Conseils au débutant

Alain Connes
Collège de France,
Institut des Hautes Etudes Scientiques
Université de Vanderbilt.

Les mathématiques sont la colonne vertébrale de la science moderne et une source remarquablement efficace de nouveaux concepts et outils pour comprendre la réalité à laquelle nous participons. Les nouveaux concepts eux-mêmes sont le résultat d'un long processus de distillation dans l'alambic de la pensée humaine.

On m'a demandé de donner quelques conseils aux jeunes mathématiciens. La première observation est que chaque mathématicien est un cas particulier et en général, les mathématiciens ont tendance à se comporter comme des "fermions", i.e. à éviter de travailler dans des endroits trop "branchés" alors que les physiciens se comportent comme des "bosons" qui fusionnent en gros paquets et souvent "sur-vendent" leurs travaux, une attitude que les mathématiciens méprisent.

Il peut être tentant à première vue de voir les mathématiques comme l'union de parties séparées telles que la Géométrie, l'Algèbre, l'Analyse, la Théorie des nombres, etc. avec la Géométrie dominée par la compréhension du concept d'"espace", l'Algèbre par l'art de manipuler les "symboles", l'Analyse par l'accès à l'infini et le continu, etc.

Cela pourtant ne rend pas justice à l'une des caractéristiques les plus essentielles du monde mathématique, notamment au fait qu'il est virtuellement impossible d'isoler l'une quelconque des parties ci-dessus des autres sans la priver de son essence. En cela, le corpus mathématique ressemble à une entité biologique qui ne peut survivre que comme un tout et qui mourrait si on la coupait en morceaux disjoints.

La vie scientifique des mathématiciens peut être décrite comme un voyage à l'intérieur de la géographie de la "réalité mathématique" qu'ils révèlent graduellement dans leur schéma mental personnel.

Traduction de l'article Advice to the beginner ici
http://alainconnes.org/docs/Companion.pdf

Cela commence souvent par un acte de rébellion par rapport à la description dogmatique existante qu'on peut trouver dans les livres de la littérature mathématique. Les jeunes "mathématiciens-en-devenir" réalisent dans leur propre esprit que leur perception du monde mathématique capture quelques aspects qui ne s'adaptent pas au dogme existant. Ce premier acte est souvent dû à l'ignorance mais il permet à la personne de se libérer de la révérence à l'autorité en l'enjoignant à faire confiance à son intuition propre, à condition que celle-ci s'appuie sur des démonstrations effectives. Lorsque ces jeunes mathématiciens acquièrent une réelle connaissance, obtenue d'une manière originale et "personnelle", d'une petite partie du monde mathématique, aussi ésotérique qu'elle puisse avoir l'air au départ [1], leur voyage peut vraiment commencer. C'est bien sûr vital tout au long du parcours de ne pas rompre ce "fil d'Ariane" qui permet de garder constamment un regard neuf sur tout ce que l'on pourra rencontrer en chemin, et de revenir à la source lorsqu'on se sent perdu parfois...

Il est aussi vital de toujours rester en mouvement. Le risque sinon est de rester confiné dans une petite zone de spécialisation extrêmement technique, rétrécissant notre perception du monde mathématique et de sa diversité déroutante.

Le point vraiment fondamental par rapport à ça c'est qu'alors que de nombreux mathématiciens ont passé leur vie scientifique entière à explorer ce monde, ils tombent tous d'accord sur ses contours et sa connexité : quelle que soit l'origine de l'itinéraire, un jour ou l'autre, on est amené à atteindre une ville bien connue, i.e. par exemple à rencontrer les fonctions elliptiques, les formes modulaires, les fonctions zeta. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connecté". Bien sûr, cela ne signifie pas que toutes les parties des mathématiques se ressemblent et il convient de citer Grothendieck (dans "Récoltes et semailles") dans sa comparaison du paysage de l'analyse dans laquelle il a travaillé au départ avec celui de la géométrie algébrique dans laquelle il a passé le reste de sa vie mathématique :

> *"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît*

1. Mon point de départ a été la localisation des racines des polynômes, mais j'ai eu la chance d'être invité très jeune à une conférence à Seattle où j'ai trouvé les racines de tous mes travaux futurs sur les facteurs.

> *à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller...".*

La plupart des mathématiciens adoptent une attitude pragmatique et se voient comme des explorateurs de ce "monde mathématique" dont ils n'ont aucun souhait de mettre l'existence en doute, et dont ils découvrent la structure par un mélange d'intuition, pas si étranger au "désir poétique"[2], et une bonne dose d'intenses périodes nécessitant leur concentration rationnelle.

Les générations successives de mathématiciens construisent l'"image mentale" de leurs propres compréhensions de ce monde et construisent des outils mentaux de plus en plus profonds (pénétrant) pour explorer des aspects précédemment cachés de cette réalité.

Là où les choses deviennent vraiment intéressantes, c'est lorsque des points inattendus émergent entre différentes parties du monde mathématique, qui étaient précédemment comprises comme étant éloignées les unes des autres dans les outils mentaux qu'une génération avait élaborés. A ce moment, on a le sentiment qu'un vent soudain a balayé le brouillard qui était sur les parties cachées d'un beau paysage. Dans mon propre travail, ce genre de "grande surprise" est venu principalement de l'interaction avec la physique. La profondeur des concepts mathématiques qui proviennent directement de la physique a été décrite dans la citation suivante de Hadamard :

> *"Non cette nouveauté à la vie courte qui trop souvent ne peut qu'influencer le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses."*

Je terminerai par quelques conseils pratiques[3].

- *Marches*
  Un exercice très sain, quand on se bat avec un problème très difficile (impliquant souvent de nombreux calculs), est d'aller faire une longue promenade (sans papier ou crayon) et de faire les calculs dans sa tête (en dédaignant le premier sentiment "c'est trop compliqué pour être fait comme ça !"). Même si l'on n'y parvient pas, cela entraîne la "mémoire vive" et aiguise les compétences.

- *Se coucher*
  Les mathématicien(ene)s ont habituellement du mal à expliquer à leur

2. comme souligné par le poète Paul Valéry.
3. En rappelant que chaque mathématicien est un "cas particulier", ne prenez pas ce conseil trop à la lettre.

compagnon que les moments où ils travaillent le plus intensivement sont ceux où ils sont couchés dans le noir sur un canapé. Malheureusement, avec les emails et l'invasion des écrans d'ordinateurs dans tous les instituts de mathématiques, bien que cette manière de s'isoler soi-même et de se concentrer tende à devenir de plus en plus rare, elle reste la meilleure façon de réfléchir.

- *Etre courageux*
  Il y a plusieurs phases dans le processus amenant à une "nouvelle découverte" mathématique. Et alors que la phase de "vérification" est effrayante et ne nécessite que rationnalité et concentration, la phase "créative" est d'une nature totalement différente. En un certain sens, elle nécessite une sorte de protection de sa propre ignorance dans la mesure où il y a toujours des billions de raisons rationnelles de ne pas étudier un problème qui a déjà été étudié par des générations de mathématiciens.

- *Reculs*
  Cela arrive souvent dans la vie d'un mathématicien et à n'importe quelle niveau (souvent très tôt) de leur vie scientifique, d'obtenir un preprint d'un compétiteur par exemple et de se sentir perturbé. La seule recette que j'ai là est d'"essayer" de transformer (ce n'est pas toujours facile) ce sentiment de frustration en énergie positive pour travailler encore plus dur.

- *Approbation à contrecœur*
  Un collègue à moi m'a dit un jour "Nous[4] travaillons pour l'approbation à contrecœur de quelques amis". Il est vrai que dans la mesure où le travail de recherche est de nature plutôt solitaire, nous avons sérieusement besoin de cette approbation d'une manière ou d'une autre, mais franchement, n'en attendez pas beaucoup... En fait, il n'y a pas moyen de leurrer le seul juge que l'on est à soi-même, et attendre trop du jugement d'autrui est un gaspillage de temps : jusqu'à aujourd'hui, aucun théorème n'a été prouvé par résultat d'un vote. Comme Feynman l'a dit "Pourquoi te préoccupes-tu de ce que les autres pensent ? !".

4. les mathématiciens.

MES RENCONTRES AVEC JACQUES

Entretien d'Alain Connes avec Jacques Dixmier

Alain Connes : Je vais essayer de raconter ma première rencontre avec Jacques, y a eu une suite de circonstances favorables, la première c'est que j'avais été invité en 71 à Seattle pour une conférence, et en fait, j'avais acheté, au hasard un *Lecture Notes* quand j'étais passé par Princeton, c'était un mathématicien japonais, Takesaki, qui exposait le travail d'un autre mathématicien japonais, qui est Tomita. Et j'avais été fasciné, sans vraiment comprendre, pendant tout le voyage en train qu'on faisait à travers le Canada, euh, parce que ça me paraissait extrêmement intéressant. Et quand j'étais arrivé à la conférence, que j'avais vu qu'il y avait le Japonais juste avant qui expliquait la théorie, j'avais trouvé ça formidable, et donc j'avais décidé, en voyant ce hasard, de n'aller écouter que ce cours et de travailler complètement là-dessus. Et quand je suis rentré de ce voyage aux Etats-Unis, donc, j'étais jeune marié, avec Danye, j'ai décidé...

Le séminaire de Dixmier

...d'aller au séminaire de Jacques Dixmier, qui était à Paris, qui avait pour sujet les algèbres d'opérateurs et y a eu un concours de circonstances extraordinaire qui a fait que, à nouveau au hasard, parmi les articles que Jacques proposait d'exposer au séminaire, j'en ai choisi un, et quand je suis rentré en banlieue en train, en lisant cet article, je me suis rendu compte qu'en fait il y avait un lien formidable entre les deux théories. A ce moment-là, j'ai envoyé une petite lettre d'une page à Jacques, il m'a répondu presque tout de suite en me disant : « Je comprends pas, c'est trop court, il faut beaucoup plus de détails », je lui ai réécrit, deux jours après, en lui envoyant une lettre de quatre pages, et c'est là que notre entente a commencé, il m'a reçu dans son bureau, et je me souviens très, très bien qu'il m'a dit un seul mot, il m'a dit : « Foncez ! »

Jacques Dixmier : La deuxième rédaction qu'il m'a envoyée et qui était détaillée, je me souviens qu'il obtenait des résultats qui étaient nouveaux, visiblement importants, et inattendus, j'ai été ahuri de voir ça démontré en quatre pages, quoi... C'est pour ça que j'ai dû lui dire « Foncez ! » Et puis

http://llx.fr/site/wp-content/uploads/2017/04/Connes-Dixmier_tapuscrit.pdf alors, bon, les quatre pages sont devenues quand même les cent et quelques pages de ta thèse...

La trace de Dixmier

AC : Y a un autre épisode où on a vraiment renoué ensemble, c'était à l'IHES ! Jacques avait fait dans les années 50 une découverte, il avait trouvé une trace exotique sur les opérateurs...

JD : Euh, on parlait, je crois, des algèbres hilbertiennes, et je t'ai dit, « je m'étonne que cet exemple que j'ai fabriqué n'ait pas servi à faire des contre-exemples »... Parce que, ce que j'avais trouvé, tu dis exotique, pour moi c'était une monstruosité mathématique ! Et une monstruosité mathématique, souvent ça ressert à faire d'autres monstres ! Je me souviens encore Alain disant, « mais c'est exactement c'qu'y m'faut ! »

AC : Oui, alors en fait, maintenant ça s'appelle la trace de Dixmier, mais il se fait que dans les bons cas, cet objet converge, c'est-à-dire que normalement, c'est un objet qui est exotique ou monstrueux parce que y a une quantité qui n'a pas de limite, mais en fait dans les bons cas, la quantité en question a une limite ! C'est une espèce de mesurabilité... Et alors y a un phénomène extraordinaire qui se produit, c'est qu'en fait pratiquement toutes les intégrales qu'on connaît, en mathématiques, sont un cas particulier de cette construction...

JD : Oh là, t'exagères, quand même...

AC : Ah, j'exagère pas ! J'exagère pas, c'est-à-dire que, d'habitude en mathématiques, quand on écrit $\int f(x)dx$, le signe d'intégrale est indissociable de ce qu'on appelle la mesure, c'est-à-dire ce qu'on appelle $d\mu(x)$. Y a pas un sens à l'intégrale et un sens séparé pour $d\mu(x)$... C'est l'ensemble, c'est le package, qui a un sens... Eh bien, grâce à ce procédé, on peut donner un sens à l'intégrale, on peut donner un sens aux infinitésimaux, etc., etc., et à ce moment-là on peut dissocier l'intégrale de l'autre côté. Alors il y a un autre intérêt, c'est qu'en fait les physiciens se sont aperçus que dans leurs travaux, y a beaucoup de, ce qu'on appelle de divergences et en particulier ce qu'on appelle les divergences logarithmiques. Et ce qu'a fait Jacques, quand il a défini sa trace, il a montré que le coefficient d'une divergence logarithmique, ça définit une trace, ça a permis de donner un statut mathématique à quelque chose qui normalement n'aurait pas de statut mathématique, qui sont précisément ces divergences logarithmiques...

JD : Ah, si Leibniz y savait ça ! Ah, là là !

AC : Oui, mais justement, là, y a une différence extrêmement forte et frappante entre Leibniz et Newton ! Ce que la trace de Dixmier permet de faire et ce que le formalisme quantique permet de faire, c'est beaucoup plus quelque chose qui va dans le sens de Newton que dans le sens de Leibniz, c'est-à-dire que Newton avait l'idée que les quantités infinitésimales, ce ne sont pas des nombres, ce sont des variables... Or, en mathématiques, on s'aperçoit que la bonne formulation de la notion de variable réelle, la seule qui permette la coexistence entre les variables continues et les variables discrètes, c'est le formalisme quantique, c'est-à-dire que les variables réelles, ce sont des opérateurs auto-adjoints dans l'espace de Hilbert, et les opérateurs auto-adjoints y peuvent avoir un spectre continu mais y peuvent aussi avoir un spectre discret, et tout ça, ça agit dans le même espace de Hilbert... Et alors ce qui est formidable, c'est que quand on lit le détail de la définition de Newton, de ce qu'il appelle les variables infinitésimales, on tombe exactement sur ce qu'on appelle les opérateurs compacts... Non seulement on tombe sur les opérateurs compacts, mais on tombe aussi sur le fait qu'un infinitésimal peut avoir un ordre 1, un ordre α où α est un nombre réel, donc y a toute une hiérarchie d'infinitésimaux, et précisément la trace que Jacques avait construite, c'est une trace qui intègre les infinitésimaux d'ordre 1, et qui donne un résultat nul pour tous les infinitésimaux d'ordre plus élevé que 1... Donc sa trace c'est une espèce de filtre, qui va filtrer tous les détails quantiques, d'une certaine manière, et qui va donner une image classique d'un résultat... Et ça, ça a joué, dans les développements qu'on a faits ensuite, un rôle absolument essentiel !

JD : On, c'est pas moi, hein !

AC : Mais, donc, ce que je veux dire, c'est que, on a eu cette nouvelle rencontre, qui s'est faite aux déjeuners de l'IHES, par hasard...

Le boson de Dixmier

AC : Et alors l'épisode relativement récent, c'est, il y a peut-être cinq ou six ans, on était à la campagne avec Danye, et on reçoit une petite carte postale, que Jacques nous avait envoyée : Voilà, j'ai le titre d'un livre... Alors c'était : *"Bossons sur le boson... !*. Et alors y dit, vous l'écrivez, je corrigerai les épreuves !

JD : Ah, y faut dire que c'était dans un contexte où on parlait beaucoup de découverte du boson de Higgs, qui était pas encore trouvé...

AC : Au même moment, j'avais eu vent, par Etienne Klein, d'une anagramme qui était assez étonnante, qui s'intéressait précisément au boson de Higgs... Cette anagramme c'était le boson scalaire de Higgs, et de l'autre côté c'était l'horloge des anges ici-bas... Voilà...Et si on passe au commutatif, c'est-à-dire si on ignore l'ordre des lettres, on obtient exactement la même chose... Alors, on avait trouvé une horloge ornée d'anges, comme y en avait au début du XXème siècle, on fait une belle image, et puis on avait répondu à Jacques... Bien sûr pour le moment c'était encore une boutade, et puis on a commencé à communiquer énormément avec Jacques, et puis le bouquin a pris forme ! Et dans lequel au bout d'un moment on a rajouté de plus en plus de détails scientifiques, mais qui a existé comme ça, presque, bon, je dirais pas sans efforts...

JD : Pour ce qui est des efforts, là je peux dire que je ne suis plus capable d'inventer des mathématiques et je trouve que c'est infiniment plus facile d'écrire un roman que d'écrire un article de maths !

Les matroïdes de Dixmier

AC : Mais y a aussi un épisode récent, et qui était que je suis arrivé une après-midi chez Jacques et je lui ai montré la note au compte-rendu qu'on avait écrite avec Katia Consani sur ce qu'on appelle le site arithmétique. Jacques a lu cette note avec attention et...

JD : Sans y comprendre grand-chose !

AC : Oh, oh, oh... Oui, sauf qu'il a compris quelque chose d'extraordinaire, il a compris que c'était relié à un travail qu'il avait fait dans les années 60, Jacques avait classifié les matroïdes et il s'est aperçu en lisant notre compte-rendu, que l'espace qui classifiait les matroïdes était le même que l'espace des points du topos qu'on obtenait... Mais en regardant de plus près, on s'est aperçu qu'en fait, le topos en question, c'était un topos qui était sous-jacent à toute la géométrie non-commutative, et la raison c'est que, en géométrie non-commutative, le point est représenté par l'algèbre des opérateurs compacts, cette algèbre elle a des endomorphismes et ces endomorphismes définissent exactement le topos qu'on avait eu... Quand on regarde cette algèbre comme un faisceau sur le topos, le faisceau a des fibres, sur chacun des points, et on obtient exactement les algèbres que Dixmier avait classifiées... Au niveau conceptuel, ça a montré que le topos qu'on avait trouvé, c'était simplement le point en géométrie non-commutative... Et ça, alors c'est extrêmement satisfaisant et c'est venu du fait que Jacques a lu notre note en grand détail et a fait la connexion avec le travail qu'il avait fait des années auparavant.

Paris-Shanghai, 1 avril 2017
09min 50sec

COLLÈGE DE FRANCE

CHAIRE D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE

LEÇON INAUGURALE

faite le Vendredi 11 janvier 1985

PAR

M. Alain CONNES

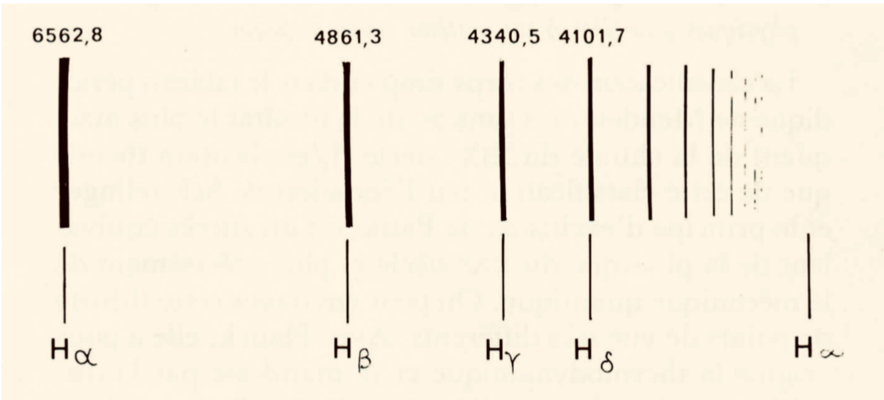
Professeur

Monsieur l'Administrateur, mes chers Collègues, Mesdames et Messieurs, je m'efforcerai, dans l'exposé que je vais faire, d'abord de mettre en évidence grâce à la mécanique statistique quantique, l'interaction qui existe entre physique théorique et mathématiques pures dans le domaine spécialisé des algèbres d'opérateurs. J'essaierai ensuite de montrer le rôle en géométrie de ces mêmes algèbres d'opérateurs. J'aborderai, enfin, les problèmes attachés à la notion usuelle d'espace géométrique quand on essaie de réconcilier la théorie quantique et la relativité.

I. *Heisenberg et l'algèbre non commutative des quantités physiques associées à un système microscopique.*

La classification des corps simples dans le tableau périodique de Mendeleïev est sans doute le résultat le plus marquant de la chimie du XIX^{e} siècle. L'explication théorique de cette classification par l'équation de Schrödinger et le principe d'exclusion de Pauli, est un succès équivalent de la physique du XX^{e} siècle et plus précisément de la mécanique quantique. On peut envisager cette théorie de points de vue très différents. Avec Planck, elle a pour origine la thermodynamique et se manifeste par la discrétisation des niveaux d'énergie des oscillateurs. Avec Bohr, c'est la discrétisation du moment angulaire. Pour de Broglie et Schrödinger, c'est l'aspect ondulatoire de la matière. Ces divers points de vue sont tous des corollaires de celui de Heisenberg : *l'algèbre non commutative des quantité physiques.* Mon premier but sera de montrer combien ce dernier point de vue est proche de la réalité expérimentale.

Vers la fin du XIX^{e} siècle, de nombreux travaux expérimentaux ont permis de déterminer avec précision les raies du spectre d'émission des atomes qui composent les corps simples. On considère un tube de Geissler rempli d'un gaz tel que l'hydrogène. La lumière émise par le tube est analysée à l'aide d'un spectromètre, le plus simple étant le prisme, et l'on obtient un certain nombre de raies, indexées par leurs longueurs d'onde. La configuration ainsi obtenue est la source la plus directe d'information sur la structure atomique. Elle ne dépend que du corps simple considéré et le caractérise. Il est donc essentiel de trouver les régularités qui apparaissent dans ces configurations ou *spectres atomiques*. C'est l'hydrogène qui, conformément au tableau de Mendeleïev, a le spectre le plus simple.



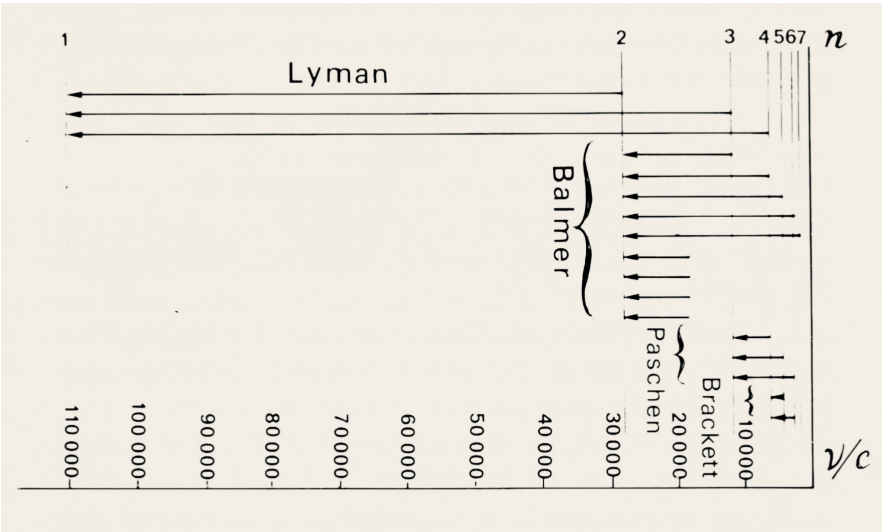
L'expression numérique de la régularité des raies $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \ldots$ a été obtenue par Balmer en 1885 sous la forme :

$$H_\alpha = 9/5L, H_\beta = 16/12L, H_\gamma = 25/21L, H_\delta = 36/32L$$

où la longueur L vaut approximativement $3645,6 \times 10^{-8}$ cm. Autrement dit, les longueurs d'onde ci-dessus sont de la forme $\lambda = \dfrac{n^2}{n^2-4}L$ où n est un entier égal à 3, 4, 5 ou 6.

Vers 1890, Rydberg montra que pour des atomes complexes, les raies du spectre peuvent se classifier en séries, chacune d'elles étant de la forme $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{R}{m^2} - \dfrac{R}{n^2}$ avec n et m entiers, m fixe.

Ici, $R = 4/L$ est la constante de Rydberg. De cette découverte expérimentale on déduira que, d'une part la fréquence $\nu = c/\lambda$ est un paramètre plus naturel que la longueur d'onde λ pour indexer les raies du spectre, et d'autre part que le spectre est un ensemble de différences, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble I de fréquences tel que le spectre soit l'ensemble des différences $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$ entre des couples arbitraires ν_i, ν_j d'éléments de I. Cette propriété montre que l'on peut combiner les fréquences ν_{ij} et ν_{jk} pour en obtenir une troisième $\nu_{ij} + \nu_{jk} = \nu_{ik}$. Ce corollaire important est le principe de composition de Ritz Rydberg, le spectre est doté naturellement d'une loi de composition partiellement définie, la somme de certaines fréquences du spectre est encore une fréquence du spectre.



Or ces résultats expérimentaux ne pouvaient s'expliquer dans le cadre de la physique théorique du XIXᵉ siècle, basée sur la mécanique de Newton et l'électromagnétisme de Maxwell. En effet si l'on applique la conception classique de la mécanique au niveau microscopique, un atome est alors décrit mathématiquement par l'espace des phases et l'Hamiltonien. L'espace des phases X est une variété symplectique dont les points sont les «états» du système. L'Hamiltonien H est une fonction sur X qui intervient pour spécifier l'évolution de toute quantité physique observable, i. e. de toute fonction f sur X, par l'équation

$$\frac{d}{dt} f = \{H, f\}$$

où $\{\ \}$ désigne le crochet de Poisson.

Dans les bons cas, comme par exemple pour le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, le système dynamique obtenu est totalement intégrable. Cela signifie qu'il a suffisamment de «constantes du mouvement» pour qu'en les spécifiant on réduise le système à un mouvement presque périodique. La description d'un tel système se fait très simplement, en effet, d'une part l'algèbre des quantités observables est l'algèbre commutative des séries presque périodiques :

$$q(t) = \Sigma_{q_{n_1,\ldots,n_k}} \exp 2\pi i \langle n, \nu \rangle \; t$$

où les n_i sont des entiers, les ν_i des nombres récl positifs appelés fréquences fondamentales et $\langle n, \nu \rangle = \sum \; n_i \; \nu_i$. D'autre part, l'évolution dans le temps est donnée par la translation de la variable t.

L'interaction entre un atome classique et le champ électromagnétique est décrite par la théorie de Maxwell. Un tel atome émet une onde électromagnétique dont la partie radiative se calcule en superposant des ondes planes $W_n, n = (n_1, \ldots, n_k)$ de fréquences $\langle n, \nu \rangle = \sum \; n_i \; \nu_i$, et dont l'amplitude et la polarisation se calculent simplement à partir de l'observable fondamentale qui est le moment dipolaire.

Le moment dipolaire Q a trois composantes Q_x, Q_y et Q_z qui sont chacune des quantités observables :

$$Q_x(t) = \Sigma q_{x,n} \; \exp 2\pi i \; \langle n, \nu \rangle t$$

et qui donnent l'intensité de la radiation émise de fréquence $\langle n, \nu \rangle$ par l'égalité

$$I = \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3} \; |2\pi \langle n, \nu \rangle|^4 \; (|q_{x,n}|^2 \; + \; |q_{y,n}|^2 \; + \; |q_{z,n}|^2)$$

où c désigne la vitesse de la lumière.

Il en résulte en particulier que l'ensemble des fréquences des radiations émises est un sous-groupe additif $\Gamma \subset \mathbb{R}$ des nombres réels. Ainsi à chaque fréquence émise correspondent tous ses multiples entiers ou harmoniques.

En fait, la spectroscopie et ses nombreux résultats expérimentaux montre que ce dernier résultat théorique est contredit par l'expérience, l'ensemble des fréquences émises par un atome ne forme pas un groupe, il est faux que l'addition de deux fréquences arbitraires en soit encore une. Ce que dicte l'expérience c'est le principe de composition de Ritz Rydberg qui permet d'indexer les raies spectrales par l'ensemble Δ de tous les couples (i, j) d'éléments d'un même ensemble I d'indices. La théorie de Bohr en discrétisant artificiellement le moment angulaire de l'électron parvenait à prédire les fréquences des radiations émises par l'atome d'hydrogène mais était incapable d'en prédire l'intensité et la polarisation. C'est par une remise en cause fondamentale de la mécanique classique qu'Heisenberg est parvenu à ce but, et à aller bien au-delà de ce qu'avaient fait ses prédécesseurs. Cette remise en cause de la mécanique classique est à peu près la suivante : dans le modèle classique, l'algèbre des quantités physiques observables se lit directement à partir du *groupe* Γ des fréquences émises, c'est l'algèbre de convolution de ce groupe de fréquences. Comme Γ est un groupe commutatif, cette algèbre est commutative. Or dans la réalité on n'a pas affaire à un groupe de fréquences, mais à cause de la règle de composition de Ritz Rydberg, on a affaire au groupoïde $\Delta = \{(i, j); i, j \in I\}$ avec la règle de composition $(i, j).(j, k) = (i, k)$. L'algèbre de convolution garde encore un sens quand on passe d'un groupe à un groupoïde, et l'algèbre de convolution du groupoïde Δ n'est autre que *l'algèbre des matrices*, le produit de convolution s'écrit en effet

$$(a.b)_{(i,k)} = \sum_j a_{(i,j)} b_{(j,k)}$$

ce qui est identique à la règle de composition des matrices.

En remplaçant l'algèbre commutative de convolution du groupe Γ par l'algèbre non commutative de convolution du groupoïde Δ dicté par l'expérience, Heisenberg a remplacé la mécanique classique dans laquelle des quantités observables commutent deux à deux par la *mécanique des matrices*, dans laquelle des quantités observables aussi importantes que la position et le moment ne commutent plus. Dans la mécanique des matrices de Heisenberg, une quantité physique observable est donnée par ses coefficients $q_{(i,j)}$ indexés par le groupoïde Δ et l'évolution dans le temps d'une observable est donnée par l'homomorphisme $(i,j) \in \Delta \to \nu_{ij} \in \mathbb{R}$ de Δ dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque raie spectrale sa fréquence, on a :

$$(*) \qquad q_{(i,j)}(t) = q_{(i,j)} \exp 2\pi i(\nu_{ij})\, t$$

Cette formule est l'analogue de la formule classique

$$q_{n_1,\ldots,n_k}(t) = q_{n_1,\ldots,n_k} \exp 2\pi i\langle n, \nu\rangle\, t$$

Pour obtenir l'analogue de la loi d'évolution de Hamilton,

$$\frac{d}{dt}q = \{H, q\}$$

on définit une quantité physique particulière, H, qui joue le rôle de l'énergie classique et est donnée par ses coefficients $H_{(i,j)}$, avec :

$$H_{(i,j)} = 0 \text{ si } i \neq j, H_{(i,i)} = h\nu_i \text{ où } \nu_i - \nu_j = \nu_{ij} \forall i, j \in I$$

où h est la constante de Planck qui permet de convertir fréquences en énergies. On voit que H est définie uniquement à addition près d'un multiple de la matrice identité et de plus la formule (*) ci-dessus est équivalente à

$$(**) \qquad \frac{d}{dt}q = \frac{2\pi i}{h}(Hq - qH).$$

Cette équation est semblable à celle de Hamilton qui utilisait les crochets de Poisson. Elle est en fait encore plus simple puisqu'elle n'utilise que le produit des observables, et plus spécifiquement le commutateur, $[A, B] = AB - BA$ qui joue le rôle que jouait le crochet de Poisson en mécanique Hamiltonienne. Par analogie avec la mécanique classique, on impose aux observables q de position et p de moment de vérifier $[p, q] = i\hbar$ où $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$. La forme algébrique simple de l'énergie classique comme fonction de p et q donne alors l'équation de Schrödinger pour déterminer l'ensemble $\{\nu_i, i \in I\}$ ou spectre de H.

II. ***État statistique d'un système macroscopique et mécanique statistique quantique.***

Un centimètre cube d'eau contient un nombre considérable, de l'ordre de $N = 10^{23}$, de molécules d'eau agitées d'un mouvement incessant. La description détaillée du mouvement de chaque molécule, de même que la connaissance précise de l'état microscopique du système, n'est pas nécessaire pour déterminer les résultats des observations macroscopiques. En mécanique statistique classique, un état microscopique du système est représenté par un point de l'espace des phases qui est de dimension $6N$ pour N molécules ponctuelles. Un état statistique est décrit non par un point de l'espace des phases mais par une mesure μ sur cet espace qui à chaque obervable f associe sa valeur moyenne

$$\int f \, d\mu$$

Pour un système maintenu à température fixe en le plongeant dans un thermostat, la mesure μ est appelée ensemble canonique de Gibbs et est donnée par une formule qui invoque l'Hamiltomien H du système et la mesure de Liouville qui provient de la structure symplectique de l'espace des phases. On pose

$$d\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \times \text{ Mesure de Liouville}$$

où $\beta = 1/kT$, T étant la température absolue et k la constante de Boltzmann qui vaut environ $1,38 \times 10^{-23}$ joules par degré Kelvin.

Les grandeurs thermodynamiques telles que l'entropie ou l'énergie libre se calculent en fonction de β et d'un petit nombre de paramètres macroscopiques introduits dans la formule qui donne l'Hamiltomien H. Pour un système fini l'énergie libre est une fonction analytique de ces paramètres. Pour un système infini des discontinuités apparaissent, ce qui correspond au phénomène de transition de phase. La démonstration rigoureuse, à partir de la formule mathématique qui spécifie H, de l'absence ou de l'existence de ces discontinuités est une branche difficile de l'analyse mathématique.

Mais, comme nous l'avons vu, la description microscopique de la matière ne peut se faire sans la mécanique quantique. Considérons, pour fixer les idées, un solide ayant un atome en chaque maille d'un réseau cristallin $\mathbb{Z}^3$. L'algèbre des grandeurs physiques observables associées à chaque atome $x = (x_1, x_2, x_3)$ est une algèbre de matrices Q_x et si l'on suppose pour simplifier que ces atomes sont de même nature et ne peuvent occuper qu'un nombre fini n d'états quantiques, on a alors $Q_x = M_n(\mathbb{C})$ pour tout x. Soit alors Λ une partie finie du réseau, l'algèbre Q_Λ des grandeurs physiques observables pour le système formé par les atomes contenus dans Λ, est donnée par le produit tensoriel

$$Q_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} Q_x$$

L'Hamiltonien H_Λ de ce système fini est une matrice autoadjointe $H_\Lambda \in Q_\Lambda$ Q_n qui est typiquement de la forme :

$$H_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} H_x + \lambda H_{\text{int}}$$

où le premier terme correspond à l'absence d'interactions entre atomes distincts et où λ est une constante de couplage qui gouverne l'intensité de l'interaction. Un état statistique du système fini Λ est donné par une forme linéaire Φ qui associe à toute observable $A \in Q_\Lambda$ sa valeur moyenne $\Phi(A)$ et qui a les mêmes propriétés de positivité et de normalisation qu'une mesure de probabilité μ, à savoir

$\alpha)$ *Positivité* : $\Phi(A^*A) > 0 \quad \forall A \in Q_\Lambda$

$\beta)$ *Normalisation* : $\Phi(1) = 1$

Si l'on maintient le système à température fixe égale à T, l'état d'équilibre est donné par l'analogue quantique de la formule ci-dessus

$$\Phi_\Lambda(A) = \frac{1}{Z}\text{trace}(e^{-\beta H_\Lambda}A) \quad \forall A \in Q_\Lambda$$

où l'unique trace sur l'algèbre Q_Λ remplace la mesure de Liouville. Comme en mécanique statistique classique, les phénomènes intéressants se manifestent quand on passe à la limite thermodynamique, c'est-à-dire quand $\Lambda \to \mathbb{Z}^3$. Un état du système infini est donné par la famille (Φ_Λ) de ses restrictions aux systèmes finis indexés par Λ, on obtient ainsi toutes les familles (Φ_Λ) telles que :

a) Pour tout Λ, Φ_Λ est un état sur Q_Λ

b) Pour $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, la restriction de Φ_{Λ_2} à Q_{Λ_1} est égale à Φ_{Λ_1}.

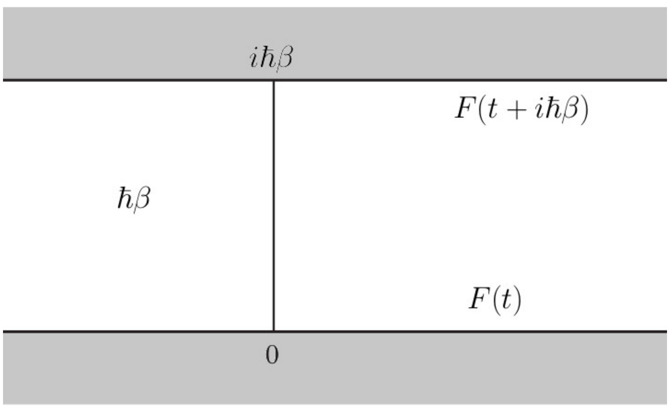
En général la famille Φ_Λ définie ci-dessus à partir de $\exp(-\beta H_\Lambda)$ ne vérifie pas la condition b) et il est nécessaire de mieux comprendre la notion d'état d'un système infini. C'est ici que les C^* algèbres font leur apparition : En effet, si l'on prend la limite inductive Q des C^* algèbres de dimension finie Q_Λ on obtient une C^* algèbre qui a la propriété suivante :

Un état arbitraire Φ sur Q est donné par une famille (Φ_Λ) vérifiant les conditions a) et b). Ainsi les familles (Φ_Λ) vérifiant a) et b), c'est-à-dire les états du système infini sont en correspondance bijective naturelle avec les états de la C^* algèbre Q. De plus, la famille H_Λ détermine de manière unique un groupe à un paramètre (α_t) d'automorphismes de la C^* algèbre Q par l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(A) = \text{Lim}_{\Lambda\to\mathbb{Z}^3}\frac{2\pi i}{h}[H_\Lambda, A] \qquad A \in \cup\, Q_\Lambda$$

Ce groupe à un paramètre donne l'évolution dans le temps des observables du système infini données par les éléments A de Q, et est calculé par passage à la limite à partir de la formule de Heisenberg. Pour un système fini, maintenu à température T, la formule donne l'état d'équilibre de manière unique en fonction de H_Λ, mais à la limite thermodynamique on ne peut avoir de correspondance trop simple entre l'Hamiltonien du système, ou si l'on préfère le groupe d'évolution dans le temps, et l'état d'équilibre de ce système. En effet, lors des transitions de phases, des états distincts peuvent coexister, ce qui exclut l'unicité de l'état d'équilibre en fonction du groupe (α_t). Il est impossible de donner une formule simple qui définirait de manière univoque l'état d'équilibre en fonction du groupe à un paramètre (α_t). Il existe par contre une relation entre un état Φ sur Q et le groupe à un paramètre (α_t) qui ne spécifie pas toujours uniquement Φ connaissant (α_t) mais qui est l'analogue de la formule. Cette relation est *la condition de Kubo-Martin-Schwinger* : étant donné T, un état Φ sur Q et le groupe à un paramètre (α_t) d'automorphismes de Q vérifient la condition KMS si et seulement si pour tout couple A, B d'éléments de Q il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans la bande $\{z \in \mathbb{C}\ ; \mathrm{Im}\ z \in [0, \hbar\beta]\}$ où $\beta = \dfrac{1}{kT}$, telle que

$$\begin{aligned} F(t) &= \Phi(A\ \alpha_t(B)) && \forall t \in \mathbb{R} \\ F(t\ +\ i\,\hbar\beta) &= \Phi(\alpha_t(B)A) && \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Ici t est un paramètre de temps, de même que $\hbar\beta$ qui pour $T = 1000°$ Kelvin vaut environ 10^{-8} secondes.

Cette condition permet de formuler mathématiquement en mécanique statistique quantique le problème de la coexistence de phases distinctes à température T donnée, c'est-à-dire le problème de l'unicité de Φ, étant donné (α_t) et β. Cette même condition a joué un rôle essentiel dans la théorie modulaire des algèbres d'opérateurs et est ainsi devenue un point d'interaction indiscutable entre physique théorique et mathématiques pures.

III. *Théorie de Tomita et classification des facteurs hyperfinis.*

Entre 1957 et 1967, un mathématicien japonais Minoru Tomita, motivé en particulier par l'analyse harmonique des groupes localement compacts non unimodulaires a démontré un théorème d'une importance considérable pour la théorie des algèbres de von Neumann. Une telle algèbre est une sous-algèbre involutive de l'algèbre des opérateurs dans un espace de Hilbert h, qui a la propriété d'être le commutant de son commutant $(M')' = M$.

