- [7] A. CONNES, Classification of injective factors, *Ann. of Math.*, **104**, n. 2 (1976), 73-115.
- [8] A. CONNES, The von Neumann algebra of a foliation. Mathematical problems in theoretical physics (Proc. Internat. Conf., Univ. Rome, Rome, 1977), pp. 145-151, *Lecture Notes in Phys.*, 80, Springer, Berlin-New York, 1978.
- [9] A. CONNES,  $C^*$ -algèbres et géométrie différentielle. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B* **290** (1980).
- [10] A. CONNES, *Spectral sequence and homology of currents for operator algebras*, Math. Forschungsinst. Oberwolfach Tagungsber., 41/81 Funktionalanalysis und  $C^*$ -Algebren, 27-9/3-10 (1981).
- [11] A. CONNES, Non-commutative differential geometry. Part I : The Chern character in K-homology, *Preprint IHES (M/82/53)*, 1982 ; Part II : de Rham homology and non-commutative algebra, *Preprint IHES (M/83/19)*, 1983. Non-commutative differential geometry, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **62** (1985), 257-360.

- [12] A. CONNES, Cohomologie cyclique et foncteur  $Ext^n$ . *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I Math* **296** (1983).
- [13] A. CONNES, Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation, *Geometric methods in operator algebras*, (Kyoto, 1983), pp. 52-144, *Pitman Res. Notes in Math.* **123** Longman, Harlow (1986).
- [14] A. CONNES, M. KAROUBI, Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm. *K-Theory* **2** (1988), no. 3, 431-463.
- [15] A. CONNES *Non-commutative geometry*, Academic Press (1994).
- [16] A. CONNES, Gravity coupled with matter and foundation of non-commutative geometry, *Commun. Math. Phys.* **182** (1996), 155-176.
- [17] A. CONNES, Non-commutative geometry and reality, *Journal of Math. Physics* **36** n.11 (1995).
- [18] A. CONNES, M. RIEFFEL, Yang-Mills for non-commutative two tori, *Operator algebras and mathematical physics*, (Iowa City, Iowa, 1985), pp. 237-266 ; *Contemp. Math. Oper. Algebra Math. Phys.* **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [19] A. CONNES, Trace formula in Non-commutative Geometry and the zeros of the Riemann zeta function, *Selecta Mathematica* New Ser. 5 (1999) 29-106.
- [20] A. CONNES, M. DOUGLAS, A. SCHWARZ, Non-commutative geometry and Matrix theory : compactification on tori, *J. High Energy Physics*, **2** (1998).
- [21] A. CONNES, D. KREIMER, Hopf algebras, Renormalization and Non-commutative Geometry, *Commun. Math. Phys.* **199**, 203 (1998) ; hep-th/9808042.
- [22] A. CONNES, D. KREIMER, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. hep-th/9912092. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II : The  $\beta$  function, diffeomorphisms and the renormalization group. hep-th/0003188.
- [23] A. CONNES, *Symétries Galoisiennes et Renormalisation*, in "Poincaré Seminar 2002 : Vacuum Energy-Renormalization", Progress in Mathematical Physics, V. 30, Birkhauser 2003.
- [24] A. CONNES, H. MOSCOVICI, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, *Topology* **29** (1990), 345-388.
- [25] A. CONNES, H. MOSCOVICI, The local index formula in non-commutative geometry, *GAFA*, **5** (1995), 174-243.
- [26] A. CONNES, H. MOSCOVICI, Hopf Algebras, Cyclic Cohomology and the Transverse Index Theorem, *Commun. Math. Phys* **198**, (1998) 199-246.
- [27] A. CONNES, G. LANDI, Non-commutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations, math.QA/0011194.
- [28] A. CONNES, M. DUBOIS-VIOLETTE, Non-commutative finite-dimensional manifolds, I. spherical manifolds and related examples, Math QA/0107070.
- [29] A. CONNES, M. DUBOIS-VIOLETTE, *Moduli space and structure of non-commutative 3-spheres*, preprint arXiv math.QA/0308275.
- [30] A. CONNES, H. MOSCOVICI, Modular Hecke Algebras and their Hopf Symmetry (2003), Math QA/0301089. Rankin-Cohen Brackets and the Hopf Algebra of Transverse Geometry (2003), Math QA/0304316.
- [31] A. CONNES, M. MARCOLLI, The Quantum Statistical Mechanics of  $\mathbb{Q}$ -Lattices (2004), Math NT/0404128.