Théorème de Tomita. Soient M une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert h et $\xi \in h$ un vecteur tel que $M\xi$ et $M'\xi$ soient denses dans h. Soit S l'opérateur $x\xi \to x^*\xi \quad \forall x \in M$ alors,

1) *S est fermable et $S^{-1} = S$.*
2) *La phase J de S vérifie $JMJ = M'$.*
3) *Le module Δ de S vérifie $\Delta^{it}\, M\, \Delta^{-it} = M \quad \forall t \in \mathbb{R}$.*

Ainsi à tout état φ sur M on associe un groupe à un paramètre σ_t^φ d'automorphismes de M, le groupe *d'automorphismes modulaires* de φ. C'est exactement en ce point que se produit l'interaction entre physique théorique et mathématiques pures, en effet, M. Takesaki et M. Winnink ont montré simultanément que le lien entre l'état φ et le groupe à un paramètre σ_{-t}^φ du théorème de Tomita est exactement la condition KMS pour $\hbar\beta = 1$.

Le théorème de Tomita s'est montré d'une importance considérable pour démarrer la classification des facteurs, ainsi que les travaux de R. Powers, d'Araki et Woods sur les facteurs produits tensoriels infinis, i. e. ceux qui proviennent de systèmes statistiques quantiques sans interaction.

Une algèbre de von Neumann M est loin d'avoir un seul état φ, ce qui fait que seules les propriétés de σ_t^φ qui ne dépendent pas du choix de φ ont une véritable signification pour M. Le second résultat important est le suivant *Théorème. $\forall \varphi, \psi$ états sur M. Il existe un 1-cocycle canonique $t \to U_t \in M$ avec*

$$\sigma_t^\psi(x) = U_t \sigma_t^\varphi(x)\, U_t^* \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, $\left(\dfrac{d}{dt} U_t\right)_{t=0}$ coïncide :

1) Dans le cas commutatif avec la dérivée de Radon Nikodym $\log d\psi/d\varphi$.
2) Dans le cas de la mécanique statistique avec la différence des Hamiltoniens correspondants à deux états d'équilibre.

Corollaire.

a) *Étant donnée une algèbre de von Neumann M il existe un homomorphisme δ canonique de $\mathbb{R}$ dans* $\mathrm{Out}\ M = \mathrm{Aut}\ M/\mathrm{Int}\ M$
b) *$Ker\ \delta = T(M)$ est un invariant de M.*
c) *$Sp\ \delta = S(M) = \cap\ Sp\ \Delta_\varphi$.*

Ainsi les algèbres de von Neumann sont des objets *dynamiques*, une telle algèbre a automatiquement un groupe de classe d'automorphismes, paramétré par $\mathbb{R}$, et qui est trivial si et seulement si l'algèbre n'est pas de type III. Dix-sept ans après le théorème de Tomita, nous disposons d'une classification complète de toutes les algèbres de von Neumann hyperfinies. Au lieu de donner une définition de cette classe notons simplement que

1) Si G est un groupe de Lie connexe et $\pi \in \mathrm{Rep}\ G$ une représentation unitaire de G alors $\pi(G)'$ est hyperfinie.
2) Si Γ est un groupe discret moyennable, et $\pi \in\ \mathrm{Rep}\ \Gamma$ alors $\pi(\Gamma)'$ est hyperfinie.

3) Si A est une C^* algèbre limite inductive d'algèbres de dimension finie et $\pi \in \text{Rep } A$ alors $\pi(A)''$ est hyperfinie.

De plus, toute algèbre de von Neumann hyperfinie apparaît déjà dans chacune des listes 1) 2) et 3). La classification des algèbres de von Neumann hyperfinies est d'abord ramenée en écrivant $M = \int_{\oplus} M_t d\mu(t)$ à celle des facteurs, i.e. Centre $M = \mathbb{C}$. Elle est alors la suivante,

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I_n} & M = M_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{I}_\infty & M = L(h) \\
\mathrm{II}_1 & R = \mathrm{Cliff(E), E\ espace\ Euclidien} \\
\mathrm{II}_\infty & R_{0,1} = R \otimes \mathrm{I}_\infty \\
\mathrm{III}_\lambda & R_\lambda = \otimes_{\lambda=1}^\infty (M_2(\mathbb{C}), \varphi_\lambda) \\
\mathrm{III}_1 & R_\infty = R_{\lambda_1} \otimes R_{\lambda_2} \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1/\lambda_2 \notin Q \\
\mathrm{III}_0 & R_W W \text{ flot ergodique}
\end{array}
$$

Le cas III_1 était le seul qui restait à élucider. U. Haagerup a montré récemment que tous les facteurs hyperfinis de type III_1 sont isomorphes.

IV. *Rôle des algèbres d'opérateurs en géométrie.*

Quand on spécialise la théorie des algèbres de von Neumann au cas très simple des *algèbres commutatives* on obtient la théorie de la mesure au sens de Lebesgue. Plus précisément, toute algèbre de von Neumann commutative M dans l'espace de Hilbert (séparable) h est engendrée par un opérateur autoadjoint H et M est le bicommutant de H.

$$
\begin{array}{l}
M = \{H\}'' = \{T \in L(h), UTU^{-1} = T \qquad \forall U, U \in L(h)\} \\
U^*U = UU^* = 1, UHU^{-1} = H
\end{array}
$$

De plus, pour toute fonction borélienne bornée f sur $X = \text{Sp } H \subset \mathbb{R}$, l'opérateur $f(H)$ a un sens, comme limite faible de polynômes $P(H)$, et s'annule si et seulement si f est nulle presque partout pour la *mesure spectrale* de H. On obtient de cette manière un isomorphisme entre M et l'algèbre des fonctions mesurables essentiellement bornées sur le spectre de H. La théorie générale des algèbres de von Neumann apparaît ainsi comme un analogue non commutatif de la théorie de Lebesgue. L'importance mathématique de la théorie générale des algèbres de von Neumann résulte de l'existence d'espaces naturels pour lesquels la théorie de Lebesgue est inadaptée, et conduit à considérer de tels espaces comme pathologiques. La théorie des algèbres de von Neumann permet par contre de traiter la théorie de la mesure de ces espaces de manière très satisfaisante. Le prototype d'un tel espace est l'espace X des solutions d'une équation différentielle ou feuilles d'un feuilletage. Pour fixer les idées, considérons un exemple, le feuilletage de Kronecker $dy = \theta dx$ sur le tore T^2. Si l'on essaye d'analyser cet espace, du point de vue de la théorie de la mesure, comme un espace ordinaire, on obtient un résultat pathologique : toute fonction mesurable f de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est presque partout égale à une constante. Ainsi $L^\infty(X,\mu)$ ou $L^p(X,\mu)$ sont réduits à $\mathbb{C}$ et ne distinguent en rien l'espace X d'un point. En fait, à X correspond une algèbre de von Neumann non triviale dont le *centre* est réduit à $\mathbb{C}$. Alors qu'il n'est pas possible de construire une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ qui soit mesurable et non presque partout constante, il est très facile de construire une application q qui à chaque $x \in X$ associe un opérateur q_x das l'espace L^2 de la feuille indexée par x et qui soit :

a) Mesurable.
b) Non presque partout constante.

On obtient une algèbre de von Neumann en utilisant les règles algébriques évidentes,

$$(pq)_x = p_x q_x \qquad \forall x \in X$$
$$(p^*)_x = p_x^* \qquad \forall x \in X$$

et la norme : $\|p\| = \text{Sup essentiel}_{x\in X}\|p_x\|$. Dans l'exemple indiqué, l'algèbre de von Neumann est le facteur hyperfini $R_{0,1}$ quand $\theta \notin \mathbb{Q}$. Le facteur R_∞ de type III_1 apparaît dans l'exemple du feuilletage d'Anosov associé à une surface de Riemann de genre > 1. La théorie de la dimension de Murray et von Neumann permet de mesurer (dans le cas où l'algèbre de von Neumann est de type II) par un nombre réel positif, la dimension de l'espace des solutions L^2 d'une équation aux dérivées partielles elliptique le long des feuilles du feuilletage. Des entiers tels le nombre de pôles moins le nombre de zéros pour des fonctions méromorphes sur des variétés compactes sont alors remplacés par des densités, qui sont des nombres réels. En particulier, la *dimension continue* de Murray et von Neumann acquiert sa vraie signification de *densité de dimension*, très éloignée par exemple des dimensions de Hausdorff.

Mais des espaces tels que l'espace des feuilles d'un feuilletage ci-dessus ont en fait une structure beaucoup plus riche et rigide que celle qui leur est donnée par la théorie de la mesure, Dans la hiérarchie des moyens qui sont à notre disposition pour analyser un espace classique, la théorie de la mesure occupe en effet la place la plus primitive. Un espace ordinaire n'acquiert de connexité, de linéarité infinitésimale, et de géométrie que grâce aux théories suivantes :

(2) Topologie algébrique.
(3) Variétés différentiables.
(4) Géométrie Riemannienne.

Pour pouvoir adapter valablement ces trois outils aux espaces qui nous intéressent, il était nécessaire de disposer d'exemples à la fois simples, non triviaux et suffisamment généraux, possédant manifestement l'analogue de (2) (3) et (4). Outre les espaces de feuilles de feuilletages de tels exemples proviennent de :

a) Groupes discrets.
b) Action d'un groupe de Lie (compact ou non) sur une variété.

Il n'est raisonnable de parler de l'espace, au sens classique, ensembliste, du terme, des représentations irréductibles d'un groupe (discret) Γ que quand ce groupe est de type I. Or, cela n'arrive, en supposant que Γ est de type fini, que si Γ contient un sous-groupe normal commutatif d'indice fini. Quand le groupe Γ est commutatif, l'espace X dual de Γ est un espace compact dont la topologie est entièrement décrite grâce au théorème de Gel'fand par la C^* algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeur complexes sur X. Or, cette C^* algèbre est égale à la C^* algèbre de convolution $C^*(\Gamma)$. Quand Γ n'est pas de type I, l'espace X est pathologique si on lui applique les concepts classiques de la topologie, mais il est facile de voir pour le produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \times_\alpha \mathbb{Z}, \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ que l'on a bien une algèbre associée à un feuilletage. Le rôle de la K-théoric de la C^* algèbre $C^*(\Gamma)$ dans la théorie de l'homotopie des variétés non simplement connexes a été mis en évidence par les mathématiciens russes Miscenko et Kasparov. La signature Γ-équivariante est ainsi un élément de $K_0(C^*(\Gamma))$ qui est un invariant d'homotopie ($\Gamma = \pi_1(M)$). Ils ont aussi réussi à démontrer, quand Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie, la conjecture de Novikov : si M est un espace $K(\Gamma, 1)$ et $Y \xrightarrow{f} M$ une application continue, la signature

$$\sigma = \text{Signature } f^{-1}(N)$$

pour tout cycle $N \subset M$ est inchangée si l'on remplace (Y, f) par un couple (Y', f') homotope.

La K-théorie de la C^* algèbre associée à un feuilletage permet par exemple de distinguer entre eux les feuilletages de Kronecker pour différentes valeurs de θ (modulo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et joue un rôle crucial dans le théorème de l'indice pour les opérateurs elliptiques le long des feuilles [1]. Dans des exemples simples, elle rend très bien compte de la structure topologique du feuilletage, on dispose d'une flèche μ de la K-homologie du quotient d'homotopie vers la

1. Résultat obtenu en collaboration avec G. Skandalis.

K-théorie de la C^* algèbre, et c'est un isomorphisme dans tous les exemples calculés jusqu'à présent. Ainsi, dans 2) c'est la K-théorie qui joue le rôle central, et en fait la K-théorie bivariante de Kasparov. En ce qui concerne 3), nous possédons maintenant l'analogue non commutatif des notions de *courants de de Rham et d'homologie*, grâce à la cohomologie cyclique. Cette notion permet en particulier de définir le cycle fondamental de l'espace des feuilles d'un feuilletage transversalement orienté. Les classes caractéristiques secondaires, tel que l'invariant de Godbillon-Vey, font alors leur apparition dans la cohomologie cyclique de l'algèbre du feuilletage : le cycle fondamental C de l'espace des feuilles n'est pas en général invariant par le groupe d'automorphismes modulaires (σ_t) de l'algèbre, mais en codimension 1 sa dérivée seconde est nulle

$$\frac{d}{dt}(\text{Cycle fondamental}) \neq 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}\, C = 0.$$

L'invariant de Godbillon-Vey apparaît alors comme le cycle

$$GV = i_x \frac{d}{dt}\, C.$$

obtenu par contraction de la dérivée première $\frac{d}{dt}\, C$ par le générateur X du groupe d'automorphismes modulaires.

Comme application, on obtient immédiatement que si $GV \neq 0$, l'algèbre de von Neumann associée a une composante non-triviale de type III, résultat très technique de S. Hurder. De plus, l'aspect linéarisation infinitésimale qui était la caractéristique de 3) le reste encore mais à un autre niveau, en effet, les résultats de Loday et Quillen montrent que la cohomologie cyclique est la partie indécomposable de la cohomologie de *l'algèbre de Lie* du groupe GL de l'algèbre en question. Si l'on veut mieux que la partie linéarisée du caractère de Chern d'un élément de K-homologie, on doit alors invoquer la K-théorie algébrique. On obtient ainsi, pour tout module de Fredholm $(H, F) \in \ell^{\mathrm{n}}(A)$ une flèche de $K_{n+1}^{\mathrm{alg}}(A)$ vers C^*. Dans le cas très simple où $A = C^\infty(S^1)$ et (H, F) est l'extension de Toeplitz, on obient l'extension centrale du groupe de lacets qui apparaît, par exemple, dans les travaux de G. Segal et G. Wilson. Quand on cherche à expliciter cette flèche pour le module de Fredholm associé à l'opérateur de Dirac, on tombe exactement sur la deuxième quantification du champ des spineurs ; mais la dificulté de manipulation de la K-théorie algébrique au-delà de K_3 limite encore notre compréhension aux dimensions 1 et 2. C'est l'apparition de la théorie des champs dans ce problème et en particulier l'égalité entre le groupe de jauge : $C^\infty(X, U_N)$ et le groupe unitaire $U(M_N(C^\infty(X))$ qui conduisent à un certain nombre de réflexions sur la nature de l'algèbre A des fonctions de classe C^∞ sur l'espace X quand on aborde le problème de l'interaction entre la relativité générale et la mécanique quantique.

Je terminerai donc sur deux remarques simples :

1) L'espace X n'intervient que a) pour définir l'espace *linéaire* des données de Cauchy pour les champs classiques en $t = 0$ et b) pour définir le groupe de jauge U. Cela n'utilise en rien la commutativité de A.

2) La relativité, la gravitation et la mécanique quantique spécifient une grandeur, de l'ordre de 10^{-33} cm, au-delà de laquelle la notion de *point* de l'espace devient illusoire. Quel modèle plus simple peut-on donner de ce phénomène que celui de supposer que l'algèbre A n'est pas strictement commutative, comme l'algèbre A_θ. Or, il existe une généralisation naturelle de la géométrie Riemannienne pour laquelle l'algèbre des fonctions n'est plus commutative. C'est en particulier cette généralisation et ses rapports avec la physique que j'ai l'intention d'explorer dans un avenir proche.

Interview d'Alain Connes

Ceci est un article en avant-première, publié avant l'intégralité de son volume par Allyn Jackson. Parution : 2021.

Alain Connes est né le 1er avril 1947 à Draguignan, dans le sud de la France. Après avoir assisté lycée de Marseille, il entre en 1966 à l'Ecole Normale Supérieure de Paris.
Il passe son doctorat en 1973, sous la direction de Jacques Dixmier.
Au début de sa carrière, Connes a occupé des postes au CNRS (Centre National de la Recherche scientifique) et l'Université de Paris VI et a également été visiteur à l'Université Queen's à Ontario et l'Institute for Advanced Study de Princeton. Il a été nommé à la Léon Motchane Chaire à l'Institut des hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette en 1979, et, en parallèle, à la chaire d'analyse et de géométrie du Collège de France en 1984. En 2017, il prend sa retraite les deux postes. Il a également occupé des postes de professeur distingué à l'Université Vanderbilt et l'Université d'État de l'Ohio.
En plus de la médaille Fields en 1982, ses honneurs incluent le prix Ampère de l'Academy of Sciences (1980), le prix Crafoord (2001) et la médaille d'or du CNRS (2004).
Connes a fait des avancées majeures dans les algèbres d'opérateurs qui ont révolutionné le sujet et stimulé beaucoup de recherches supplémentaires. Cela l'a amené à développer, à partir de la fin des années 1970, une toute nouvelle branche des mathématiques, la géométrie non commutative, qui s'est avérée avoir des liens profonds avec de nombreuses questions fondamentales en mathématiques et en physique. Grâce à ses dizaines de collaborateurs et plus de 250 publications, Connes a eu un impact majeur sur les mathématiques au cours des dernières décennies.

Ce qui suit est le texte édité d'une longue interview avec Connes, tenue en juillet 2020.

Première vie dans le sud de la France

Allyn Jackson : Vous êtes née à Draguignan, dans le sud de la France. Pouvez-vous me dire sur votre enfance qui y a grandi ?

Alain Connes : Laissez-moi vous raconter comment mes grands-parents sont arrivés là-bas. Mes grands-parents chez ma mère côté sont tous deux nés à Constantine, en Algérie. Ils sont arrivés en France en 1918, après que ma mère eut été née; elle est née à Tanger, au Maroc. Quand ils sont arrivés en France ils ont regardé dans une référence livre pour la ville la plus saine de France. Et ils ont trouvé Draguignan !
Mon grand-père était ingénieur, mais il a pris sa retraite assez tôt dans sa vie. Ils ont alors acheté un domaine à Draguignan. Mes parents se sont rencontrés à Draguignan en 1944, quand les Américains sont arrivés au sud de la France à la fin de la guerre, dans ce qu'on appelle le *débarquement* . Il y avait peut-être 1000 planeurs des avions, des gens qui sautent en parachute - venir à Draguignan !
Ma mère est décédée l'année dernière à 101 ans. Elle et mon père sont décédés tous les deux (il a également vécu jusqu'à 101 ans) dans la maison de Draguignan où je suis né. C'est navrant parce que maintenant nous vendons le maison, qui est l'endroit où tout mon subconscient est cartographié. Ce n'est pas seulement une maison, c'est un domaine avec un grand jardin, un petit bois, des vignes et de très grands vieux cèdres. Je suis attaché à cet endroit, à cause du calme. C'est un endroit où règne la sérénité.
Quand j'avais huit ans, mon père a décidé que l'éducation à Draguignan n'était pas assez bonne pour nous. Il a donc pris un travail très dangereux à Marseille, en tant que chef d'une escouade de police concentrée sur le trafic d'alcool. De temps en temps, il disparaissait pendant la nuit où il était arrêter les bandits.

Allyn Jackson : L'alcool était-il illégal à l'époque ?

Alain Connes : L'alcool n'était pas illégal, mais il était très taxé, donc il y avait beaucoup d'illégalité
trafic. Heureusement, il a quitté ce travail juste au début de l'arrivée de la mafia en 1966. Il n'avait pas à faire face à la mafia, mais c'était quand même assez dangereux. Il avait une voiture avec une course moteur et officiers à moto avec lui. Il n'a jamais été simple d'arrêter les gens, parce que… parce qu'ils ont dû les arrêter alors qu'ils faisaient du trafic. Nous étions tous stressés chaque fois qu'il le ferait disparaître comme ça pendant la nuit.

Allyn Jackson : Votre père était français, n'est-ce pas ?

Alain Connes : Oui. Ses parents étaient originaires du sud-ouest de la France.

Allyn Jackson : Quel travail faisait votre père quand vous habitiez Draguignan

Alain Connes : A cette époque, mon père était employé par l'administration fiscale dans un travail également lié à l'alcool, supervisant la production de vin dans le sud. Son propre père avait été tué au premier Guerre mondiale quand mon père avait un an, donc il n'a jamais connu son propre père. Il voulait donner nous une éducation comme un vrai père. C'était assez important. J'ai deux frères. Mon frère aîné a créé sa propre entreprise de logiciels, et il est assez riche. Mon jeune frère est médecin et spécialiste reconnu de la maladie de Crohn ; il est à la retraite maintenant.
Nous avons eu une éducation très dure. Par exemple, pendant les vacances, nous recevions du travail supplémentaire de mon père, et quand l'école était en session, il ajoutait au travail assigné par l'école – son contribution supplémentaire !

Allyn Jackson : Qu'avez-vous ressenti à ce sujet ?

Alain Connes : C'était terrible ! Nous trouverions tous les moyens possibles pour y échapper, bien sûr

Allyn Jackson : Pensez-vous que cela vous a finalement aidé ?

Alain Connes : C'est difficile à dire. Nous trois frères étions assez différents. Mon frère aîné se battrait avec mon père. Je ne me battais pas. J'étais plutôt cool, tranquille. Ce n'est pas clair à tout ça c'est une bonne recette, mais ça nous a beaucoup influencé. Par exemple, une fois que je suis rentré à la maison et que mon mon père m'a demandé quels étaient les résultats d'un concours de mathématiques auquel j'avais participé. J'ai répondu : « J'étais deuxième. » Puis il m'a claqué au visage, parce que je n'étais pas le premier.

Allyn Jackson : C'est une pression assez forte.

Alain Connes : Il y avait de la pression. Mais parce que nous étions trois frères et étions unis, nous trouverait tous les moyens de s'échapper. Par exemple, nous savions où mon père cachait les traductions des devoirs latins qu'il nous a confiés. Cela a rendu la vie beaucoup plus facile! Il nous demandait de réciter le deux fois les cours : le jour où on nous a donné les cours et une deuxième

fois la veille devaient les réciter à l'école. Nous les récitions à notre mère parce qu'alors il était possible de regarde le livre pendant que ma mère cuisinait ! Nous avons donc trouvé toutes sortes d'astuces pour nous échapper. Mais il était une éducation très dure. Il y avait vraiment une peur en chacun de nous, pendant toute notre enfance.
Une chose que je dois ajouter, c'est que j'aimais vraiment ma grand-mère maternelle. Elle a apporté le soo-chose, côté affectif, que ma mère a aussi apporté. Ma grand-mère était pianiste.

Allyn Jackson : Votre grand-mère était pianiste et votre grand-père ingénieur. Alors ils étaient aisés quand ils étaient en Algérie.

Alain Connes : Oui, ils étaient très aisés quand ils sont arrivés en France, mais ils ont tout perdu parce qu'ils ont acheté exactement le mauvais type d'obligations. Ils ont perdu toute leur fortune, tout.

Allyn Jackson : Mais ils avaient leur maison, le domaine à Draguignan...

Alain Connes : Oui, ils avaient leur maison, ce qui était très utile bien sûr.

Du lycée à l'école normale

Allyn Jackson : Quand tu as déménagé à Marseille quand tu avais huit ans, quel genre d'école est-ce que ton père t'a mis

Alain Connes : Nous avons été placés au Lycée St Charles, qui était tout près de chez nous. C'était un type d'école standard, mais bon, avec de bons professeurs. A cette époque, c'était complètement égalitaire. Si tu entrais à l'école, tu aurais une bonne éducation

Allyn Jackson : Étiez-vous intéressé par les mathématiques à l'époque ?

Alain Connes : Oui, mais la compétition ne m'intéressait pas. J'étais vraiment intéressé par le mien réflexion, et cela a duré jusqu'à ce que j'entre en classe préparatoire à l'école normale. À à cette époque, j'avais déjà développé une théorie que j'aimais beaucoup. Si les problèmes que l'enseignant assignées étaient liées à ma propre pensée, alors je pouvais très bien faire. Mais s'ils n'étaient pas liés, alors ils ne m'ont pas fait appel.
J'ai eu un professeur quand j'étais à l'école préparatoire qui était très bon et qui s'intéressait à ce que je développais. C'était très agréable de sentir qu'il y avait quelqu'un qui se souciait de mon idée.

Allyn Jackson : Quelle était cette idée ?

Alain Connes : Plus tard quand je suis allé à l'Ecole Normale j'ai découvert que c'était déjà connu. L'idée était de remplacer la différenciation par des opérations aux différences finies. j'avais développé tout un système pour cela. Ce qui était vraiment important, c'était que c'était le mien. Ce n'était pas quelque chose que je avait ramassé dans les livres.
Quand je suis entré à l'Ecole Normale, j'étais beaucoup plus préoccupé par la recherche d'une petite amie que travail. C'est la vérité! Aussi, à cet âge-là, j'avais un très mauvais complexe sur mon

apparence physique. rance. Par exemple, je ne marchais que du côté droit de la rue parce que je détestais mon droit
profil et je ne voulais pas que les gens le voient.

Allyn Jackson : Mais ton côté droit a l'air bien.

Alain Connes : Ça a l'air bien maintenant ! C'était étrange, ce complexe. Aussi, quand j'essayais de travailler, Je chantais et j'étais dérangé par mon propre chant. C'était particulier, mais c'est comme ça que j'étais !

Allyn Jackson : C'était une étape pour grandir.

Alain Connes : Exactement. Je n'étais pas tellement obsédé par les mathématiques. j'étais vraiment intéressé par mes propres actions, pas tellement en passant des examens ou des choses comme ça.

Allyn Jackson : Vos frères ont-ils aussi fait les classes préparatoires et sont allés à l'Ecole Normale ?

Alain Connes : Oui. Deux ans avant moi, mon frère aîné était entré à l'Ecole Normale. Donc il a ouvert la voie. Mon jeune frère a fait ses études de médecine, car il y avait une tradition dans la famille de ma mère de médecins. Elle était médecin, et son grand-père aussi.

Allyn Jackson : Avez-vous appris à jouer d'un instrument ?

Alain Connes : Quand j'avais cinq ans, j'ai commencé les cours de piano, et j'ai vraiment adoré. Mais quand nous avons déménagé à Marseille, nous ne pouvions pas avoir de piano dans la maison. Mon père m'a dit que je devais choisir entre musique et études. Alors j'ai laissé tomber le piano. J'ai bien sûr toujours regretté énormément de l'ont fait. A vingt ans, j'ai recommencé à jouer du piano, mais bien sûr j'avais raté les années les plus importantes pour l'apprentissage. J'ai fait beaucoup de travail pour m'en remettre, mais je n'ai jamais récupéré au point où j'aurais été. Mais bon, c'est la vie.

Allyn Jackson : Vous ne pouvez pas tout faire.

Alain Connes : On ne peut pas tout faire. Je vois maintenant très bien que j'ai une partie du cerveau qui est musical. En fait, je viens d'écrire un article pour le *Journal of Mathematics and Music* . Mais je sais que la partie du cerveau occupée par la musique est en quelque sorte en compétition avec la partie occupée par les mathématiques. Bien sûr, ils sont extrêmement proches. Cela peut sembler étrange, mais souvent j'apprends beaucoup en mathématiques en étudiant des partitions de musique.

Allyn Jackson : Comment ça se passe ?

Alain Connes : En mathématiques, on peut dans certains cas avoir l'impression d'avoir atteint le plus haut niveau de sophistication. Mais ensuite, vous étudiez une grande partition musicale, et vous trouvez que le compositeur a un niveau de sophistication qui est environ le double du niveau de sophistication du meilleures mathématiques. C'est ce que j'ai en tête. Il y a des compositeurs, surtout du romantisme période, qui ont atteint un niveau de précision musicale que je trouve toujours réconfortant et source de énergie pour faire des mathématiques. J'utilise donc les partitions musicales comme source de sophistication, mais j'aime aussi improviser et laisser sortir les choses.

Allyn Jackson : Et le chant quand tu étais à l'Ecole Normale ?

Alain Connes : C'était du chant pauvre, des chansons corses ! C'était juste pour le plaisir. J'ai eu un temps heureux ment, surtout venant du sud de la France et me retrouvant à Paris, où les gens étaient beaucoup plus intellectuels.

Allyn Jackson : Était-ce un grand choc culturel d'aller à Paris ?

Alain Connes : Ah oui. Sans être désobligeant, il est vrai que le sud, en particulier Marseille, n'a pas du tout la formation intellectuelle qu'a Paris. J'ai été étonné quand j'ai était à Paris parce qu'il était très acceptable d'être totalement immergé dans des trucs intellectuels. A Marseille il fallait être bien habillé. Les gens étaient jugés sur leur apparence physique beaucoup plus qu'en Paris. A Paris, on pouvait voir dans les rues des gens qui n'étaient pas habillés correctement et ressemblaient à clochards. Ils s'en fichaient, ce n'était pas important. A Marseille, c'était important. je ne sais pas si c'est a changé maintenant, mais c'était comme ça à l'époque.

Allyn Jackson : Votre père était-il satisfait lorsque vous êtes entré à l'Ecole Normale ?

Alain Connes : Oh, bien sûr. Ma mère aurait préféré qu'on aille à l'Ecole Polytechnique parce que... car ils avaient un bel uniforme ! Sinon, mes parents étaient très satisfaits.

Liberté de penser et de grandir

Allyn Jackson : C'était en 1966 quand tu es allé à l'Ecole Normale. *Comment c'était ?*

Alain Connes : Nous avons eu une merveilleuse promotion de jeunes gars, et beaucoup sont devenus d'excellents mathématiciens. Cette année-là, à cette époque précise à l'Ecole Normale, nous n'avions aucune pression. Nous avons eu l'occasion d'arrêter de faire les travaux routiniers de l'école préparatoire et d'essayer de réfléchir. Je garder de beaux souvenirs de cette année. Un de mes amis me posait un problème, et puis pour tout le week-end, je ne pensais qu'à ce problème. C'était génial. Nous étions vraiment intéressé par les problèmes de mathématiques. C'était notre pain quotidien. Mais nous ne travaillions pas sur missions ; nous ne suivrions pas les cours. Nous avions quelques examens mineurs à passer à la fin de l'année, mais nous étions libres de penser aux mathématiques.
Aujourd'hui, les élèves de l'Ecole Normale sont beaucoup plus traités comme des enfants. Ils doivent passer des examens et faire ceci et cela. Ils ne reçoivent pas cette bénédiction fondamentale, qui est le temps de réfléchir et développer par eux-mêmes. Tous les amis que je me suis fait alors se sont très bien comportés précisément parce que nous étions traités d'une manière qui nous a permis de grandir.
C'est le moment où j'ai appris que si par exemple vous avez un calcul très compliqué à faire, le meilleur moyen est de se mettre d'abord les choses dans la tête, puis de faire une promenade. Pas de papier, pas de crayon. Lorsque vous vous promenez, votre esprit apprendra à se construire une image mentale. Pour construire cette image mentale, pour le faire exister - c'est la partie la plus

difficile des mathématiques. Pour le faire, il faut se battre avec un problème pendant un certain temps - ne pas lire un livre, ne pas croire qu'un résultat est vrai parce que quelqu'un le dit. Non, cela n'a pas d'importance. Ce qui compte vraiment, c'est que tu te bats avec toi-même, seule. Puis progressivement l'image mentale existera dans votre esprit.

Allyn Jackson : Quelle est cette image mentale ? C'est une image géométrique ?

Alain Connes : Je ne sais pas comment cela se matérialise dans le cerveau, mais c'est quelque chose qui, quand vous y réfléchissez, s'illumine et vous envoie des signaux. Ce qui est encore plus frappant, c'est qu'il continuera à vous envoyer des signaux même lorsque vous n'y pensez pas. C'est exactement comme lorsque vous quittez votre à la maison et cinq minutes plus tard, vous dites: "Oh merde, j'ai oublié d'éteindre le poêle." Ces choses existent dans le cerveau, et ils vous envoient des signaux. De même en musique, vous pouvez avoir quelque chose qui existe dans votre esprit, un air ou un thème. C'est quelque chose d'étonnant et de très difficile à définir.

Allyn Jackson : Avec la musique, vous pouvez revoir un morceau dans votre esprit au fur et à mesure que le morceau avance dans le temps. Est-ce comme ça avec l'image mentale des mathématiques ?

Alain Connes : Cela dépend si c'est de l'algèbre ou de la géométrie. Si le problème est géométrique et il existe une solution, elle apparaîtra d'un seul coup, sans dépendance temporelle. Ce sera un coup. Mais pas en algèbre. L'algèbre est beaucoup plus dépendante du temps et évolutive. En algèbre, quand tu fais calculs, il existe une analogie certaine avec la dépendance temporelle en musique, qui est extrêmement frappant.

La non-commutativité génère du temps

Alain Connes : En fait, ça va beaucoup plus loin. L'une des choses auxquelles j'ai contribué en 1972
était le fait que, lorsque vous prenez une algèbre non commutative, vous avez une évolution temporelle canonique.
Deux mathématiciens japonais, [Minoru] Tomita et [Masamichi] Takesaki, avaient découvert que si vous avez un état sur un certain type d'algèbre, puis il y a une évolution dans le temps. Ce que j'ai découvert par faire des calculs extrêmement compliqués sur plusieurs mois, c'est que cette fois l'évolution est en fait indépendant de l'État, quand vous le regardez de la bonne manière, ce qui signifie que vous oubliez le tri-automorphismes des flacons. La preuve quand je l'ai écrit était incroyablement simple, mais elle est venue de faire beaucoup de calculs. Le fruit était extrêmement simple, mais la préparation était extrêmement compliquée.
Le dénouement me fascine encore aujourd'hui : la non-commutativité, qui a été découverte par les gens en mécanique quantique, en fait est un générateur de temps. Je pense encore au fait que le
le passage du temps, ou la façon dont nous sentons que le temps passe et que nous ne pouvons pas l'arrêter, est en fait exactement la conséquence de la non-commutativité de la mécanique quantique, ou plus explicitement de la caractère aléatoire de la mécanique quantique.
Quelque chose que Heisenberg a découvert, ce qui est absolument incroyable, c'est que lorsque vous répétez certaines expériences microscopiques, les résultats ne seront plus jamais les mêmes. Vous envoyez un photon à travers un très petite fente et regardez où il atterrit sur une cible. Si vous

répétez l'expérience, vous ne pourrez jamais pour prédire où le photon va atterrir. On peut utiliser ce fait pour concocter des nombres aléatoires, et,
contrairement à la génération de nombres aléatoires par ordinateur, on pourrait créer un système de sécurité qui serait parfaitement sûr. Même si un attaquant connaissait tous les appareils que vous utilisez, il ne serait jamais capable de le reproduire. C'est le fait le plus frappant de la mécanique quantique. La question philosophique qui me fascine depuis toutes ces années, c'est que je crois que c'est justement ce type d'aléatoire qui est à l'origine du temps qui passe.
J'ai écrit un livre avec ma femme et avec mon professeur, Jacques Dixmier, *Le Théâtre quantique* . 1 Le but du livre est d'expliquer cette idée, qui est beaucoup plus une question philosophique qu'une question mathématique.

Allyn Jackson : Pourquoi le caractère aléatoire de la mécanique quantique produit-il du temps ?

Alain Connes : La non-commutativité est à l'origine de cet aléa. Qu'est-ce que Heisenberg découvert est que si vous essayez très fort de connaître la position du photon, ainsi que sa momentum, vous ne pouvez pas le faire. Ceci est empêché par le fait que la position et l'élan ne commutent pas. Pourquoi cette non-commutativité génère-t-elle du temps ? Dans l'équation pertinente, même si deux choses ne commutent pas, vous pouvez toujours échanger leur ordre, donc vous remplacez AB par BA. Cela change le sens, tout comme « melon » n'est pas la même chose que « citron », même si les lettres sont identiques. Mais il y a un prix à payer pour intervertir la commande : Lorsque vous permutez A et B, et tu fais la passe A de l'autre côté, tu dois la faire évoluer avec le temps. Et le temps dans lequel il doit évoluer est en fait le nombre purement imaginaire *i* . C'est ce qui se passe dans les coulisses.
Heisenberg a fait sa découverte à une époque où il était atteint du rhume des foins au printemps. Il a été envoyé sur une île appelée Helgoland, qui se trouve dans la mer du Nord. Il y est resté quelques semaines, faire ses propres calculs. Une nuit, à 4 heures du matin je crois, il avait devant les yeux le scène entière. Et il a eu peur, car ce qu'il a vu était de la mécanique quantique, appelée plus tard matrice mécanique. Il avait découvert la non-commutativité des quantités physiques.
Dans le monde non commutatif, il y a quelque chose de totalement original qui n'existe pas dans le monde commutatif, où "melon" serait la même chose que "citron", et c'est ce que Dieu a donné évolution du temps. Cela rend les choses beaucoup plus intéressantes que si elles étaient statiques. Quand tu passes au commutatif, vous perdez beaucoup d'informations qui, si vous les gardez, vous permettront de compresser le monde extérieur d'une manière beaucoup plus simple.

Trouver son propre jardin

Allyn Jackson : Je voudrais revenir sur vos débuts à l'Ecole Normale. Lorsque vous y est allé en 1966, l'IHES [Institut des Hautes Études Scientifiques, fondé en 1958] y allait fort. Alexander Grothendieck et son école étaient là. En faisiez-vous partie ?

Alain Connes : Non. A cette époque, la façon dont je percevais l'évolution autour de Grothendieck était : je n'ai qu'une seule façon d'être moi-même, qui est de rester aussi loin que possible de ce groupe. Mais je dois ajouter que maintenant j'ai lu le livre de Grothendieck *Récoltes et Semailles* , 2 et j'ai bien sûr lu le plusieurs de ses papiers. J'en suis venu à aimer ces développements. Je suis aussi maintenant impliqué dans l'essai faire publier et faire revivre certains textes de Grothendieck.

Quand on commence à faire des mathématiques, il faut avoir son propre jardin, même s'il est éloigné de les choses très à la mode. Et vous devez commencer à exister là-bas. Ce n'est pas grave si c'est un petit jardin. Ce qui compte, c'est que c'est le vôtre. Ce qui compte, c'est que vous avez beaucoup réfléchi à ça et vous l'aimez, et vous le prenez comme point de départ. C'est ce que j'ai ressenti.

Allyn Jackson : A l'époque beaucoup de mathématiques étaient très dominées par Grothendieck
et ses élèves.

Alain Connes : Non seulement ça, mais j'ai entendu des gens dire : « Pourquoi tu fais des mathéma-
tics ? Tout sera fait par ces gens.

Allyn Jackson : Qu'il n'y avait pas de mathématiques en dehors de ce qu'ils faisaient à l'IHES ?

Alain Connes : Oui. Bien plus tard, Grothendieck comprit que c'était la mauvaise attitude. Le titre de son livre, *Récoltes et Semailles* [« moissonner et semer »], en quelque sorte peut être compris comme disant qu'il comprenait qu'en étant trop énergique, il avait eu un effet négatif. Heureusement la mathématique est un sujet tellement immense qu'il y a de la place pour tout le monde. Pourtant, sociologiquement, quand vous êtes débutant, c'est très difficile.

Allyn Jackson : Vous étiez à Paris lors des grands bouleversements de 1968.

Alain Connes : Oui. En 1968, mon frère aîné Bernard se battait sur les barricades. Sur mon côté, pas du tout. J'avais une histoire d'amour, alors je m'en fichais. Je ne me suis pas du tout impliqué. J'étais distant.
Je n'étais pas impliqué politiquement. Je ne voulais pas l'être.

Allyn Jackson : A quoi pensiez-vous mathématiquement à ce moment-là ?

Alain Connes : Quand j'étais à l'Ecole Normale, j'ai développé quelque chose d'assez particulier zéros de polynômes dans le plan complexe. [Charles] Pisot, un théoricien des nombres, m'a demandé de parler dans son séminaire de ce que j'ai fait. C'était une approche assez originale, mais il s'agissait d'une approche marginale sujet. J'ai écrit une note des *Comptes-Rendus* à ce sujet. [3]
Je participais aussi au séminaire de [Gustave] Choquet. Choquet était un homme très brillant, très spirituel mathématicien. Son séminaire a été très agréable. Il a décidé que je devais apprendre la physique, alors il m'a envoyé à une école d'été de physique aux Houches en 1970. J'y étais avec ma future épouse. C'était la première fois que j'ai appris les algèbres d'opérateurs. C'était génial. J'ai rencontré beaucoup de monde. Puis le un an plus tard, certaines personnes que j'avais rencontrées m'ont invité à une réunion à Seattle.

Une histoire de sérendipité

Alain Connes : C'est ainsi que j'ai commencé à travailler sur la théorie Tomita-Takesaki. C'est une histoire de heureux hasard. Avant d'aller à Seattle, je me suis marié avec ma femme en 1971. Aucun de nous n'avait voyagé aux États-Unis avant. J'ai décidé d'accepter l'invitation juste parce que je voulais visiter les États-Unis ! je n'ai pas regardez tout le sujet de la conférence. Nous avons pris l'avion pour New York pour rendre visite à mon frère, qui était en Princeton à l'époque. C'était en juillet, et il faisait si chaud que le seul endroit qui était en quelque sorte acceptable était la librairie. Nous avons passé beaucoup de temps à la librairie. nous allions voyager en train de Montréal à Vancouver puis à Seattle. Nous avons eu quelque chose comme cinq jours dans le train, avec les Grandes Plaines à traverser - plutôt ennuyeux. Alors j'ai dit, pourquoi n'achèterais-je pas un livre de maths à lire pendant le voyage ? J'ai hésité entre plusieurs livres qui avaient l'air assez intéressants. Finalement j'ai acheté un petit livre de notes de cours. 4
Quand nous étions dans le train, j'ai ouvert le livre et il avait l'air fascinant. Enfin nous arrivons à Seattle, je vais à la conférence et je regarde le programme. Oh myGod - l'auteur du livre, Takesaki, est l'un des conférenciers ! C'est un signe ! J'ai décidé de n'assister à aucune conférence à part ses conférences et d'étudier ce genre de choses.
Nous étions à Seattle pendant quelques semaines et nous avons passé un merveilleux moment. Quand nous sommes revenus, j'ai cherché qui en France faisait ce genre de maths et découvrit que c'était Jacques Dixmier. J'ai décidé qu'en Septembre je devrais aller au séminaire de Dixmier.
Il a ouvert le séminaire en apportant plusieurs papiers et en demandant qui voulait parler de quel papier. J'ai levé la main et pris un papier, 5 juste au hasard. C'était sur un tout autre sujet de la théorie Tomita-Takesaki. Je suis rentré chez moi en train, et dans le train j'ai trouvé que ce que les auteurs, [Huzihiro] Araki et [Edward James] Woods, faisaient était en fait profondément lié à la théorie Tomita-Takesaki.
Le même jour, j'écrivis une lettre à Dixmier, et peu après j'eus rendez-vous avec lui. La seule chose qu'il m'a dite c'est : « *Foncez !* " "Allez, allez, allez - allez vite." J'ai écrit tout de suite une note aux *Compte-Rendus* 6 pour expliquer que les invariants d'Araki et de Woods pourraient être calculés en utilisant l Théorie de Tomita-Takesaki. C'était le début de mon travail.

Allyn Jackson : Dixmier a bien compris que tu étais sur quelque chose

Alain Connes : Il a tout compris. Et bien sûr, il est mon ami depuis lors.

Allyn Jackson : Mais tout cela est assez aléatoire, n'est-ce pas, que vous ayez acheté ce livre à Princeton et trouvé Takesaki à Seattle ?

Alain Connes : Oui, c'était totalement aléatoire. Certaines personnes disaient des choses qui n'étaient pas si gentilles ; elles ou ils dit que j'ai eu de la chance. Mais la sérendipité n'est pas chanceuse. C'est transformer ce qu'on vous donne en chance. Comme vous le dites, il y a un certain élément d'aléatoire, et puis il faut faire énormément de travail. Mais quelque part, c'est un travail qui est guidé par l'idée qu'il y a quelque chose là-bas. En mathématiques cela compte plus que toute autre chose, le sentiment instinctif qu'il y a quelque chose. Ce n'est pas à le niveau de pensée rationnelle ; c'est au niveau de l'intuition. C'est quelque chose qui est difficile à transmettre à quelqu'un d'autre mais qui vous habite et vous permet d'avancer. Et Dixmier s'en aperçut complètement.

Allyn Jackson : Il a 96 ans maintenant.

Alain Connes : Oui, et récemment nous avons écrit, avec ma collaboratrice [Caterina] Consani, un très papier technique. C'est le seul que je connaisse qui a vraiment compris ce qu'on fait là ! Il est un homme incroyable. A 96 ans, il avait des commentaires parfaits.

Des facteurs aux feuilletages

Allyn Jackson : En 1973, vous avez terminé votre thèse, sous la direction de Dixmier. Pouvez-vous me dire conceptuellement ce que tu as fait dans ta thèse ?

Alain Connes : J'ai fait deux choses fondamentales. La première était de montrer que cette évolution temporelle était en fait indépendant de l'état, ce qui donne de nombreux invariants des algèbres de von Neumann, de facteurs. Les facteurs ont été introduits par von Neumann pour explorer les factorisations non triviales du Hilbert l'espace en mécanique quantique. La seconde était la chose principale, qui était de réduire le type III facteurs, qui étaient ceux que von Neumann avait complètement omis, au Type II et aux automorphismes.

Allyn Jackson : Au moment où vous avez commencé à travailler là-dessus, les facteurs de type III n'étaient pas bien entendu ?

Alain Connes : Ils n'ont pas du tout été compris. Ce que j'ai prouvé dans ma thèse, c'est que, d'abord
tous, ils sont classés dans le Type III λ , où lambda est compris entre 0 et 1. Ensuite j'ai donné un réduction, à l'exception du Type III 1 au Type II et des automorphismes. Beaucoup plus tard, Takesaki a fait le cas du type III_1 .
Après avoir fait ce travail en juin 1972, je suis parti en vacances avec ma femme. Je ne m'inquiétais pas du tout priorité. Dixmier a dû m'appeler pendant les vacances et me dire que je devais publier quelque chose, car sinon il serait perdu. J'étais un peu naïf.

Allyn Jackson : Quelqu'un d'autre travaillait sur la même chose ?

Alain Connes : Bien sûr. Il y avait un groupe de personnes à Kingston, en Ontario, qui travaillait plus tard sur le même chose. Mais j'ai été le premier à découvrir les résultats les plus importants. 7
Ce problème de priorité se reproduirait plusieurs fois dans ma carrière. Mais nous ne travaillons pas pour avoir notre nom sur quelque chose.
Nous travaillons pour le plaisir de la découverte. Et ce plaisir est quelque chose que personne ne peut emporter de notre part. Je me souviens avoir fait la découverte lors d'une visite à Erling Størmer en Norvège, pendant ces longues journées de juin où le soleil ne se couche pas. J'ai de merveilleux souvenirs de cette époque.
Aussi dans ma thèse, j'ai trouvé qu'il y a des facteurs qui sont hyperfinis mais ne sont pas des pro-tenseurs infinis conduits. C'est un résultat que j'ai annoncé en juillet de la même année 1972, et qui a utilisé tout le pouvoir de ma théorie. Ce n'était pas seulement un résultat abstrait. Il a eu de nombreuses conséquences surprenantes pour personnes à l'époque.

En 1976, j'ai été admis à l'IHES en tant que visiteur. J'étais un spécialiste bien connu dans ma région, mais la région n'était pas aussi connu que ceux de l'IHES. Alors à ce moment-là, je me sentais comme un étranger. j'ai senti que ce que je faisais était très bien, mais les gens ne le savaient pas.
Puis j'ai rencontré une personne fantastique, Dennis Sullivan, qui était à l'IHES à l'époque. Il a cet incroyable Pouvoir socratique. Il s'asseyait avec un nouveau venu et lui demandait : Que faites-vous en mathématiques ? Le nouveau venu penserait, ce type est un idiot, il pose des questions si simples. Tu penses que tu sait tout et il ne sait rien. Mais au bout d'un moment tu te rends compte, mon Dieu, c'est quelque chose que je n'ai pas compris dans mon propre travail !
Avec Sullivan m'expliquant beaucoup de choses, j'ai découvert que, alors que le sujet sur lequel je travaillais n'était pas familier à tant de gens, il y avait un moyen de fabriquer des facteurs dans une géométrie bien connue contexte, le contexte des feuilletages. J'ai donc pris contact avec la géométrie différentielle. j'ai découvert que leurs objets familiers, les feuilletages, donnent immédiatement naissance à des facteurs, et les facteurs les plus exotiques étaient apparaissant à partir des feuilletages les plus naturels.
Un exemple est la foliation d'Anosov, une foliation bien étudiée qui provient de l'écoulement géodésique sur une
surface de Riemann. Il s'avère que la foliation d'Anosov donne lieu exactement au type hyperfini facteur III, qui est un facteur très difficile et exotique dans la classification.
Cela s'est produit entre 1976 et 1978, lorsque Sullivan et moi discutions beaucoup ensemble.

Allyn Jackson : C'était aussi à l'époque où Vaughan Jones est devenu l'élève de [André] Haefliger à Genève. Haefliger était une figure majeure des feuilletages à cette époque. Avez-vous eu des contacts avec Haefliger en raison du lien de votre travail avec les feuilletages ?

Alain Connes : Non, de façon marginale. La façon de penser de Sullivan était beaucoup plus proche de la mienne chemin. Je n'aime pas lire les journaux, et Sullivan non plus. Il a une façon de communiquer qui est orale mais aussi gestuelle. Cela me convenait parfaitement. Il m'expliquait les notions que, si j'essayais pour les apprendre dans les livres, cela aurait pris une éternité, et je ne l'aurais pas eu. Mais il aurait fais juste quelques gestes et explique quelque chose, et j'ai compris.
On y voit l'énorme influence d'institutions comme l'IHES. Donner des conférences n'est pas la même chose.
Il faut vivre avec ces gens, il faut être là, il faut avoir du temps libre, du temps pour
déjeuner, l'heure du thé. Et le progrès se produit par accident. Vous ne pourriez jamais le planifier.

**Allyn Jackson : Pour en revenir à Vaughan Jones - il était essentiellement votre doctorant, même
bien qu'il fût étudiant à Genève et que Haefliger était officiellement son conseiller.**

Alain Connes : C'est vrai. Vaughan est un très bon ami. Il a repris quelque chose que j'avais fait quand j'étais à Kingston en 1975, sur les automorphismes de facteurs finis, puis il a développé un belle théorie générale des sous-facteurs. Dans les années 1980, il fit une magnifique découverte, la découverte du lien avec la théorie des nœuds. C'était fantastique.
C'est une histoire étrange en un sens, car après que Vaughan ait découvert son nouvel invariant de nœud, qui est venu à partir de facteurs, il a été refondu d'une manière différente par [Edward] Witten, sous l'influence de [Michael] Atiyah aussi. J'ai dû mettre le pied dans la porte pour que

Vaughan Jones obtienne les Fields Médaille. Sa découverte était habillée en termes d'intégrales fonctionnelles et de choses de ce type, tandis que la véritable contribution, la véritable force de la découverte, provenait de son propre travail sur les sous-facteurs. Je étais un un peu rebuté par cela.

Allyn Jackson : Comment voulez-vous dire que vous avez mis le pied dans la porte à propos de sa médaille Fields ?

Alain Connes : Ce que je dis, c'est que la tendance de l'époque était de mettre davantage l'accent sur
l'aspect intégral fonctionnel de la théorie des nœuds, que sur la véritable origine de l'invariant, qui venait des facteurs. Bien sûr, quand vous écrivez des choses plus géométriques, c'est facile
sier à comprendre. D'un autre côté, il est absolument étonnant que la théorie des facteurs, qui semble plutôt exotique, s'avère être lié à la théorie des nœuds, qui est très concrète, très basique. Et Vaughan a découvert un véritable invariant dans la théorie des nœuds. C'est une découverte étonnante. Je ne sais pas de nombreuses découvertes qui peuvent rivaliser avec elle. Pour cela, il faut une ouverture d'esprit. Il était dans Suisse avec des gens qui étaient géomètres, mais je ne sais pas le rôle que cela a pu jouer dans sa découverte. Il faudrait lui demander.

Idées complémentaires

Allyn Jackson : Vous avez parlé de l'importance d'avoir vos propres idées, « votre propre jardin » comme tu le dis. Mais ce qui est étonnant en mathématiques, c'est que vous allez n'importe où dans le monde, et d'autres les mathématiciens ont les mêmes idées, et vous pouvez leur en parler.

Alain Connes : Eh bien, les idées ne sont pas exactement les mêmes. Oui, nous pouvons communiquer, mais qu'est-ce que vraiment intéressant est de rencontrer des mathématiciens avec des idées complémentaires.
En 1978, j'ai passé un an à l'IAS [Institute for Advanced Study] à Princeton, et j'ai rencontré la personne qui allait devenir mon plus grand collaborateur, le théoricien de la représentation Henri Moscovici. Le séjour à Princeton était important pour moi parce que je l'y ai rencontré. Sinon, j'avais l'impression que l'IAS était un endroit étrange. Il y avait une immense cafétéria, où les gens s'asseyaient à différentes tables. je n'ai pas trouvé c'est très sympathique, sauf pour rencontrer mon collaborateur Henri.

Allyn Jackson : Vraiment ? De nombreux mathématiciens parlent de la bonne ambiance dans la salle à manger de l'IAS salle et comment ils aiment s'asseoir à la table des mathématiques.

Alain Connes : D'une certaine manière, il y avait un énorme contraste avec l'IHES. A l'IHES la cafétéria est petite, et les gens sont obligés d'être ensemble, alors qu'à Princeton, on pouvait facilement s'asseoir seul à une table et Etre ignoré.
Heureusement, j'ai rencontré Henri Moscovici à cette époque, et nous avons beaucoup travaillé ensemble pendant de nombreuses années.
Sinon, j'aurais été assez isolé, je pense. Il avait beaucoup d'idées qui me manquaient et savais des choses que je ne savais pas. Cela s'est également produit en 1980 lorsque j'ai rencontré Paul Baum. C'était une rencontre ter avec quelqu'un qui n'avait pas la même façon de penser que moi. C'était

complémentaire. Je rencontré Paul Baum lors d'une conférence à Kingston, à l'époque où j'avais découvert la non-commutation géométrie. Avant d'aller à Kingston, j'ai écrit une note de *Comptes-Rendus* 9 sur une idée qui m'est venue à partir de feuilletages. Le fait était que les feuilletages n'ont pas seulement une théorie de la mesure, ce que j'ai trouvé donne à des facteurs exotiques, mais ils ont aussi une géométrie différentielle. J'ai réalisé ce différentiel la géométrie pourrait être mise en œuvre dans le cadre non commutatif. Dans la note des *Comptes-Rendus* Je viens de mentionner, j'avais fait la géométrie différentielle non commutative complète pour les tores non commutatifs.
Puis j'ai rencontré Paul Baum, et il avait exactement ce qui me manquait. J'avais construit, en utilisant des géométries transversales, modules sur les algèbres de feuilletages, ce qui signifiait que j'avais construit des éléments de la K-théorie. Mais je ne savais pas comment les construire en général. Baum a eu exactement l'idée, dans un sujet complètement différent, qui conduirait à la construction d'éléments généraux de la K-théorie. Nous rencontré, et pouf, il y a eu une étincelle.

Allyn Jackson : Quel était l'autre sujet qu'il examinait ?

Alain Connes : Il travaillait sur une réalisation géométrique de ce qu'on appelle la K-homologie cycles. La K-homologie a été développée d'abord dans le langage spatial de Hilbert par Atiyah, puis par [Aleksandr] Mischenko, [Gennadi] Kasparov, et bien d'autres. Le but de Paul Baum était de faire géométrique. Il avait défini un objet géométrique qu'il n'utilisait que pour les variétés riemanniennes.
Ce que j'ai vu immédiatement, c'est que cela fonctionnait également pour les feuilletages.

Géométrie et physique non commutative

Allyn Jackson : Quelle est l'idée principale de la géométrie non commutative ?

Alain Connes : Il y a des espaces, comme l'espace des feuilles de foliations ou l'espace de Penrose carrelages, qui, lorsque vous essayez de les voir comme des espaces ordinaires, sont insolubles. Ils deviennent tratableau à condition de généraliser l'idée de Descartes d'utiliser des coordonnées, à des situations où le les coordonnées ne font plus la navette. Une fois que vous acceptez l'utilisation d'algèbres non commutatives comme algèbres de coordonnées, alors vous découvrez que vous pouvez traiter des espaces qui, avec les outils ordinaires, seraient totalement intraitable.
A la fin des années 1970 et dans les années 1980, j'ai commencé à développer la géométrie - géométrie complète, y compris la géométrie différentielle et la théorie de Rham, qui a donné la cohomologie cyclique - de sorte que tous les outils qui nous avons normalement serait disponible dans cette configuration généralisée et non commutative. La beauté ici vient du fait que vous ne faites pas que généraliser quelque chose ; ces nouveaux espaces ont totalement nouvelles fonctionnalités. L'un d'eux est cette évolution du temps donnée par Dieu. Les espaces ordinaires sont statiques, tandis que ces nouveaux espaces ont la grande propriété d'être dynamiques et d'évoluer dans le temps.
Lorsque vous découvrez quelque chose de vraiment original, vous pouvez être sûr que les gens seront contre vous et va essayer de le rejeter. C'est un fait de la vie. Si vous faites quelque chose de manière ordinaire, tout le monde être heureux et peut le comprendre. Mais dès que tu fais quelque chose que les gens ne peuvent pas comprendre parce qu'ils ne sont pas dans le bon cadre, alors vous pouvez être sûr qu'il y aura beaucoup d'opposition.

Allyn Jackson : Qu'est-ce qui se cache derrière l'opposition ? Est-ce juste une barrière technique ?

Alain Connes : Non, ce n'est pas une barrière technique. Les mathématiques sont évoluées et compliquées telles qu'elles sont.
Vous ne voulez pas introduire quelque chose de nouveau. C'est la réaction des gens.
Il est bien sûr normal d'être confronté au scepticisme. Par exemple, avec Henri Moscovici nous avons ved la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques en utilisant notre travail. 10 Il s'agissait d'un problème connu indépendamment de la nouvelle technique. La nouvelle technique doit faire ses preuves sur des problèmes qui ont été posées avant. Sinon, les gens ne l'accepteront pas et diront : « Nous le savions avant », ou "Pourquoi ça t'intéresse ?"
Au milieu des années 80, j'ai découvert quelque chose que j'ai trouvé très surprenant. Lorsque vous avez ces nouveaux espaces disponibles, alors vous pouvez repenser l'espace-temps ordinaire. Ce que j'ai trouvé, c'est que l'espace-temps a un une structure fine, qui n'est pas le continu ordinaire et qui est juste un peu plus compliquée ; il est non commutatif. Lorsque vous prenez en compte cette structure fine, vous constatez que la gravité pure vous donnera le modèle standard couplé à la gravité. À l'époque, j'ai écrit un seul article sur cette. 11 L'idée s'est concrétisée dans les années 1990, dans mon travail avec Ali Chamseddine.
Ce qui est mystérieux et étrange dans le modèle standard, c'est ce qu'on appelle le secteur de Higgs, cependant c'est en fait dû à trois personnes, [Robert] Brout, [François] Englert et [Peter] Higgs. Ce secteur s'appelait les « toilettes » du modèle standard : c'est quelque chose dont vous avez vraiment besoin dans votre maison mais vous ne le montreriez pas à vos invités. Ce secteur est très étrange. Il donne des masses à toutes les particules, mais c'est dû à un champ scalaire, donc c'est un champ de spin zéro. Cela vient de nulle part.
Maintenant, du point de vue de la géométrie non commutative, l'image mentale est incroyablement nette. Si vous pensez à l'espace-temps comme à une feuille de papier, il est recto-verso. Lorsque vous différenciez une fonction sur cet espace, vous pouvez le différencier sur sa restriction au côté supérieur de la feuille, ou vous pouvez le différencier sur sa restriction à la face inférieure. Mais vous pouvez aussi le différencier en prenant le différence finie entre les deux côtés - les différences des valeurs de la fonction des deux côtés du papier. Cela vous donne un champ de spin zéro, le champ de Higgs. Cela vous indique que, à condition que vous affiner la géométrie de l'espace-temps, vous comprendrez pourquoi le modèle standard semble si compliqué. ted, même s'il ne s'agit que de pure gravité.

Allyn Jackson : Donc vous avez le morceau de papier avec les deux côtés - où est le non-commutatif aspect ?

Alain Connes : L'aspect non commutatif vient du fait que quand on regarde ça différence finie, il s'agit de la géométrie différentielle non commutative. Il y a aussi une petite quantité de non-commutativité dans l'algèbre des fonctions, et c'est cette quantité de non-commutativité qui génère en fait les champs de jauge de la force forte et de la force électrofaible. Le développement de ces idées ont culminé en 2014, dans un article 12 avec Chamseddine et [Viatcheslav] Mukhanov, où l'on a bien compris la non-mutativité qu'il fallait inclure pour obtenir l'histoire complète.
Le point de départ de cela était dans les années 1980, lorsque le développement de la géométrie non commutative occupait beaucoup de mon temps. J'avais des exemples très explicites, comme l'espace-temps, qui motivaient le théorie générale, et bien sûr feuilletages. Un autre exemple est le

carrelage Penrose. À la fin des années 80, je suis allé à une conférence tenue dans un château près de Munich, Schloss Ringberg. [Roger] Pen rose a donné un parler des carrelages Penrose. Ce sont des pavages du plan qui ne sont pas périodiques. Ils ont été découverts par les logiciens. Les pavages initiaux utilisaient de nombreux carreaux différents, mais Penrose les a simplifiés à seulement deux tuiles, ce qui est assez remarquable. Vous pouvez carreler l'avion de différentes manières avec ces deux tuiles. Penrose a montré une propriété étonnante de ces pavages. Si vous avez deux carrelages qui ne sont pas identiques, alors vous pouvez prendre une portion de l'un des pavages, et vous pouvez trouver cette portion infiniment fois dans l'autre carrelage. Il a mis en place deux transparents montrant cela, et il a dit : « Il y a quelque chose de quantique derrière cela. Quand je suis revenu de la conférence, j'ai tout de suite compris que l'espace des pavages de Penrose était un espace non commutatif.

Allyn Jackson : Qu'est-ce que ça veut dire, qu'« il y a quelque chose de quantique » dans cet espace ?

Alain Connes : Cela veut dire que l'algèbre des fonctions sera non commutative, donc être une histoire spatiale de Hilbert. Mais voici ce que cela signifie au niveau de Cantor et de la théorie des ensembles. Si tu voir la collection de pavages Penrose comme un ensemble, il a la cardinalité du continuum. Mais la revendication que je fais - et c'est une propriété caractéristique des espaces non commutatifs - c'est que vous ne pouvez pas le mettre effectivement en bijection avec les nombres réels. En fait, vous ne pouvez pas l'injecter efficacement dans le nombres réels. Si j'ai deux nombres réels différents et que je regarde leurs expansions décimales, ils être différent à un moment donné. Mais ce n'est pas le cas pour les carrelages Penrose, car si je les regarde localement, je ne peux pas distinguer entre deux d'entre eux.
Quand j'ai écrit mon livre *Noncommutative Geometry* 13 en 1994, j'ai mis des pavages de Penrose au début, car c'est un exemple très frappant. Penrose avait la bonne intuition. L'espace a un pologie, une topologie non commutative. Et le nombre d'or sort par miracle de l'algèbre.

Allyn Jackson : Comment ça se passe ?

Alain Connes : Quand on a une algèbre non commutative, on a sa K-théorie, qui était inventé par Grothendieck et adapté par Atiyah au cadre topologique et qui a du sens dans le cas non commutatif. Vous pouvez calculer la K-théorie et également la mapper sur la nombres réels par la trace, s'il y a une trace sur l'algèbre. Pour le cas des pavages Penrose, lorsque vous associez sa théorie K aux nombres réels, vous obtenez le nombre d'or, juste par miracle.
Dans le nouveau monde non commutatif, il y a des choses faciles à adapter, comme la K-théorie, qui a été presque construit pour des situations non commutatives. Ensuite, il y a des choses qui étaient beaucoup plus difficiles à m'adapter au monde non commutatif, et c'est ce que j'ai fait avec la cohomologie cyclique au début des années 1980.

Connexion à l'hypothèse de Riemann

Allyn Jackson : Votre travail a établi des liens avec l'hypothèse de Riemann. Comment est-ce venu à propos de...

Alain Connes : Dans les années 90 j'ai collaboré avec Jean-Benoît Bost sur un système de statistiques quantiques. mécanique qui avait une propriété très frappante appelée brisure spontanée de la symétrie. Cela peut s'expliquer assez simplement. Imaginez que vous êtes assis à une table ronde avec plusieurs personnes. Sur chaque côté de chaque personne il y a une assiette à pain. Dès que l'une des personnes décide de prendre l'assiette sur la gauche, il est clair que tous les autres devront prendre celui de gauche. Mais cette première personne pourrait ont choisi la plaque sur la droite, et alors tout le monde devrait faire la même chose. C'est appelé brisure spontanée de symétrie.
Avec Jean-Benoît Bost, nous avons trouvé un système à brisure spontanée de symétrie. 14 Sa partition fonction était la fonction zêta de Riemann, ce qui était bizarre. Il est sorti de nulle part. À cause de cet article avec Bost, j'ai été invité en 1996 à une conférence à Seattle en l'honneur d'Atle Selberg, qui avait fait beaucoup de découvertes sur la fonction zêta de Riemann. Je suis allé à la conférence, et là était une foule de personnes assez intéressante, dont Paul Cohen par exemple et plusieurs physiciens.
J'ai donné une conférence sur le travail avec Bost. Ensuite, Selberg est venu me voir et m'a dit : « Vous savez, c'est pas clair que votre travail sera vraiment lié aux zéros de la fonction zêta de Riemann. »

Allyn Jackson : Pourquoi Selberg a-t-il pensé cela ?

Alain Connes : Dans mon intervention, la fonction apparaissait juste comme fonction ; les zéros n'avaient pas un sens à mon discours. Alors bien sûr pour lui, ce n'était pas clair du tout qu'il y aurait une relation.
Je suis revenu de Seattle, et au lieu d'essayer de m'adapter à l'heure locale - comme vous le savez, il y a neuf heures de décalage horaire - j'ai continué à vivre à l'heure de Seattle, plus ou moins. J'ai pu le faire grâce au compréhension de ma femme! Je ne travaillais pas. Je lisais *The Right Stuff* , qui raconte la histoire d'Apollo 13. Au bout d'une semaine, j'ai soudain réalisé qu'il y avait un espace qui ressortait extrêmement naturellement du système que nous avions avec Jean-Benoît Bost, qui était un espace non commutatif et d'où les zéros de zêta apparaissaient tout à fait naturellement. Les termes de la Riemann-Weil la formule explicite est également venue tout naturellement.
Un problème très souligné par certains physiciens de Seattle est que, lorsque vous essayez de réaliser les zéros de zêta en tant que spectre - ce que tout le monde essayait de faire - c'est problématique en raison d'une persistance signe moins dans certains termes. Ce signe moins empêche l'expression naïve des zéros comme un spectre. Quand j'ai découvert que les termes de la formule explicite de Riemann-Weil apparaissaient naturellement,
J'ai compris qu'il ne fallait pas chercher un spectre d'émission mais un spectre d'absorption. Laisser m'explique la différence entre les deux, car elle est cruciale dans mon travail.
Lorsque vous faites passer la lumière du soleil à travers un prisme, la lumière se décompose en différentes longueurs d'onde, ou fréquences, et cela vous donne une belle image d'un arc-en-ciel. Après Newton, un opticien allemand nommé [Joseph von] Fraunhofer, qui a vécu au début du 19ème siècle, a étudié cela. Il décomposé la lumière du soleil à travers un prisme, puis l'a regardé presque au niveau d'un microscope.
Ce qu'il a trouvé, c'est que, dans le bel arc-en-ciel, il y a des lignes sombres. En fait, une ligne sombre avait été découverte avant Fraunhofer, la lignée du sodium. Mais il a découvert qu'il y a en fait plus de 500 lignes sombres. On les appelle raies d'absorption.

Lorsque la lumière traverse l'atmosphère du soleil, les produits chimiques dans l'atmosphère font des transitions.
en absorbant des photons à certaines longueurs d'onde. Les longueurs d'onde correspondantes de la lumière ne atteindre la terre, et ainsi vous avez les raies d'absorption sombres. Vers 1860, [Gustav] Kirchhoff et [Robert] Bunsen a découvert que les raies sombres des spectres d'absorption coïncident avec les raies lumineuses de spectres d'émission, qui apparaissent lorsque les éléments sont chauffés.
En mathématiques, il est très facile de décrire un spectre d'émission et beaucoup plus difficile de décrire un spectre d'absorption. Mon idée était que le spectre donnant les zéros de la fonction zêta de Riemann était un spectre d'absorption, ce qui expliquait le signe moins : l'absorption est comme prendre le négatif d'une image, et c'est ce négatif qui vous donne le signe moins. J'ai donc fait un calcul à à cette époque, en 1996, et cela m'a donné le bon spectre. J'étais très excité et j'ai écrit un *compte-Rendus* note 15 expliquant cela.
À cette époque, j'avais l'espoir que cela donnerait un aperçu des zéros de zêta. Mais c'était un spectre d'absorption, il est donc beaucoup plus difficile à manipuler qu'un spectre d'émission. Ça a commencé une longue histoire, qui s'est poursuivie jusqu'à présent, dans le travail avec ma collaboratrice Caterina Consani. Le les idées restent très puissantes. Dans un article 16 très récent que nous avons mis sur l'arXiv, ces idées ont permis nous pour faire plus de progrès. Le résultat est que l'espace des nombres premiers pourrait être vu sortir d'un espace non commutatif qui était extrêmement naturel.

Allyn Jackson : Pourquoi les raies d'absorption sont-elles tellement plus difficiles à gérer que les émission-lignes de séparation ?

Alain Connes : Quand on a une raie d'absorption, c'est une seule raie, donc normalement ce ne serait pas être vu. À moins que la ligne n'ait une certaine épaisseur, une certaine largeur, vous ne la verriez pas. Mathématiquement parlant, les zéros de zêta n'ont pas d'épaisseur. Vous devez les faire artificiellement un peu épais pour pouvoir les voir. Et c'est très dur. C'est précisément ce point technique qui est maintenant bien mieux traité, mais cela a pris énormément de temps à comprendre.
C'est un développement sur lequel j'ai travaillé, parallèlement au développement physique du Modèle standard, depuis les années 1990. Ces deux développements sont pour moi cruciaux. Si non commutatif la géométrie ne traitait que d'espaces très étranges, je ne pense pas qu'il serait très convaincant de gens. Mais pour deux espaces fondamentaux - pour l'espace-temps, l'espace où nous vivons, et pour l'espace des nombres premiers - il peut apporter quelque chose de nouveau et incarner l'intuition derrière eux.

Comprendre la renormalisation

Alain Connes : Une autre évolution a également joué un rôle clé. Depuis les années 1970, je suis fasciné par une technique physique appelée renormalisation.
Dans les années 1930, lorsque Dirac a créé la théorie quantique des champs, il a quantifié le champ électromagnétique en une façon qui est vraiment époustouflante. Einstein a eu cette incroyable intuition que les fréquences devait être quantifié, donc leur énergie n'était pas arbitraire mais devait être un multiple entier de *hv* . Cette était comme un *Ansatz* , une prescription. Dirac a su en faire un

fait mathématique. Son idée était utiliser exactement la non-commutativité pour forcer une certaine quantité à être un entier.
Une fois que Dirac l'a fait, il a essayé d'appliquer la même technique afin de traiter les problèmes quantiques. domaines de systèmes plus complexes. Mais alors rien n'a fonctionné. Les expressions qu'il a écrites n'avait aucun sens. À la fin des années 1940, des mesures plus précises de ce qu'on appelle l'Agneau décalage ont été obtenus. Les efforts pour expliquer les mesures à partir de la physique ont échoué parce que la quantification
Les éléments qui auraient dû l'expliquer n'avaient pas de sens parce qu'ils étaient donnés par des intégrales divergentes.
C'était une époque terrible pour la physique. Alors des gens courageux comme [Sin-Itiro] Tomonaga et [Julian] Schwinger et [Richard] Feynman sont passés au premier plan. Ils ont manipulé les infinis pour en extraire des quantités finies et comparé ces quantités à des mesures. Pour ce qu'on appelle l'anormal moment de l'électron, la précision de l'accord était la précision de la largeur d'un cheveu dans proportionnellement à la distance de Paris à New York. Personne ne pouvait nier qu'ils avaient trébuché sur quelque chose de grand. D'un autre côté, si vous mettez un mathématicien pour regarder ce qu'ils étaient faire, vous entendriez le mathématicien crier !

Allyn Jackson : A cause de la façon dont les physiciens manipulaient les infinis ?

Alain Connes : Exact. Ils manipulaient les infinis d'une manière totalement incompréhensible. compréhensible. Ce qu'ils faisaient s'appelle la renormalisation. À partir des années 1970, je suis devenu fasciné par cela.
A la fin des années 90, je travaillais avec mon collaborateur Henri Moscovici. nous travaillions sur la cohomologie cyclique adaptée à une certaine algèbre de Hopf. Il y avait un visiteur à l'IHES, Dirk Kreimer, qui est vraiment un physicien pur et dur. Il a eu une nouvelle idée merveilleuse que, quand on est ma-
En manipulant les graphes de Feynman, il y a dans les coulisses quelque chose comme une algèbre de Hopf. Nous avons commencé travailler avec Dirk ; c'était en 1998. Nous avons rassemblé toutes les mathématiques qui ont été re- qui se cache derrière cette algèbre de Hopf.
Puis il y a eu un moment de révélation qui m'est venu en septembre 2000. Normalement, si vous faites une découverte, vous êtes debout pendant une heure, puis vous revenez sur terre. Mais alors j'étais prêt pour une semaine. La découverte était que cette technique incroyablement compliquée que les physiciens utilisent pour
La renormalisation est en fait une technique bien connue en mathématiques appelée la décomposition de Birkhoff.
tion. Il a été lancé par [GD] Birkhoff, et Grothendieck l'a également utilisé pour prouver un très important théorème sur les fibrés vectoriels sur la sphère.
Après cela, lorsque j'ai collaboré avec Matilde Marcolli, nous avons découvert que derrière la renormalisation se trouvait non seulement la décomposition de Birkhoff, mais aussi un problème encore plus fondamental, le Riemann- problème de Hilbert. Nous avons travaillé plusieurs années là-dessus. Mais dans un sens, j'avais cessé de penser à renormalisation, car dans mon esprit c'est résolu.

Allyn Jackson : Les mathématiciens ne crient plus ?

Alain Connes : Bon, maintenant ils comprennent. Mais cela prend beaucoup de temps car les mathématiciens ne savent pas ce qu'est la renormalisation, et les physiciens ne savent pas quel est le problème de Riemann-Hilbert est !

Surmonter les préjugés contre la géométrie algébrique

Alain Connes : Je voudrais continuer l'histoire du côté théorie des nombres, car la physique et la théorie des nombres étaient constamment entrelacées dans mon esprit.
Avant de rencontrer Katia Consani et d'entamer une très longue collaboration avec elle, j'avais beaucoup de préjugés contre la géométrie algébrique. J'ai été stupide, parce que quand on a des préjugés contre quelque chose, très souvent c'est juste de l'ignorance. J'étais ignorant. Lorsque Katia Consani et moi avons commencé à travailler ensemble, j'ai appris des concepts inventés par Grothendieck, comme le concept de schème.
J'ai déjà parlé de l'espace non commutatif que j'ai découvert et qui incarne les nombres premiers. Si vous le considériez comme un espace non commutatif, vous pouviez ressentir cette compréhension fondamentale de ce l'espace manquait, en particulier sa relation à la géométrie algébrique et à d'autres points fondamentaux de vue en mathématiques.
En 2014, nous avons découvert avec Katia Consani qu'il existe un topos - au sens de Grothendieck - c'est le topos de l'arithmétique. Ce topos a immédiatement donné lieu au même espace que l'espace non-commutatif que j'avais trouvé en 1996. Cela signifiait donc que cet espace, plutôt que d'être arbitraire ou être construit dans le but de faire quelque chose, était en fait un élément absolument fondamental espace. Nous avons rédigé une note 17 des *Comptes-Rendus* à ce sujet.
Permettez-moi d'expliquer la notion de topos, car elle est tout aussi importante que la géolocalisation non commutative. métrique et très liée à celle-ci. Vers 1958, Grothendieck découvre une nouvelle notion de l'espace géométrique, qu'il appela topos. Normalement, quand vous faites de la géométrie, vous mettez en scène l'espace que vous étudiez. L'acteur principal est l'espace, et vous parlez des points de l'espace, vous parlez de sa topologie, de sa géométrie différentielle, etc. L'idée de Grothendieck est que il y a une autre façon d'appréhender l'espace. Cette autre façon n'est pas de la mettre en scène mais pour le cacher derrière la scène, dans ce qu'on appelle en français la coulisse. Je ne suis pas sûr du terme en anglais.

Allyn Jackson : Dans le contexte du théâtre, ce serait « les coulisses ».

Alain Connes : Oui, comme au théâtre, « en coulisses ». L'espace en question sera dans les coulisses.
Vous ne verrez jamais l'espace. Son rôle sera que, pendant que vous faites des mathématiques avec l'ordinaire caractères - les entiers, les nombres réels, les espaces avec lesquels vous avez l'habitude de travailler - toutes ces choses dépendra en fait d'un paramètre qui se trouve dans les coulisses. Ce qui est dans les coulisses gouvernera un aléatoire qui sera hérité par les caractères mathématiques habituels avec lesquels vous travaillez.
C'est une idée fantastique. Techniquement parlant, qu'est-ce que cela signifie ? Au lieu de regarder l'espace, vous regardez ce qu'on appelle les gerbes d'ensembles sur l'espace. Ensuite, quand vous faites la théorie des ensembles, vous pouvez faire toutes les mathématiques que vous voulez, vous pouvez regarder des faisceaux de groupes ou des faisceaux de données topologiques les espaces. Vous pouvez récupérer l'espace et sa topologie, qui se trouve dans les coulisses, juste en regardant l'ensemble théorie "avec paramètre". Qu'est-ce qu'un point de l'espace ? Un point de l'espace est un

moyen de supprimer le caractère aléatoire des événements qui se produisent sonnent sur la scène. Ensuite, lorsque vous utilisez un point pour regarder à ce qui se passe sur scène, c'est comme si ce n'était plus aléatoire.
Ce que je trouve incroyablement révélateur, c'est que lorsque vous calculez les points d'un topos, même d'un très topos simple, vous obtenez en général un espace non commutatif ! C'est ce qui fait le lien entre le point de vue de Grothendieck, du topos, et le point de vue non commutatif géométrie. Ils sont profondément interconnectés.

Allyn Jackson : Tu n'as jamais discuté de ça avec Grothendieck.

Alain Connes : Non, malheureusement. Au début des années 1990, il avait disparu dans un endroit du Pyrénées. Même sa famille ne savait pas où il était. Il y est resté jusqu'à sa mort en 2014. Il aurait été très difficile de discuter avec lui. Il est devenu un mystique au fil des ans. Pendant l'époque où il était reclus dans les Pyrénées, il écrivit énormément, des dizaines de milliers de pages. Le sujet principal était le problème du mal. J'ai lu plusieurs de ses écrits, y compris un texte magnifique intitulé *La Clef des Songes* , dans lequel il raconte l'histoire de son père.
Je n'ai jamais rencontré Grothendieck, mais je pense que je le connais si bien, par ses écrits. Dans plusieurs de eux, il se plaint que les gens ne comprennent pas ce qu'est un topos. Cela montre à quel point il est courant que les mathématiciens disent "Ce ne sont pas des mathématiques", ou "Ce n'est pas sérieux", simplement parce qu'ils ne comprendre. Il en a beaucoup souffert. Le concept de topos est une découverte étonnante qui donne une toute nouvelle façon de penser les mathématiques. Mais à moins que vous ne fassiez un epsilon de progrès dans un sujet précis qui existe déjà et qui est bien pavé, les gens n'y prêtent pas attention.
Je ne suis pas exempt de préjugés moi-même, donc je comprends parfaitement pourquoi les gens auraient ces préjuges.

Allyn Jackson : Vous aviez un préjugé sur l'idée de topos, et sur la géométrie algébrique.

Alain Connes : Oui. Avant de comprendre ce qu'était un topos, je disais : "C'est des conneries !" Toi vraiment comprendre quelque chose que lorsque vous l'utilisez à d'autres fins, et cela dépend de la occasion que vous obtenez. Dans le travail avec Katia Consani, nous avons enfin compris qu'il y a un topos, et c'est extrêmement naturel. Cela a ouvert un point de vue totalement différent.

Allyn Jackson : Vous avez fait un lien vers de nouvelles choses, et vous vous êtes simplement lancée dedans. Vous avez fait que plusieurs fois dans votre vie. Qu'est-ce qui te permet de faire ça ? C'est ça la confiance ?

Alain Connes : Non, non, non. Je ne suis pas vraiment motivé par la confiance. Ni par curiosité. Ce que je dirait, c'est plus d'anxiété. Je passe beaucoup plus de temps à être anxieux qu'à être confiant ou être curieux. Mon esprit s'inquiète en permanence. Ce n'est pas de la confiance - d'accord, j'en ai bien sûr confiance en soi, mais ce n'est pas une sorte de confiance excessive, en aucun cas. je ne connaissais qu'une personne qui avait une confiance excessive, c'était Michael Atiyah. Je l'aimais vraiment beaucoup. il pourrait sauter à d'autres sujets. Mais je ne suis pas comme lui. Je suis beaucoup plus motivé par le fait que lorsque je ne comprendre quelque chose, ça me fait souffrir. Cela me met dans un état de misère. je me sens mal jusqu'à ce que
Je comprends. C'est exactement la force de motivation.