- [32] A. CONNES, K. CONSANI, M. MARCOLLI, Lefschetz formula and local factors of L-functions.
- [33] A. CONNES, M. MARCOLLI, Renormalization and motivic Galois theory (2004), Math NT/0409306.
- [34] C. CONSANI, M. MARCOLLI, Non-commutative geometry, dynamics, and infinity-adic Arakelov geometry, math.AG/0205306. To appear in *Selecta*.
- [35] L. DABROWSKI, A. SITARZ, Dirac Operator on the Standard Podleś Quantum Sphere, Banach Center Publication, math.QA/0209048.
- [36] P. DELIGNE, A.B. GONCHAROV, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, preprint, math.NT/0302267.
- [37] C. DENINGER, Local  $L$ -factors of motives and regularised determinants, *Invent. Math.*, **107** (1992), 135-150.
- [38] J. DIXMIER, Existence de traces non normales, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B* **262** (1966).
- [39] H. FREUDENTHAL, *Lincos*, North Holland (1960).
- [40] A. GONCHAROV, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, preprint, math.AG/0103059.
- [41] A. GROTHENDIECK, Récoltes et semailles.
- [42] P.M. HAJAC, M. KHALKHALI, B. RANGIPOUR, Y. SOMMERHAEUSER, Hopf-cyclic homology and cohomology with coefficients. math.KT/0306288.
- [43] N. HIGSON, The local index formula in non-commutative geometry, Trieste Lecture Notes available at [http://www.math.psu.edu/higson/Research Papers.html](http://www.math.psu.edu/higson/Research%20Papers.html).
- [44] G.G. KASPAROV, The operator  $K$ -functor and extensions of  $C^*$ -algebras, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **44** (1980), 571-636 ; *Math. USSR Izv.* **16** (1981), 513-572.
- [45] D. KASTLER, The Dirac operator and gravitation, *Commun. Math. Phys.* **166** (1995), 633-643.
- [46] D. KASTLER, Non-commutative geometry and fundamental physical interactions : The lagrangian level. *Journal. Math. Phys.* **41** (2000), 3867-3891.
- [47] U. KRAEHMER, Dirac Operators on Quantum Flag Manifolds. math.QA/0305071.
- [48] D. KREIMER, *On the Hopf algebra structure of perturbative Quantum Field Theory*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), no. 2, 303-334.
- [49] S. MACLANE, I. MOERDIJK, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag (1992).
- [50] Y.I. MANIN, M. MARCOLLI, *Continued fractions, modular symbols, and non-commutative geometry*, *Selecta Mathematica (New Series)* Vol.8 N.3 (2002).
- [51] J. MARTINET, J.P. RAMIS, *Elementary acceleration and multisummability*, *I. Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol.54 (1991) 331-401.
- [52] R. MEYER, *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L-functions*, preprint arXiv math.NT/0311468.
- [53] J. MILNOR, D. STASHEFF, Characteristic classes, *Ann. of Math. Stud.* **76**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1974).

- [54] M.A. RIEFFEL, Morita equivalence for  $C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **5** (1974), 51-96.
- [55] B. RIEMANN, *Mathematical Werke*, Dover, New York (1953).
- [56] T. SCHUCKER, Spin group and almost commutative geometry. hep-th/0007047.
- [57] T. SCHUCKER, Forces from Connes' Geometry. hep-th/0111236.
- [58] I.M. SINGER, Future extensions of index theory and elliptic operators, *Ann. of Math. Studies* **70** (1971), 171-185.
- [59] D. SULLIVAN, Geometric periodicity and the invariants of manifolds, *Lecture Notes in Math.* **197**, Springer (1971).
- [60] M. WODZICKI, Non-commutative residue, Part I. Fundamentals K-theory, arithmetic and geometry, *Lecture Notes in Math.*, 1289, Springer-Berlin (1987).

## Alexandre Grothendieck, créateur réfugié en lui-même

Alain Connes

Voilà, donc Alexandre était un géant des mathématiques, un mathématicien français qui est mort il y a deux ans, en novembre 2014. Et en fait, si vous voulez, lorsqu'on m'a demandé de faire un exposé, j'ai volontiers accepté, avec pour principale motivation celle de rétablir un fragment de vérité devant un livre qui a été écrit sur Grothendieck, que je ne citerai pas, par un non-mathématicien, fasciné par le personnage, mais dont le jugement sur les écrits de Grothendieck, en particulier sur *Récoltes et semailles*, qu'il croit pouvoir résumer en une phrase, m'est apparu comme une insulte faite à la mémoire du grand savant.

J'ai donné pour titre *Alexandre Grothendieck, le créateur réfugié en lui-même*. Ce que j'avais en tête en donnant ce titre, c'était son parcours, de son enfance de réfugié, de sa créativité prodigieuse, à la fois mathématique et littéraire, et puis de cette deuxième moitié de sa vie, qui l'a amené dans les 25 dernières années, à se réfugier en lui-même dans un petit village des Pyrénées, celui de Lasserre, où il a écrit trente-cinq mille pages.

La correspondance entre Jean-Pierre Serre et Alexandre Grothendieck, qui a été publiée sous forme d'un magnifique volume, montre bien comment leurs idées ont bouleversé la géométrie algébrique. Elles témoignent d'une profonde amitié et de l'esprit qui était celui de Bourbaki dans ces années-là. Un dévouement sans borne à la beauté des maths, complètement débarrassé de tout individualisme. Après un épisode de découragement dû à la mort de sa mère en 1957, Grothendieck a eu une période de créativité rayonnante, qui a abouti en particulier à la notion de topos.