C'est aussi pourquoi j'aime beaucoup collaborer car alors vous partagez ce malaise. Tu n'es pas seule ! Et j'aime collaborer avec des gens qui sont plus confiants que moi, précisément à cause de mon problème.
Grothendieck a écrit quelque chose dans *Récoltes et Semailles* que j'aime citer. Il a dit qu'avoir peur l'erreur est la même que craindre la vérité. Mais si l'on est prêt à affronter l'erreur, alors cette peur devient une bénédiction. On traverse cette période difficile et on en ressort bien plus.

Une grande théorie unifiée de la gravité

Allyn Jackson : Vous avez déjà parlé de regarder l'espace-temps du point de vue non commutatif de vue, ce qui donne le modèle standard couplé à la gravité. Cela ressemble à un "grand unifié théorie » des forces fondamentales. Est-ce que c'est ce que tu dis ?

Alain Connes : Laissez-moi vous expliquer cela en détail. Au milieu des années 80, j'avais réalisé que vous pourrait obtenir le secteur de Higgs du modèle standard à partir de l'image géométrique. Mais je n'avais pas quelque chose qui unifierait la gravité avec les autres forces ; qui n'est arrivé qu'en 1996, quand j'ai commencé travailler avec Ali Chamseddine. On s'est rendu compte que si l'on prend un point de vue spectral de la géométrie, alors il y a une manière naturelle de définir ce qu'on appelle en physique une « action », pour cette géométrie.
Cela permettra de mesurer à quel point la géométrie est appropriée. Cette action s'est avérée spectrale et dépend seulement sur l'élément de ligne, sur son spectre.
Pour expliquer cela, je dois faire une parenthèse, mais d'abord, pour répondre à votre question : c'est une unification.
Vous considérez la gravité pure sur un espace géométrique, et lorsque vous calculez ce que vous obtenez de la pure gravité, vous obtenez non seulement le champ de gravitation ordinaire, mais vous obtenez également les champs bosoniques du
Modèle standard et champs fermioniques. Ainsi, vous obtenez une image complète de la gravité pure. Quelque les gens ont essayé par exemple d'obtenir la gravité à partir de champs de jauge, mais ce que je dis est assez différent. Ce que je dis, c'est qu'une fois que vous introduisez une structure fine dans la géométrie de l'espace-temps, alors la gravité pure vous donnera non seulement la force gravitationnelle ordinaire, mais aussi l'autre forces de la nature, qui sont la force électrofaible et la force forte. Ce n'est donc pas une unification de jauge champs, mais c'est une unification de la gravité.
Permettez-moi maintenant d'entrer dans la digression. Pourquoi est-il naturel de visualiser un espace spectralement et de définir le action d'un invariant spectral ? Cela remonte à l'histoire de la mesure de la longueur. Il commence quelque temps avant la Révolution française. A cette époque, la France n'avait pas d'unification du ter de longueur. Si vous étiez par exemple dans le commerce du linge, vous auriez besoin d'une unité de longueur pour mesurer des pièces de linge à vendre. Ainsi chaque ville ou village affichait à son entrée une unité de longueur.
Mais les unités étaient souvent différentes, ce qui rendait les choses extrêmement compliquées. Les gens ont commencé à dire ils avaient besoin d'un moyen d'unifier la mesure de la longueur. Des scientifiques en France, mais aussi en Angleterre, beaucoup pensé à cela. Ils ont décidé que la meilleure idée serait de prendre le plus grand objet, qui est la terre, puis définir l'unité de longueur comme une certaine proportion de la circonférence de la terre. Ils ont décidé qu'un mètre serait un quarante millionième de la circonférence de la terre.

Pour mesurer la circonférence, vous mesurez un angle qui peut être défini en regardant les étoiles et puis mesurer concrètement la distance entre les deux points qui limitent l'angle. L'angle choisi était entre Dunkerque dans le nord de la France et Barcelone dans le nord de l'Espagne, qui sont plus ou moins sur la même longitude. En 1792, deux astronomes français furent chargés de mesurer cette distance. Ils ont fait des triangulations, ce qui signifie qu'ils mettraient un télescope au sommet d'une colline et faire quelques mesures. Bien sûr, quand ils ont fait ça en Espagne, qui était en guerre avec la France, c'était assez difficile d'expliquer qu'ils n'étaient pas des espions ! Il y a beaucoup d'histoires intéressantes sur que leur est-il arrivé.
Ils ont finalement obtenu une mesure raisonnablement précise. La mesure a été utilisée pour jeter un barre de platine pour représenter un mètre, et la barre a été déposée au Pavillon de Breteuil, qui est près de Paris. Cela a été considéré comme l'unité universelle de longueur dans le système métrique. Bien sûr, ce n'était pas très pratique, car si vous êtes dans un pays étranger et que vous voulez mesurer votre lit, il faut se rendre au Pavillon de Breteuil pour connaître la longueur d'un mètre ! Donc des répliques ont été faites et distribuées.
C'était bien jusqu'au début du 20e siècle. En 1925, les gens avaient de meilleures façons de longueur sûre en utilisant la spectroscopie, en comparant une longueur donnée avec une longueur d'onde d'un atomique connu transition. Ils se sont alors rendu compte que la fameuse unité de longueur déposée près de Paris n'avait pas de longueur constante.

Allyn Jackson : Parce que c'était en métal ?

Alain Connes : Exactement, car le métal se contracte et se dilate. Ils ont décidé que l'appareil qui permettait aux gens de voir que la longueur de la barre de platine changeait était un meilleur appareil pour définir l'unité de longueur que la barre elle-même. Pendant un certain temps, ils ont utilisé du krypton, qui n'était pas très satisfaisant, car le krypton est très rare. Finalement, ils sont passés au césium. Aujourd'hui, on peut acheter dans un magasin un instrument bon marché basé sur la transition au césium qui vous donnera des mesures de longueur avec une précision de 10 décimales.
Lorsque j'ai défini la géométrie non commutative, je l'ai définie comme un triplet spectral. Le passage de la point de vue classique, qui était le point de vue de Riemann sur la géométrie, au point de vue nouveau qui que j'avais défini, qui est spectral, est exactement parallèle au décalage qui s'est produit en physique entre la définition de l'unité de longueur au moyen de la barre de platine, et la définition au moyen de comparaison avec les longueurs d'onde d'un produit chimique fixe. C'est très frappant.
Le principe d'action, que nous avons défini avec Chamseddine, permet alors non seulement de récupérer gravité mais de trouver la gravité couplée à la matière. Cette action mesure simplement le spectre de l'élément de ligne. La formule de la distance en géométrie non commutative utilisera le fait que le l'élément de ligne ne commute pas avec les coordonnées dans l'espace.
Sur le plan conceptuel, cela signifie qu'un paradigme de la géométrie non commutative, celui de un triplet spectral, en fait est très étroitement lié à la physique. Il a un gros avantage dans la quête de unifier la gravité avec d'autres forces, c'est-à-dire qu'elle est à la fois quantique et géométrique. Après le quantum a été découvert par Heisenberg, von Neumann a compris que la bonne étape sur laquelle se développer la mécanique quantique était l'espace de Hilbert. Donc la géométrie dont je parle est la géométrie qui est sur cette scène, dans l'espace Hilbert. Par conséquent, il convient dès le départ au quantum.

L'influence de l'intrication quantique

Allyn Jackson : Certains théoriciens de la complexité ont récemment prouvé un résultat [18] **impliquant l'informatique quantique. ting et l'enchevêtrement, et ils ont ainsi résolu quelque chose appelé le problème de Tsirelson. Ceci à son tour résolu la conjecture d'encastrement de Connes. Pouvez-vous me dire quelle est cette conjecture et comment vous voir ce nouveau travail ?**

Alain Connes : Tout d'abord, ce n'est pas une conjecture, c'est un problème. Quand je travaillais à Kingston en 1975, à un moment donné, je suis tombé sur une certaine propriété d'un facteur. J'ai tout de suite vu que cette propriété était moins restrictif que d'être hyperfini. Je prouvais quelque chose sur les facteurs hyperfinis et avait trouvé des exemples de facteurs qui n'étaient pas hyperfinis, mais qui remplissaient cette propriété.
La propriété est que le facteur n'est pas hyperfini mais ressemble autant à un facteur hyperfini que possible. Techniquement, cela signifie que le facteur peut être noyé dans un ultraproduit d'hyperfini les facteurs. La question est de savoir si chaque facteur de ce qu'on appelle le Type II 1 possède cette propriété. Ce que j’avais remarqué à l'époque était que tous les livres et papiers que je connaissais vérifiaient cette propriété pour le facteur associé. J'ai donc écrit à ce sujet en trois lignes dans mon article. Et - c'est l'honnête vérité ! - Je n'y ai jamais pensé plus.
Ensuite, ces quelques lignes que j'avais écrites ont été reprises par un certain nombre de personnes différentes. [Eberhard] Kirchberg a prouvé que ce problème est équivalent à quelque chose sur lequel il travaillait. Ça a été utilisé par [Dan Virgil] Voiculescu en définissant sa nouvelle notion d'entropie et par d'autres personnes dans le quantum théorie comme [Boris S.] Tsirelson.
Je ne sais pas à quel point l'article sur la théorie de la complexité a été vérifié. Apparemment c'est assez long.
Ce qu'il dit, en gros, c'est qu'il y a des choses qui ne peuvent pas du tout être approchées par quelque-chose qui est de dimension finie. C'est quelque chose d'assez bizarre. Ce serait probablement assez important s’ils en ont vraiment trouvé un exemple. Si l'exemple serait pertinent pour la physique,
Je n'ai aucune idée. J'ai toujours eu le sentiment, ou la croyance, que la nature est vraiment de dimension finie dans un sens; même si nous nous en approchons par quelque chose de continu, tout est essentiellement de dimension finie.
Comme je l'ai dit, je ne me suis jamais penché sur le problème. Je suis vraiment la pire personne à qui demander !

Allyn Jackson : Le résultat de la théorie de la complexité concerne l'intrication quantique. Est ce que ca vous intéresse ?

Alain Connes : L'intrication est quelque chose que je trouve extrêmement intéressant et important, mais pour une raison différente. Le livre que nous avons écrit avec ma femme et Dixmier contient une phrase provocatrice.
En français, c'est « *l'aléa de quantique est le tic-tac de l'horloge divine.* » En anglais, cela pourrait être « the le caprice du quantum est le tic-tac de l'horloge divine.
La raison pour laquelle le temps passe, et passe d'une manière que nous ne contrôlons pas du tout, c'est précisément le manque de reproductibilité du quantum. Lorsque vous envoyez un photon à une cible, vous ne pourrez jamais reproduire le résultat. C'est quelque chose de totalement aléatoire et

incontrôlable. J'ai pu, dans une certaine mesure, développer une théorie qui aurait le temps de jaillir de ce hasard quantique, comme je l'ai expliqué plus tôt. Mais si vous avez un temps au point A et un temps au point B, et l'aléatoire quantique en A et le hasard quantique en B, il n'y aurait aucun lien du tout. Droite ? Non, ce n'est pas vrai, parce que si en A et B vous mesurez le caractère aléatoire quantique à partir d'états intriqués, alors vous obtiendrez résultats qui sont corrélés. Le caractère aléatoire quantique est corrélé par l'intrication quantique.
Il faudrait un esprit comme celui d'Einstein pour inventer une notion du temps qui jaillirait du quantitatif. et cela nous mettrait en paix avec l'enchevêtrement et nous dirait que l'enchevêtrement n'est que le l'harmonie ou la corrélation entre les divers hasards en divers points. je crois que la personne qui pourrait être le plus proche de cela est [Anton] Zeilinger, un physicien suisse qui a fait des expériences sur enchevêtrement pour des points très éloignés, des points distants de plus de 100 kilomètres. 19 j'ai entendu un discours de lui dans lequel il a dit qu'ils cherchaient des choses qui ne peuvent pas être empêtrées dans leur expériences. Les mathématiques de l'évolution du temps, plus la compréhension de l'intrication – là il y a suffisamment de choses là-bas pour créer un point de vue complètement nouveau à temps.
Ce qui est extrêmement troublant dans l'intrication, c'est que si vous avez deux états intriqués et que vous faites une observation sur l'un, il agit immédiatement sur l'autre et vous donne un résultat corrélé.
Einstein était contrarié à ce sujet et l'a qualifié d'"action effrayante à distance". Effrayant est le mot juste.
Alain Aspect a effectué des mesures montrant que l'effet est beaucoup plus rapide que la vitesse de la lumière.
Cela semble contredire le principe de relativité. Mais en fait, ce n'est pas le cas, car vous ne pouvez pas transmettre les informations. Supposons que vous ayez deux états corrélés, de sorte que si vous trouvez un plus dans un, l'autre sera moins, ou si vous trouvez moins, alors l'autre sera plus. La réponse, plus ou moins, est pas mon propre choix; c'est le résultat de l'expérience. L'autre gars avait moins ou plus, mais il va obtenir aucune information de moi. Ce n'est pas un moyen de transmettre des informations, donc cela ne contredit pas le principe de relativité.
C'est quand même gênant. Si je suis dans un cadre différent, ce ne sera pas que quelque chose a d'abord été fait à le point A puis le point B ont réagi ; ce sera que cela a été fait d'abord au point B et ensuite A a réagi.
Lorsque vous avez des événements de type spatial vus à partir de différents cadres de référence, l'un peut être avant et le l'autre peut être après, ou vice versa. C'est votre propre choix. Cela signifie que la notion de causalité, ou la notion de temps, est totalement bouleversée par le phénomène d'intrication. Je l'interprète comme signifiant qu'il existe quelque chose de plus primitif que le temps qui passe, qui est le hasard quantique.

Le don de l'hypothèse de Riemann

Allyn Jackson : Comment voyez-vous les perspectives de prouver l'hypothèse de Riemann ?

Alain Connes : J'ai beaucoup travaillé là-dessus et j'ai fait quelques progrès récemment avec Katia Consani. Mais jusqu'à ce que vous ayez terminé, vous ne pouvez rien dire.
Mais il y a une image mentale du problème qui est réconfortante. Le problème est comme un pôle infini, et vous voulez montrer que le poteau est vertical. C'est l'image mentale. Avec Katia, c'est comme si nous étions des fondations de plus en plus serrées et de plus en plus serrées. Il y a un

ensemble infini d'escaliers, mais chaque pas que vous faites dans les escaliers bloque en fait le poteau, pour le rendre de plus en plus vertical.
Ce que nous avons fait récemment, c'est franchir la première marche de l'escalier.
Les escaliers sont infinis. Mais la beauté c'est que, grâce à une idée d'André Weil, il suffit de considérer un nombre fini de nombres premiers à la fois pour résoudre le problème. Si vous vous en tenez à cette idée, alors vous êtes assurez-vous de ne pas tomber dans le trou noir de prouver des résultats équivalents à l'hypothèse de Riemann.
Ce que j'ai trouvé en 1996, c'est quelque chose de difficile quand on l'applique à l'infinité des nombres premiers, mais cela, quand vous l'appliquez seulement à un nombre fini de nombres premiers, vous donne exactement l'espace de Hilbert et le cadre de calcul quantifié qui est apparemment très approprié pour attaquer le problème.
On peut avoir de l'espoir, mais jusqu'à ce que vous ayez terminé, oubliez-le - vous ne pouvez rien dire. j'aime travailler sur ce problème parce que c'est une épreuve de moi-même à laquelle je ne peux pas échapper. Ce n'est pas comme si tu construisais un nouveau théorie, et alors vous pouvez penser que vous êtes le plus grand. En mathématiques, il n'y a pas de meilleure façon de progrès que d'être confronté à un problème que vous ne pouvez pas résoudre. Si vous travaillez sur un problème qui vous pouvez résoudre, cela signifie que ce n'est pas le bon problème. Se battre avec un problème très difficile est est une bien meilleure façon de construire une image mentale que lorsque vous travaillez sur un problème facile. Quand le l'esprit est bloqué, il a beaucoup plus de pouvoir à construire et à concevoir. Je vois un problème comme ça comme un cadeau.
Avec ma femme et mon professeur Jacques Dixmier, nous avons écrit un deuxième roman intitulé *Le Spectre d'Atacama* . 20 Il raconte l'histoire d'un mathématicien confronté à l'hypothèse de Riemann.
Il se rend compte que les êtres de l'espace envoient des spectres à la terre et que ces spectres contiennent les zéros de la fonction zêta de Riemann. J'ai récemment publié dans le *Journal of Mathematics et Musique* un article 21 qui vient d'un problème auquel nous avons été exposés lors de l'écriture du livre.
Le mathématicien et les autres scientifiques devaient s'assurer que l'être communiquant avec eux de l'espace extra-atmosphérique était un être intelligent et non une machine. Ils ont donc dû concevoir un Turing Un test qui les rendrait complètement sûrs. Un tel test est possible, et il est lié à André Les travaux de Weil sur l'hypothèse de Riemann. Il a découvert que lorsque vous travaillez avec des champs de fonction, tous les zéros de l'analogue de zêta sont sur la ligne critique et ils sont périodiques - ils se répètent périodiquement.
Ce que nous avons réalisé en écrivant le livre, c'est le lien avec ce que le compositeur [Olivier] Messiaen avait inventé avec ses *rythmes non rétrogradables* . Les motifs rythmiques de Messien ont exactement la même propriété que les motifs périodiques que vous trouvez à partir des zéros de l'analogue de Weil de la fonction zêta de Riemann.
Les motifs rythmiques de Weil sont associés à chaque prime. Ce que les personnages du livre ont fait était de envoyer dans l'espace les motifs associés aux nombres premiers, mais ils omettent un nombre premier. Si la les êtres recevant le message étaient vraiment intelligents, ils répondraient en envoyant le modèle pour le premier manquant.

Allyn Jackson : Votre femme est-elle écrivaine ?

Alain Connes : Ma femme est maintenant à la retraite, mais elle était professeur de latin et de grec au lycée.

C'est une personne littéraire. Nous sommes très complémentaires. Elle en sait tellement que je ne sais pas.

Allyn Jackson : Dixmier a écrit de la science-fiction quand il était plus jeune, non ?

Alain Connes : Oui, il a écrit de la science-fiction et aussi des romans policiers. La façon dont notre premier roman commencé, c'est qu'à l'été 2012, Dixmier nous a envoyé une carte postale. La carte postale disait : « J'ai le titre du livre. Vous l'écrivez, et je le relirai ! Bien sûr, nous avons ri.
Ensuite, ma femme et moi avons fait un voyage à Venise et avons visité un petit musée avec une exposition de de l'art moderne très frappant, y compris une sculpture de [Maurizio] Cattelan. La sculpture montrait neuf cadavres, grandeur nature, alignés les uns à côté des autres. J'ai vu la sculpture, et juste alors un prix avait été donné à neuf personnes ! [22] Cela a immédiatement déclenché quelque chose dans mon esprit, et j'ai commencé rédiger un brouillon du livre que Dixmier avait suggéré.
Quand ma femme a vu le brouillon, elle a dit : « Non, c'est horrible ! » Puis elle a pris le relais. Elle a réussi à sauver l'idée, même si ce qu'elle a écrit était totalement différent. Elle a commencé à écrire sur un jeune physicienne à qui l'on demande de prendre la tête du CERN. C'était donc le point de départ de la livre. Étonnamment, quelques années après la parution du livre, une Italienne, Fabiola Gianotti, a été nommé à la tête du CERN !
J'aime toujours ces motivations très étranges, très étranges, comme un coup de pied, pour commencer quelque chose.

Allyn Jackson : Vous semblez avoir une vie vraiment amusante.

Alain Connes : Bien sûr. J'essaye au moins ! Mais comme je l'ai dit, ce n'est pas tellement amusant à cause de la persistance anxiété.

Allyn Jackson : Mais comme tu l'as dit à propos de Grothendieck, l'angoisse te pousse vers la vérité.

Alain Connes : Exactement.

Notes
Transcription Latex d'une interview d'Alain Connes par Allyn Jackson consultable ici
https://celebratio.org/Connes A /article/ 842 /.
(Denise Vella-Chemla, février 2021).

1. *Le Théâtre quantique* , d'Alain Connes, Danye Chéreau et Jacques Dixmier. Odile Jacob, 2013.
2. *Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien a* été écrit par Alexander Grothendieck entre 1983 et 1986. Il a imprimé et distribué lui-même des exemplaires mais ne l'a jamais publié.
3. Alain Connes, « Ordres faibles et localisation des zéros de polynômes », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB* **269** (1969), A373-A376.
4. Masamichi Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Mathématiques* , vol. 128, Springer-Verlag, 1970. https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0065832.
5. Huzihiro Araki et EJ Woods, « A classification of factor », *Publications du Research Institute for Mathématique Sciences Série A* **4** (1968/1969), 51-130. https://www.ems-ph.org/journals/show abstract.php ? *issn* =0034 − 5318 *vol* = 4 *iss* = 1 *rang* = 4.

6. Alain Connes, « Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB* **274** (1972), A175-A177.
7. Alain Connes, « Une classification des facteurs de type III », Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série AB **275** (1972), A523-A525.
8. Deux mois après cette interview, Vaughan Jones est décédé à l'âge de 67 ans.
9. Alain Connes, « $C*$ -algèbres et géométrie différentielle », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série AB* **290** (1980), n ° 13, A599-A604.
10. Alain Connes et Henri Moscovici, « Conjecture de Novikov et groupes hyperboliques », *Comptes-Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Série I. Mathématique* **307** :9 (1988), 475-480.
11. Alain Connes, « Interprétation géométrique du modèle standard de la physique des particules et structure fine de l'espace-temps », *Comptes-rendus de l'Académie des sciences. Série Générale. La Vie des Sciences* **10** :3 (1993), 223-234.
12. Ali H. Chamseddine, Alain Connes, et Viatcheslav Mukhanov, « La géométrie et le quantum : les bases », *Journal de Physique des Hautes Energies* (2014) n ° 12, 098. https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP12(2014)098.
13. Alain Connes, *Noncommutative Geometry* , Academic Press, 1994. Il s'agit d'un édition de l'édition française, *Géométrie non commutative* , publiée par InterEdtions en 1990.
14. Jean-Benoît Bost et Alain Connes, « Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec brisure spontanée de la symétrie dans la théorie des nombres », *Selecta Mathematica* (NS) **1** :3 (1995), 411-457.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF01589495.
15. Alain Connes, « Formule de trace en géométrie non commutative et hypothèse de Riemann », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série I Mathématique* **323** :12 (1996), 12, 1231-1236.
16. Alain Connes et Caterina Consani, « Weil positivity and trace formula, the archimedean place », ont soumis à arXiv le 25 juin 2020. https://arxiv.org/abs/2006.13771.
17. Alain Connes et Caterina Consani. « Le site arithmétique », *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* **352** :12 (2014), 971-975.
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X14001666?via%3Dihub.
18. Zhengfeng Ji, Anand Natarajan, Thomas Vidick, John Wright et Henry Yuen, " $MIP* = RE$, " soumis à arXiv le 13 janvier 2020. https://arxiv.org/abs/2001.04383.
19. X.-S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, S. Kropatschek, W. Naylor, B. Wittmann, A. Mech, J. Kofler, E. Anisimova, V. Makarov, T. Jennewein, R. Ursin et A. Zeilinger, « Téléportation quantique sur 143 kilomètres en utilisant l'anticipation active », *Nature* **489** (2012), 269-273.
https://www.nature.com/articles/nature11472.
20. Alain Connes, Danye Chéreau, et Jacques Dixmier, *Le Spectre d'Atacama* , Odile Jacob, 2018.
21. Alain Connes, « Motivé Rythmes », à apparaît dans *Revue de Mathématiques et Musique* .
https://arxiv.org/pdf/1812.09946.pdf.
22. Le Breakthrough Prize in Fundamental Physics a été décerné pour la première fois en 2012, à neuf personnes : Nima Arkani-Hamed, Alan Guth, Alexei Kitaev, Maxim Kontsevich, Andrei Linde, Juan Maldacena, Nathan Seiberg, Ashoke Sen et Edward Witten.

Questions posées à Alain Connes dans le livre Mathématiques, un dépaysement soudain

Une démonstration est-elle éternelle ? Un théorème est-il éternel ?

La position du raisonnement mathématique par rapport à la vérité mathématique est analogue à celle des déductions du tribunal par rapport à la réalité extérieure. Un raisonnement juste est éternel mais il ne dévoile qu'une réalité partielle. Si l'on s'en tient même aux propriétés des entiers naturels, la plupart des propriétés vraies sont non démontrables à partir des axiomes de Peano. Un exemple simple est le fait que ce soit la tortue qui gagne dans la fable suivante du lièvre et de la tortue. L'on part d'un entier n par exemple $n = 9$ et on l'écrit en base 2. $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi tous les exposants en base 2, et ainsi de suite s'il y a à nouveau des exposants, de sorte que dans notre exemple on écrit l'exposant $3 = 2 + 1$ et $9 = 2^{2+1} + 1$. Le lièvre arrive et remplace tous les 2 par des 3, ce qui remplace 9 par $3^{3+1} + 1$, la tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 3, puis remplace tous les 3 par des 4, ce qui dans notre exemple donne 4^{4+1}. La tortue soustrait 1. Le lièvre réécrit le résultat en base 4, ce qui donne $3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3$, puis remplace tous les 4 par des 5, la tortue soustrait 1 et ainsi de suite. Eh bien, l'on sait démontrer grâce à la théorie des nombres ordinaux que, comme dans la fable, c'est la tortue qui gagne, c'est-à-dire que quel que soit l'entier n dont on parte, on arrivera toujours à 0 au bout d'un nombre fini d'étapes, malgré les bonds prodigieux du lièvre ! L'on sait aussi que l'énoncé "pour tout n c'est la tortue qui gagne" n'est pas démontrable au sein de l'arithmétique de Peano, de même que la non-contradiction de cette arithmétique n'est pas démontrable en son sein ! On peut comprendre que le nombre de pas nécessaires est extrêmement grand en prenant l'exemple très simple $n = 4$ pour lequel le nombre de pas est de l'ordre de $10^{121210694}$.

Vous souvenez-vous d'un rêve mathématique ?

La recherche mathématique se nourrit du "rêve" bien que celui-ci n'ait aucun droit de cité officiel, mais reste l'expression la plus pure de l'intuition. Mon "rêve" actuel a trait aux nombres que l'on définit, comme le faisait Euler, à partir d'expressions asymptotiques mais divergentes tels les nombres qui apparaissent naturellement dans les calculs de physique quantique. Ils sont définis de manière ambiguë et cette ambiguité n'implique plus des groupes finis comme dans la théorie de Galois, mais des groupes connexes comme ceux qui font encore défaut dans la théorie globale des corps de nombres.

Lorsque vous fermez les yeux, voyez-vous quelque chose de mathématique ?

Le propre du mathématicien est de créer des images mentales, c'est ainsi qu'une page de formules "parle" à un mathématicien, mais ces images mentales ont peu en commun avec la figuration du monde extérieur et n'ont de "sens" que de manière très intériorisée et difficilement transmissible.

Misha Gromov distingue quatre mystères dans le monde : la nature des lois de la physique, le mystère de la vie, le rôle du cerveau, le mystère de la structure mathématique reliée aux trois premiers. En voyez-vous autant, moins ou plus ?

L'on peut formuler nombre de questions. L'une des évolutions actuelles les plus frappantes est l'émergence progressive mais bien réelle d'une "super intelligence" qui se traduit par exemple au niveau de l'expérimentation en physique par l'expérience du LHC au CERN ou bien au niveau de la mémoire globale par Google. La puissance de l'ordinateur comme assistance au mathématicien est indéniable. Il reste heureusement ce terrain pour le moment inaccessible de l'intuition, de l'analogie où le cerveau humain a encore une avance considérable, que nous devons chérir et préserver à tout prix.

Le périple du mathématicien est un voyage dans une autre géographie, dans un autre paysage, au cours duquel il se heurte à une autre réalité. Cette réalité mathématique est tout aussi dure, tout aussi résistante, que la réalité matérielle dans laquelle nous vivons.

Texte extrait du livre Les déchiffreurs

L'impitoyable réalité

Préambule

Ce texte décrit une relation très personnelle avec les mathématiques, n'oublions pas que chaque mathématicien(ne) est un “cas particulier” et ce qui est dit ci-dessous n'engage que son auteur et ne saurait en aucun cas passer pour un point de vue “générique”.

Les mathématiques sont de mon point de vue, avant toute chose, l'outil de pensée, le générateur de concepts, de loin le plus élaboré que nous ayons, simplement pour comprendre, en particulier, le monde qui nous entoure. Les nouveaux concepts sont engendrés par un lent processus de distillation dans l'alambic de la pensée.

Il est tentant au départ de vouloir diviser les mathématiques en domaines séparés comme la géométrie, science de l'espace, l'algèbre, art de manipuler les symboles, l'analyse, qui donne accès à l'infini et au continu, la théorie des nombres, etc., mais ceci ne rend pas compte d'un trait essentiel du monde mathématique, à savoir qu'il est impossible d'en isoler une partie sans la priver de son essence.

Acte de rébellion

En mathématiques de mon point de vue, le b a-ba c'est que l'on ne devient pas mathématicien en apprenant, on devient mathématicien en faisant des mathématiques. Donc ce n'est pas le “savoir” qui compte, ce qui est important, c'est le savoir-faire. Bien entendu, les connaissances sont absolument nécessaires - et il n'est pas question de faire table rase des savoirs acquis - mais j'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant devant un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.

Ainsi, à mes yeux, on commence à devenir mathématicien plus ou moins par un acte de rébellion !

En quel sens ? Au sens où le futur mathématicien va commencer à réfléchir à un certain problème, et il va s'apercevoir qu'en fait, ce qu'il lit dans la littérature, ce qu'il lit dans les bouquins, ne correspond pas à la vision personnelle qu'il a du problème. Bien sûr, très souvent, cela correspond en fait à de l'ignorance, mais cela est sans importance du moment qu'il s'appuie sur une intuition personnelle et, bien entendu, sur la démonstration. Ainsi peu importe, parce qu'il va comprendre à cette occasion qu'en mathématiques il n'y a pas d'autorité ! Un élève de douze ans peut très bien tenir tête à son professeur s'il a trouvé une démonstration de ce qu'il avance et que cela singularise les maths par rapport aux autres disciplines où le professeur aurait beau jeu de se retrancher derrière des connaissances que l'élève n'aura pas. Un enfant de cinq ans peut dire à son père "Papa, il n'y a pas de plus grand nombre" et en être sûr, non parce qu'il l'a lu dans les livres mais parce qu'il en a trouvé une démonstration dans sa tête... Il y a un espace de liberté grand ouvert à celui qui sait le découvrir en respectant ses règles. Et la première chose qui compte, c'est de devenir soi-même sa propre autorité. C'est-à-dire, pour comprendre quelque chose, ne pas chercher tout de suite à vérifier si c'est écrit dans un livre, non ! Cela ne ferait que retarder l'éveil à cette indépendance. Ce qu'il faut, c'est vérifier dans sa tête que c'est comme ça. A partir du moment où l'on a compris cela, on peut, petit à petit, devenir très familier avec une toute petite portion du territoire mathématique et commencer un long parcours à travers ces territoires merveilleux que l'on essaie de dévoiler depuis son repère personnel.

Elan poétique

On peut dire qu'il y a deux aspects dans la tâche du mathématicien, il y a celui qui consiste à démontrer, à vérifier, etc., et qui demande une intense concentration, qui demande un rationalisme exacerbé, mais heureusement, il y a aussi l'aspect vision ! Et cet aspect vision, c'est un peu comme une mise en mouvement par l'intuition, qui n'obéit pas à des certitudes mais est plus proche d'une attirance de nature poétique. En simplifiant, il y a deux temps dans la découverte mathématique. Il y a un premier temps dans lequel l'intuition n'est pas encore formulable en termes transmissibles de manière rationnelle. Et dans cette période-là, ce qui compte, c'est la vision ! Non pas le côté statique, mais un espèce d'élan poétique.

Cet élan poétique est presque impossible à transmettre par les mots. Lorsqu'on essaie de le transmettre, lorsqu'on essaie de le dire, on arrive presque à le statufier, pour ainsi dire, et on perd cette espèce de mouvement qui est essentiel dans la découverte.

Ensuite, lorsqu'on a mis en place suffisamment de pièces du puzzle, et qu'on s'aperçoit que cette vision se traduit par des résolutions de problèmes, les choses changent. Par exemple, lorsque j'ai commencé à devenir mathématicien, une des choses qui m'a le plus frappé dans ce que j'avais trouvé - c'était au temps de ma thèse avec Jacques Dixmier - c'est qu'une algèbre non-commutative tourne avec le temps ! Ce que j'avais montré, c'est qu'en fait une algèbre non-commutative a une évolution dans le temps, qui lui est donnée de manière complètement canonique. Plus précisément, l'évolution qui était donnée par la théorie de Tomita, mais qui dépendait d'un état, ne dépendait en fait de cet état que modulo les automorphismes intérieurs, qui sont triviaux, qui n'existent pas. Donc ce que cela montrait, c'était que la non-commutativité engendrait le temps ! A partir de rien ! Simplement ! Comme ça ! Bien sûr il en résultait tout de suite qu'une algèbre a quantité d'invariants comme par exemple ses périodes, c'est-à-dire les temps t où l'évolution est triviale. Mais ces résultats, bien que parfaitement formulables et transmissibles n'épuisent pas le contenu poétique, la mise en mouvement merveilleuse de la trouvaille initiale.

Réalité mathématique

Il y a des poètes que j'admire beaucoup, comme Yves Bonnefoy, pour leur proximité au niveau méthodologique avec les mathématiques. Ce qui distingue, à mes yeux, le poète du mathématicien est que le matériau brut du poète, c'est l'expérience humaine dans la réalité matérielle. Et la poésie a pour ingrédient principal ce heurt entre l'être intérieur d'un individu et la réalité extérieure, qui tout le temps nous surprend par sa brutalité. Alors que le périple du mathématicien est un voyage dans une autre géographie, dans un autre paysage, au cours duquel il se heurte à une autre réalité. Cette réalité mathématique est tout aussi dure, tout aussi résistante, que la réalité matérielle dans laquelle nous vivons. Et la période qui est la partie vision ne suffit pas pour faire des mathématiques. C'est-à-dire qu'en contrepoint de cette partie vision, dans celle qui vient après la démonstration il y a les heures d'incertitude, de souffrance, qui consistent à avoir toujours peur de s'être trompé. C'est un peu la descente de la paroi qui consiste, cette fois, à être constamment obligé de regarder... On est obligé constamment de se dire : "Tiens, j'aurais pu me tromper ici, peut-être me suis-je trompé". On n'en sait rien, on a toujours peur ! Il arrive qu'on passe des heures et des heures d'anxiété terrible, justement parce qu'on se heurte à une vraie réalité. Donc, ce n'est pas la réalité au sens ordinaire, mais elle est sans doute encore plus impitoyable.

La notion de vérité s'adresse alors à un monde qui est autre, qui n'est pas le monde de l'expérience humaine dans la réalité extérieure, mais qui est celui de la réalité mathématique. Le point crucial à comprendre est qu'alors que tant de mathématiciens ont passé leur vie à explorer ce monde, ils sont tous d'accord sur ses contours et sa connexité : quelle que soit l'origine de son itinéraire, un jour ou l'autre si le parcours est assez long et si l'on se garde de se confiner dans une aire de spécialisation extrême, l'on atteindra l'une de ces cités bien connues comme les fonctions elliptiques, les formes modulaires, les fonctions zêta, etc. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connexe". Bien sûr cela ne signifie pas que toutes ses parties se ressemblent et Grothendieck dans *Récoltes et semailles* décrit ainsi son passage des paysages de l'analyse où il commença son parcours à ceux de la géométrie algébrique :

"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective, certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller..."

Alexandre Grothendieck

Galois

Ce que Galois a compris, d'une certaine manière, et c'est un peu le point de départ des mathématiques vraiment modernes, c'est qu'en fait, il faut être capable d'aller au-delà des calculs. C'est-à-dire ne pas faire les calculs, mais *en pensée* les faire ! Et comprendre quelle sera leur nature, comprendre quelles seront les difficultés qui vont se présenter, etc., mais sans vraiment effectuer concrètement les calculs, comprendre de quelle forme sera le résultat. Quelle symétrie aura le résultat. Et donc, dépasser cette espèce de gangue dans laquelle on s'engluerait facilement si l'on ne levait pas le nez du guidon. Il faut essayer d'en sortir par le haut, de réfléchir au niveau des symétries, etc.

"Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est selon moi, la mission."

Evariste Galois

Alors que ses prédécesseurs recherchaient des fonctions symétriques des racines d'une équation, Galois, lui, commence par briser la symétrie, pour y voir clair... Son point de départ est le choix arbitraire d'une fonction des racines qui n'admet *aucune* symétrie. La merveille est que le groupe d'invariance qu'il déduit du passage de cette fonction aux racines est en fait indépendant du choix arbitraire initial.

Loin d'être passées de mode, les idées de Galois irriguent encore les mathématiques contemporaines, simplement par leur simplicité et le mouvement qu'elles engendrent. La théorie des motifs due à Grothendieck est une généralisation naturelle de la théorie de Galois en dimension > 0 c'est-à-dire, si l'on veut, aux polynômes à plusieurs variables. Ces développements actuels, comme ceux de la théorie de Galois différentielle, se situent directement dans la dynamique des idées de Galois. Il convient de citer la fin de sa lettre testament.

"Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori *dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore assez développées sur ce terrain qui est immense."*

Evariste Galois

Algèbre et musique

Il est crucial, à mes yeux, pour un enfant, d'être exposé très tôt à la musique. Je pense qu'exposer un enfant à la musique, vers l'âge de cinq ou six ans, permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue, de cette richesse incroyable purement visuelle, qu'un enfant acquiert très tôt et qui donc, en fait, est reliée à la géométrie. La musique permet de l'équilibrer par l'algèbre, c'est-à-dire qu'elle s'inscrit dans le temps, exactement comme l'algèbre s'inscrit dans le temps. Dans les mathématiques il y a cette dualité fondamentale entre d'un côté la géométrie, qui correspond aux aires visuelles du cerveau, et qui donne une intuition instantanée, immédiate. On voit une figure géométrique, boum ! C'est ça, c'est tout, on n'a même pas besoin d'expliquer, on n'a pas envie d'expliquer. Et d'un autre côté, il y a l'algèbre. L'algèbre, cela n'a rien de visuel, en revanche, cela a une temporalité, ça s'inscrit dans le temps ! C'est le calcul, etc. C'est quelque chose qui évolue, et c'est quelque chose qui est très proche du langage et qui donc a la précision diabolique du langage. Et l'on peut percevoir cette puissance, l'élaboration de l'algèbre, à travers la musique. Donc, pour moi, il y a une connivence incroyable, justement, entre la musique perçue comme cela, et l'algèbre. Par exemple, j'adore certains préludes de Chopin parce que je trouve qu'ils ont exactement cette merveilleuse propriété de condensation, de distillation. C'est une musique qui arrive dans une pièce un petit peu comme si la fenêtre s'ouvrait brutalement par un coup de vent, et puis repart de l'autre côté. Condenser une idée sous sa forme la plus limpide, sous la forme la plus pure qui soit... L'algèbre, c'est ça, d'une certaine manière.

Conseils

Je terminerai ce texte sur quelques conseils "pratiques".

Faire un tour

Une pratique bien saine, quand on est aux prises avec un problème très compliqué (souvent impliquant des calculs), est de partir faire un long tour à pied (sans papier ni crayon) et de faire les calculs mentalement (en ignorant l'impression de départ "c'est trop compliqué pour ça"). Même si l'on n'y réussit pas, cela entraîne la "mémoire vive" et aiguise les dents de l'intellect.

Divan

Les mathématicien(ne)s ont en général le plus grand mal à faire comprendre à leur conjoint que le moment où ils travaillent le plus intensément est lorsqu'ils sont couchés dans l'obscurité sur un lit. Malheureusement l'invasion des écrans d'ordinateur et du courrier électronique tend à rendre cette manière de se concentrer de moins en moins courante ; elle n'en est que plus précieuse.

Etre courageux

Il y a deux temps dans la découverte mathématique, il y a un temps dans lequel il faut être courageux : il faut monter le long de la paroi, et ne jamais regarder en bas... Pourquoi ? Parce que si vous commencez à regarder en bas, vous allez dire : "Oui ! Mais bien sûr, Untel a déjà regardé ce problème, il n'est pas arrivé à le résoudre, donc il n'y a aucune raison que j'y arrive."

Et vous allez trouver trente-six raisons rationnelles qui vont vous empêcher de monter. Donc il faut faire complètement abstraction de cela. Il faut en quelque sorte “protéger son ignorance” pour permettre l'éclosion d'une idée sans la dissoudre prématurément dans le bain des connaissances à l'instant t.