Cette notion était implicitement présente dans un article qui, au départ, était, entre guillemets, une "emmerdante rédaction" destinée à Bourbaki et qui, en fait, lorsqu'elle a été publiée, a rendu fameux le journal dans lequel elle a été publiée, au point que l'on désigne l'article simplement sous le nom de Tohoku (le journal s'appelle *Tohoku Maths Journal*). S'y cotoyaient déjà... donc là je vais vous parler un petit peu de math, mais ça ne durera pas très longtemps. Donc, s'y cotoyaient déjà les catégories de diagrammes et celle de faisceaux d'ensembles, mais Grothendieck n'avait pas encore dégagé le principe nouveau qui permette d'englober ces deux exemples comme cas particuliers d'un même concept, celui de topos. Donc, écoutons-le. En fait, je passerai la plus grande partie de mon exposé à citer Grothendieck.

---

Conférence donnée au Collège de France dans le cadre du colloque Migrations, réfugiés, exils, le 13 octobre 2016 .

<https://www.youtube.com/watch?v=FkBtSRyv6l4>

*“Le point de vue et le langage des faisceaux introduit par Leray nous a amenés à regarder les espaces et variétés en tous genres dans une lumière nouvelle.*

*Il ne touchait pas pourtant à la notion même d’espace, se contentant de nous faire appréhender plus finement avec des yeux nouveaux, ces traditionnels espaces déjà familiers à tous. Or, il s’est avéré que cette notion d’espace est inadéquate pour rendre compte des invariants topologiques les plus essentiels qui expriment la forme des variétés algébriques abstraites. Pour les épousailles attendues du nombre et de la grandeur, c’était comme un lit décidément étriqué où l’un seulement des futurs conjoints, à savoir l’épousée, pouvait à la rigueur trouver à se nicher tant bien que mal, mais jamais les deux à la fois.*

*Le principe nouveau, qui restait à trouver, pour consommer les épousailles promises par des fées propices, ce n’était autre que ce lit spacieux qui manquait aux futurs époux sans que personne jusque-là ne s’en soit seulement aperçu. Ce lit à deux places est apparu comme par un coup de baguette magique avec l’idée du topos. C’est le thème du topos et non celui des schémas qui est ce lit, ou cette rivière profonde où viennent épouser la géométrie et l’algèbre, la topologie et l’arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu est celui des structures discontinues ou discrètes.*

*Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle (c’était une invention de Grothendieck aussi), le thème du topos en est l’enveloppe ou la demeure. Il est... (donc, c’est toujours Grothendieck qui parle, ien entendu) ...ce que j’ai conçu de plus vaste pour saisir avec finesse, par un même langage, riche en résonances géométriques, une essence commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre, du vaste univers des choses mathématiques.”*

Donc, si vous voulez, à ce moment-là, Grothendieck a fait une découverte extraordinaire. Il a dévoilé un concept d’une portée incomparable, à la fois par la richesse infinie des espaces qu’il permet de recouvrir, mais aussi et surtout parce qu’en fait, si vous voulez, il montre comment... comment... quelle est la vraie nature d’un espace géométrique, qui doit servir simplement à un espace de paramètres pour un ensemble variable. Et alors, une des grandes, une des merveilleuses découvertes, justement, de la notion de topos, c’est que quand on travaille dans un topos, c’est exactement comme si on travaillait dans la théorie des ensembles, sauf que l’on ne peut plus appliquer la règle du tiers exclu.

On ne peut pas dire, on ne peut pas raisonner par l’absurde, mais tout raisonnement intuitionniste continue à marcher. *“Donc on a ainsi un exemple merveilleux d’un concept issu des mathématiques pures, mais dont la portée, ne serait-ce que par*

*ses relations avec la logique, n'est plus limité à ce domaine des sciences.*" Par exemple, si vous voulez, la notion de vérité devient une notion beaucoup plus subtile dans un topos.

Et bon, je veux dire, c'est une notion qui devrait être beaucoup plus connue qu'elle ne l'est. Alors j'en viens, je passe, maintenant, donc c'est fini pour la partie mathématique, je passe à la relation de Grothendieck avec le monde des mathématiciens, qui est en fait l'un des thèmes principaux de *Récoltes et semailles*. Écoutons-le, à nouveau. Voilà ce que dit Grothendieck :

*"Le moment me semble venu de m'exprimer au sujet de ma relation au monde des mathématiciens. C'est là une chose toute différente de ma relation aux mathématiques. Celle-ci a existé et a été forte dès mon jeune âge, bien avant même que je me doute qu'il existait un monde et un milieu des mathématiciens, tout un monde complexe, avec ses sociétés savantes, ses périodiques, ses rencontres, colloques, congrès, ses prima donna et ses tâcherons, sa structure de pouvoir, ses éminences grises et la masse non moins grise des taillables et corvéables, en mal de thèses ou d'articles. Et de ceux aussi plus rares, qui sont riches en moyens et en idées et se heurtent aux portes closes, désespérant de trouver l'appui d'un de ces hommes puissants, pressés et craints, et qui disposent de ce pouvoir magique : faire publier un article. J'ai découvert l'existence d'un monde mathématique en débarquant à Paris en 1948 (Grothendieck est né en 1928) à l'âge de 20 ans, avec dans ma maigre valise, une licence ès sciences de l'Université de Montpellier et un manuscrit aux lignes serrées, écrit recto-verso sans marge, le papier était cher, représentant trois ans de réflexion solitaire sur ce qui, je l'ai appris plus tard, était alors bien connu sous le nom de théorie de la mesure ou de l'intégrale de Lebesgue.*

*J'avais jonglé avec les ensembles que j'appelais mesurables, sans avoir rencontré d'ailleurs d'ensembles qui ne le soient, et avec la convergence presque partout, mais j'ignorais ce qu'était un espace topologique. Je n'avais pas entendu prononcer encore, dans un contexte mathématique du moins, des mots étranges ou barbares, comme groupe, corps, anneau, module, complexe, homologie et j'en passe, qui soudain, sans crier gare, déferlaient sur moi tous en même temps. Le choc fut rude. Si j'ai survécu à ce choc et ai continué à faire des maths et à en faire même mon métier, c'est qu'en ces temps reculés, le monde mathématique ne ressemblait guère encore à ce qu'il est devenu depuis.*

*Il est possible aussi que j'avais eu la chance d'atterrir dans un coin plus accueillant qu'un autre de ce monde insoupçonné. J'avais une vague recommandation d'un de mes professeurs à la faculté de Montpellier, qui avait été un élève de Cartan. Comme Élie Cartan était alors déjà hors-jeu, son fils, Henri Cartan, fut le premier congénère que j'ai eu l'heur de rencontrer. Je ne me doutais pas, alors, à quel point c'était d'heureux*

*augure. Je fus accueilli par lui avec cette courtoisie empreinte de bienveillance qui le distingue, bien connu des générations de normaliens qui ont eu cette chance de faire leurs toutes premières armes avec lui.*

*Il ne devait pas se rendre compte d'ailleurs, de toute l'étendue de mon ignorance, à en juger par les conseils qu'il m'a donnés alors pour orienter mes études. Quoi qu'il en soit, sa bienveillance, visiblement, s'adressait à la personne, non aux bagages ou aux dons éventuels, ni à une réputation ou à une notoriété. Dans l'année qui a suivi, j'ai été l'hôte d'un cours de Cartan à l'école auquel je m'accrochais ferme. Celui aussi du séminaire Cartan, en témoin ébahi des discussions entre lui et Serre, à grands coups de suites spectrales... Grothendieck écrit entre parenthèses (Brrrrr!) ... et de dessins appelés diagrammes, pleins de flèches recouvrant tout le tableau. C'était l'époque héroïque de la théorie des faisceaux et de tout un arsenal dont le sens m'échappait totalement, alors que je me contraignais pourtant tant bien que mal à ingurgiter définitions énoncés, et à vérifier les démonstrations. Les jours de séminaire Bourbaki, réunissant une petite vingtaine de participants et auditeurs, on y voyait débarquer, tel un groupe de copains un peu bruyants, les membres de ce fameux gang Bourbaki.*

*Ils se tutoyaient tous, parlaient un même langage qui m'échappait à peu près totalement, fumaient beaucoup et riaient volontiers. Il ne manquait que les caisses de bière pour compléter l'ambiance. C'était remplacé par la craie et l'éponge. A l'époque, j'étais allé voir monsieur Leray au Collège de France pour lui demander si je me rappelle bien de quoi traiterait son cours. Je ne me rappelle ni des explications qu'il a pu me donner, ni si j'y ai compris quoi que ce soit, seulement que là aussi, je sentais un accueil bienveillant, s'adressant au premier étranger venus. C'est cela, et rien d'autre, sûrement, qui a fait que je suis allé à ce cours et m'y suis accroché bravement, comme au séminaire Cartan, alors que le sens de ce que Leray y exposait m'échappait presque totalement. La chose étrange, c'est que dans ce monde où j'étais nouveau venu et dont je ne comprenais guère le langage et le parler encore moins, je ne me sentais pas un étranger alors que je n'avais guère l'occasion de parleret pour cause, avec un de ces joyeux lurons, je me sentais pourtant accepté, je dirais même presque un des leurs. Je ne me rappelle pas une seule occasion où j'ai été traité avec condescendance par un de ces hommes, ni d'occasion où ma soif de connaître, et plus tard, à nouveau, ma joie de découvrir, se soit trouvée rejetée par une suffisance ou par un dédain. S'il n'en avait été ainsi, je ne serais pas devenu mathématicien, comme on dit, j'aurais choisi un autre métier où je pourrais donner ma mesure sans avoir à affronter le mépris.*

*Alors qu'objectivement, j'étais étranger à ce monde, tout comme j'étais un étranger en France, un lien, pourtant, m'unissait à ces hommes d'un autre milieu, d'une autre culture, d'un autre destin, une passion commune. Je doute qu'en cette année cruciale où je découvrais le monde des mathématiciens, un d'eux percevait en moi cette même passion qui les habitait. Pour eux, je devais être un parmi une masse*

*d'auditeurs de cours et de séminaires, prenant des notes et visiblement pas bien dans le coup.*