Stress

Il arrive souvent dans la vie d'un mathématicien (souvent dès le début) d'être confronté à des difficultés dues à l'âpreté de la compétition. Par exemple, on reçoit un “preprint” d'un compétiteur sur le même sujet que celui sur lequel on travaille et l'on sent une pression déraisonnable pour publier vite. La seule recette que je connaisse dans ces cas-là est d'essayer de transformer ce sentiment de frustration en énergie pour travailler plus dur.

De mauvaise grâce

Un de mes collègues me confiait il y a longtemps : “Nous (les mathématiciens) travaillons pour l'approbation à contrecœur de quelques amis.” Il est vrai que comme le travail de recherche est de nature plutôt solitaire, le chercheur ressent le besoin d'approbation, d'une manière ou d'une autre. En vérité il ne faut pas attendre grand-chose, les mathématiciens sont avares de louanges. La vérité est qu'il n'y a qu'un seul véritable juge qui compte en la matière, c'est soi-même. Et il n'y a pas moyen de transiger avec celui-là. Trop se préoccuper de l'opinion des autres est simplement une perte de temps, aucun théorème n'a été jusqu'à présent démontré par référendum et comme le dit Feynman : “Why do you care what other people think !”

Entre deux, temps et vérité
Alain Connes et Daniel Sibony
Un dialogue organisé
par la Fondation Hugot
du Collège de France,
2019

Alain Connes : Bonjour, Daniel Sibony.

Daniel Sibony : Bonjour.

Alain Connes : Donc, ça me fait vraiment très très plaisir de pouvoir discuter avec toi. Alors je vais commencer par te présenter parce que tu as une carrière assez atypique vraiment, c'est-à-dire que tu es mathématicien, tu as une thèse de mathématiques.

Daniel Sibony : Au départ.

Alain Connes : Au départ, avec Gustave Choquet. Tu es philosophe, tu as une thèse de philosophie, je disais avec Desanti, mais bon, plus précisément. Et puis, tu as une pratique de psychanalyste. Alors la manière que j'ai choisie pour pouvoir te présenter, c'est en fait de lire une page d'un de tes ouvrages, que j'ai trouvée très touchante, parce que finalement, ça en dit plus sur toi que beaucoup de titres ronflants, etc.

Daniel Sibony : Je suis curieux.

Alain Connes : Donc tu me permets de la lire, voilà. C'est un livre qui s'appelle "Entre deux, et l'origine en partage". Là, ça va être vraiment l'origine en partage, et après, ça va être entre deux, c'est-à-dire que tous les deux, on va discuter entre 2 extrêmes. Tu dis : "J'en ai connu l'impasse autrefois, étant élève à Marakkech dans une école juive qui avait pour mission d'occidentaliser les petits marocains que nous fûmes. Ma connaissance de l'arabe, ma langue maternelle, m'y joua de mauvais tours, en m'apprenant beaucoup sur cette peur que l'autre peut avoir de lui-même, de son origine réveillée. J'avais les pires notes en français, souvent des 0, alors que j'aimais écrire, et que mes textes étaient assez pittoresques. Mais c'est que le professeur était révulsé d'y trouver de fortes traces de ma culture indigène, culture et langue dont il était averti mais qu'il semblait gêné de connaître et dont il supportait mal les mélanges avec l'écriture française qu'il nous donnait pour idéal, idéalement plate. Mes rédactions étaient souvent lues, à la remise des copies, et toute la classe se tordait de rire, y compris moi. L'expression correcte cachait mal et même montrait complaisamment les gestes grotesques de nos modes d'être qui semblaient un peu honteux, au regard des petits Classiques Larousse qui indiquaient la vraie culture. Une fois lues, mes copies recevaient leur juste sanction : 0. Après quoi était lue la copie modèle où tout le monde, mine allongée, s'ennuyait ferme. Phrases convenues, tournures sans vie. Voilà qui s'appelle "Bien écrit" martelait le professeur : "ce n'est pas farcesque, c'est élégant.". J'en ai gardé un fort dégoût pour les textes bien écrits et creux. Je n'avais pas alors, à 12-13 ans, les moyens de comprendre que je froissais dans ses troubles démêlées avec l'origine, avec ce qu'il en refoulait. Je croyais naïvement qu'écrire, c'était articuler des blocs de sens et de mémoire, de sensations et de rappels, avec les mots qui s'offrent, d'où qu'ils viennent pourvu que ce soit juste, c'est-à-dire authentifié par la vie d'au moins un être, qui en l'occurrence était moi. J'acceptais donc, sans trop y croire, mon étiquette : nul en français. Et je tremblais lorsqu'arrivant en France, à 14 ans, je fus placé dans un internat où tous parlaient français naturellement. Pourtant, le jour où le professeur remit la première copie, il déclara, péremptoire : "Ici, il y en a un qui sait écrire.". Et il avait pointé du doigt dans ma direction. Je me retournais pour voir ce type à qui l'écriture souriait. Derrière, il n'y avait personne. J'appris vite, après, que ce professeur aimait par-dessus tout les textes originaux. C'était sa façon heureuse de transmuer les rapports avec l'origine.". Je veux dire, quand j'ai lu ça, j'ai dit : "C'est vraiment Daniel". Et c'est vrai que...

Daniel Sibony : Je suis très touché que tu sois tombé sur ce texte, comme ça.

Alain Connes : Absolument. Parce que, qu'est-ce que tu veux, ça veut dire qu'en fait, dans un individu, ce qui m'intéresse, justement, c'est ce qui sort de l'ordinaire, ce qui est original, ce qui n'est pas du tout typique, etc., qui n'est pas du tout comme l'écriture telle qu'on la veut, etc. Et c'est comme ça que je te perçois. Et si tu veux donc en fait dans ton parcours, il y a quelque chose qui est très marquant, c'est que donc, tu étais mathématicien avec Gustave Choquet, et un jour, tu as décidé que... Je sais pas, tu as décidé de changer un peu de trajectoire. Comment est-ce que ça t'est venu ?...

Daniel Sibony : Il y a beaucoup de raisons, c'est ce qu'on appelle un acte surdéterminé, ça veut dire beaucoup de vecteurs convergent là, mais c'est vrai que, je me rendais compte que j'étais travaillé par toutes sortes de pensées, qui *devaient* s'exprimer, et qui ne trouvaient pas une expression mathématique.

Alain Connes : Bien sûr.

Daniel Sibony : Et que le travail mathématique, ne suffisait pas, chez moi, à combler ce désir. Et donc, j'ai fait de la philosophie, et puis j'ai fait de la psychanalyse.

Alain Connes : Tu as fait une psychanalyse avant de devenir psychanalyste.

Daniel Sibony : Ah oui, j'ai fait un long contrôle, à l'époque, c'était avec Lacan. Et comme je le fréquentais aussi de près parce qu'il aimait les maths et qu'il voulait que je lui explique des choses alors ça m'a évité d'être Lacanien, et même d'entre anti-Lacanien. Donc je suis très libre, par rapport à cette pensée. Et donc, c'est comme ça que, petit à petit... Mais par rapport à ce dont on va sûrement discuter, c'est-à-dire le temps, la physique, les maths,...

Alain Connes : Oui, c'est comme ça que tu m'avais contacté, oui, bien sûr...

Daniel Sibony : Je me suis rendu compte que bizarrement, mon travail en maths avait porté, on y reviendra tout à l'heure, avait porté sur une idée qui toi t'est familière, et que tu as génialement appliquée dans d'autres domaines, partait de l'idée d'un paquet de fonctions qui devraient avoir certaines propriétés intrinsèques pour qu'il en sorte du temps. Et ça, c'était l'idée sur le temps, le souci du temps a même marqué mon travail mathématique et quelques années plus tard, quand j'ai écrit un de mes livres comme ça, qui s'appelle "Psychanalyse et écriture", le titre est plus bizarre, c'est "L'autre incastrable", j'avais écrit un gros texte sur le temps, où j'ai mis vraiment toutes mes questions et tout ce que je ressentais, et donc j'ai été travaillé par le temps, tout le temps.

ALAIN CONNES : D'accord, alors en fait, si tu veux, ce que je pense, c'est que justement, nous allons avoir un dialogue et qu'en fait, ce dialogue, ça va être un entre-deux, mais pas entre nous deux, ça va être entre deux extrêmes. Et ces deux extrêmes, si tu veux, justement, tu as parlé de Lacan, il y a eu une période où on pourrait dire qu'il y avait un grand danger dans le post-modernisme, qui était d'utiliser des concepts scientifiques qui n'étaient pas vraiment digérés, pour finalement essayer d'avoir un ascendant psychologique, essayer d'acquérir un ascendant psychologique, sur des gens qui, eux, n'étaient pas capables de comprendre ce langage. Donc ça, c'est un extrême, c'est un extrême qui a été mis en évidence dans le livre de Sokal, sur Impostures intellectuelles.

DANIEL SIBONY : J'ai dénoncé cet aspect-là, tout au long...

ALAIN CONNES : Tu l'as dénoncé, bien sûr, je te fais entièrement confiance. Et il y a un autre extrême, sur lequel il faut que nous soyons très vigilants, c'est l'extrême consistant à parler de notions techniques, qui pour être correctes, mathématiquement ou physiquement, vont quand-même être difficile à comprendre par notre auditoire. Donc il faut qu'on arrive à naviguer entre ces 2 extrêmes et il faut qu'on arrive à rester compréhensible.

DANIEL SIBONY : J'ai confiance.

ALAIN CONNES : Si tu veux, je pense qu'on pourrait commencer, j'avais comme idée qu'on pourrait commencer par aborder le temps, comme tu l'as proposé, et ensuite, d'aller sur un autre sujet, qui est très relié, d'une certaine manière, et qui est la notion de vérité. Donc, c'est vraiment deux sujets fondamentaux, deux sujets fondamentaux sur lesquels je pense que nous avons tous les deux des choses à dire et en fait, moi je m'en tiendrai aux seules choses que j'ai à dire dont je suis certain mais dont je ne conçois pas du tout la portée philosophique ou autre, parce que je ne suis pas philosophe, parce que je suis simplement scientifique, si tu veux, mais ça sera pareil sur la notion de vérité puisque là, vraiment, il y a beaucoup de choses à dire. Donc sur le temps, en fait, j'ai eu une trajectoire mathématique sur laquelle ça a joué un rôle absolument essentiel, mais, en fait, la principale observation, la chose essentielle à laquelle je suis arrivé, c'est qu'en fait, il y a quelque-chose qui est beaucoup plus fondamental que cette ligne du temps à un paramètre...

Daniel Sibony : que la variation du temps.

Alain Connes : ... que la variation du temps, voilà, exactement. Je me souviens, j'avais un professeur de maths spé, qui m'avait interrogé, et qui avait fait ça *(geste d'un index suivant une courbe dessinée sur un tableau imaginaire)* et il avait dit "M. Connes, quelle est la variable ?". Alors on faisait de la cinématique, etc., j'avais pas mal réfléchi, j'avais pensé "c'est x ou y ?", et puis j'avais fini par lui dire "c'est le temps". Effectivement, ce dont on s'aperçoit mais là, ça demanderait des explications techniques, et je m'abstiendrai de les donner, c'est que la vraie notion, c'est moins le passage du temps, que ce que j'appellerai la variabilité. Et là, on s'aperçoit d'un phénomène qui est absolument fondamental, qui est absolument crucial, qui est l'une des plus grandes découvertes du XX$^{\text{ième}}$ siècle donc ça n'existait pas avant, c'est que quand on fait des expériences, dans le domaine microscopique, c'est-à-dire dans ce qu'on appelle le quantique, c'est simplement au niveau expérimental, il n'y a pas besoin d'avoir une théorie pour ça, donc il se fait qu'il y a certaines expériences, par exemple, le fait de faire passer un photon à travers une toute petite ouverture, et puis de le faire atterrir sur une cible à l'arrivée, alors ça, ça peut se faire dans un iphone, eh bien, l'expérience qui consiste à dire que le photon va arriver à tel endroit n'est pas reproductible. Et c'est à cause de ce phénomène que des ingénieurs suisses ont fabriqué un appareil, qu'on peut mettre dans un iphone, qui fabrique des nombres aléatoires, mais contrairement aux ordinateurs qui peuvent fabriquer des nombres aléatoires, même si l'on connaissait tous les tenants et les aboutissants du système, on serait incapable de reproduire les nombres aléatoires en question.

Daniel Sibony : Alors, si tu permets, c'est bien parce qu'il y a des phénomènes comme ça, et qui m'ont touché, que j'étais content à l'idée qu'on se rencontre, et qu'on discute, mais vraiment librement, et à fond. Je reprends l'exemple de ton prof, qui m'a touché, j'y ai réfléchi, et figure-toi, bien sûr, tu as répondu "la variable, c'est le temps, parce que voilà..."

Alain Connes : C'est ce qu'il attendait.

Daniel Sibony : Et puis, ça va de soi, ça *semble* aller de soi. En réalité, tu n'avais pas le point de vue quantique, et spectral, que tu as eu plus tard, mais tu aurais pu lui dire que la variable, c'est les mouvements de son doigt, et ça, c'est , non seulement c'est logique, mais c'est non-commutatif, c'est-à-dire que s'il fait ça *(esquissant la fin du mouvement)*, il ne peut pas le faire s'il n'a pas fait ça avant *(esquissant le début du mouvement)*. C'était la danse de son corps si tu veux.

Alain Connes : Je comprends ce que tu dis.

Daniel Sibony : Et ça, ça rejoindrait, je ne sais pas, je pense à une phrase d'Héraclite et qui est "le temps est un enfant qui joue.". C'est-à-dire un enfant qui permute des gestes, des mouvements, et c'est pas eux qui sont le temps, le temps, c'est la possibilité de faire tout ça. Et ça, ça rejoint, de loin, la variabilité qui t'est chère.

Alain Connes : Tout à fait. Maintenant si tu veux, ce qui s'est produit au niveau mathématique, on s'aperçoit si on réfléchit vraiment mathématiquement, posément, à ce qu'est une variable réelle, alors les mathématiciens croient qu'ils savent ce qu'est une variable réelle en disant qu'ils ont un ensemble X et qu'ils ont une application qui va de l'ensemble X dans $\mathbb{R}$, dans les réels. Et en fait, on s'aperçoit assez vite, si on réfléchit, mais de manière naïve, mais c'est ce qu'il faut faire, on s'aperçoit que cette notion, aussi standard soit-elle, de variable réelle, en fait, elle ne permet pas de faire vivre en même temps, le continu et le discret. Bon, alors je ne vais pas rentrer dans les détails techniques mais alors ce qui est extraordinaire, c'est que le quantique, par définition, presque par définition, au départ, c'était l'irruption du discret dans ce qui aurait dû être le continu, c'est-à-dire ce que Planck a fait à la main : en gros, je peux raconter un peu l'histoire quand-même, c'est que Planck a trouvé, de manière presque empirique, une formule mathématique, qui décrivait très bien les hautes températures, et les basses températures, il était dans un institut où on faisait des expériences de corps noir, à basse et haute température, et il a trouvé une formule mathématique. Dans cette formule mathématique, il était obligé de prendre une fonction vraiment non triviale d'une quantité qui avait des dimensions, les dimensions d'une action. Alors c'est impossible parce qu'en physique, normalement, quand on fait des calculs, on ne peut pas rajouter une longueur et le carré d'une longueur. Donc, cette fonction, il a été obligé... et cette fonction, c'était une fonction exponentielle, il ne pouvait pas, il pouvait... Et la seule chose qu'il pouvait faire, c'était de définir une constante d'action, arbitraire, la constante de Planck, et lorsqu'il divisait la quantité qu'il devait mettre par cette constante d'action, elle devenait sans dimension, et donc on pouvait lui appliquer n'importe quelle fonction. C'est ce qu'il a fait. Et bon, après, eh bien on a compris, lui l'a dit mais il ne comprenait pas vraiment ce qui se passait, que ça signifiait que l'énergie était discrète, c'est-à-dire que c'étaient des multiples entiers, c'est-à-dire que l'énergie d'un photon, c'est des multiples entiers de cette constante fois la fréquence. Alors donc en fait, ce qui est absolument extraordinaire, c'est que l'impossibilité mathématique de représenter ce qu'on appelle des variables, par quelque-chose de simple, comme des applications d'un ensemble dans la droite réelle, elle a été complètement résolue par la mécanique quantique, et le formalisme de la mécanique quantique, qui a été trouvé par Heisenberg et puis par Von Neumann, a permis de comprendre qu'en fait, une variable réelle, il ne fallait pas y penser comme à une fonction, mais il fallait y penser comme à un opérateur d'un espace de Hilbert, et à ce moment-là, on s'aperçoit que les variables discrètes coexistent magnifiquement avec les variables continues, sauf qu'elles ne peuvent pas commuter. C'est-à-dire qu'il est impossible, pour une variable continue, de commuter avec une variable discrète. Et c'est cela qui fait tout le début du miracle quantique. Alors dans mon cas, ce qui s'est produit, c'est que ce que j'ai compris dans ma thèse c'est que lorsqu'on regarde un système quantique, mais on ne connaît que partiellement ce système, ça veut dire qu'on s'intéresse à des sous-systèmes, le sous-système admet, son propre temps émerge. Le propre temps du sous-sytème émerge du fait qu'on ne connaît pas tout, du fait qu'on a une connaissance limitée des choses, le temps apparaît, alors, ça, j'ai trouvé ça absolument miraculeux et pendant des années et des années, c'était très intéressant mathématiquement, parce que ça donnait toute une série d'invariants que j'ai trouvés dans ma thèse sur ce qu'on appelle les facteurs, les algèbres de Von Neumann mais pendant de très nombreuses années, j'avais essayé, un peu bêtement, de réconcilier cela avec la physique et je n'y étais pas arrivé, ça me paraissait évident que ce temps qui apparaissait de manière naturelle à partir du quantique, devait être lié à la physique, jusqu'au jour où, à l'occasion d'une rencontre que j'ai racontée trop souvent déjà, celle de Carlo Rovelli, j'ai rencontré quelqu'un qui était un philosophe, un physicien mais qui en fait est plus philosophe que physicien, et qui en réfléchissant abstraitement sur la gravitation, avait trouvé que, à un état thermodynamique, donc un état d'équilibre thermodynamique, devait être associée une évolution, un temps, dans ce sens-là, et c'est exactement ce qu'on avait dans le cadre mathématique. Donc, à ce moment-là, qu'est-ce qu'on éprouve en tant que non-philosophe, mathématicien, physicien, etc., on se dit "Bon, il y a quelque-chose, là". Bon alors on n'est pas capable de poursuivre suffisamment, mais, on ne peut s'empêcher de se questionner, on ne peut s'empêcher de se poser toutes sortes de questions, et de se questionner vraiment sur... Quelle est la question à laquelle j'ai abouti, quelle est la question fondamentale, c'est "ne comettons-nous pas une erreur fondamentale en disant que toute la physique est basée sur l'évolution dans le temps, c'est-à-dire en disant qu'en fait, les équations de la physique sont des équations de la forme $\frac{d}{dt}$ égale quelque-chose d'autre, voilà.

Daniel Sibony : Alors tu veux que je te dise mon sentiment : mon sentiment, c'est que d'abord j'adore les phénomènes quantiques justement parce qu'ils sont d'un tout autre ordre, notamment cette variabilité d'un simple électron qui traverse un trou, qui te donne quelque-chose d'absolument non répétable, et en même temps universel. J'avais autrefois construit un concept que j'appelle singulièrement universel, ça veut dire que c'est absolument singulier...

Alain Connes : Ca reste singulier, c'est ça qui est extraordinaire, ça n'est pas un nuage.

Daniel Sibony : C'est singulier et c'est universel.

Alain Connes : Absolument.

Daniel Sibony : Donc, déjà, ça subvertit une opposition factice. Autre chose que j'ai beaucoup aimé, c'est que finalement, j'expliquais ça à quelqu'un qui ne connaissait rien à la physique qui me demandait "le quantique, c'est quoi ?". Je lui disais : "voilà, vous prenez ce verre, il contient un nombre incalculable de particules, des milliards de particules,

Alain Connes : Des milliards de milliards, oui.

Daniel Sibony : Des milliards de particules, et ça se passe dedans. Mais si on va dedans, on n'y comprendra rien. Pour comprendre quelque-chose, pour aborder la vérité de ce phénomène, il faut se placer dans un espace de dimension infinie, dans un espace de Hilbert, avec des observables, qui sont des opérateurs, et là, on comprend, on a une vision claire ; autrement dit, et ça c'est très beau, et c'est très beau à la fois philosophiquement et poétiquement, et je dirais même, au point de vue thérapeutique, qui est le mien, psychanalytique, parce que souvent, on veut attaquer directement, au niveau du comportement : là, cette personne a ce comportement tordu, on va le lui réguler, on va le redresser, comme l'autre voulait redresser mon style, et on va le redresser directement. Et c'est pas vrai, il faut passer par un espace totalement abstrait, qui peut être la dimension inconsciente , ou même plus concrètement la dimension du symptôme et là, on voit les choses, et je t'en donnerai des exemples, qui permettent de débloquer ce comportement. Puisqu'on parle de temps, je pense à un exemple : une fois, il y a une personne qui est venue me voir, qui n'était même pas ma patiente, et qui m'a exposé son drame, c'est qu'elle avait tout le temps de la fièvre, mais pas n'importe quelle fièvre, elle avait toujours 38.

Alain Connes : C'est pas ordinaire oui.

Daniel Sibony : Tout le temps. J'étais un peu perplexe. Naturellement, voilà, qu'est-ce que j'ai de mieux à faire, lui faire raconter un peu son histoire, non pas que l'histoire soit totalement fiable, mais ça donne des éléments. Et elle raconte, elle raconte, et soudain, il sort de ma bouche cette question : "Mais vous n'avez quand-même pas 39 ?". Et elle me dit "Eh bien justement, en 39, ma mère a dénoncé mon père aux nazis", c'était une allemande, "et donc, je n'ai plus eu de père.". Et la disgrâce du père avait commencé en 38, parce qu'en 38, elle a commencé à le menacer. Et donc, il s'est écrasé, il se cachait, dès 38. Et là, je me suis dit, le temps, par la température, a fait un petit passage et s'est inscrit comme une espèce de pierre brûlante, dans le corps de cette femme ; évidemment, quand on a déployé ça, c'est-à-dire quand on a pris ce marquage 38 dans une histoire, dans 1938, la femme a perdu sa fièvre.
Alain Connes : *(estomaqué)* Mais attends, attends, alors là, parce qu'on a un exemple, je vais me faire l'avocat du diable, parce que je suis rationnel, mais pourquoi n'est-elle pas allé voir un docteur avant d'aller te voir ?

Daniel Sibony : Elle est allée voir des docteurs...

Alain Connes : Et ils n'ont rien fait.

Daniel Sibony : Eh bien, si. Ils la soignaient de sa fièvre et quand elle arrêtait les traitements anti-fière, elle avait toujours cette fièvre.

Alain Connes : Mais ils arrivaient à la soigner en lui donnant, je sais pas, de l'aspirine.

Daniel Sibony : Mais elle-même. Aujourd'hui, quelqu'un qui a 38, il prend 3 dolipranes, il a pas 38. Et puis un jour il arrête, et puis hop, c'était 38.

Alain Connes : Mais alors là, on touche aussi un autre point singulier, si tu veux, qui est la coïncidence numérique : c'est vrai que 38 et 39 avaient une signification pour elle, elle est quand-même jamais descendue en-dessous de 36.

Daniel Sibony : Mais si tu veux, le problème n'est pas là, ça aurait pu être un autre signe. Simplement, c'était pour te dire que quelquefois, il faut passer par des choses qui n'ont rien à voir, pour... Et à partir de là, le point qui moi m'a beaucoup intéressé, m'a passionné dans tes conférences, c'est justement que tu pars de cette donnée, de cette variabilité. Tu dis "on commet une erreur en associant cette variabilité au temps". Moi, je plaiderais pour une certaine indulgence pour le commun des mortels qui utilise la droite comme repérage du temps. Mais personne ne vit le temps comme un point qui se déplace sur la droite. Du coup, en réalité, je me suis aperçu que le temps qui est repéré comme un point de $\mathbb{R}$, c'est je dirais le minimum vital dont on a eu besoin, pour noter des choses qui concernent le temps, sachant que dans la vie, c'est tout autre chose. Regarde là, nous sommes en train de vivre un moment, ce moment est présent.

Alain Connes : Oui.

Daniel Sibony : Il implique nos présences et on n'a pas l'impression que c'est un instant t qui déjà est passé, donc il y a une certaine stabilité du présent. Et il y a aussi d'autres phénomènes, c'est-à-dire que si tu prends deux instants, tu te dis t_1 il est avant t_2, et quand on est dans t_2 c'est foutu, c'est fini, on ne parle plus de t_1 c'est terminé et les gens ont écrit des poèmes sur Nevermore, etc. Et en réalité, c'est pas ça, parce que les points t_1 et t_2, c'est comme s'ils portaient des fibres, ou des espaces fibrés, qui font qu'avec ces dimensions de plus, les fibres s'entremêlent, et l'instant ultérieur t_2 peut se retrouver avant t_1 dans... c'est pas le temps qui est inversé, c'est le rapport au temps.

Alain Connes : Je vais rebondir sur ce que tu as dit parce qu'il m'est arrivé de faire un exposé sur un séminaire d'Antoine Compagnon, qui parlait de Proust, et à ce moment-là, effectivement, j'ai donné une image qui est très proche de celle que tu donnes et qui est en gros la suivante : nous sommes habitués effectivement à voir le temps comme cette droite rectiligne et très justement, tu dis que c'est une image qui ne correspond pas en fait vraiment à la meilleure description et je pense... la description que j'avais donnée, en gros, était la suivante : ce que je disais c'est qu'en fait, dans la vie quotidienne, dans les écrits de Proust, etc., ce qui se produit, ce n'est pas du tout une droite, comme ça, indéfinie, mais c'est une droite qui s'enroule. Elle s'enroule sur elle-même, et finalement, j'avais donné une image géométrique, j'avais donné le tore, et elle s'enroule comme un feuilletage, pas comme un fibré, c'est-à-dire qu'en fait, ce qui se produit, c'est que dans notre expérience quotidienne, nous avons un certain nombre de périodicités, la périodicité diurne, celle de l'année, un tas d'habitudes, et ce sont ces habitudes qui donnent des repères sur ce tore et non pas sur cette droite indéfinie, et qui font qu'il y a un espèce d'éternel retour, et qui est parfaitement décrit dans Proust, en fait. J'avais repéré dans Proust un certain nombre d'énoncés, qui montraient précisément que la structure de son temps, il avait réussi à le structurer en écrivant *A la recherche du temps perdu* et qu'on arrivait à voir cet objet global sur lequel s'enroulait le temps naïf, qui est cette droite indéfinie, etc., mais qu'en fait, la vraie construction mentale à laquelle il arrivait, et à laquelle peuvent arriver des gens qui se retournent sur leur passé, c'était une structure beaucoup plus intéressante géométriquement que la droite indéfinie. Je pense que ça correspond à ce que tu disais.

Daniel Sibony : L'intéressant dans l'exemple que tu donnes pour moi, par rapport à Proust, le temps auquel arrive Proust, ce temps global...

Alain Connes : multidimensionnel, oui, bien sûr...

Daniel Sibony : C'est les 3 volumes de la recherche du temps perdu.

Alain Connes : C'est son bouquin.

Daniel Sibony : C'est son bouquin et le mot feuilletage est très bienvenu...

Alain Connes : Très approprié.

Daniel Sibony : Parce que avec le feuilletage du tore que tu décris, c'est-à-dire avec une droite qui s'enroule de façon irrationnelle et qui donc va tout couvrir, les feuillets, tu peux avoir des feuillets antérieurs qui viennent se synchroniser sur des feuillets ultérieurs. C'est-à-dire qu'en fait, tu donnes, avec cet exemple d'enroulement, tu donnes comme des fibres parce que les feuilles sont comme des fibres

Alain Connes : C'est ce que tu entends par fibres, localement, c'est une fibration.

Daniel Sibony : C'est une fibration locale mais ça te donne, ça te permet d'aborder ce phénomène qui tourne beaucoup de têtes, que j'ai appelé, qu'on appelle la synchronicité qui est que, c'est pas grave, c'est pas extraordinaire, que des trajets ultérieurs viennent chercher à se synchroniser sur un point donné, sachant qu'en plus, ils sont porteurs de sens, imagine-les comme des petits véhicules qui portent un paquet de signification et qui viennent amener la signification là où elle n'était pas. C'est magnifique et ça permet vraiment de démystifier et ça permet de garder cette droite, en l'occurrence enroulée...

Alain Connes : Elle reste là ?

Daniel Sibony : parcourue de fibrés.

Alain Connes : Elle reste là, oui.

Daniel Sibony : Simplement, je te comprends quand tu dis “pour le quantique, c'est pas la variable réelle qui va donner la vraie variation, c'est les opérateurs avec leur spectre, c'est-à-dire, justement, d'ailleurs le spectre, c'est pas malvenu non plus comme mot, parce que finalement, le spectre d'un opérateur, c'est quand-même quelque-chose qui à un facteur près, te donne une variation de l'identité.

Alain Connes : Surtout si tu veux, ça j'insiste beaucoup sur le fait que justement dans le quantique, ce qui se produit, donc, une variable réelle est remplacée par un opérateur auto-adjoint, et les *valeurs* de la variable réelle qui peuvent être soit discrètes soit continues sont remplacées par le spectre de l'opérateur. Donc en fait, le spectre de l'opérateur, ça veut dire sa propre variabilité, ça veut dire l'espace dans lequel il peut varier lui-même.

Daniel Sibony : Alors ce que j'ai beaucoup aimé, c'est que, avec ce montage, ce dispositif, tu arrives à extraire du seul fait que l'algèbre des opérateurs est non-commutative, tu arrives à extraire...

Alain Connes : du temps

Daniel Sibony : ...à extraire un groupe à un paramètre, c'est-à-dire du temps, c'est-à-dire tu arrives à montrer que l'algèbre évolue...

Alain Connes : Voilà, donc elle génère son propre temps, si tu veux.

Daniel Sibony : Et ça, un phénomène qui génère le temps dans lequel il se déroule, ça, je trouve ça super.

Alain Connes : Absolument. Je suis entièrement d'accord avec toi, en fait...

Daniel Sibony : Attends, je trouve ça très beau parce que, justement, ce qui m'a beaucoup travaillé tout au long des années, c'est ce que j'ai appelé déjà, dès ce livre de 78 *L'autre incastrable*, où j'introduis la notion d'objet-temps. Tu permets, j'en dis un mot ?

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, je t'en prie.

Daniel Sibony : Et ce que j'appelle objet-temps, c'est un objet *porteur de temps* et dont tu peux extraire quelques filons temporels, exactement, ce que nous venons de dire, c'est que le dispositif d'une situation quantique, avec l'algèbre des opérateurs et le spectre, c'est un objet-temps. Mon dispositif, j'avais étudié autrefois la théorie du potentiel, où je partais d'un cône de fonctions et c'est ça qui m'avait plu et qui m'avait stimulé. Tu pars d'un ensemble de fonctions dont tu exiges qu'elles vérifient certaines propriétés qui n'ont rien à voir avec le temps, et tu en extrais le temps.

Alain Connes : Là tu vois, je trouve qu'on touche un point si tu veux crucial, je vais te dire pourquoi. Parce que justement, je crois que... j'avais lu par exemple dans Desanti, il a parlé d'objet-temps.

Daniel Sibony : Il a parlé d'objet-temps ?

Alain Connes : Il a parlé d'objet-temps, mais pas du tout dans ton sens. Et ce sur quoi je veux insister justement, c'est cette espèce de fil du rasoir sur lequel nous devons si tu veux nous promener et rester avec le plus grand soin possible qui fait que nous restons dans le vrai scientifique, mais qu'en même temps, nous arrivons à toucher, si tu veux, des notions qui sont acceptables, compréhensibles, mais nous restons dans le vrai, tu comprends ce que je veux dire.

Daniel Sibony : C'est mon souci majeur. Je ne connais pas ces textes de Desanti. Desanti était un ami mais ses réflexions sur les mathématiques, c'étaient pas tout à fait les miennes, c'était pas ma tasse de thé. Non, j'essaye d'avoir une réflexion intrinsèque, c'est-à-dire que quand il y a une situation, qu'elle soit philosophique, analytique, physique, les situations que tu as apportées, moi, je trouve ça merveilleux, non pas tant pour illustrer ma notion d'objet-temps, ça, on s'en fout, mais pour montrer que, finalement, chaque chose en son temps, dans son temps. C'est pas, on range des programmes, c'est que l'important dans une situation vivante, voir comment elle produit le temps dans lequel elle peut se dérouler. Et ç, c'est formidable, et il y a un autre phénomène que j'ai trouvé très beau, dont tu avais parlé aussi, c'était l'intrication quantique.

Alain Connes : Alors on va y venir. On va y venir, pourquoi ? Parce que si tu veux, une des idées qui se dégage de cette relativisation du temps disant que justement, on devrait peut-être s'intéresser à la variabilité avant de s'intéresser au temps, donc en fait, on a trouvé dans notre premier livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a trouvé une formule, bon, c'est toujours plaisant d'avoir des formules. Donc on a dit "L'alea du quantique est le tic-tac de l'horloge divine."

Daniel Sibony : Eh bien justement, je te dirai ce que j'en pense.

Alain Connes : Mais alors attends. Laisse-moi rebondir là-dessus pour dire la chose suivante, par rapport à l'intrication. Quand on discute l'intrication quantique, d'abord qu'est-ce que c'est. Donc, je rappelle en deux mots ce que c'est. Il y a eu au début de la mécanique quantique, c'est normal, un nombre incalculable de discussions philosophiques. Les discussions philosophiques, par exemple, étaient plus importantes, entre Einstein et Heisenberg, etc., que les équations elles-même. Les discussions philosophiques étaient absolument fondamentales. Alors il y a eu cet épisode bien connu de Bohr, Einstein pensait avoir trouvé une réfutation du principe d'incertitude...

Daniel Sibony : ... qui était fausse...

Alain Connes : Et Bohr a trouvé, grâce à Einstein, grâce à sa théorie de la relativité générale, que... Mais Einstein ne s'est pas découragé. Ca c'était au début des années 30. Mais Einstein ne s'est pas découragé. Et quelques années plus tard, il a produit avec Podelski et Rosen un paradoxe, auquel au début, personne n'a fait attention. Bohr l'avait réfuté en utilisant une méthode complètement cafouilleuse mais quand maintenant on regarde la courbe du nombre de citations de cet article, de Einstein, ça croît toujours de manière exponentielle. Donc, c'était une contribution absolument majeure. Et quelle était leur idée, quelle était l'idée qu'ils ont mis en avant, l'idée qu'ils ont mis en avant, c'est que... Bon alors, c'est vrai que...

Daniel Sibony : Comme par hasard, c'est 2 particules.

Alain Connes : Oui, c'est 2 particules. Ce qui est possible, c'est de créer deux particules, dont les moments sont exactement opposés. Et, comme elles sont créées au même endroit, leur position doivent être aussi reliées. Bon alors qu'est-ce qu'on fait maintenant ? C'est ça qu'on appelle l'intrication quantique, que dit la description de l'expérience ? Ce qu'on sait, enfin, ce que disaient Einstein, Podelski et Rosen, c'est qu'après tout, on va pouvoir mesurer la position de l'une et le moment de l'autre, et si on le fait de façon à ce qu'elles soient causalement séparées, eh bien, à ce moment-là, on aura, comme on sait l'égalité entre les moments, etc, on aura les 2 informations. Alors, en fait, la situation est bien plus intéressante que ça, et on a fait l'expérience et on s'est aperçu qu'il y avait effectivement cette intrication quantique, qu'elle existe, et en particulier, il y a Alain Aspect et toutes les expériences qui ont été faites, ont montré qu'il y avait effectivement l'intrication quantique mais ça paraissait alors extrêmement bizarre et ça paraît toujours extrêmement bizarre, qu'au moment où on fait une expérience sur l'une, ça signifie que quelque-chose va se passer sur l'autre, alors qu'elles sont causalement séparées, ça c'est ce qu'Einstein a appelé Spooky action at a distance.

Daniel Sibony : Bien sûr il n'y a pas une action à distance. C'est très clair, parce que si la distance est énorme, ça fait trop, mais, ce que j'aime là-dedans, c'est qu'il y a l'idée d'unité. C'est comme si ça forme une unité.

Alain Connes : C'est exactement le cas.

Daniel Sibony : Et si ça forme une unité, ce que tu dis de ce point est déjà répercuté sur l'autre.

Alain Connes : Voilà mon interprétation philosophique de ce genre de situation. Alors il se fait que l'homme essaie toujours d'écrire une histoire, du passé. Et dans ce cas, lorsqu'on essaie d'écrire une histoire impliquant le temps, on se plante, ça ne marche pas. Pourquoi ? Parce que les deux points sont spatialement séparés, causalement séparés, donc en fait, on ne peut pas écrire une véritable histoire. Quelle est mon interprétation ? Mon interprétation, c'est que dans cette situation, l'alea du quantique au point qui est ici et l'alea du quantique à cet autre point ne sont pas indépendants. Ils forment une unité.

Daniel Sibony : Voilà, ils sont connectés, ça veut dire que la variabilité a beau être absolue en chaque point, elle est surmontée par une connexion.

Alain Connes : Et qu'est-ce que cela devrait signifier ? Cela devrait signifier que exactement comme Einstein avait fait l'analyse du temps, à partir de l'expérience dans le train, il faudrait être suffisamment intelligent, pour faire ici l'analyse de la variabilité et comprendre qu'au lieu que l'alea du quantique soit complètement aléatoire, en fait, à cause de l'intrication quantique, il a une structure, et que c'est de cette structure que doit émerger, non pas le temps, parce que ça, je sais le faire émerger des équations, et de la non-commutativité, mais que doit émerger la structure générale. Donc ça, c'est un problème, je ne prétends pas que ce problème soit résolu, mais je prétends que la question devient brûlante, parce qu'on ne peut pas écrire d'histoire cohérente d'autant plus que le passé comme tu le sais n'est pas déterminé, à cause des expériences de Wheeler.

Daniel Sibony : Mais justement, peut-être pour relever, pour mettre en relief cet aspect de l'intrication quantique, il faudrait parler de l'expérience des 2 trous et de deux photons qui entourent une galaxie.

Alain Connes : Oui, bien sûr, surtout l'expérience de Wheeler. En fait, on peut le faire soit avec les 2 trous, soit avec des miroirs et les photons qui entourent une galaxie. Bon on ne va pas entrer dans les détails techniques, mais en gros, on va quand-même expliquer quel est le paradoxe. Le paradoxe, c'est qu'à un moment-donné, lorsqu'on fait une telle expérience où on a un photon qui se divise en 2, a priori, lorsqu'on le pense comme une onde, etc., et il peut faire des interférences à l'arrivée, eh bien en mettant à l'arrivée soit ce qu'il faut pour qu'il y ait une interférence, soit ce qu'il faut pour qu'on sache quel trajet le photon a pris, eh bien, ça va déterminer en fait ce qui s'est passé dans le passé. Et alors Wheeler a imaginé une expérience avec une galaxie intermédiaire, qui fait que les 2 trajectoires du photon vont se rejoindre à un instant bien bien ultérieur peut-être un milliard d'années plus tard, eh bien, qu'est-ce que ça signifierait ? Ca signifierait que selon ce que nous faisons maintenant, nous allons déterminer ce que le photon a fait il y a un milliard d'années. Donc qu'est-ce que ça signifie ? Ca signifie qu'en fait, le passé n'est pas écrit une fois pour toutes, ce qui est quand-même absolument fascinant.

Daniel Sibony : Et c'est ça qui est... Enfin, inutile de te dire que ça, ça m'enthousiasme parce que, si tu veux, d'abord, il y a un phénomène courant, qu'on trouve en psychanalyse mais que chacun connaît et qu'on appelle l'après-coup. Ca veut dire l'après-coup, il s'est passé un événement pour toi, à 4-5 ans, qui a été un peu marquant mais pas trop, et puis 30-40 ans plus tard, très longtemps après, se passe un autre événement, qui n'est pas identique, qui a une petite variabilité avec le premier, mais suffisamment proche, pour faire une espèce de résonance et là, le sujet s'aperçoit au second événement, que le premier était traumatique. C'est-à-dire la nature de l'événement passé n'apparaît que lorsqu'il questionne le passé, avec un grand écart, et aussi avec un certain intérêt pour la vérité, c'est-à-dire que s'est-il passé, *vraiment* ? On ne le saura peut-être pas mais ce qu'on sait, c'est qu'il s'est passé autre chose que ce qu'on croyait. Autrement dit, si on reprend maintenant en termes physiques, je trouve formidable que le passé soit instable,

Alain Connes : ne soit pas fixé,

Daniel Sibony : et dépende par surcouches qu'on ne connaît pas dépende de notre manière de l'interroger.