*Si peut-être, je me distinguais en quelque façon des autres auditeurs, c'est que je n'avais pas peur de poser des questions, qui le plus souvent devaient dénoter surtout mon ignorance phénoménale, aussi bien du langage que des choses mathématiques. Les réponses pouvaient être brèves, voire étonnées. Jamais l'hurluberlu ébahi que j'étais alors ne s'est heurté à une rebuffade, à une remise à ma place, ni dans le milieu sans façons du groupe Bourbaki, ni dans le cadre plus austère des cours de Leray au Collège de France.*

*Durant ces années, depuis que j'avais débarqué à Paris avec une lettre pour Élie Cartan dans ma poche, jamais je n'ai eu l'impression de me trouver en face d'un clan, d'un monde fermé, voire hostile. Si j'ai connu, bien connu cette contraction intérieure en face du mépris, ce n'est pas dans ce monde-là, pas en ce temps-là, tout au moins. Le respect de la personne faisait partie de l'air que j'ai respiré. Il n'y avait pas à mériter le respect, faire ses preuves avant d'être accepté et traité avec quelque aménité. Chose étrange, peut être, il suffisait d'être une personne, d'avoir un visage humain."*

Donc Grothendieck continue. Il faut savoir que Grothendieck a quitté délibérément le monde mathématique vers 1970. C'est ce qu'il appelle le grand tournant. *"Ce n'est qu'après le grand tournant de 1970, le premier réveil devrais-je dire, que je me suis rendu compte que ce microcosme douillet et sympathique ne représentait qu'une toute petite portion du monde mathématique et que les traits qu'il me plaisait de prêter à ce monde, que je continuais à ignorer, auxquels je n'avais jamais songé à m'intéresser, étaient des traits fictifs.*

*Au cours de ces 22 ans, donc entre 48 quand il est arrivé à Paris et 70, ce microcosme lui-même avait d'ailleurs changé de visage dans un monde environnant qui lui aussi changeait. Moi aussi, assurément, au fil des ans et sans m'en douter, j'avais changé comme le monde autour de moi. Je ne sais si mes amis et collègues s'apercevaient plus que moi de ce changement dans le monde environnant, dans leur microcosme à eux, et dans eux-mêmes. Je ne saurais dire non plus comment s'est fait ce changement étrange, c'est venu sans doute insidieusement, à pas de loup.*

*L'homme de notoriété était craint, moi-même étais craint, sinon par mes élèves ou mes amis, ou par ceux qui me connaissaient personnellement, du moins par ceux qui ne me connaissaient que par une notoriété et qui ne se sentaient pas eux-mêmes protégés par une notoriété comparable. J'ai pris connaissance de la crainte qui sévit dans le monde mathématique qu'au lendemain de mon réveil, il y a bientôt quinze ans." (Quand il a écrit *Récoltes et semailles* et le sens de *Récoltes et semailles*, c'est*

exactement ça : il a récolté ce qu'il a semé. C'était en 85, quinze ans après.) *“Pendant les quinze ans qui avaient précédé, progressivement et sans m'en douter, (Ça, c'était avant 70.) j'étais entré dans le rôle du grand patron dans le monde du Who is who mathématique. Sans m'en douter aussi, j'étais prisonnier de ce rôle qui m'isolait de tous, sauf de quelques pairs et de quelques élèves. C'est une fois seulement que je suis sorti de ce rôle qu'une partie au moins de la crainte qui l'entourait est tombée, les langues se sont déliées, qui avaient été muettes devant moi pendant des années. Le témoignage qu'elles m'apportaient n'était pas seulement celui de la crainte, c'était aussi celui du mépris, le mépris surtout des gens en place vis à vis des autres, un mépris qui suscite et alimente la crainte. Je n'avais guère l'expérience de la crainte, mais bien celle du mépris, en des temps où la personne et la vie d'une personne ne pesait pas lourd. Il m'avait plus d'oublier le temps du mépris et voilà qu'il se rappelait à mon bon souvenir. Peut-être n'avait-il jamais cessé, alors que je m'étais contenté simplement de changer de monde, comme il m'avait semblé, de regarder ailleurs, ou simplement de faire semblant de ne rien voir, rien entendre, en dehors des passionnantes interminables discussions mathématiques. En ces jours, j'acceptais enfin d'apprendre que le mépris sévissait partout autour de moi, dans le monde que j'avais choisi comme mien, auquel je m'étais identifié, qui avait eu ma caution et qui m'avait choyé.”*

Donc, si vous voulez, ça, c'est un résumé de ce qui est dit dans le sujet principal de *Récoltes et semailles*, bien sûr, qui est le rapport de Grothendieck au monde mathématique. Je passe à un texte absolument essentiel, un autre texte de Grothendieck qui s'appelle *La clef des songes*. Et quand j'ai préparé cet exposé, je relisais *La clé des songes* et je me suis aperçu d'une chose. J'ai compris en fait que sans le savoir et sans le vouloir, j'avais, en donnant mon titre, laissé entrouverte la possibilité d'une interprétation complètement différente qui touche en fait au cœur de l'ouvrage qui est *La clé des songes* et où le mot créateur apparaît dans un sens que je vous laisse deviner, au fil de ma lecture de son témoignage. Et je vais vous lire le témoignage de Grothendieck, on a beaucoup entendu parler de l'enfance de Grothendieck, etc. Mais bien sûr, il vaut beaucoup mieux entendre ce que lui-même a à en dire.