Alain Connes : Tout à fait, au temps présent ?

Daniel Sibony : Au temps présent. Si on réfléchit, c'est peut-être le montage-même de l'écriture. Tu parlais de Proust. Quelqu'un qui écrit un roman, qui écrit un article un peu créatif, etc., il écrit ce qui se présente mais il se laisse aborder par des choses qui vont reconvoquer autrement le passé, autrement dit qui vont transformer le passé. Il y a une forme caricaturale de ça, aujourd'hui, mais qui a dû exister, c'est les gens qui veulent réécrire l'histoire.

Alain Connes : Evidemment, c'est une évidence.

Daniel Sibony : Mais l'idée par elle-même est d'une grande beauté, ça veut dire aussi que la vérité, elle ne peut être qu'une dispersion, une distribution discrète, toujours partielle, et que c'est dans la récurrence des requestionnements qu'on arrive à se rapprocher plus de l'effet de vérité, qu'en inscrivant, de façon définitive, ce que la vérité doit être.

Alain Connes : Oui alors ça, c'est très intéressant, parce que ça nous conduit vers ce que c'est que la vérité et là, si tu veux, je pense qu'il faut qu'on soit assez organisés, pour la raison suivante : quand tu prends le travail du mathématicien, au premier abord, le travail du mathématicien est qu'il cherche à faire des démonstrations, il cherche à savoir si quelque chose est vrai. A la limite, il peut tester avec son ordinateur tester si quelque-chose est vrai etc. et au premier abord, même le mathématicien va avoir l'impression que soit quelque-chose est vrai, soit quelque-chose est faux, et puis qu'il va donc naviguer dans un univers qui est tout à fait simple, c'est à dire qu'il va simplement naviguer de l'un à l'autre. En fait, on s'aperçoit que cette idée-là, même en mathématiques, j'y reviendrai pour le reste après, même en mathématiques, est une idée fausse et la raison est la suivante, la raison est que ce que je viens de dire s'applique parfaitement à des propositions décidables ; par exemple, si je veux savoir si un nombre, par exemple 31 est un nombre premier ou pas, c'est ce qu'on appelle quelque-chose de décidable, c'est-à-dire soit c'est vrai, soit c'est faux, et on pourra le faire en un temps fini. Alors, maintenant, quand on discute justement des vérités en mathématiques, il faut faire très très attention, parce qu'il faut arriver à qualifier les énoncés, et il faut bien voir qu'il y a des énoncés qu'on appelle existentiels ou des énoncés universels. Alors ce que j'appelle par exemple un énoncé universel, c'est par exemple, quelque soit x, je ne sais pas, quelque soit un nombre pair, il existe... Bon d'accord. Mais ce qui va se produire, c'est que donc, ce que j'appelle un énoncé universel, c'est quelque soit x, mais quelque soit x, on va énoncer une propriété décidable, par exemple, on va demander que x s'il est pair soit la somme de deux nombres premiers. C'est un énoncé qu'on peut décider. Alors ce qui est absolument incroyable, c'est que, si on ne prend que les entiers, tout le monde sait ce que sont les entiers, ce qui est absolument incroyable, c'est qu'on sait, si on travaille avec les entiers, etc., on sait que si un énoncé est démontrable, il est vrai. On a toutes sortes de nuances entre ce qui est démontrable et ce qui est vrai et en fait, ce que l'on sait aussi, c'est qu'en fait, si on regarde la plupart des énoncés qui sont vrais sur les entiers, la plupart des énoncés vrais sont non démontrables. Donc, ça, c'est quelque-chose d'absolument incroyable, si on regarde la proportion, parmi les énoncés vrais, de ceux qui sont démontrables, on sait qu'il y a une quantité incroyable d'énoncés vrais qui ne sont pas démontrables. Et alors un exemple typique d'un énoncé qui est vrai mais qui n'est pas démontrable dans les axiomes de Peano, c'est un exemple que j'aime bien donner, je ne vais pas le donner techniquement mais je vais le dire comme ça, et le dire, j'espère, de manière coorecte : c'est qu'on prend un nombre, comme par exemple, le nombre 5, on l'écrit en base 2, on écrit que 5 est égal à 4 plus 1 mais on écrit que 4, c'est 2 puissance 2, on écrit tout en base 2, d'accord, et ensuite, on fait une opération que j'appelle le lièvre, parce qu'elle va augmenter considérablement la taille du nombre. On remplace tous les 2 par des 3, d'accord ?! Après, la tortue arrive et la tortue soustrait 1. On prend le résultat, on l'écrit à nouveau en base 3, etc. et on remplace tous les 3 par des 4, ça c'est le lièvre, puis la tortue arrive et elle soustrait 1, on réécrit le résultat en base 4, et on remplace tous les 4 par des 5, etc. L'énoncé qui est incroyable mais qui est vrai, et je vais te dire pourquoi mais qui n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano, c'est que c'est la tortue qui gagne. C'est l'histoire du lièvre et de la tortue bien sûr que je veux illustrer, c'est que bien que le lièvre fasse des pas absolument immenses, la tortue qui ne fait presque rien. Qu'est-ce qui va se produire ? Il va se produire des situations dans lesquelles quand on soustrait 1, on ne peut plus l'écrire de la même manière, il faut avoir changé d'écriture, etc. et alors, ce qui est incroyable, c'est que cet énoncé, on sait qu'on ne peut pas le démontrer dans l'arithmétique de Peano. Comment est-ce qu'on sait ça ? On sait ça parce qu'on sait que la fonction qui donne le nombre de pas qu'il faut pour que la tortue gagne est une fonction qui croît plus rapidement que toute fonction qu'on peut écrire. Or si on savait le démontrer, on aurait une borne pour cette fonction. Donc on sait que ce n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano. Pourquoi est-ce qu'on sait que c'est vrai ? Tu vas comprendre puisque tu étais élève de Choquet donc tu vas comprendre tout de suite : qu'est-ce qu'on fait ? On fait quelque-chose qui est magnifique, on remplace la base, qui était 2 puis 3 puis 4 par le plus petit ordinal infini, par ω et on s'aperçoit que quand on met ω, le lièvre ne change rien, et la tortue décroît de 1. Comme on a un ordinal, ça va finir par arriver vers 0. La démonstration est d'une simplicité incroyable, mais elle échappe à l'arithmétique de Peano, donc on a là un exemple qui montre à quel point la notion de vérité en mathématique est une notion incroyablement subtile et c'est une notion qui, bon, en pratique, le mathématicien qui travaille n'a pas à faire ces choses-là. Mais en fait, il se pourrait très bien qu'il y ait des situations assez communes, dans lesquelles ce genre de choses a un rôle. En tous les cas, l'image qui s'en dégage a été merveilleusement décrite dans un petit livre qui est le livre de Jean-Yves Girard, sur le théorème de Gödel, ce qu'il explique dessus, l'image qui s'en dégage, si tu veux, c'est qu'il faut voir le mathématicien comme quelqu'un qui est dans un tribunal et qui va essayer d'analyser la vérité. Il va avoir certains moyens, mais certainement pas celui de savoir si quelque-chose est vrai ou pas, si tu veux, sauf dans des cas très simples, bien entendu.

Daniel Sibony : Ce problème se pose, bien sûr, en mathématiques, mais dans bien d'autres domaines. Puisque tu parles de tribunal, il y a des causes qui sont vraiment justes, irréfutables, etc., et qui sont perdues au tribunal, parce que le langage dans lequel il faudrait les formules pour qu'elles soient même entendables, n'est pas là.

Alain Connes : N'existe pas.

Daniel Sibony : Donc l'intéressant, ça veut dire que la vérité, ça n'est pas une entité, ce n'est même pas une émergence ou un effet, c'est une corrélation entre deux langages, c'est-à-dire entre le langage qui porte l'objet, et puis le langage qui doit recevoir, qui doit authentifier.

Alain Connes : Oui, mais alors attends, alors là, il faut qu'on fasse très attention parce que si tu veux, par exemple dans ce livre, là, de Bricmont et Sokal, que j'ai lu attentivement pourquoi, parce qu'en fait, j'ai des choses à dire là-dessus, alors, quelle était leur idée ? Leur idée, l'idée d'*Impostures intellectuelles*, c'était que, et là, on est tous les deux d'accord là-dessus, il y a eu des abus, au moment du post-modernisme, c'est-à-dire qu'il y a eu des abus qui consistaient à utiliser un langage mathématique, qui n'était en fait, pas soutenu par la rigueur, et qui n'est surtout pas la connaissance.

Daniel Sibony : Si tu permets, même aujourd'hui, ça n'est pas que post-moderne. Il m'arrive d'écouter des conférences de vulgarisation de la physique et d'entendre des choses stupéfiantes, par exemple, d'entendre que du fait de la relativité, du temps, il n'y en a plus, le temps n'existe plus. Et ça, je trouve que...

Alain Connes : ...que c'est difficile à avaler, oui.

Daniel Sibony : Les gens qui ne connaissent pas la relativité, heureusement qu'ils résistent et qu'ils savent qu'il y a le temps, que le temps ici, n'est pas le même que là-bas, sur l'autre galaxie, c'est très bien, c'est-à-dire qu'on confond le temps et la mesure du temps, et on confond le temps avec le rapport au temps, donc il y a beaucoup de confusion, même chez des scientifiques.

Alain Connes : Bien sûr. Le fait d'être scientifique n'exclut absolument pas ce genre de confusion. Mais alors, ce qui m'a beaucoup frappé, en lisant ce livre, justement, de Sokal, leur but était louable d'une certaine manière, mais ce qui m'a énormément frappé, c'est que les gens qu'ils critiquent, il y a Bruno Latour, il y a Lacan, Lacan est en première ligne...

Daniel Sibony : J'espère.

Alain Connes : mais, ce qui m'a énormément frappé et là, je suis sûr que je vais me faire attaquer mais ça n'est pas grave, il y a quelque-chose que ces personnes ont ressenti mais qu'ils n'avaient pas le langage pour le dire, et je pense que ça va correspondre à ce que tu disais tout à l'heure.

Daniel Sibony : Dis-moi.

Alain Connes : Les gens disent que j'ai une marotte, c'est les topos de Grothendieck. Mais je vais en parler. Je vais en parler pourquoi, parce que cette marotte, en fait, Grothendieck l'a considérée comme sa plus grande découverte, et quand on la comprend vraiment, ce qui en fait, ce qui m'a amusé aussi, c'est de voir que les gens qui critiquent cette chose-là, en général, ne savent pas ce que c'est, et le critiquent en disant "oui, ça n'a pas eu d'impact sur les mathématiques" mais justement, si ça n'a pas eu d'impact sur les mathématiques, c'est parce que justement, les gens n'ont pas compris le sens que ça a. Et ça a un sens extraordinaire. Je vais t'expliquer ce que c'est, et t'expliquer en quel sens justement, ça permettrait à ces gens-là, qui ont essayé de s'exprimer, s'ils avaient eu ce concept, ils auraient pu s'exprimer.

Daniel Sibony : Ces gens-là, c'est-à-dire ?

Alain Connes : Bruno Latour, etc.

Daniel Sibony : Ah oui, des gens qui ont bricolé avec des choses, comme ils ont pu.

Alain Connes : Avec le langage commun.

Daniel Sibony : Oui bon.

Alain Connes : Avec le langage commun mais ils n'avaient pas les mots pour le dire. Alors je vais essayer d'expliquer, d'abord quel est le concept, et en quel sens ça change complètement la notion de vérité parce que c'est ça qui est fondamental. L'intérêt de ce concept, c'est que ça change la notion de vérité, ce qui est absolument fabuleux. Alors si tu veux, bon, c'est un concept mathématique abstrait. Quelle était la grande découverte qu'a fait Grothendieck ? Il s'est aperçu d'abord de la chose suivante. Je vais employer des mots techniques, mais si je n'emploie pas des mots techniques, on va m'accuser de... bon.

Daniel Sibony : Il faut.

Alain Connes : Ce qu'a trouvé Grothendieck, c'est qu'à un moment-donné, il a eu à écrire un article pour, c'était un article un peu de... tout le monde aurait dit c'était facile, c'étaient des choses qu'il devait compiler etc., c'était sur l'algèbre homologique, et en gros, il a écrit les axiomes des catégories abéliennes, mais les gens les connaissaient plus ou moins à l'époque, c'était pas ça qui était important, et par une élaboration de ces idées, en prenant des exemples, des exemples très intéressants, qu'il appelait les catégories de diagrammes si tu veux, il s'est aperçu de la chose suivante, il s'est aperçu qu'en fait, alors que lorsqu'on fait la théorie des faisceaux d'habitude, on prenait des faisceaux de groupes abéliens, et puis on regardait la cohomologie, etc., et il a eu l'idée de regarder non plus des faisceaux de groupes abéliens, mais des faisceaux d'ensembles, et à ce moment-là, il a fait deux observations qui sont géniales, la première observation qu'il a faite, c'est que, si on donne la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, on peut reconstruire l'espace topologique, avec sa topologie, donc, c'est assez extraordinaire, parce que tu donnes une observation abstraite... Deuxième observation, quand on travaille dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, c'est comme si on travaillait dans la catégorie des ensembles. Toutes les propriétés qu'on utilise d'habitude sont vraies, sauf le principe du tiers-exclus. C'est-à-dire qu'on a plus le droit de raisonner par l'absurde, sinon, tout marche impeccable. C'est-à-dire si tu travailles dans la catégorie des faisceaux d'ensembles, dans un espace topologique, tu peux parler d'un groupe, tu peux parler d'un anneau. Et ça reviendra à parler d'un faisceau de groupes, d'un faisceau d'anneaux, etc. Mais troisième observation vraiment géniale, c'est qu'il n'y a pas que les catégories de faisceaux d'ensembles sur un espace topologique qui vérifient ces propriétés, il y en a d'autres. Et cela signifie qu'il y a de nouveaux espaces. Et parmi ces nouveaux espaces, qui ne sont plus des espaces topologiques, ce sont en gros des espaces avec un mouvement intérieur, d'accord, avec des relations si tu veux. Et alors ce qui arrive maintenant et qui est vraiment merveilleux, je trouve. Moi j'ai rencontré ça, si tu veux, ce qui m'a convaincu, c'est qu'avant, je bêlais comme le troupeau, c'est-à-dire je disais "Oh, le topos, c'est pas intéressant, c'est une généralisation de la notion d'espace, on s'en fiche, etc", c'est ce que je faisais jusqu'à il y a un certain nombre d'années, il y a peut-être 5 ou 6 ans, et il y a 5 ou 6 ans, je me suis rendu compte dans mes travaux avec Katia Consani qu'en fait, il y avait un topos sous-jacent à l'espace qu'on avait trouvé, et dont l'espace des points était l'espace non-commutatif qu'on avait trouvé, à ce moment-là, j'ai été émerveillé, j'ai été complètement emballé par cette notion, et après coup, je me suis rendu compte de la profondeur qu'elle avait, et en fait, ce qui est vraiment profond dans cette notion, c'est que, quand tu travailles dans un topos, où tu ne peux plus utiliser le tiers-exclus, le principe de contradiction eh bien, on a un remplacement pour le vrai et le faux, je vais t'expliquer ce que c'est, un peu techniquement, on a quelque-chose qui remplace le vrai et le faux, mais qui est plus subtil. Et j'ai fait récemment une conférence l'an dernier à l'école normale, dans laquelle je voulais donner un exemple de ça. Et alors je voulais donner un exemple, et cet exemple, c'était dire qu'on est à 3 pas de la vérité, à 4 pas de la vérité, à 10 pas de la vérité. Alors je vais te donner un topos que je vais te nommer, d'accord, donc techniquement ce sera correct, et qui permettra de dire qu'on est à 10 pas de la vérité. Qu'est-ce que c'est que ce topos ? Eh bien au lieu de parler d'un ensemble, comme on en parlerait normalement, eh bien, on va parler d'un ensemble avec une transformation, sans propriété spéciale, c'est une transformation. Tu as un ensemble et une transformation. Théorème : ça, c'est un topos, c'est-à-dire que si tu travailles avec ces choses-là, tu peux travailler exactement comme si tu étais en train de travailler avec les ensembles. Tout marche bien, sauf que tu n'as plus le tiers-exclus. Alors d'où ça vient que tu n'aies plus le tiers-exclus ? Eh bien, ça vient du fait que normalement, quand on travaille dans le topos des ensembles, quand on a un sous-ensemble, on peut le dire, on peut dire le sous-ensemble par la fonction qui vaut 1 si on est dans le sous-ensemble, disons vrai si on est dans le sous-ensemble et faux si on n'est pas dedans. D'accord ? Bon ! Parce que évidemment, tu as l'ensemble, et tu as son complémentaire, donc ça marche bien. Alors maintenant, prenons ce topos dont je t'ai parlé, qui est formé d'un ensemble et d'une transformation. Alors on va essayer de classifier les sous-ensembles. Qu'est-ce que c'est qu'un sous-ensemble, c'est un sous-ensemble qui est stable par la transformation, bien sûr, c'est un sous-objet, si tu veux. Alors est-il possible de prendre la fonction qui vaut 1 sur ce sous-ensemble, et 0 sur le complémentaire ? Non, pourquoi ? Parce que tu peux arriver à être dans le complémentaire, mais qu'au bout d'un certain nombre de pas, tu te retrouves dans l'ensemble de départ, donc en fait, c'est pas cette 0-1 qui va classifier les sous-objets, non, c'est le nombre de pas qu'il faut pour arriver dans le vrai.

Daniel Sibony : C'est la proximité

Alain Connes : C'est la proximité au vrai. Et à ce moment-là, qu'est-ce que tu as ? Tu as une théorie qui marche exactement comme la théorie des ensembles, mais dans laquelle le vrai et le faux, qui étaient simplement le vrai et le faux dans le sens ordinaire sont remplacés par les nuances sur le vrai, c'est-à-dire tu as le vrai, tu as le "à 1 pas du vrai", tu as le "à 2 pas du vrai", "à 3 pas du vrai" *(rires)* et tu as le faux. Et ça c'est merveilleux je veux dire, à partir de là, on peut faire des variations, on peut faire toutes sortes de variations et mon idée, maintenant, mon idée c'est la suivante : en lisant attentivement les écrits de ces gens-là, je me suis aperçu que ce qu'ils essayaient de dire en fait, c'était que, non pas dans le domaine des mathématiques, mais dans le domaine des sciences sociales, où par exemple, lorsqu'on assiste à une discussion à la télévision, où on va dire "celui-là a raison"... "Est-ce que Martine Aubry a raison de dire que les 35 heures ont été une réussite ?" Si tu veux. Des choses comme ça, dès qu'on est dans une situation comme ça, dire "untel a raison, untel a tort", c'est une hérésie, parce que c'est un point de vue incroyablement simpliste, par rapport à la complexité du problème auquel on s'attaque, et en règle générale, le seul outil que les gens ont pour essayer de pallier à leur défaut de concepts, c'est de dire "celui-là a 50% raison, etc." mais c'est ridicule. Alors ce que je dis, simplement, ma conclusion, si tu veux, c'est que dans tous ces cas-là, je pense qu'il y a un topos difficile à déterminer, mais qui permettrait, si tu veux, de... justement, de nommer toutes ces nuances sur la notion de vrai et de faux, et permettrait d'être infiniment plus efficace justement dans ce genre de situation. Et je pense que ces gens-là l'avaient compris, intuitivement.

Daniel Sibony : Alors, je pense que c'est une très bonne chose, évidemment, que ça s'élabore en mathématiques, et en langage mathématique, et sur des objets mathématiques, de façon précise et radicale. En même temps, tout ce qui s'élabore, dans l'art, dans une science, dans un domaine pratique, c'est que, ça existe dans la vie. Et dans la vie, moi, devant un débat, je me suis rendu compte que ma question, c'était pas "qui a raison ?" et "qui a tort ?", ma question, c'est que chacun est "entre deux", c'est-à-dire entre "ne pas menacer la vérité qui lui sert de support et s'approcher un peu de l'autre vérité, dont il est question, il est "entre deux". Et c'est très amusant d'observer que certains voient bien l'approximation de la vérité commune ou de la vérité qui est en question, mais ne trouvent pas la force de risquer la place, la leur, qu'ils identifient évidemment à la vérité, parce que c'est ce qu'en termes psy, on appelle ça un investissement narcissique, c'est à dire il y a un minimum d'amour de soi *(Il rit.)*.

Alain Connes : Laisse-moi rebondir sur ce que tu dis, laisse-moi t'interrompre. C'est que les topos ont des points, et quand tu es dans un point du topos, là, tu as le vrai ou le faux, c'est-à-dire que tu n'as pas de nuances. Et ça, c'est très important.

Daniel Sibony : C'est évident que c'est une théorie de la nuance, mais qui, ponctuellement n'est pas nuancée.

Alain Connes : Ponctuellement par définition du point, le point n'est pas nuancé. C'est à dire que le point, c'est la théorie des ensembles ordinaires, par définition.

Daniel Sibony : Et donc, pour revenir à ça, et par les temps qui courent, avec toutes sortes de tensions et de violences même, sous-jacentes, on sent que la dimension de la vérité en a pris un coup.

Alain Connes : Ah, terriblement, terriblement, bien sûr.

Daniel Sibony : Parce que quelqu'un que tu respectes, qui est quelqu'un de bien, il n'y a pas à en discuter, le voir en train de ne pas voir la vérité qui pourrait menacer la position qu'il est chargé de tenir, et qui souvent, s'identifie avec son poste, c'est-à-dire que s'il prend des risques avec cette vérité-là, il est sur siège ejectable.

Alain Connes : Il saute, oui.

Daniel Sibony : Voir ça, je t'assure que pour quelqu'un... s'il y a quelque-chose à quoi je suis sensible plus que tout, c'est la vérité, la justice, qui est un peu de vérité dans le partage, et le désir, qui est aussi un peu de vérité dans notre existence. Eh bien, j'ai eu des moments de souffrance, quand j'ai dû encaisser cette nouvelle parure de la vérité, qui est une espèce de parade, et qui ne me fait pas du tout juger les gens ou les mépriser, mais qui me dit que les places sont chères, pour défendre... Alors maintenant, je voudrais, avant qu'on termine, ce qui moi, m'a toujours passionné dans ce domaine du quantique, à travers ce que tu en dis. Tu as dit à un moment, "L'émergence du temps, elle tient au fait qu'on ne sait pas tout".

Alain Connes : Exactement, ça, c'est exactement la vérité.

Daniel Sibony : Il y a une chose, cette chose-là, et je voudrais rebondir sur l'autre, qui est "L'alea du quantique, c'est le tic-tac de l'horloge divine.". D'abord, l'alea du quantique, c'est le tic-tac de l'horloge, même s'il n'y a pas d'horloge, et le Divin, on ne sait pas trop où il est, mais cette phrase me plaît beaucoup, et je suis profondément d'accord avec elle, au sens suivant : au sens où ça veut dire que, et on est bien d'accord qu'il n'y a pas de temps universel, mais cette phrase, elle dit que le temps se prélève dans ce que j'appelle "l'infini des possibles".

Alain Connes : Tout à fait, c'est exactement ça, bien sûr.

Daniel Sibony : Et pour moi, l'infini des possibles, c'est ça le Divin, et le Divin, à la fois au sens religieux, et au sens non religieux. Les religieux font des prières au Divin pour qu'Il leur donne un petit possible de plus, et les non religieux cherchent du possible, et se disent "si je pouvais avoir un coup de chance !", etc. Donc cette phrase, elle dit très exactement que le temps a beau ne pas être le même ici et ailleurs, il a beau émerger, et ne pas être déjà donné, etc., entre nous, d'ailleurs, s'il émerge d'une situation, c'est qu'il y était déjà.

Alain Connes : Oui, d'une certaine manière, bien sûr.

Daniel Sibony : Le temps se prélève dans l'infini des possibles, ça veut dire, ce que j'appelle l'être, c'est-à-dire qu'il y a un temps de l'être, qui est insituable, qui est inabordable, mais qu'on prend, là où on peut. Et c'est ça le rôle des objets-temps, le sens que j'y donne, des objets porteurs de temps, des oeuvres d'art, une théorie, qu'elle soit du potentiel ou quantique, ou autre chose, c'est que l'important, ce sont des objets où on peut prendre du temps, et l'important, c'est la manière de le prendre. Alors maintenant, ça nous mène à la question de l'inconscient, du non-savoir. Toi tu dis "Le temps émerge du fait qu'on ne sait pas tout.". Et moi, je me pose une question, et peut-être qu'on terminera là-dessus, je me pose une question, en un sens, j'avais écrit dans ce texte il y a plus de 50 ans "le temps se lève avec le refoulement", ça veut dire quand le refoulement est levé, il y a une source de temps qui apparaît.

Alain Connes : Et là, tu identifies temps et liberté, d'une certaine manière, oui.

Daniel Sibony : Peut-être ça veut dire qu'en réalité, on prend une scène de ton deuxième roman, où l'héroïne est totalement inconsciente, et là, elle a une connaissance totale, mais elle n'est pas consciente d'avoir cette connaissance totale.

Alain Connes : Non pas du tout.

Daniel Sibony : Donc elle est totalement inconsciente.

Alain Connes : Puisque la conscience est reliée au temps, par définition.

Daniel Sibony : Et c'est en sortant de cet état d'inconscience vers le conscient...

Alain Connes : Qu'elle réalise ce qu'elle a vécu.

Daniel Sibony : Qu'il y a un flux de temps qui apparaît. Et ça, ça me fait penser à une petite histoire talmudique que j'ai connue autrefois qui dit que le nourrisson, euh, le foetus, dans le ventre de sa mère, jusqu'au moment de sa naissance, il connaissait tout.

Alain Connes : On est d'accord *(Il rit)*.

Daniel Sibony : Il avait la connaissance totale, et puis un ange passe, il fait une coupure, et, au passage, quand il entre dans le temps, il perd tout, et on s'aperçoit, en revenant cette fois au modèle quantique ou à ton roman, on s'aperçoit qu'il perd toutes les connaissances et que l'équivalent de ces connaissances qui étaient inconscientes, c'est le temps qu'il va mettre à les acquérir.

Alain Connes : Absolument.

Daniel Sibony : C'est-à-dire qu'il y a un équilibrage...

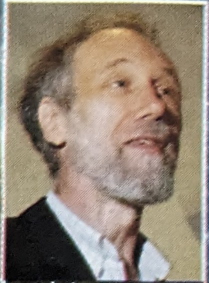
Alain Connes : Entre temps et connaissance.

Daniel Sibony : Entre temps et inconscient, ou temps et connaissance, c'est-à-dire que d'une certaine façon, le temps entre dans le monde en franchissant le seuil...

Alain Connes : Le seuil maternel.

Daniel Sibony : Le seuil entre l'inconscient et le conscient, ou entre le réel et le praticable.

Alain Connes : Eh bien écoute, je crois que c'est une très belle conclusion.



Alain Connes

Dépasser les théories d'Einstein. C'est à cette nécessité que sont aujourd'hui confrontés les physiciens. Car tout ne tourne pas rond au royaume de la physique moderne, fondé par le génial Albert. Ses deux piliers théoriques, la relativité générale et la physique quantique, sont inconciliables. Pour unifier ces deux concepts, il faut une théorie nouvelle, révolutionnaire. Un Français, Alain Connes, s'est lancé dans cette quête par des voies originales et, d'ores et déjà, fructueuses.

Un pas. Ou deux. Des pas de géants, sûrement. C'est ce qu'il reste à faire au mathématicien français Alain Connes pour atteindre les sommets de la physique. Le pic de la Grande Unification, la crête de la Réconciliation ou le mont du Tout. Seulement, la pente est forte et la route loin d'être droite. La brume masque encore l'horizon. Alain Connes n'est pas le seul à tenter cette ascension, mais il a choisi une autre voie que la plupart des physiciens *(lire p. 62)*. Parti de très loin, il les a peut-être rejoints. On ne sait jamais, sur ces montagnes aventureuses. En tout cas, en route, il a déjà permis »

» aux mathématiques de grands bonds en avant et a dû créer ses propres outils pour grimper. Une nouvelle discipline, la géométrie non commutative, est née. Cela lui a valu force récompenses : médaille Fields en 1982, prix Clay en 2000, prix Crafoord en 2001, médaille d'or du CNRS en 2004… L'aspirant aux sommets est donc sérieux. *« En physique, ses idées n'ont pas mené à des découvertes nouvelles, mais le formalisme qu'il a introduit pour décrire les forces fondamentales est bien plus général que celui habituellement utilisé,* témoigne Robert Coquereaux, du Centre de physique théorique de Marseille. *Alain Connes apporte une autre vision qui peut donner des idées pour avancer. Et les comprendre élève l'esprit. »*

Et toutes les idées peuvent être bonnes pour remplir la mission : dépasser les théories d'Albert Einstein. Non par défi scientifique mais par nécessité. En effet, un siècle après les premiers articles du génial physicien, tout ne tourne pas rond dans la physique moderne. Le plus insupportable ? Ses deux piliers, les deux théories phares nées au XX^e siècle, la relativité générale et la physique quantique, sont inconciliables. La première décrit, peu ou prou, les grandes échelles (déplacement des planètes, des galaxies, expansion de l'Univers…) ; la seconde, plutôt l'infiniment petit (électrons, atomes, molécules…). Chacune a son formalisme et sa vision du monde. Dans l'une – l'univers d'Einstein –, tout semble déterministe et continu tandis que dans l'autre – l'étrange monde de la physique quantique –, les probabilités et les discontinuités sont légion… Problème, dans certaines situations, les physiciens ne peuvent se passer d'aucune d'entre elles et c'est le conflit. Les calculs divergent vers l'infini. Exemple type, le « début » de l'Univers, dans la soupe de particules initiales. Ou encore les trous noirs, ces chaudrons gloutons. Agaçant. La prochaine théorie devra donc unifier les deux concepts en une espèce de « gravitation quantique ». C'est le sommet que beaucoup cherchent à atteindre.

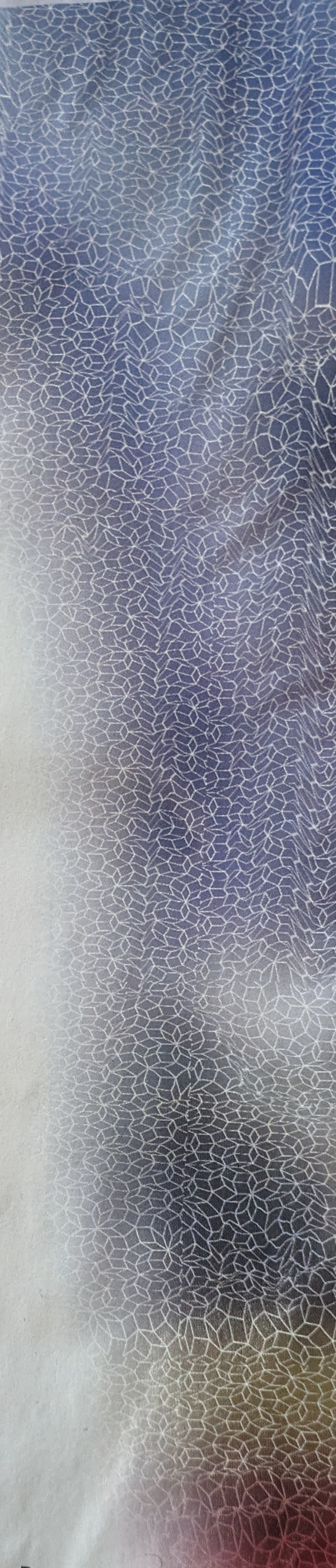
Tout le monde s'est donc lancé à l'assaut. Avec la conviction qu'à la fin de l'ascension, ce sera la révolution. Un bouleversement comparable à l'héliocentrisme de Copernic et Galilée ; à la hauteur de la formalisation de l'attraction universelle de Newton ; un moment aussi intense qu'à l'apparition des idées relativistes d'Einstein. Les héritiers des géants sont prévenus. Il faudra dépasser leurs aînés. Tout simplement. Et comme à chaque fois, pour changer d'ère, il faudra changer d'espace. C'est-à-dire y ajouter de nouvelles dimensions, des formes étranges, des particules supplémentaires… Voire des attributs plus étonnants. Ou plus beau.

Ainsi, les théories d'Alain Connes dessinent des espaces contre-intuitifs, non commutatifs, dans lesquels l'ordre selon lequel les choses sont accomplies importe *(lire p. 55)*. Il s'agit d'un monde de feuillets empilés, où une forte agitation règne entre les feuilles. Dans ce monde, on comprendrait enfin pourquoi le temps s'écoule dans un sens et pas dans l'autre. On y verrait l'électron non comme une particule élémentaire mais doté d'une structure interne comme un atome. Et les affreux infinis des calculs seraient domestiqués et contribueraient à l'harmonie générale… *« Si on trouve le bon espace, on attrapera tout d'un coup ! Mais ce sera plus méchant qu'Einstein »,* prévient Michel Dubois-Violette, de l'université de Paris-Sud-Orsay.

Dans ce monde, on comprendrait enfin pourquoi le temps s'écoule dans un sens et pas dans l'autre

Pour naviguer à l'intérieur de ces espaces, Alain Connes possède comme un don de double vue. Tantôt il « voit » avec ses yeux, tantôt avec les mains. Tantôt il opte pour la géométrie, tantôt pour les calculs ou l'algèbre. Dès qu'un problème ne se laisse pas « dessiner », il essaye des équations. Pour l'instant, cette dualité lui a permis d'avancer. Sans doute d'ailleurs, plus en maths qu'en physique. Mais l'histoire montre que, souvent, les premières ont précédé la seconde. Lorsque Einstein pose les bases de la relativité, les espaces non euclidiens dont il avait besoin avaient déjà été explorés par Carl Gauss ou Bernhard Riemann au siècle précédent. Lorsque Werner Heisenberg, en 1925, propose une nouvelle vision de la mécanique quantique avec des matrices, il utilise des outils inventés par le mathématicien David Hilbert. *« Il faut maintenant un nouvel Heisenberg pour faire le pont entre Connes et la physique »,* résume Robert Coquereaux. Avançons prudemment sur ce chemin. Pas à pas.

Dossier réalisé par David Larousserie



Dans un espace non commutatif, représenté ici par un pavage dit de Penrose, fait de losange et de triangles, impossible de distinguer des points. Avec des lunettes classiques, on est perdu. Alain Connes a inventé la géométrie non commutative pour s'y retrouver.

Dans quel espace vivons-nous ?

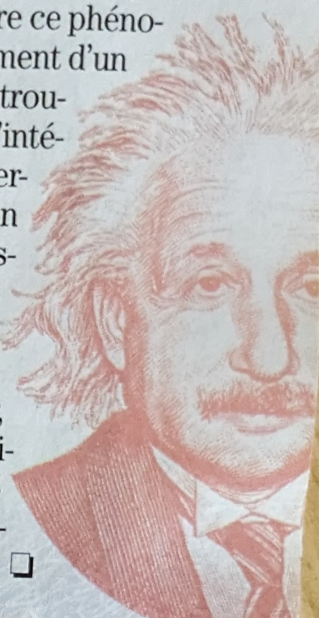
A quoi bon comprendre l'espace ! Tout a l'air si simple. Sur une carte, deux coordonnées suffisent à se repérer. En montagne ou dans le ciel, une troisième coordonnée, l'altitude, évite de se perdre. Que demander de plus ? Eh bien, du temps, par exemple. Dans l'espace d'Einstein, les points ne sont plus tout à fait des points ; ils embarquent avec eux une horloge. Les points deviennent des événements et se repèrent donc avec quatre coordonnées. La notion d'espace se corse.

Dans le monde quantique, la situation empire. Une particule est décrite classiquement par sa position et sa vitesse, soit six coordonnées. Du coup, les physiciens préfèrent travailler avec des opérateurs ou des matrices agissant sur des ondes. Ils y gagnent peut-être en simplicité mais tombent sur un drôle de phénomène. Alors que dans un environnement normal, l'ordre des opérations ne compte pas, dans le monde quantique si ! 3 x 2 ne donnent pas le même résultat que 2 x 3. *« Ce n'est pas la même chose d'ouvrir une canette puis de la boire, que de la boire puis de l'ouvrir »*, résume à sa manière Alain Connes. En mécanique quantique, les opérateurs ne commutent pas. Lorsque le physicien Werner Heisenberg l'a découvert, en 1925, le choc a été brutal pour ses collègues. Pas pour les mathématiciens qui, hors de toute réalité matérielle, manipulaient déjà de tels espaces d'opérateurs, autrement appelés algèbres non commutatives. Mais, pragmatiques, les physiciens assimilèrent rapidement ces étranges résultats. Les descriptions des phénomènes n'étaient plus continues mais discrètes. Il ne fallait plus parler d'énergie mais de »

La vision d'Einstein

La relativité (1)

Dans un train, en gare, quand on voit par la fenêtre bouger les wagons voisins, pendant un instant on hésite : est-ce notre train ou le train voisin qui roule ? Galilée et Newton parlaient de relativité du mouvement pour décrire ce phénomène. Il est impossible de détecter le mouvement d'un train, d'un avion, d'un bateau dans lequel on se trouve, s'il se déplace à vitesse constante. Vu de l'intérieur, tout semble au repos. Mais pour un observateur extérieur, les choses bougent. Newton alla plus loin en postulant l'existence d'un espace absolu, une référence, permettant de déterminer le mouvement de tous les objets. Plus tard, Maxwell avec sa théorie électromagnétique « remplit » cet espace d'une matière, l'éther, support de la lumière et par rapport à quoi sa vitesse peut être déterminée. L'article de juin 1905 d'Albert Einstein tord le cou aux concepts d'espace absolu et d'éther *(suite p. 56)*. ❑



ANTAL DAYER/GETTY IMAGES

niveaux d'énergie ou de spectres. Il devenait impossible de connaître simultanément deux grandeurs qui ne commutent pas, comme la position et la vitesse, etc.

Pendant ce temps, les mathématiciens, perfectionnistes, cherchaient d'autres algèbres aussi divertissantes. Ils en ont tellement trouvé qu'ils s'y sont un peu perdus. Jusqu'à ce qu'Alain Connes entre en scène pour proposer une classification, qui lui vaut la médaille Fields, en 1982. *« C'était un sujet dormant. Connes l'a réveillé »*, se souvient son aîné et collègue à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), Pierre Cartier.

« Dans un espace non commutatif, les points sont indiscernables les uns des autres », explique Alain Connes. Prenons par exemple une bouée, un tore en langage mathématique. Enroulons sur ce boudin un fil. Après un tour, le fil revient à son point de départ. Si maintenant le bobinage est effectué avec une légère inclinaison, le fil « avance » sur le tore jusqu'à le recouvrir totalement. En fait, il ne reviendra jamais exactement à son point de départ. Le bobinage se poursuit à l'infini. Du coup, sur un tore embobiné de plusieurs fils, il est impossible de distinguer ceux-ci. Dans cet espace particulier, on est perdu ! *« C'est l'essence du non-commutatif : ne plus savoir où l'on est ! »*, résume Alain Connes. L'espace est devenu flou, vu avec nos lunettes classiques. Mais pas moins réel. Si la physique quantique « vit » dans une algèbre non commutative, la théorie qui l'unifiera avec la gravitation pourra difficilement se passer de cette propriété insolite. *« Il y a quelque chose dans la structure de l'espace qui nous force à dire cela. Tout ne sera pas non commutatif, sinon on s'y perdra, mais il y aura de la non-commutativité, modérément… »*, prévoit Pierre Cartier. **D. L.**

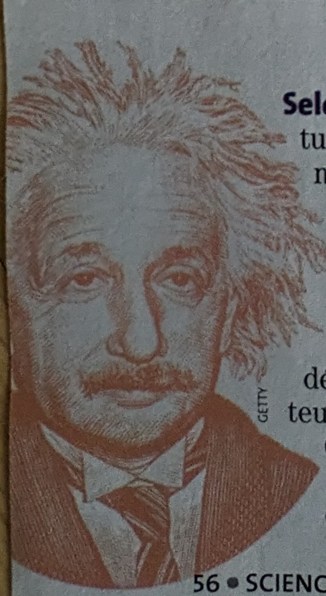
Comment mesurer l'espace ?

Après l'exploration de ces nouveaux espaces, Alain Connes s'est mis à les arpenter. Tel Eratosthène parti mesurer le rayon de la Terre en Egypte au IIIe siècle av. J.-C., ou les savants français en expédition sur le méridien terrestre au XVIIIe siècle. Trouver la mesure de ces nouveaux espaces signifie tenter de calculer des distances, des surfaces, des volumes… Hélas ! il s'est retrouvé démuni comme dans un désert envahi de mirages. Les bons vieux outils de la géométrie classique étaient inopérants dans ces espaces aux points devenus flous.

Habituellement, dans les espaces classiques dits euclidiens, il suffit de se munir d'un étalon de longueur, un objet physique de taille connue. Mathématiquement, rien n'empêche de réduire sa taille à volonté. C'est la base du calcul infinitésimal. Dans l'espace-temps d'Einstein, la méthode s'applique aussi. Il suffit d'ajouter un soupçon de coordonnée temporelle aux trois coordonnées spatiales de l'étalon précédent. En revanche, dans les espaces non commutatifs, la technique habituelle ne fonctionne plus. Alain Connes a dû inventer de nouveaux outils et même, en 1980, une nouvelle discipline : la géométrie non commutative. *« On peut dire que Connes y a pensé et a utilisé le mot avant même de bien le comprendre ! »*, s'amuse aujourd'hui Pierre Cartier. Lui comme les autres peuvent maintenant s'y épanouir tranquillement : y faire des intégrales, résoudre des équations différentielles, calculer des courbures, des distances… La technique s'étend même aux géométries fractales. *« Au lieu de tendre un fil entre deux points pour mesurer leur distance, on envoie une onde entre les deux »*, explique ainsi Alain Connes. Formellement, le calcul consiste ensuite à évaluer le déphasage entre les deux points. Ou bien à calculer les « niveaux d'énergie » ou « spectres » de certains opérateurs de l'espace non commutatif. Beauté des maths, c'est exactement la philosophie qui, indépendamment, a été choisie pour définir le mètre. A l'origine, celui-ci est un étalon matériel en platine-iridium, correspondant à une fraction de la longueur du méridien terrestre. Mais sa définition a changé en 1983, afin de devenir plus universelle et immuable. Désormais, le mètre est défini comme le multiple d'une longueur d'onde atomique. Concrètement, celle-ci est mesurée en analysant les fréquences lumineuses émises par des atomes ; c'est-à-dire des spectres. Exactement comme dans la méthode d'Alain Connes ! L'identité amuse le chercheur qui y voit aussi un lien plus profond avec la question mystérieuse et anodine laissée par le génial mathématicien, en retraite volontaire de sa discipline, Alexandre Grothendieck : « Qu'est-ce qu'un mètre ? » Comme quoi la question de l'espace dans lequel nous vivons est fondamentale. **D. L.**

La vision d'Einstein

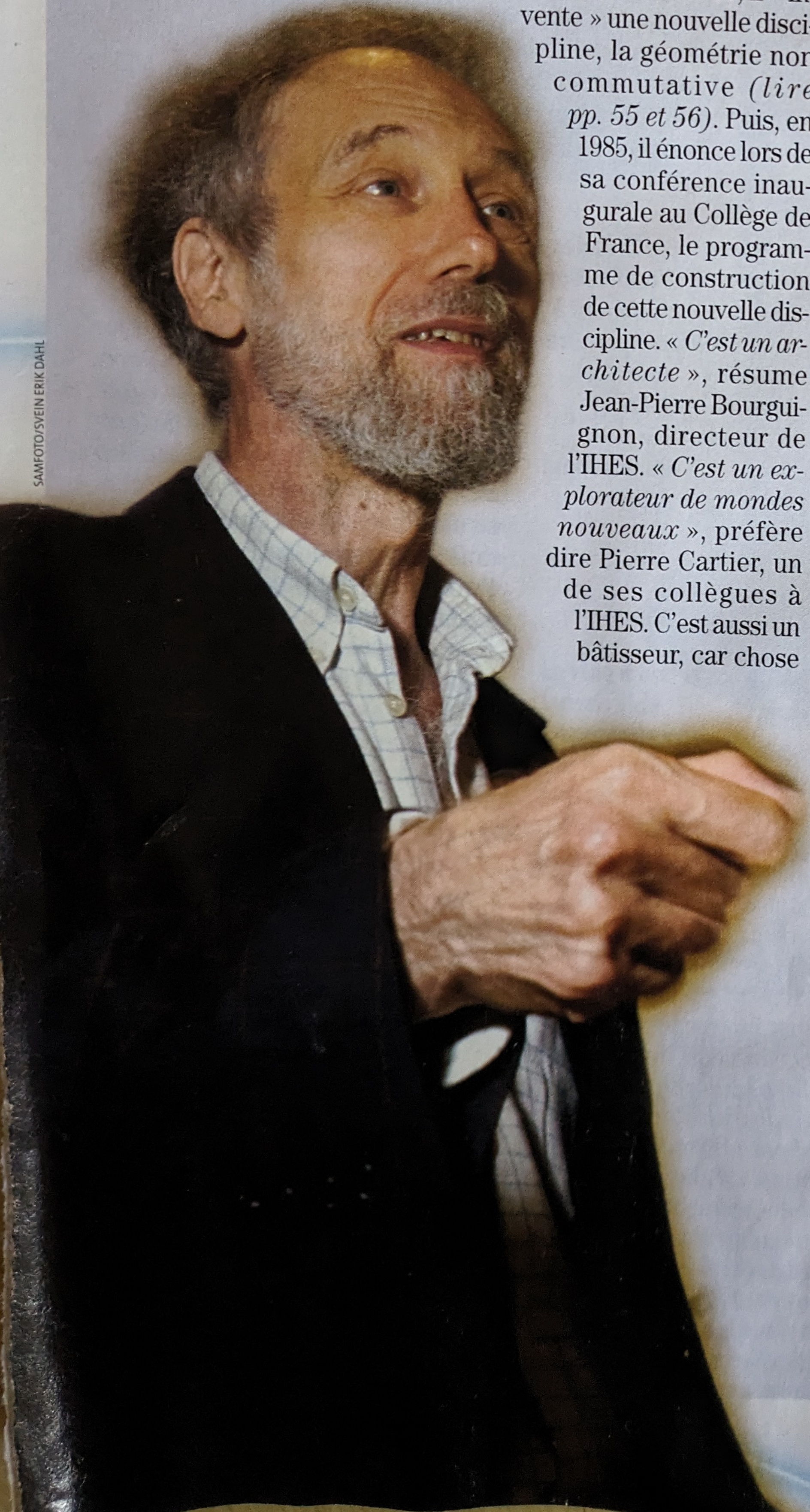
La relativité (2)



Selon Galilée et Newton – c'est un postulat –, les lois de la physique sont les mêmes partout, quels que soient les référentiels en mouvement à vitesse constante. Einstein suggéra que cela devait être vrai pour la vitesse de la lumière. Ainsi, un rayon de lumière dans un train à grande vitesse ne se déplace pas plus vite pour un observateur resté à quai que pour un passager. Cela suppose un grand bouleversement : la mesure du temps et de l'espace doit être différente pour chacun des observateurs ! Avec Einstein, désormais, chacun possède son propre mètre étalon et sa propre horloge. Les dimensions d'espace et de temps se lient entre elles pour former un espace-temps. Des formules mathématiques, dites transformations de Lorentz, permettent de passer d'un référentiel à un autre et de calculer les distances et les temps dans chacun des repères. Une conséquence étonnante est la contraction des distances : un objet en mouvement paraît plus court à un observateur fixe… Il n'y a plus d'espace absolu.

Alain Connes, mathématicien à l'Institut des hautes études scientifiques

« Le mystère est motivant »



SAMFOTO/SVEIN ERIK DAHL

Alain Connes a fait au moins une erreur dans sa vie. Il a démissionné du CNRS pour rejoindre l'université en 1976 : « *C'était une erreur car ces postes ne laissent pas assez de temps pour travailler. Vous avez à peine le temps de vous échauffer sur un problème que vous êtes dérangé !* » Alors, en 1981, il réintègre le CNRS !

A 58 ans, le chercheur, aujourd'hui à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), a toujours la bougeotte. C'est vital. Dans sa tête, il doit rester en permanence en mouvement. « *Devant un mur (mathématique), il ne faut pas rester figé. Il faut se déplacer vers des problèmes annexes ou secondaires. Ou bien avoir d'autres sujets d'intérêt* », explique-t-il. Jusqu'à présent, sa recette a bien marché. En 1972, il résout un problème compliqué dans le domaine des algèbres non commutatives. En 1980, il « invente » une nouvelle discipline, la géométrie non commutative *(lire pp. 55 et 56)*. Puis, en 1985, il énonce lors de sa conférence inaugurale au Collège de France, le programme de construction de cette nouvelle discipline. « *C'est un architecte* », résume Jean-Pierre Bourguignon, directeur de l'IHES. « *C'est un explorateur de mondes nouveaux* », préfère dire Pierre Cartier, un de ses collègues à l'IHES. C'est aussi un bâtisseur, car chose rare, il va franchir lui-même la plupart des étapes qu'il avait annoncées. « *Beaucoup ont contribué mais Alain Connes a soulevé la plupart des blocs importants*, constate Jean-Pierre Bourguignon. *Ce travail est aussi gros que ses résultats de jeunesse.* »

Explorer, bâtir, soulever des blocs, ou jeter des ponts entre disciplines fatigue. On n'imagine pas à quel point, à voir cet homme au regard vif et au geste alerte qui explique ses espaces tordus. « *C'est difficile, car l'essentiel du travail consiste à tenter de discerner des choses obscures. Vous êtes dans le noir, sans certitude, souvent seul. Il faut se débrouiller*, explique le mathématicien. *En permanence, vous devez être attentif. Cette situation génère de la peur, de la frustration.* » Chez lui, s'accumulent les cahiers dans lesquels il fait ses calculs, ses hypothèses, ses essais. Même s'il apprécie depuis peu les facilités de l'ordinateur, il est encore capable de calculer à la main des centaines d'intégrales. Certains l'ont vu s'isoler plusieurs jours pour suer sur un problème. L'été, il préfère travailler quand les autres sont en vacances ou en conférences. Même quand il n'est pas penché sur sa feuille, il est actif ! « *En fait, on est le plus créatif lorsqu'on ne fait rien. Je veux dire, lorsqu'on fait autre chose que des maths. Des promenades, par exemple. Il faut accepter de perdre son temps pour se construire une image mentale du problème* », résume Alain Connes. L'étincelle est alors prête à jaillir. Comme en 1972, dans son Ami 6, alors qu'il était arrêté à un feu rouge. « *Un truc a cliqué dans ma tête. J'ai eu la certitude absolue qu'une idée allait marcher* », raconte-t-il. La médaille Fields, récompense suprême en mathématiques, était au bout. Vingt-cinq ans plus tard, rebelote ou presque. Avec son collègue Dirk Kreimer, il partage une semaine de joie après avoir dénoué un bout du problème de la renormalisation *(lire p. 60)*. « *On peut se rendre malade à travailler. On se vide !* », soupire-t-il.

Malgré la solitude et la dureté de son activité, ce Méridional n'est pas enfermé dans sa tour d'ivoire. Comme si son énergie interne débordait à l'extérieur. A peine formulée une question, il commence déjà à y répondre. « *C'est un volcan d'idées* », raconte Carlo Rovelli, du Centre de physique théorique de Marseille, qui a écrit avec lui un article sur le temps. « *Il partage ses idées et les donne volontiers à ses étudiants. C'est un enthousiaste* », témoigne Pierre Cartier. « *Il est très motivant pour les jeunes. Il les encourage* », renchérit Matilde Marcolli, de l'Institut Max-Planck de Bonn, avec qui il a fait un nouveau pas vers les sommets des maths et de la physique. Lequel atteindra-t-il en premier ? Celui de l'unification des forces fondamentales de la physique après lequel courent des milliers de chercheurs ou celui du secret des nombres premiers, mis à prix un million de dollars ? Qu'importe. « *L'essentiel est d'avoir des problèmes non résolus auxquels s'attaquer. Les objets (comme les nombres premiers ou les particules) ont beau être simples, la connaissance que nous en avons est faible*, résume Alain Connes. *Le mystère est motivant.* »

D. L.

« En fait, on est le plus créatif lorsqu'on ne fait rien. Je veux dire, lorsqu'on fait autre chose que des maths »

» D'où vient le temps ?

Lors de ses explorations des mondes non commutatifs, Alain Connes est tombé sur une étrange propriété. Le temps jaillit de l'espace… Ou si l'on préfère, l'espace engendre le temps. C'est inhabituel en physique. En général, les scientifiques procèdent autrement : ils calculent l'évolution temporelle d'un « système », et notamment ses éventuels états d'équilibre, à partir de l'opérateur qui agit sur lui. Ainsi, l'action d'une certaine fonction, appelée hamiltonien, sur un pendule, permet d'en prévoir les oscillations. L'action du hamiltonien, par exemple sur l'électron, permet de parfaitement décrire le mouvement de ce dernier autour d'un noyau atomique.

Avec Alain Connes, c'est presque le contraire. Il part des états d'équilibre d'un système et en déduit l'évolution temporelle ! L'analyse de la structure de l'algèbre sous-jacente au problème lui permet de trouver les états d'équilibre et donc le temps. L'espace crée du temps. Grâce à la non-commutativité.

Ce n'est d'ailleurs pas la première fois. En mécanique quantique, cette propriété est à l'origine du principe d'incertitude. Comme position et vitesse ne commutent pas, il est impossible de les connaître simultanément avec une précision infinie. Cette fois, la particularité mathématique a été source du temps. Non sans d'étranges conséquences. Des oasis de tranquillité surgissent, où le temps est suspendu. Il est invariant. Tout comme la vitesse de la lumière est un invariant en théorie de la relativité *(lire p. 56)*. Le temps peut aussi être cyclique et avoir des périodes. Ou bien, il pourrait apparaître des échelles de temps, de même qu'existent des échelles d'énergie ou de distance ; des temps en dessous desquels il serait impossible de descendre…

Les théories d'unification cherchent à comprendre pourquoi le temps s'écoule dans un seul sens.

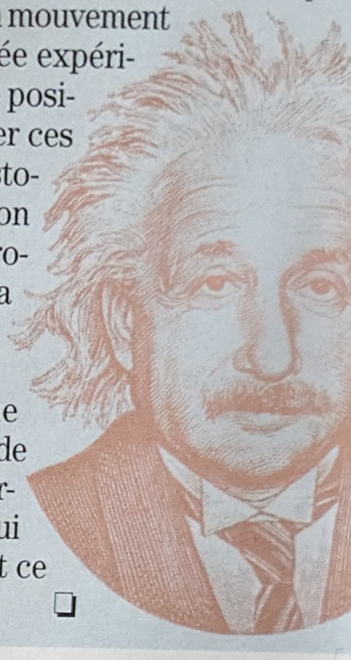
« Avec Carlo Rovelli, j'ai fait l'hypothèse que le temps qui passe, le temps que l'on ressent, le temps de la thermodynamique a un lien avec la non-commutativité de l'espace. Si le temps passe, c'est parce que nous baignons dans le bain de température à 2,7 K, vestige du Big Bang », ose le chercheur. L'hypothèse n'est pas démontrée mais résoudrait le mystère de la flèche du temps. Pourquoi, bien que les équations soient réversibles dans le temps, personne n'a-t-il vu un œuf cassé se reformer ?

D. L.

La vision d'Einstein

La dilatation du temps

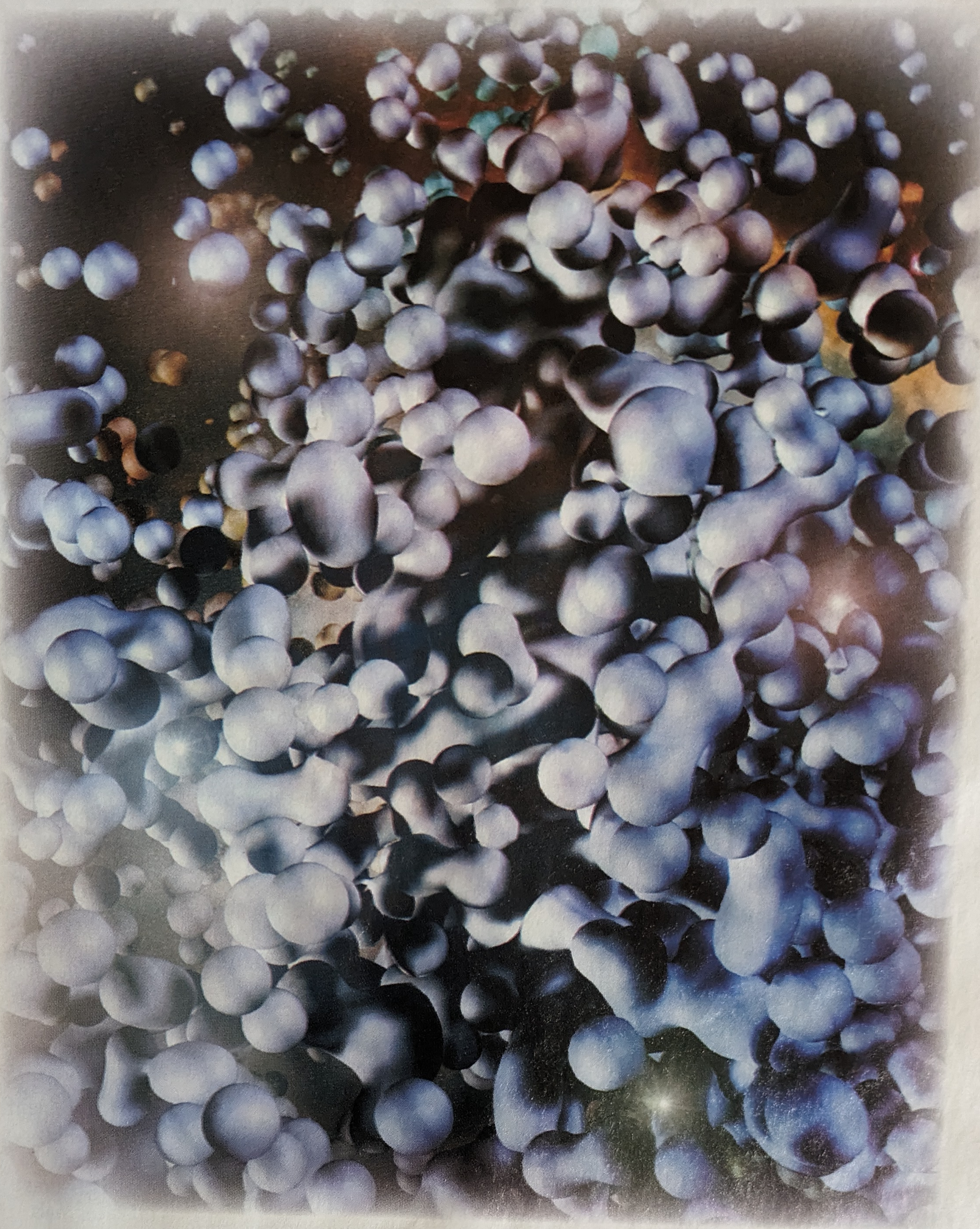
Einstein a chamboulé la notion de temps. Les transformations de Lorentz *(lire p. 56)* impliquent par exemple que le temps s'écoule plus lentement dans une voiture filant à vive allure que pour un spectateur immobile sur la route. Le temps n'est plus une notion absolue mais bien relative. La différence entre des horloges en mouvement et au « repos » a été observée expérimentalement. Le système de positionnement GPS doit corriger ces effets pour être efficace. Historiquement, cette question du temps et de la synchronisation des horloges a mis Einstein sur la voie de sa théorie de la relativité restreinte. Finalement, chaque point de l'espace-temps possède sa propre horloge. C'est Hermann Minkow-ski, en 1908, qui formalisa mathématiquement ce monde à quatre dimensions. ❑



GETTY

Où sont les particules ?

En 1985, Alain Connes, désormais familier des nouveaux espaces non commutatifs, se frotte véritablement à la physique. Il se penche même sur l'un de ses plus beaux fleurons, le modèle standard. Ce modèle décrit comment s'organisent toutes les particules élémentaires, électrons, quarks ou autres bosons. Il a parfaitement résisté aux tests expérimentaux, confirmant voire prédisant les propriétés précises des particules découvertes dans les accélérateurs de haute énergie. Bref, du solide. *« Ma philosophie est de partir des calculs sophistiqués de la physique qui sont bien validés par l'expérience. J'essaye alors de les comprendre »*, explique le chercheur. Il remarque immédiatement une incongruité dans le modèle. D'un côté, il y a un espace physique, celui d'Einstein, avec ses quatre dimensions de temps et d'espace. De l'autre, les particules, « mises » dans cet espace. Or, le monde des particules ne possède pas tout à fait les mêmes symétries que l'espace-temps. Dans ce dernier, la symétrie essentielle est le principe d'équivalence d'Einstein *(lire p. 59)*. Les particules ont, elles, des symétries internes comme le spin, sorte de petite toupie intrinsèque. Chez les quarks, qui constituent notamment les protons et les neutrons, s'en trouve une autre encore : la couleur, avec des règles précises de mélange. Chacune des forces (hors la gravité) possède aussi ses symétries, appelées symétries de jauge, qui contraignent le modèle. Tout l'art du mathématicien



Le vide n'est jamais vide. En permanence des particules naissent, meurent ou se transforment.

Connes a été d'essayer de construire un espace qui engloberait toutes ces symétries à la fois. Et il l'a trouvé !

Evidemment, il est non commutatif. Mais un peu seulement… Supposons un instant que notre univers à quatre dimensions soit une feuille de papier à deux dimensions (nous serions plus plats que des fourmis). Alors, le nouveau monde serait une dimension discrète (c'est-à-dire non continue) supplémentaire correspondant à l'existence de deux côtés de la feuille. L'écart entre les deux faces est mince mais pas nul. De surcroît, il peut fluctuer. La propriété de non-commutativité se fait surtout sentir par cet espace discret apparemment vide. Apparemment car, en physique, le vide n'est jamais vraiment vide. Celui-ci abriterait même un trésor, une célèbre particule fantôme, après laquelle tout le monde court, le boson de Higgs. Nouveau miracle de la géométrie non commutative, cette particule fugitive, qui expliquerait la masse de toutes les autres particules, apparaît dans la procédure de calcul différentiel propre à cette géométrie. Traverser la feuille ou passer d'une feuille à l'autre ne peut plus s'accomplir de la manière continue et infinitésimale banale qui régit les déplacements dans l'espace classique. En revanche, le calcul « infinitésimal » *ad hoc* dans l'espace entre deux feuillets « crée » le fameux boson de Higgs. La masse prédite par Connes pour cette particule, à 30 % près, est tout à fait dans les estimations données par la plupart des autres modèles. En particulier, ce boson sera à la portée du futur accélérateur de particules du Cern, le LHC, qui fera ses premières collisions en 2007.

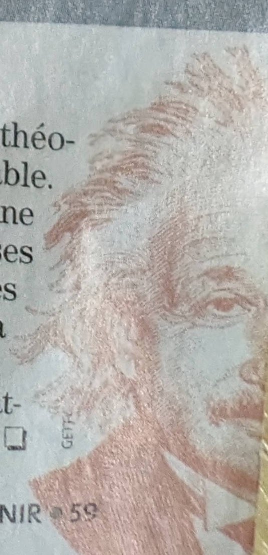
Mieux, dans ce nouvel espace, il n'y a pas que le Higgs. En cherchant bien, on y découvre tous les autres paramètres du modèle standard ! C'était la moindre des choses… *« C'est en quelque sorte le même pas qu'a réalisé Minkowski, il y a presque cent ans. Il cherchait un espace correspondant aux symétries de Lorentz qui permettent de passer d'un repère à un autre ayant une vitesse uniforme. Il a trouvé ainsi l'espace-temps »*, résume Alain Connes. Malheureusement, ces résultats n'apportent rien aux physiciens, qui connaissent leur modèle sur le bout des doigts. Sauf que la philosophie, les outils et le formalisme sont très différents. Par exemple, alors qu'il faut quarante pages d'équations pour décrire le modèle standard à la sauce des physiciens, il ne faut plus que deux lignes à la manière d'Alain Connes. *« La rationalité atteint un niveau supérieur. C'est prodigieux »*, s'enthousiasme Pierre Cartier. Ce n'est pas fini… Il reste à « quantifier » le problème, c'est-à-dire à s'attaquer aux calculs proprement dits.

D. L. »

La vision d'Einstein

La relativité générale

Le principe de relativité galiléenne concerne les objets en mouvement à vitesse constante. Albert Einstein, en 1915, étend ce principe au cas des mouvements accélérés. Plutôt que de dire que dans un référentiel en mouvement à vitesse constante, il ne se passe « rien », il généralise en disant que dans un référentiel accéléré, tout se passe comme si les objets étaient soumis à une force de gravitation. Un ascenseur en chute libre annule la pesanteur pour ses passagers ; tirer un ascenseur dans l'espace va « enfoncer » les voyageurs au fond de l'enceinte… C'est le principe d'équivalence entre masse pesante et masse d'inertie. Einstein montre aussi que la gravitation a la capacité de déformer la structure de l'espace-temps. La bonne vieille géométrie euclidienne avec son théorème de Pythagore n'est plus valable. La géométrie devient non euclidienne ou riemanienne. Les grosses masses comme les planètes ou les galaxies courbent les rayons lumineux. La gravitation influence le cours du temps : des horloges en altitude battent moins vite la seconde… ❑



» # Comment éviter l'infini ?

Pour résoudre de délicats problèmes, les physiciens sont obligés de les « découper » en petits morceaux et de les regrouper afin d'éviter des infinis dans les calculs. Les derniers travaux d'Alain Connes donnent un cadre plus rigoureux à ces procédures efficaces mais pas toujours bien comprises.

La philosophie d'Alain Connes est, on l'aura compris, de traquer les mathématiques derrière les idées physiques. Après avoir démontré son savoir-faire en jouant avec les ingrédients des « cuisiniers » de la physique, il s'est donc occupé de comprendre leurs tours de main.

Dès que les physiciens appliquent le modèle standard pour estimer les propriétés fines des particules, la plupart de leurs calculs se mettent à diverger, à devenir infinis. La mayonnaise ne prend pas. C'est pourquoi ils ont inventé une procédure particulièrement habile pour se sortir de ce mauvais pas. Et pour donner du sens à ce qui n'en a pas. Cette technique s'appelle la « renormalisation ». Bien que ses bases conceptuelles soient mal définies, elle est redoutablement efficace pour prévoir comment les particules interagissent. Sans elle, le modèle standard serait inopérant.

A l'origine, une simple balle dans l'eau posait problème. Au XIXe siècle, le mathématicien britannique George Green essaie de calculer l'accélération initiale d'une balle plongée dans l'eau, lâchée sans vitesse. Il évalue que, soumise à la poussée d'Archimède, la balle devrait avoir une accélération de plus de onze fois son poids. Au lieu de deux, dans la réalité ! Cette « divergence » a été résolue en définissant une masse effective pour la balle dans l'eau, différente de la masse hors de l'eau.

Pour les particules, le problème est identique : des calculs sans précaution donnent des résultats aberrants. Pour les éviter, il faut aussi définir des paramètres effectifs. Seulement, s'il est facile de sortir une balle de l'eau et connaître sa masse, il est impossible d'extraire une particule du champ électromagnétique qui l'entoure. Qu'à cela ne tienne, les physiciens découpent le problème en plusieurs morceaux et gardent les plus gros. Malheureusement, il reste encore souvent des pathologies divergentes. Il faut alors des regroupements audacieux de morceaux, pour éliminer tous les problèmes. La procédure est très codifiée et elle marche ! Mais pourquoi ? Alain Connes, aidé de Dirk Kreimer de l'IHES et de Matilde Marcolli de l'Institut Max Planck en mathématiques de Bonn, a commencé de comprendre.

Il a exhibé peu à peu les structures cachées du problème. En coulisses, se dissimule ce que les mathématiciens appellent un groupe, c'est-à-dire un ensemble d'objets muni d'une opération, baptisée produit. Le produit entre deux objets redonne un membre du groupe. Par exemple, en géométrie, les rotations forment un groupe. Deux rotations successives sont une rotation d'un angle, qui est la somme des angles des deux rotations composées. Lorsqu'un mathématicien trouve un groupe, il est ravi car le problème se simplifie immédiatement. Si les solutions d'une équation forment un groupe, alors il suffit d'en trouver une seule pour trouver toutes les autres ! Trouver un groupe permet aussi de jeter des ponts avec d'autres groupes *a priori* sans rapport et, grâce à ces connexions, de découvrir de nouvelles propriétés.

Tout se passe comme si les divergences du modèle standard révèlaient en fait la nature de l'espace-temps

C'est ce qui est arrivé avec la renormalisation. D'abord, Dirk Kreimer a trouvé une structure mathématique dans la procédure un peu « empirique » des physiciens. Puis avec Connes, il a compris que cette structure était identique à une autre, découverte plus tôt par Connes et Henri Moscovici (à l'université de l'Ohio, aux Etats-Unis) lors de calculs en géométrie non commutative. Enfin, tous deux ont réalisé que le tour de main des physiciens est le même qu'une recette de mathématicien pour résoudre un problème *a priori* sans lien. Du coup, Dirk Kreimer en a déduit une nouvelle façon de « cuisiner » le modèle standard. Il a convaincu des physiciens de l'employer pour calculer avec encore plus de précision (et plus de facilité) des branches du modèle qui seront testées au LHC, au Cern à Genève.

Ensuite, Alain Connes et Matilde Marcolli ont jeté un nouveau pont entre la renormalisation et les mathématiques. Et sont tombés sur un groupe de symétrie « cosmique », de nature universelle, dont l'existence avait été conjecturée par Pierre Cartier. Le plus beau est que cette structure est intimement liée à la présence des fameuses et indésirables divergences. Sans elles, pas de groupe. Tout se passe comme si les divergences étaient indispensables et révélaient la véritable nature de l'espace-temps. *« Sans ces divergences, le monde serait un peu "rasoir" »*, lance Alain Connes. De fait, pour arriver à ses fins, la paire de mathématiciens a dû « altérer » la géométrie de l'espace. Formellement, ils ont fait apparaître de nouvelles dimensions non commutatives. Encore ! Il se pourrait qu'elles aient une parenté avec celles trouvées précédemment lors de la géométrisation du modèle standard.

L'horizon s'éclaircit. Le sommet n'est peut-être plus très loin. Depuis le début, Alain Connes cherche à at-

traper l'espace complet dans lequel unifier gravitation et physique quantique. Pour lui, cela revient à comprendre les transformations ou les symétries qui agissent sur cet espace. Aussi sûrement qu'un cercle est différent d'un carré parce qu'il ne possède pas les mêmes symétries. Convaincu de l'importance de la non-commutativité dans ce défi, notamment à cause de la mécanique quantique, il a commencé par bâtir toute une série d'outils pour explorer ce nouveau monde potentiel. Puis le chercheur s'est attaqué aux deux joyaux de la physique moderne. D'un côté, avec le modèle standard, il a compris que mettre ensemble gravitation et particules impose une nouvelle géométrie. Une dimension non continue supplémentaire apparaît dans l'épaisseur de notre espace-temps classique. La non-commutativité de cette dimension permet de calculer les paramètres du modèle standard. De l'autre côté, avec la procédure de renormalisation, il a découvert un nouvel espace, possédant encore une dimension supplémentaire. Surtout, il jette une lumière nouvelle sur les divergences qui empoisonnent la vie des physiciens. *« Il faut maintenant unifier ces deux travaux et caractériser les espaces abstraits qui en découlent. Cela progresse,* résume Alain Connes. *C'est peut-être un pas aussi énorme que les précédents. Ce sera dur et la physique est sans doute plus subtile qu'on ne croit. »*

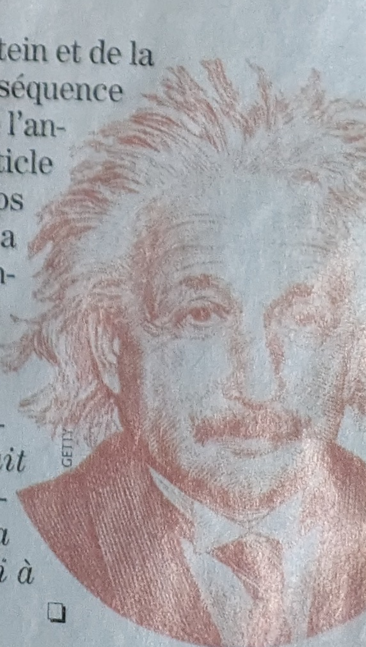
Si la récolte est difficile en physique, Alain Connes pourra toujours se rabattre sur les mathématiques. En trouvant ce groupe avec Marcolli, il a fait le lien avec un des 21 célèbres problèmes que David Hilbert avait lancés à la communauté en 1900, sous forme de défi. Tout comme avec un morceau largement aussi « mystérieux », riche et foisonnant que la géométrie non commutative : la théorie des motifs d'Alexandre Grothendieck. *« Comme Connes, Grothendieck a inventé le concept avant de l'avoir saisi,* rappelle Pierre Cartier. *Nous voyons apparaître un lien entre la gymnastique de la renormalisation et les puzzles de Grothendieck. Les motifs ressemblent, pour le non-spécialiste, à ces morceaux d'un problème qu'on éclate, et dont chacun contient tout le problème. »* Un peu comme les morceaux d'équations manipulés par les physiciens.

Enfin, Alain Connes ne s'est pas éloigné tant que ça de son autre dada, la théorie des nombres et son Graal, la structure de l'ensemble des nombres premiers. *« Les nombres premiers sont un peu des particules élémentaires pour les mathématiciens »*, explique-t-il. Justement, les équations de la physique recèlent des nombres qui interviennent aussi dans les calculs de nombres premiers. Alors, trouver la valeur des constantes de la physique ou chercher des nombres premiers n'est pas si différent. Alain Connes aime décidément les sommets. **D. L.** »

La vision d'Einstein

$E = mc^2$

C'est la plus célèbre formule d'Einstein et de la physique. Mais ce n'est qu'une conséquence de la relativité restreinte. Einstein ne l'annonce que quelques mois après son article fondateur. Elle signifie que si un corps gagne de l'énergie, par chauffage, sa masse augmente ; s'il en perd, par rayonnement, sa masse diminue. Ses effets ne se font sentir qu'au niveau des hautes énergies qui lient les protons et les neutrons, c'est-à-dire au cœur de la matière. Dans son livre *Si Einstein m'était conté**, Thibault Damour rappelle qu'elle n'a pas aidé à *« la découverte de la possibilité d'une bombe atomique, ni à sa conception, ni à sa réalisation ».* ❑



» Alternatives

Qui l'emportera ?

Autres voies explorées par les chercheurs pour réconcilier la relativité générale et la physique quantique : la théorie des cordes et celles des univers parallèles.

L'unification des quatre forces de la Nature ou la réconciliation entre les deux visions du monde relativiste et quantique ne passionne pas qu'Alain Connes. « *Nous vivons une époque excitante. Les mathématiques et la physique théorique s'interpénètrent à nouveau. Des bouts séparés essayent de se rejoindre* », rappelle Pierre Cartier.

En fait, depuis les formidables moissons théoriques et expérimentales dans les accélérateurs de particules dans les années 1970, toute une communauté de physiciens s'échine sur ces problèmes. L'écrasante majorité explore la voie de la théorie des cordes, impulsée à la fin des années 1970. Côté bouleversement spatio-temporel, elle n'a rien à envier aux espaces non commutatifs. Dans ce modèle, les particules élémentaires ne sont plus élémentaires ! Elles sont en fait des petits brins de cordes minuscules, des milliards de milliards de fois plus petits qu'un proton, qui vibrent. Telle une corde de guitare, cette corde originelle crée plusieurs notes qui sont autant de particules. De la vibration microscopique jaillissent les quarks, les électrons et les bosons responsables des différentes forces.

L'autre fait nouveau est que ces cordes se déploient dans un espace bien plus compliqué que le nôtre. Il devrait posséder dix dimensions supplémentaires ! Si personne ne les a encore vues, c'est qu'elles sont très petites (du même ordre de grandeur qu'une corde) ou bien c'est qu'elles sont repliées sur elles-mêmes, d'une façon très compacte bien entendu. Elles seraient l'analogue de l'épaisseur d'un câble à notre échelle. Sur un filin, un acrobate ne peut se déplacer qu'à une dimension. Mais, vu de près, rien n'empêche une fourmi de se mouvoir à deux dimensions ; la seconde dimension étant l'épaisseur du câble qui permet à l'insecte d'en faire le tour. En théorie des cordes, il faudrait imaginer sept dimensions « enroulées » de cette façon… Une autre possibilité pour expliquer l'invisibilité de ces dimensions est de dire qu'elles sont transparentes à la plupart de nos forces, sauf la gravitation. Nos « yeux », *via* les photons de la lumière ne sauraient les voir. Du coup, elles pourraient devenir géantes sans que nous n'en sachions rien (voir *Sciences et Avenir* n° 648, février 2001).

Si ces modèles sont séduisants pour l'esprit, ils restent pour le moment, et pour longtemps sûrement, hors de portée de l'expérience

Les dernières années ont ajouté encore du raffinement à la complexité géométrique de notre univers. Il y aurait des univers parallèles (voir *Sciences et Avenir* n° 673, mars 2003). Nous vivrions sur des membranes empilées les unes sur les autres et « collées » *via* les forces de gravitation. Impossible de savoir ce qui se passe sur une autre membrane, qui pourrait tout aussi bien abriter un univers comme le nôtre, en retard ou en avance. « *L'espace et le temps pourraient représenter beaucoup plus que ce que nous imaginions. Ce que nous pensions être "tout" pourrait n'être qu'un petit élément d'une réalité beaucoup plus riche* », résume Brian Greene de l'université Columbia, à New York, dans son dernier livre, *la Magie du Cosmos* (à paraître chez Robert Laffont).

Ces mondes sont séduisants pour l'esprit. Sur le papier, ils existent. Mais dans la réalité ? Pour l'instant et pour longtemps sûrement, les tailles de ces nouveaux objets sont hors de portée de l'expérience. Seules des observations indirectes pourraient trancher entre tous ces modèles qui prédisent des tailles de cordes, de dimensions, ou de membranes très diverses. Dans les accélérateurs de particules de prochaines générations, de nouvelles particules ou de mini-trous noirs éphémères seraient de bons indices. Dans l'Univers, l'étude de quelques anomalies dans les photos de ses premiers instants mettrait aussi sur la piste. Cet éloignement de la réalité et surtout la domination « sociologique » de ces idées a le don d'irriter Alain Connes, qui préfère rester plus terre à terre et trouver le bon espace qui colle à la réalité d'aujourd'hui… **D. L.**

Illustrations conçues et réalisées par Didier Florentz

L'espace-temps en boucle

La théorie quantique des boucles (*quantum loop gravity*) est encore une idée qui attend sa vérification. Conçue à la fin des années 1980 par Carlo Rovelli et par Lee Smolin, de l'université de Pennsylvanie, aux États-Unis, cette théorie imagine un espace-temps granulaire formant des boucles à la manière des lignes de champs magnétiques circulant entre pôle nord et pôle sud. Tout devient quantifié, l'espace, la gravitation et aussi le temps qui ne peut donc plus prendre toutes les valeurs possibles. Une piste de confirmation expérimentale serait à chercher dans l'univers *via* des anomalies de propagation de la lumière liées à l'existence de ces boucles. ❑

Géométrie non-commutative et fonction zeta de Riemann

Par Alain Connes

Selon mon premier professeur Gustave Choquet, on court le risque, lorsqu'on affronte ouvertement un problème non résolu bien connu, de rester dans les mémoires davantage par son échec que par quoi que ce soit d'autre. Après avoir atteint un certain âge, j'ai réalisé qu'attendre "en sécurité" jusqu'à atteindre le point final de sa vie était une alternative aussi auto-destructrice.

Dans cet article, je reviendrai d'abord sur mon travail initial sur la classification des algèbres de von Neumann et je le projetterai dans la lumière inhabituelle de la Théorie basique des nombres d'André Weil.

J'expliquerai alors que cela mène à une interprétation naturelle des zéros de la fonction zeta de Riemann et à un paradigme géométrique dans lequel le Frobenius, ses valeurs propres et l'interprétation de la formule de Lefschetz des formules explicites continue d'être vérifiée pour les corps de nombres. Sera démontrée alors la positivité de la distribution de Weil en supposant la validité de l'analogue de la formule de trace de Selberg. Cette dernière reste non démontrée et est équivalente à RH pour toutes les L-fonctions à Grössencharakter.

1. Théorie du corps de classes local et classification des facteurs

Soit K un corps *local*, i.e. un corps discret localement compact. L'action de $K^* = GL_1(K)$ sur le groupe additif K par multiplication,

$$(\lambda, x) \to \lambda x \qquad \forall \lambda \in K^*, x \in K, \tag{1}$$

avec l'unicité, à mise à l'échelle près, de la mesure de Haar du groupe additif K, amène un homomorphisme,

$$a \in K^* \to |a| \in \mathbb{R}_+^*, \tag{2}$$

de K^* vers $\mathbb{R}_+^*$, appelé le *module* de K. Son domaine

$$\mathrm{Mod}(K) = \{|\lambda| \in \mathbb{R}_+^* \, ; \lambda \in K^*\} \tag{3}$$

Référence : Mathematics: frontiers and perspectives, p. 35-54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
Retranscription en Latex : Denise Vella-Chemla, août 2022.

est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$.