Je vais vous lire le témoignage de Grothendieck sur son enfance, qui est dans *La clé des songes*. *“J'ai vécu les cinq premières années de ma vie auprès de mes parents et en compagnie de ma sœur à Berlin. C'est Grothendieck qui parle, bien entendu. “Mes parents étaient athées. Pour eux, les religions étaient des survivances archaïques et les églises et autres institutions religieuses, des instruments d'exploitation et de domination des hommes. Religion et Église étaient destinés à être balayés sans retour par la révolution mondiale qui mettrait fin aux inégalités sociales et à toutes les formes de cruauté et d'injustice, et assurerait un libre épanouissement de tous les hommes.*

*Cependant, comme mes parents étaient tous deux issus de familles croyantes, cela leur donnait une certaine tolérance vis à vis des croyances et pratiques religieuses chez autrui ou vis-à-vis des personnes de religion. C'étaient pour eux des personnes*

comme les autres, mais qui se trouvaient avoir ce travers-là, un peu anachronique il fallait bien dire, comme d'autres avaient aussi les leurs. Mon père était issu d'une famille juive pieuse dans une petite ville d'Ukraine, Novo Zubkov. Il avait même un grand père rabbin.

La religion ne devait pourtant pas avoir beaucoup prise sur lui, même dans son enfance. Très tôt déjà, il se sentait solidaire des paysans et petites gens, plus que de sa famille de classe moyenne. À l'âge de 14 ans, il prend le large pour rejoindre un des groupes anarchistes, qui sillonnaient le pays en prêchant la révolution, le partage des terres et des biens, et la liberté des hommes. De quoi faire battre un cœur généreux et hardi. C'était en Russie tsariste en 1904. Et jusqu'à la fin de sa vie encore, et envers et contre tout, il s'est vu comme... il s'appelait Sacha Piotr, c'était là son nom dans le mouvement ... anarchiste et révolutionnaire dont la mission était de préparer la révolution mondiale pour l'émancipation de tous les peuples. Pendant deux ans, il partage la vie mouvementée du groupe qu'il avait rejoint puis cerné par... (alors, on était en 1906) ... cerné par les forces de l'ordre, et après un combat acharné, il est fait prisonnier avec tous ses camarades. Tous sont condamnés à mort et tous, sauf lui, sont exécutés. Pendant trois semaines, il attend jour après jour qu'on l'emmène au peloton.

Il est finalement gracié à cause de son jeune âge et sa peine commuée en celle de prison à perpétuité. Il reste en prison pendant onze ans, de l'âge de 16 ans à l'âge de 27 ans, avec des épisodes mouvementés d'évasions, révoltes, grèves de la faim. Il est libéré par la révolution en 1917, puis participe très activement à la révolution, en Ukraine surtout, où il combat à la tête d'un groupe autonome de combattants anarchistes, bien armés en contact avec Makhno, le chef de l'armée ukrainienne de paysans. Condamné à mort par les bolchéviques et après leur mainmise sur le pays, il quitte le pays clandestinement en 1921 pour atterrir d'abord à Paris, tout comme Makhno. Au cours des quatre années écoulées d'activité militante et combattante intense, il a d'ailleurs une vie amoureuse assez tumultueuse dont est issue un enfant, mon demi frère Dodek. C'est bien sûr Grothendieck qui parle. Dans l'émigration, d'abord à Paris, puis à Berlin, puis à nouveau en France, il gagne sa vie tant bien que mal comme photographe ambulant qui lui assure son indépendance matérielle. En 1924, à l'occasion d'un voyage à Berlin, il y fait la connaissance de celle qui devait devenir ma mère. Coup de foudre de part et d'autre. Ils restèrent indissolublement attachés l'un à l'autre, pour le meilleur et surtout pour le pire, ivant en union libre jusqu'à la mort de mon père en 1942, en déportation à Auschwitz.

Je suis le seul enfant issu de cette union en 1928. Ma soeur de 4 ans mon aînée, était issue d'un précédent mariage. Ma mère est née en 1900 à Hambourg, d'une famille protestante assez aisée qui avait connu un déclin social inexorable tout au cours de son enfance et de son adolescence. Comme mon père, elle avait une personnalité exceptionnellement forte. Elle commence à se dégager de l'autorité morale de ses pa-

rents à l'âge de 14 ans. À 17 ans, elle passe par une crise religieuse et se dégage de la foi naïve et sans problèmes de son enfance, qui ne lui donnait aucune réponse aux questions que lui posait sa propre vie et le spectacle du monde.

*Elle m'en a parlé comme d'un arrachement douloureux et nécessaire. Aussi bien ma mère que mon père avaient des dons littéraires remarquables. Chez mon père, il y avait même là une vocation impérieuse qu'il sentait inséparable de sa vocation révolutionnaire. D'après les quelques fragments qu'il a laissés, je n'ai pas de doute qu'il avait l'étoffe du grand écrivain." En fait, si vous réfléchissez, vous allez voir que Grothendieck a réalisé ce que son père n'avait pas eu le temps de faire, c'est à dire cette écriture. "Et pendant de longues années après la fin abrupte d'une immense épopée, il portait en lui l'œuvre à accomplir, une fresque riche de foi et d'espoir et de peines et de rires et de larmes et de sang versé, drue et vaste comme sa propre vie indomptée ; et vive comme un chant de liberté.*

*Il lui appartenait de faire s'incarner cette œuvre qui se faisait dense et lourde, et qui poussait et exigeait de naître. Elle serait sa voix, son message, ce qu'il avait à dire aux hommes, ce que nul autre ne savait et ne saurait dire. S'il avait été fidèle à lui-même, cet enfant-là qui voulait naître ne l'aurait pas sollicité en vain. Alors qu'il s'éparpillait aux quatre vents, il le savait bien au fond et que s'il laissait sa vie et sa force se faire grignoter par les petitesesses de la vie des migrants, c'est qu'il était de connivence. Et ma mère aussi avait des dons bénis qui la prédestinaient à de grandes choses. Mais ils ont choisi de se neutraliser mutuellement dans un affrontement passionné sans fin, l'un et l'autre vendant son droit d'aînesse pour les satisfactions d'une vie conjugale pavoisant au grand amour, aux dimensions surhumaines et dont ni l'un ni l'autre, jusqu'à leur mort, n'auront garde de mettre à jour la nature et les vrais ressorts. Après l'avènement de Hitler en 1933, mes parents émigrent en France, terre d'asile et de liberté pendant quelques années encore, en laissant ma sœur d'un côté à Berlin, moi de l'autre, à Blankenese près de Hambourg," Donc, Grothendieck a passé six ans de sa toute petite enfance seul, sans ses parents "et sans plus trop se préoccuper de leur encombrante progéniture jusqu'en 1939. Je les rejoins à Paris en 1939, la situation pour moi, en Allemagne nazie devenant de plus en plus périlleuse, quelques mois avant que n'éclate la guerre mondiale, il était temps. Nous sommes internés en tant qu'étrangers indésirables, mon père dès l'hiver 1939, ma mère avec moi au début 1940.*

*Je reste deux ans au camp de concentration, puis suis accueilli en 1942 dans une maison d'enfants du Secours suisse, au Chambon sur Lignon, en pays cévenol protestant, où se cachent beaucoup de juifs, guêtés comme nous par la déportation. La même année, mon père est déporté du camp du Vernet pour une destination inconnue. C'est des années plus tard, que ma mère et moi aurons notification officielle de sa mort à Auschwitz. Ma mère reste au camp jusqu'en janvier 1944.*

*Elle mourra en décembre 1957 des suites d'une tuberculose pulmonaire contractée au camp.*” Alors, je pense qu'il vaut mieux que je saute un petit passage. J'y reviendrai après, éventuellement parce que je veux vous lire, sans doute la partie la plus la plus importante des textes que j'ai recueillis dans *La clé des songes*, et qui, je l'espère, vous donneront le sens, le deuxième sens du titre. C'est à nouveau Grothendieck qui parle, et il va raconter un épisode qui est arrivé à son père.

Donc, voilà ce que Grothendieck nous dit : *“Au cours de ces derniers mois, d'une telle densité par l'action de Dieu en moi, j'ai repensé parfois à un événement dans la vie de mon père, qui a eu lieu longtemps avant ma naissance et auquel j'avais rarement eu l'occasion de penser. Ils ne m'en a jamais parlé d'ailleurs, ni à âme qui vive, d'ailleurs, sauf à ma mère, dans les semaines de passion tumultueuse qui ont suivi leur rencontre en 1924. C'est elle qui m'en a parlé et des années après sa mort. Il s'agit d'une expérience qu'il a eue en prison, dans sa huitième année de captivité, donc vers l'année 1914. C'était au terme d'un an de réclusion solitaire, que lui avait valu une tentative d'évasion, au cours d'un transfert d'une prison à l'autre. Ça a été sûrement l'année la plus dure de sa vie et qui aurait détruit ou brisé ou éteint plus d'un, solitude totale, sans rien pour lire, ni écrire, ni s'occuper, dans une cellule isolée au milieu d'un étage désert, coupé même des bruits des vivants, sauf l'immuable et obsédant scénario quotidien, trois fois par jour, la brève apparition du gardien apportant la pitance et le soir, une apparition-éclair du directeur venant en personne inspecter la tête dure de la prison. Chaque jour s'étirait, comme un purgatoire sans fin. Il y en avait 365 à passer, avant qu'il ne soit à nouveau rattaché au monde des vivants, avec des livres, un crayon. Il les a comptés ces jours-là, ces éternités qu'il avait à franchir, mais au bout du 365ème, c'est à peine s'il pouvait saisir que c'était bel et bien la fin de son calvaire sans fin.*

*Et pendant les trois jours suivants encore, rien. Au bout du troisième, à sa demande “L'année est passée, maintenant... Quand aurai-je des livres ?”, un laconique “Attends” du directeur. Trois jours après encore, pareil ! On jouait avec lui, qui était livré à merci. Mais la révolte couvait, ulcérée, dans l'homme poussé à bout. Le lendemain, à peine prononcée la même réponse impassible “Attends”, le lourd crachoir en cuivre à bords tranchants faillit fracasser le crâne de l'imprudent tourmenteur.*

*Se jetant d'un côté juste à temps, il en sentit le souffle aux tempes, avant que le projectile s'écrase sur le mur opposé du corridor et qu'il rejette précipitamment derrière lui la lourde porte bardée. C'est miracle pour moi que mon père ne fut pas pendu sur le champ. Peut-être un scrupule de conscience du directeur qui “craignait Dieu” et qui sentait confusément par la mort-même qui l'avait frôlé de si près, qu'il avait été trop loin. Toujours est-il que le jeune révolté est battu comme plâtre, c'était la moindre des choses, puis jeté dans les fers, dans un cachot puant, dans l'obscurité totale, pour une durée indéterminée. Un jour sur trois, on ouvre les volets, et le jour relaye la nuit moite. Pourtant, la révolte n'est pas brisée. Grève de la faim totale,*

sans manger ni boire, malgré le jeune corps qui obstinément veut vivre, l'âme ulcérée, rongée par l'impossible révolte et l'humiliation de l'impuissance, et les chairs gonflées débordant en bourrelets vitreux autour des anneaux de fer aux poignets et aux chevilles.

C'était les jours où il a touché au fin fond de la misère humaine, consciente d'elle-même, celle du corps, celle de l'âme. C'est au terme du sixième jour de cachot, jour à volets ouverts qu'eut lieu la chose inouïe, qui fut le secret le plus précieux et le mieux gardé de sa vie, dans les dix années qui ont suivi. C'était une vague soudaine de lumière d'une intensité indicible, en deux mouvements successifs, qui emplit sa cellule et le pénètre et l'emplit, comme une eau profonde, qui apaise et efface toute douleur et comme un feu ardent qui brûle d'amour, un amour sans bornes pour tous les vivants, toute distinction d'amis et d'ennemis balayée, effacée.

Je ne me rappelle pas que ma mère ait eu un nom tout prêt pour nommer cette expérience d'un autre qu'elle me rapportait. Je l'appellerai maintenant une illumination, état exceptionnel et éphémère, proche de ce que rapportent les témoignages de certains textes sacrés et de nombre de mystiques. Mais cette expérience se place ici en dehors de tout contexte qu'on appelle communément religieux. Cela faisait plus de dix ans sûrement que mon père s'était détaché de l'emprise d'une religion pour ne jamais y revenir.

Il est sûr pour moi, même sans avoir de précisions à ce sujet, que cet événement a profondément transformé sa perception des choses et toute son attitude intérieure dans les jours et les semaines au moins qui ont suivi. Des jours de très dures épreuves, sûrement. Mais j'ai de bonnes raisons de croire que ni alors, ni plus tard, il n'a fait de tentatives pour situer ce qui lui était advenu, dans sa vision du monde et de lui. Ça n'a pas été pour lui l'amorce d'un travail intérieur en profondeur et de longue haleine, qui aurait fait fructifier et se multiplier l'extraordinaire don qui lui avait été fait et confié. Il a dû lui réserver une case bien séparée, comme un joyau qu'on serre dans un écrin fermé, en se gardant de le mettre en contact avec le reste de sa vie. Pourtant, je n'ai aucun doute que cette grâce inouïe, qui avait en un instant changé l'excès d'une misère en une indicible splendeur, était destinée non à être gardée ainsi sous clef, mais à irriguer et à féconder toute sa vie ultérieure.

C'était une chance extraordinaire qui lui était offerte, et qu'il n'a pas saisie. Un pain dont il n'a mangé qu'une fois à pleine bouche et auquel il n'a plus touché. Dix ans plus tard, à la façon dont il s'en est ouvert à ma mère, dans l'ivresse de ses premières amours avec une femme qui allait le lier pieds et poings, c'était bien comme un bijou insolite et très précieux, dont il lui aurait donné la primeur. Et quand elle m'en a parlé, plus de vingt ans plus tard encore, j'ai su qu'elle avait apprécié bel et bien, et apprécié encore, cet hommage jeté alors à ses pieds, et qu'elle avait accueilli avec empressement et comme un éclatant témoignage d'une communion totale avec l'homme

*adoré, et d'une intimité qui n'a plus rien à sceller. Et moi-même, en l'entendant, jeune homme de 17 ans ou 18 ans, en ai pris connaissance avec un empressement ému tout semblable. J'ai vu moi aussi le bijou qui rend aussi et encore pour moi l'éclat de ce père prestigieux et inégalable héros, en même temps que celui de ma mère qui, seule entre tous les mortels, avait été jugée digne d'y avoir part. Ainsi, le pain donné par Dieu comme inépuisable nourriture d'une âme, laquelle, peut-être, croîtrait et en nourrirait d'autres âmes encore, a fini par devenir une parure de famille, venant rehausser la splendeur d'un mythe cher et alimenter une commune vanité."*

Voilà. J'ai terminé, merci.