Les corps $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$ (des quaternions) sont les seuls corps avec $\mathrm{Mod}(K) = \mathbb{R}_+^*$, on les appelle les corps locaux archimédiens.

Soit K un corps local non archimédien, alors

$$R = \{x \in K \; ; \; |x| \leq 1\}, \tag{4}$$

est l'unique sous-anneau compact maximal de K et le quotient R/P de R par son unique idéal maximal est un corps fini $\mathbb{F}_q$, (avec $q = p^l$ une puissance de nombre premier). On a,

$$\mathrm{Mod}(K) = q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*. \tag{5}$$

Soit K commutatif. Une extension $K \subset K'$ de degré fini de K est dite *non ramifiée* ssi la dimension de K' sur K est l'ordre de $\mathrm{Mod}(K')$ comme sous-groupe de $\mathrm{Mod}(K)$. Quand il en est ainsi, le corps K' est commutatif, est engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre premier à q, et est une extension cyclique de Galois de K, de groupe de Galois engendré par l'automorphisme $\theta \in \mathrm{Aut}_K(K')$ tel que,

$$\theta(\mu) = \mu^q, \tag{6}$$

pour toute racine de l'unité d'ordre premier à q dans K'.

Les extensions non ramifiées de degré fini de K sont classées par les sous-groupes,

$$\Gamma \subset \mathrm{Mod}(K), \Gamma \neq \{1\}. \tag{7}$$

Soit alors $\overline{K}$ une fermeture algébrique de K, $K_{\mathrm{sep}} \subset \overline{K}$ la fermeture algébrique séparable, $K_{\mathrm{ab}} \subset K_{\mathrm{sep}}$ l'extension abélienne maximale de K et $K_{\mathrm{un}} \subset K_{ab}$ l'extension non ramifiée maximale de K, i.e. l'union de toutes les extensions non ramifiées de degré fini. On a,

$$K \subset K_{\mathrm{un}} \subset K_{\mathrm{ab}} \subset K_{\mathrm{sep}} \subset \overline{K}, \tag{8}$$

et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{un}} : K)$ est topologiquement engendré par θ appelé l'automorphisme de Frobenius.

La correspondance (7) est donnée par,

(9) $$K' = \{x \in K_{\rm un}\ ;\ \theta_\lambda(x) = x \quad \forall \lambda \in \Gamma\},$$

avec des notations plutôt évidentes telles que θ_q est le θ de (6). Soit alors W_K le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(K_{\rm ab} : K)$ dont les éléments induisent sur $K_{\rm un}$ une puissance entière de l'automorphisme de Frobenius. On munit W_K de la topologie localement compacte dictée par la séquence exacte de groupes,

(10) $$1 \to \mathrm{Gal}(K_{\rm ab}\ :\ K_{\rm un}) \to W_K \to \mathrm{Mod}(K) \to 1,$$

et le résultat principal de la théorie du corps de classes local affirme l'existence d'un isomorphisme canonique,

(11) $$W_K \overset{\sim}{\to} K^*,$$

compatible avec le module.

L'étape de base dans la construction de l'isomorphisme (11) est la classification des algèbres centrales simples de dimension finie A sur K. Toute telle algèbre est de la forme,

(12) $$A = M_n(D),$$

où D est une algèbre (centrale) de division sur K et le symbole M_n désigne les matrices $n \times n$.

De plus D est le produit croisé d'une extension non ramifiée K' de K par un 2-cocycle sur son groupe de Galois cyclique. La cohomologie élémentaire des groupes amène alors l'isomorphisme,

(13) $$\mathrm{Br}(K) \overset{\eta}{\to} \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

du groupe de Brauer des classes des algèbres centrales simples sur K (avec produit tensoriel comme loi de groupe), dans le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ des racines de 1 dans $\mathbb{C}$.

Toute la discussion ci-dessus a été menée en supposant que K est non archimédien. Pour les corps archimédiens $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les mêmes questions ont une réponse bêtement simple. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on a $K = \overline{K}$ et toute l'image s'effondre. Pour $K = \mathbb{R}$ la seule valeur non triviale de l'invariant de Hasse η est

(14) $$\eta(\mathbb{H}) = -1.$$

Un groupe de Galois G est par construction totalement déconnecté de telle façon qu'un morphisme de K^* dans G est nécessairement trivial sur la composante connexe de $1 \in K^*$.

Soit k un corps *global*, i.e. un sous-corps discret cocompact d'un anneau commutatif (non discret) localement compact semi-simple A. (Cf. Iwasawa *Ann. of Math.* **57** (1953).) L'anneau topologique A est canoniquement associé à k et appelé l'anneau Adèles de k, on a,

$$A = \prod_{\text{res}} k_v, \tag{15}$$

où le produit est le produit restreint des corps locaux k_v étiquetés par les places de k.

Quand la caractéristique de k est $p > 1$ de telle façon que k est le corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$, on a

$$k \subset k_{\text{un}} \subset k_{\text{ab}} \subset k_{\text{sep}} \subset \overline{k}, \tag{16}$$

où, comme ci-dessus $\overline{k}$ est une fermeture algébrique de k, k_{sep} la fermeture algébrique séparable, k_{ab} l'extension abélienne maximale et k_{un} est obtenu en adjoignant à k toutes les racines de l'unité d'ordre premier à p.

On définit le groupe de Weil W_k comme ci-dessus comme le sous-groupe de $\text{Gal}(k_{\text{ab}} : k)$ de ces automorphismes qui induisent sur k_{un} une puissance entière de θ,

$$\theta(\mu) = \mu^q \qquad \forall \mu \text{ racine de 1 d'ordre premier à } p. \tag{17}$$

Le théorème principal de la théorie du corps de classes global affirme l'existence d'un isomorphisme canonique,

$$W_k \simeq C_k = GL_1(A)/GL_1(k), \tag{18}$$

de groupes localement compacts.

Quand k est de caractéristique 0, i.e. est un corps de nombres, on a l'isomorphisme canonique,

$$\text{Gal}(k_{\text{ab}} \ : \ k) \simeq C_k/D_k, \tag{19}$$

où D_k est la composante connexe de l'identité dans le groupe de classes d'idèles $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$, mais à cause des places archimédiennes de k il n'y a pas d'interprétation de C_k analogue à l'interprétation du groupe de Galois pour les corps de fonctions. Selon A. Weil [28], "La recherche d'une interprétation pour C_k si k est un corps de nombres, analogue en quelque manière à l'interprétation par un groupe de Galois quand k est un corps de fonctions, me semble constituer l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des nombres à l'heure actuelle ; il se peut qu'une telle interprétation renferme la clef de l'hypothèse de Riemann...".

Les groupes de Galois sont par construction les limites projectives des groupes finis attachés aux extensions finies. Pour obtenir des groupes connectés on doit clairement relâcher pour les extensions finies la condition de finitude, condition qui est la même que la dimensionalité finie des algèbres simples centrales. Puisque les places archimédiennes de k sont responsables de la non trivialité de D_k il est naturel de poser la question préliminaire suivante,

"Y a-t-il une théorie de Brauer non triviale des algèbres simples centrales sur $\mathbb{C}$?"

Comme nous le verrons bientôt, les algèbres centrales simples de *dimension d'approximation finie* sur $\mathbb{C}$ fournissent une réponse satisfaisante à cette question. Elles sont classifiées par leur module,

$$\mathrm{Mod}(M) \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*, \tag{20}$$

qui est un sous-groupe fermé virtuel de $\mathbb{R}_+^*$.

Expliquons maintenant cette assertion plus soigneusement. D'abord, on exclut le cas trivial $M = M_n(\mathbb{C})$ des algèbres de matrices. Ensuite $\mathrm{Mod}(M)$ est un sous-groupe virtuel de $\mathbb{R}_+^*$, au sens de G. Mackey, i.e. une action ergodique de $\mathbb{R}_+^*$. Tous les flots ergodiques apparaissent et M_1 est isomorphe à M_2 ssi $\mathrm{Mod}(M_1) \cong \mathrm{Mod}(M_2)$.

Le lieu de naissance des algèbres simples centrales est comme le commutant des représentations isotypiques. Quand on travaille sur $\mathbb{C}$ il est naturel de considérer les représentations unitaires dans l'espace de Hilbert de façon à restreindre notre attention aux algèbres M qui apparaissent comme commutants de représentations unitaires. On les appelle algèbres de von Neumann. Les termes central et simple conservent leur signification algébrique habituelle.

La classification fait intervenir trois parties indé pendantes,

(A) La définition de l'invariant $\mathrm{Mod}(M)$ pour les facteurs arbitraires (algèbres centrales de von Neumann).

(B) L'équivalence de toutes les notions possibles de dimensionalité d'approximation finie.

(C) La preuve que Mod est un invariant complet et que tous les sous-groupes virtuels sont obtenus.

Le module d'un facteur M a été d'abord défini ([6]) comme un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ par l'égalité

$$S(M) = \bigcap_\varphi \mathrm{Spec}(\Delta_\varphi) \subset \mathbb{R}_+ \tag{21}$$

où φ varie parmi les états (fidèles, normaux) sur M, i.e. les formes linéaires $\varphi : M \to \mathbb{C}$ telles que,

$$\varphi(x^*x) \leq 0 \qquad \forall x \in M, \varphi(1) = 1, \tag{22}$$

alors que l'opérateur Δ_φ est l'*opérateur modulaire* ([24])

$$\Delta_\varphi = S_\varphi^* S_\varphi, \tag{23}$$

qui est le *module* de l'involution $x \to x^*$ dans l'espace de Hilbert attaché à la forme sesquilinéaire,

$$\langle x, y\rangle = \varphi(y^*x), \quad x, y \in M. \tag{24}$$

Dans le cas des corps locaux, le module était un homomorphisme de groupe ((2)) de K^* à $\mathbb{R}_+^*$. La contrepartie pour les facteurs est l'homomorphisme de groupes, ([6])

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathrm{Out}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Int}(M), \tag{25}$$

du groupe additif $\mathbb{R}$ vu comme le dual de $\mathbb{R}_+^*$ pour l'appariement,

$$(\lambda, t) \to \lambda^{it} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ t \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

vers le groupe de classes d'automorphismes de M modulo les automorphismes intérieurs.

Le sous-groupe virtuel,

$$\mathrm{Mod}(M) \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*, \tag{27}$$

est le *flot des poids* ([25] [15] [8]) de M. Il est obtenu à partir du module δ comme l'action duale de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'algèbre abélienne,

$$C = \text{Centre de } M \rtimes_\delta \mathbb{R}, \tag{28}$$

où $M \rtimes_\delta \mathbb{R}$ est le produit croisé de M par le groupe d'automorphismes modulaire δ.

Ceci permet de gérer (A), pour décrire (B) établissons simplement l'équivalence ([5]) des conditions suivantes :

(29) M est la fermeture de l'union d'une séquence croissante d'algèbres de dimensions finies.

(30) M est complémenté comme sous-espace de l'espace normé de tous les opérateurs dans un espace de Hilbert.

La condition (29) est évidemment que l'on attendrait une algèbre de dimension d'approximation finie. La condition (30) est similaire à la *moyennabilité* pour les groupes discrets et l'implication (30) $\Longrightarrow$ (29) est un outil très puissant.

On fait référence à [5] [15] [12] pour (C) et on décrit juste la construction effective de l'algèbre centrale simple M associée à un sous-groupe virtuel donné,

$$\Gamma \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*. \tag{31}$$

Parmi les facteurs de dimension d'approximation finie (les algèbres de von Neumann centrales), seuls deux ne sont pas simples. Le premier est l'algèbre

$$M_\infty(\mathbb{C}), \tag{32}$$

de tous les opérateurs dans l'espace de Hilbert. Le second facteur est l'unique facteur de dimension d'approximation finie de type II_∞. C'est

$$R_{0,1} = R \otimes M_\infty(\mathbb{C}), \tag{33}$$

où R est l'unique facteur de dimension d'approximation finie avec une trace finie, τ_0, i.e. un état tel que,

$$\tau_0(xy) = \tau_0(yx) \qquad \forall x, y \in R \tag{34}$$

Le produit tensoriel de τ_0 par la trace standard semi-finie sur $M_\infty(\mathbb{C})$ amène une trace semi-finie τ sur $R_{0,1}$. Il existe, à conjugaison près, un unique groupe à un paramètre d'automorphismes $\theta_\lambda \in \mathrm{Aut}(R_{0,1})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que,

(35) $$\tau(\theta_\lambda(a)) = \lambda\tau(a) \qquad \forall a \in \text{ Domaine de } \tau, \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Soit d'abord $\Gamma \subset \mathbb{R}_+^*$ un sous-groupe ordinaire fermé de $\mathbb{R}_+^*$. Alors le facteur correspondant R_Γ de modulo Γ est donné par l'égalité :

(36) $$R_\Gamma = \{x \in R_{0,1} \; ; \; \theta_\lambda(x) = x \qquad \forall \lambda \in \Gamma\},$$

en analogie parfaite avec (9).

Un sous-groupe virtuel $\Gamma \underset{\sim}{\subset} \mathbb{R}_+^*$ est par définition une action ergodique α de $\mathbb{R}_+^*$ sur une algèbre de von Neumann abélienne A, et la formule (36) s'étend facilement à,

(37) $$R_\Gamma = \{x \in R_{0,1} \otimes A \, ; (\theta_\lambda \otimes \alpha_\lambda)x = x \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

(Celle-ci se réduit à (36) pour l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'algèbre $A = L^\infty(X)$ où X est l'espace homogène $X = \mathbb{R}_+^*/\Gamma$.)

La paire $(R_{0,1}, \theta_\lambda)$ naît très naturellement en géométrie du flot géodésique d'une surface de Riemann compacte (de genre > 1). Soit $V = S^* \sum$ le fibré cosphère unité d'une telle surface $\sum$, et F le feuilletage stable du flot géodésique. Ce dernier définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de la variété feuilletée (V, F) et ainsi un groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre de von Neumann $L^\infty(V, F)$.

Cette algèbre est facile à décrire, ses éléments sont des opérateurs aléatoires $T = (T_f)$, i.e. des familles mesurables bornées d'opérateurs T_f paramétrées par les feuilles f du feuilletage. Pour chaque feuille f l'opéraeteur T_f agit dans l'espace de Hilbert $L^2(f)$ des densités de carré intégrable sur la variété f. Deux opérateurs aléatoires sont identifiés s'ils sont égaux pour presque toutes les feuilles f (i.e. l'ensemble de feuilles dont l'union dans V est négligeable). Les opérations algébriques de somme et produit sont données par,

(38) $$(T_1 + T_2)_f = (T_1)_f + (T_2)_f, \;\; (T_1T_2)_f = (T_1)_f(T_2)_f,$$

i.e. sont effectuées terme à terme.

On prouve que,

(39) $$L^\infty(V, F) \simeq R_{0,1},$$

et que le flot géodésique θ_λ satisfait (35). En effet, le feuilletage (V, F) admet à mise à l'échelle près une mesure transverse unique Λ et la trace τ est donnée (cf. [4]) par l'expression formelle,

$$\tau(T) = \int \mathrm{Trace}(T_f)\, d\Lambda(f), \tag{40}$$

puisque le flot géodésique satisfait $\theta_\lambda(\Lambda) = \lambda\Lambda$ on obtient (35) à partir de considérations géométriques simples. La formule (37) montre que la plupart des facteurs de dimension d'approximation finie naissent déjà des feuilletages, par exemple le facteur unique de dimension d'approximation finie R_∞ tel que,

$$\mathrm{Mod}(R_\infty) = \mathbb{R}_+^*, \tag{41}$$

naît du feuilletage de codimension 1 de $V = S^* \sum$ engendré par F et le flot géodésique.

En fait, cette relation entre la classification des algèbres centrales simples sur $\mathbb{C}$ et la géométrie des feuilletages est beaucoup plus profonde. Par exemple, en utilisant la cohomologie cyclique avec le simple fait suivant,

(42) "Un groupe connecté peut seulement agir trivialement sur une théorie de la colomologie invariante par homotopie",

on prouve (cf. [4]) que pour tout feuilletage F de codimension un d'une variété compacte V de classe de Godbillon-Vey ne s'évanouissant pas, on a,

$$\mathrm{Mod}(M) \text{ est de covolume fini dans } \mathbb{R}_+^*, \tag{43}$$

où $M = L^\infty(V, F)$, et le sous-groupe virtuel de covolume fini est un flot de mesure finie invariante.

2. Théorie du corps de classe global et brisure spontanée de symétrie

Dans la discussion ci-dessus à propos des algèbres centrales simples de dimension d'approximation finie, nous avons travaillé localement sur $\mathbb{C}$. Nous allons maintenant décrire un exemple particulièrement intéressant (cf. [3]) d'algèbres de Hecke intimement liées à l'arithmétique, et définies sur $\mathbb{Q}$.

Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal d'un groupe discret Γ, i.e. on suppose,

$$\Gamma_0 \cap s\,\Gamma_0\,s^{-1} \text{ a un index fini dans } \Gamma_0 \qquad \forall s \in \Gamma. \tag{1}$$

De façon équivalente, les orbites de l'action à gauche de Γ_0 sur Γ/Γ_0 sont toutes finies. On définit l'algèbre de Hecke,

$$\mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0), \tag{2}$$

comme l'algèbre de convolution des fonctions Γ_0 valuées par les entiers à support fini. Pour tout corps k on définit,

$$\mathcal{H}_k(\Gamma, \Gamma_0) = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0) \otimes_{\mathbb{Z}} k, \tag{3}$$

comme étant obtenu en étendant l'anneau des coefficients de $\mathbb{Z}$ à k. On définit $\Gamma = P^+_{\mathbb{Q}}$ comme le groupe des matrices rationnelles 2×2,

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \ ; \ a \in \mathbb{Q}^+, b \in \mathbb{Q} \right\}, \tag{4}$$

et $\Gamma_0 = P^+_{\mathbb{Z}}$ le sous-groupe des matrices entières,

$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ n \in \mathbb{Z} \right\} \tag{5}$$

On vérifie que Γ_0 est presque normal dans Γ.

Pour obtenir une algèbre centrale simple sur $\mathbb{C}$ au sens de la section précédente, on prend juste le commutant de la représentation régulière à droite de Γ sur $\Gamma_0 \backslash \Gamma$, i.e. la fermeture faible de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans l'espace de Hilbert,

$$\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma), \tag{6}$$

des fonctions Γ_0 invariantes à gauche sur Γ avec pour carré de la norme,

$$\|\xi\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} |\xi(\gamma)|^2. \tag{7}$$

Cette algèbre centrale simple sur $\mathbb{C}$ est de dimension d'approximation finie et son module est $\mathbb{R}^*_+$ de telle façon qu'il est le même à l'infini que R_∞ de (41).

En particulier son groupe d'automorphismes modulaire est hautement non trivial et on peut le calculer explicitement pour l'état φ associé au vecteur $\xi_0 \in \ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$ correspondand au coset à gauche Γ_0.

Le groupe d'automorphismes modulaire σ^φ_t laisse la sous-algèbre dense $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0) \subset R_\infty$ globalement invariante et est donné par la formule,

(8) $$\sigma_t^{\varphi}(f)(\gamma) = L(\gamma)^{-it} R(\gamma)^{it} f(\gamma) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$$

pour tout $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0)$. Ici on définit,

(9) $$\begin{aligned} L(\gamma) &= \text{ Cardinalité de l'image de } \Gamma_0 \gamma \Gamma_0 \text{ dans } \Gamma/\Gamma_0 \\ R(\gamma) &= \text{ Cardinalité de l'image de } \Gamma_0 \gamma \Gamma_0 \text{ dans } \Gamma_0 \backslash \Gamma. \end{aligned}$$

Cela suffit à établir le contact avec la mécanique statistique quantique que nous allons maintenant décrire brièvement. Comme de nombreux paradigmes mathématiques que nous ont légués les physiciens, il est caractérisé “non par cette nouveauté d'une vie courte qui trop souvent peut influencer le mathématicien laissé à ses propres dispositifs, mais par cette nouveauté infiniment féconde qui essaime de la nature des choses” (J. Hadamard).

Un système mécanique quantique est donné par,

1) La C^* algèbre des observables A,

2) L'évolution temporelle $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ qui est un groupe d'automorphismes à un paramètre de A.

Un état d'équilibre ou KMS (pour Kubo-Martin et Schwinger), à température inverse β est un état φ sur A qui remplit la condition suivante,

(10) Pour tous $x, y \in A$ il existe une fonction holomorphe bornée (continue sur la bande fermée), $F_{x,y}(z), 0 \leq \text{Im } z \leq \beta$ telle que

$$\begin{aligned} F_{x,y}(t) &= \varphi(x \; \sigma_t(y)) && \forall t \in \mathbb{R} \\ F_{x,y}(t + i\beta) &= \varphi(\sigma_t(y) \; x) && \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour β fixé, les états KMS$_\beta$ forment un simplexe de Choquet et donc se décomposent de manière unique comme une superposition statistique des phases pures données par les points extrêmes. Pour les systèmes intéressants avec interaction non triviale, on s'attend en général à ce que pour une température élevée T, (i.e. pour un petit β puisque $\beta = \frac{1}{T}$ à un facteur de conversion près) le désordre sera prédominant de telle sorte qu'il existera seulement un état KMS$_\beta$. Pour des températures suffisamment basses, un ordre devrait advenir et permettre la coexistence de phases thermodynamiques distinctes de telle façon que le simplexe K_β des états KMS$_\beta$ devrait être non trivial. Un groupe de symétrie donné G du système agira nécessairement trivialement sur K_β pour des T grands puisque K_β est un point, mais agit en général non trivialement sur K_β pour des petites valeurs de T de telle façon qu'il n'y a plus de symétrie d'une phase pure donnée. Ce phénomène de *brisure spontanée de symétrie* ainsi que les propriétés très particulières de la température critique T_c à la frontière des deux régions sont des pierres angulaires de la mécanique statistique.

Dans notre cas, on définit juste A comme étant l'algèbre C^* qui est la fermeture de la *norme* de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans l'algèbre d'opérateurs dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$. On définit $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(A)$ comme étant l'unique extension des automorphismes σ_t^φ de (8).

Pour $\beta = 1$, le fait que φ est un état KMS_β est une tautologie puisqu'on a obtenu σ_t^φ précisément de cette manière ([24]). On démontre ([3]) que pour tout $\beta \leq 1$ (i.e. pour $T = 1$) il existe un et un seul état KMS_β.

Le groupe compact G,

(11) $$G = C_{\mathbb{Q}}/D_{\mathbb{Q}},$$

quotient du groupe de classe d'idèles $C_{\mathbb{Q}}$ par la composante connexe de l'identité $D_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{R}_+^*$, agit d'une manière très simple et naturelle comme les symétries du système (A, σ_t). (Pour voir cela, on note que l'action à droite de Γ sur $\Gamma_0 \backslash \Gamma$ s'étend à l'action de $P_{\mathcal{A}}$ sur le produit restreint des arbres de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$ où $\mathcal{A}$ est l'anneau des adèles finies (cf. [3]).

Pour $\beta > 1$ ce groupe de symétrie G de notre système est spontanément brisé, les ensembles convexes compacts K_β sont non triviaux et ont la même structure que K_∞, que nous décrivons maintenant. D'abord, quelques éléments de terminologie, un état KMS_β pour $\beta = \infty$ est appelé un *état de base* et la condition KMS_∞ est équivalente à la *positivité de l'énergie* dans la représentation de l'espace de Hilbert correspondant.

Rappelons que $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0)$ contient $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma, \Gamma_0)$ donc,

(12) $$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\Gamma, \Gamma_0) \subset A.$$

Par [3] théorème 5 et proposition 24 on a le,

Théorème. *Soit $\mathcal{E}(K_\infty)$ l'ensemble des états KMS_∞ extrémaux.*

a) *Le groupe G agit librement et transitivement sur $\mathcal{E}(K_\infty)$ par composition, $\varphi \to \varphi \circ g^{-1}, \forall g \in G$.*

b) *Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(K_\infty)$ on a,*
$$\varphi(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}_{\mathrm{ab}},$$
et pour tout élément $\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}} : \mathbb{Q})$ il existe une extension unique de $\alpha \circ \varphi$, par continuité, comme état de A. On a $\alpha \circ \varphi \in \mathcal{E}(K_\infty)$.

c) *L'application $\alpha \to (\alpha \circ \varphi)\varphi^{-1} \in G = C_k/D_k$ définie pour $\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{ab}} : \mathbb{Q})$ est l'isomorphisme de la théorie du corps de classes global (I.19).*

Cette dernière application est indépendante du choix de φ. Ce qui est assez remarquable dans ce résultat, c'est que l'existnce de la sous-algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ permet de mettre en action le groupe de Galois de $\mathbb{C}$ sur les *valeurs des états*. Puisque le groupe de Galois de $\mathbb{C} \ : \ \mathbb{Q}$ est (excepté pour $z \to \overline{z}$) formé des automorphismes *discontinus*, il est assez surprenant que son action puisse être compatible avec la *positivité* de la caractéristique des états. Il n'est pas clair du tout de savoir comment étendre la construction ci-dessus à des corps de nombres arbitraires k tout en préservant les trois résultats du théorème. Il y a cependant un calcul facile qui relie la construction ci-dessus à un objet qui fait sens pour tout corps global k. En effet, si on définit comme ci-dessus R_∞ comme étant la fermeture faible de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$, on peut calculer la paire associée $(R_{0,1}, \theta_\lambda)$ de la section I.

La fermeture de l'algèbre C^* de $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ est équivalente selon Morita (cf. M. Laca) à l'algèbre C^* produit croisé,

$$C_0(\mathcal{A}) \rtimes \mathbb{Q}_+^*, \tag{13}$$

où $\mathcal{A}$ est l'espace localement compact des adèles finies. Il s'ensuit immédiatement de cela que,

$$R_{0,1} = L^\infty(\mathbb{Q}_A) \rtimes \mathbb{Q}^*, \tag{14}$$

i.e. l'algèbre de von Neumann produit croisé des fonctions L^∞ sur les adèles de $\mathbb{Q}$ par l'action de $\mathbb{Q}^*$ par multiplication.

Le groupe à un paramètre d'automorphismes, $\theta_\lambda \in \mathrm{Aut}(R_{0,1})$, est obtenu comme la restriction à,

$$D_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}_+^*, \tag{15}$$

de l'action évidente du groupe des classes d'idèles $C_{\mathbb{Q}}$,

$$(g, x) \to gx \qquad \forall g \in C_{\mathbb{Q}}, x \in A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^*, \tag{16}$$

sur l'espace $X = A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^*$ des classes d'adèles.

Notre prochain objectif sera de montrer que le dernier espace est intimement relié aux *zéros* des L-fonctions à Grössencharakter.

(Nous avons montré en [3] que la fonction de partition du système ci-dessus est la fonction zeta de Riemann.)

3. Positivité de Weil et formule de trace

Les corps globaux k fournissent un contexte naturel pour l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction zeta et sa généralisation aux L-fonctions de Hecke. Quand la caractéristique de k est non nulle, cette conjecture a été prouvée par A. Weil. Sa preuve s'appuie sur le dictionnaire suivant (traduit en langage moderne) qui donne une signification géométrique, en terme de géométrie algébrique sur les corps finis, aux propriétés en théorie des fonctions des fonctions zeta. Rappelons que k est un corps de fonction sur une courbe $\sum$ définie sur $\mathbb{F}_q$.

Géométrie algébrique	Théorie des fonctions
Valeurs propres de l'action du Frobenius sur $H^1_{\rm et}(\overline{\sum}, \mathbb{Q}_\ell)$	Zéros de ζ
Dualité de Poincaré en cohomologie ℓ-adique	Équation fonctionnelle
Formule de Lefschetz pour le Frobenius	Formules explicites
Positivité de Castelnuovo	Hypothèse de Riemann

Nous décrirons une troisième colonne de ce dictionnaire, qui aura du sens pour n'importe quel corps global. Elle est basée sur la géométrie de l'espace des classes d'adèles,

$$X = A/k^*, \quad A = \text{Adèles de } k. \tag{1}$$

Cet espace est de la même nature que l'espace des feuilles du feuilletage horocyclique (section I) et la même géométrie sera utilisée pour l'analyser.

Notre interprétation spectrale des zéros de zeta fait intervenir l'espace de Hilbert. Les raisons pour lesquelles l'espace de Hilbert (apparemment inventé par Hilbert dans ce but) devrait intervenir sont les variétés, mentionnons-en trois,

(A) Soit $N(E)$ le nombre de zéros de la fonction zeta de Riemann satisfaisant $0 < \text{Im } \rho < E$, alors ([22])

$$N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\rm osc}(E), \tag{2}$$

où la fonction continue $\langle N(E)\rangle$ est donnée par

$$\langle N(E)\rangle = \frac{E}{2\pi}\left(\log\frac{E}{2\pi} - 1\right) + \frac{7}{8} + o(1), \tag{3}$$

où la partie oscillante est

$$N_{\rm osc}(E) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\log\zeta\left(\frac{1}{2} + iE\right). \tag{4}$$

Les nombres $x_j = \langle N(\rho_j)\rangle$ où ρ_n est la partie imaginaire du $n^{\text{ième}}$ zéro sont de densité moyenne un et se comportent comme les valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne. Cela a été découvert par H. Montgomery [18] qui a conjecturé (et démontré pour des fonctions test adéquates) que quand $M\to\infty$, avec $\alpha,\beta>0$,

$$\#\{(i,j)\in\{1,\ldots,M\}^2\ ;\ x_i - x_j\in[\alpha,\beta]\}\sim M\int_\alpha^\beta 1-\left(\frac{\sin\pi u}{\pi u}\right)^2 du \tag{5}$$

qui est exactement ce qu'il advient dans l'ensemble unitaire gaussien (GUE). Des tests numériques par A. Odlyzko [20] et un travail théorique ultérieur par Katz-Sarnak [17] et J. Keating a fourni l'évidence sans appel que les zéros de zeta devraient être les valeurs propres d'une matrice hermitienne.

(B) L'équivalence entre RH et la positivité de la distribution de Weil sur le groupe des classes d'idéles C_k montre que l'espace de Hilbert est implicitement présent.

(C) La signification arithmétique profonde du travail de A. Selberg sur l'analyse spectrale du laplacien sur $L^2(G/\Gamma)$ où Γ est un sous-groupe arithmétique d'un groupe de Lie semi-simple G.

Les tentatives directes (cf. [2]) de construire l'espace de Polya-Hilbert qui donne une réalisation spectrale des zéros de ζ utilisant la mécanique quantique rencontrent le problème du signe $-$ suivant : soit H l'hamiltonien du système mécanique quantique obtenu en quantifiant le système classique,

$$(X, F_t) \tag{6}$$

où X est l'espace des phases et $t\in\mathbb{R}\to F_t$ le flot hamiltonien. Soit $N(E)$ le nombre de valeurs propres λ de H telles que $0\le\lambda\le E$. Alors, comme pour ζ,

$$N(E) = \langle N(E)\rangle + N_{\rm osc}(E), \tag{7}$$

où $\langle N(E)\rangle$ est essentiellement un volume dans l'espace des phases, alors que la partie oscillante admet une expansion asymptotique heuristique de la forme (cf. [2]),

$$(8) \qquad N_{\text{osc}}(E) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2sh\left(\frac{m\lambda_\gamma}{2}\right)} \sin\left(T_\gamma^{\#} m E\right)$$

où les γ sont les orbites périodiques du flot F, les $T_\gamma^{\#}$ sont leurs périodes et les λ_γ sont les exposants d'instabilité de ces orbites.

On peut comparer ([2]) (8) avec l'expansion asymptotique également heuristique de (4) en utilisant le produit eulérien de ζ qui donne, en utilisant $-\log(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$,

$$(9) \qquad N_{\text{osc}}(E) \simeq -\frac{1}{\pi} \sum_{p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m/2}} \sin\left((\log p)\; m\; E\right).$$

En comparant (8) et (9) on obtient une information précieuse sur le “flot de Riemann” hypothétique de M. Berry. Les orbites périodiques γ devraient être étiquetées par les nombres premiers p, les périodes devraient être les $\log p$ et les exposants d'instabilité λ_p. Aussi, pour éviter la duplication des orbites, le flot ne devrait pas être “symétrique par inversion du temps”, i.e. non isomorphe au temps inversé :

$$(10) \qquad (X, F_{-t}).$$

Il y a cependant un décalage fondamental entre (8) et (9) qui est le signe global $-$ au début de (9) et aucun ajustement des phases de Maslov n'en rend compte.

Exactement le même signe $-$ apparaît dans la formule explicite de Riemann-Weil,

$$(11) \qquad \sum_{L(\chi,\rho)=0} \widehat{h}(\chi,\rho) - \widehat{h}(0) - \widehat{h}(1) = -\sum_{v} \int_{k_v^*}' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u,$$

où h est une fonction test sur le groupe des classes d'idèles C_k, $\widehat{h}$ est sa transformée de Fourier,

$$(12) \qquad \widehat{h}(x,z) = \int_{C_k} h(u)\chi(u)|u|^z d^*u,$$

et les valeurs finies $\int'$ sont normalisées comme il convient. Si on utilise le dictionnaire ci-dessus quand $\mathrm{char}(k) \neq 0$, l'origine géométrique de ce signe $-$ devient claire, la formule (11) est la formule de Lefschetz,

$$(13) \qquad \#\text{ de points fixes de } \varphi = \text{Trace } \varphi/H^0 - \text{Trace } \varphi/H^1 + \text{Trace } \varphi/H^2$$

dans laquelle l'espace $H^1_{\text{et}}(\overline{\sum}, \mathbb{Q}_\ell)$ qui fournit la réalisation spectrale des zéros apparaît avec un signe $-$. Cela indique que la réalisation spectrale des zéros de zeta devraient être de nature cohomologique ou être plus spécifique, de telle façon que l'espace de

Polya-Hilbert apparaisse comme le dernier terme d'une séquence exacte d'espaces de Hilbert,

$$0 \to \mathcal{H}_0 \xrightarrow{T} \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H} \to 0. \tag{14}$$

L'exemple que nous avons à l'esprit pour (14) est le complexe assemblé d'Euler pour une surface de Riemann, où $\mathcal{H}_0$ est le *sous-espace de codimension* 2 des formes différentielles de degré pair orthogonal aux formes harmoniques, où $\mathcal{H}_1$ est l'espace des 1-formes et où $T = d + d^*$ est la somme de la cofrontière de de Rham avec son adjoint d^*.

Puisqu'on veut obtenir la réalisation spectrale non seulement pour les fonctions zeta mais également pour toutes les L-fonctions à Grössencharakter, on ne s'attend pas à avoir seulement une action de $\mathbb{Z}$ pour $\text{char}(k) > 0$ correspondant au Frobenius, ou du groupe $\mathbb{R}_+^*$ si $\text{char}(k) = 0$, mais à avoir l'équivariance de (14) selon une action naturelle du groupe des classes d'idèles $C_k = GL_1(A)/k^*$.

Soit $X = A/k^*$ l'espace des classes d'adèles. Notre idée de base est de prendre pour $\mathcal{H}_0$ une complétion convenable du sous-espace de codimension 2 des fonctions sur X telle que,

$$f(0) = 0, \int f \, dx = 0, \tag{15}$$

alors que $\mathcal{H}_1 = L^2(C_k)$ et T est la restriction de l'application provenant de l'inclusion $C_k \to X$, multipliée par $|a|^{1/2}$,

$$(Tf)(a) = |a|^{1/2} f(a). \tag{16}$$

L'action de C_k est alors évidente, pour $\mathcal{H}_0$

$$(U(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad \forall g \in C_k \tag{17}$$

en utilisant l'action II.15 de C_k sur X, et similairement la représentation régulière V pour $\mathcal{H}_1$.

Cette idée fonctionne bien mais il y a deux points subtils ; d'abord, puisque X est un espace quotient délicat les espaces de fonctions pour X sont obtenus naturellement en commençant avec les espaces de fonctions sur A et en se mettant en modes "transformations de jauge"

$$f \to f_q, \; f_q(x) = f(xq), \qquad \forall q \in k^*. \tag{18}$$

Ici, l'espace de fonctions naturel est l'espace de Bruhat-Schwarz $\mathcal{S}(A)$ et par (15) le sous-espace de codimension 2,

$$\mathcal{S}(A)_0 = \left\{ f \in \mathcal{S}(A) \; ; \; f(0) = 0, \; \int f \, dx = 0 \right\}. \tag{19}$$

L'application restriction T est alors donnée par,

$$T(f)(a) = |a|^{1/2} \sum_{q \in k^*} f(aq) \qquad \forall a \in C_k \tag{20}$$

La fonction correspondante $T(f)$ appartient à $\mathcal{S}(C_k)$ et toutes les fonctions $f - f_q$ sont dans le noyau de T.

Le second point subtil est que puisque C_k est abélien et non compact, sa représentation régulière ne contient aucune sous-représentation de dimension finie de telle façon que l'espace de Polya-Hilbert ne peut être une sous-représentation (ou un quotient unitaire) de V. Il y a un moyen facile de s'en sortir (que nous améliorerons sous peu) qui est de remplacer $L^2(C_k)$ par $L^2_\delta(C_k)$ en utilisant le poids polynomial $(\log^2|a|)^{\delta/2}$, i.e. la norme,

$$\|\xi\|_\delta^2 = \int_{C_k} |\xi(a)|^2 (1 + \log^2 |a|)^{\delta/2} d^*a. \tag{21}$$

Soit $\mathrm{char}(k) = 0$ tel que Mod $k = \mathbb{R}_+^*$ et $C_k = K \times \mathbb{R}_+^*$ où K est le groupe compact $C_{k,1} = \{a \in C_k \; ; \; |a| = 1\}$.

Théorème. *Soit $\delta > 1$, $\mathcal{H}$ le conoyau de T dans $L_\delta(C_k)$ et W la représentation quotient de C_k. Soit χ un caractère de K, $\widetilde{\chi} = \chi \times 1$ le caractère correspondant de C_k. Soit $\mathcal{H}_\chi = \{\xi \in \mathcal{H} \; ; \; W(g)\xi = \chi(g)\xi \quad \forall g \in K\}$ and $D_\chi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(W(e^\epsilon) - 1)$. Alors D_χ est un opérateur fermé non borné de spectre discret, $\mathrm{Sp} D_\chi \subset i\mathbb{R}$ est l'ensemble des parties imaginaires des zéros de la L-fonction à Grössencharakter $\widetilde{\chi}$ qui ont comme partie réelle $1/2$. De plus, la multiplicité spectrale de ρ est le plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$ dans $\{1, ..., \text{multiplicité comme zéro de } L\}$.*

Un résultat similaire est vérifié pour $\mathrm{char}(k) > 0$. Cela permet de calculer le caractère de la représentation W comme,

$$\mathrm{Trace}(W(h)) = \sum_{\substack{L\left(\chi, \frac{1}{2} + \rho\right) = 0 \\ \rho \in i\mathbb{R}/N^\perp}} \widehat{h}(\chi, \rho) \tag{22}$$

où $N = \mathrm{Mod}(k), W(h) = \int W(g) h(g) d^*g, \; h \in \mathcal{S}(C_k), \widehat{h}$ est défini dans (12) et où la multiplicité est comptée comme dans le théorème.

Ce résultat est seulement préliminaire à cause du paramètre non souhaité δ qui restreint artificiellement les multiplicités. La restriction Re $\rho = \frac{1}{2}$ fait intervenir le même $\frac{1}{2}$ que dans (16), et cela a une signification naturelle. En effet, la norme naturelle pour l'espace de Hilbert pour $L^2(X)$, notamment $\|\xi\|^2 = \int_X |\xi(x)|^2 dx$ est donné naturellement à l'étage au-dessus sur $\mathcal{S}(A)_0$ par :

$$\|f\|^2 = \int_D |\Sigma f(xq)|^2 |x| d^*x, \quad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0, \tag{23}$$

où D est un domaine fondamental pour k^* agissant sur les idèles. Pour un corps local, on a en effet l'égalité

$$dx = |x|\, d^*x, \tag{24}$$

(à normalisation près) entre la mesure de Haar additive et la multiplicative. Dans le cas global, on a,

$$dx = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon |x|^{1+\epsilon}\, d^*x, \tag{25}$$

et (23) ignore la constante divergente de normalisation qui ne joue aucun rôle dans le calcul des traces ou des opérateurs adjoints. L'exposant $\frac{1}{2}$ dans (16) transforme T en une isométrie,

$$T \;:\; L^2(X)_0 \to L^2(C_k). \tag{26}$$

L'analogue de l'opération de Hodge $*$ est donné sur $\mathcal{H}_0$ par la transformation de Fourier,

$$(Ff)(x) = \int_A f(y)\, \alpha(xy)\, dy \qquad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0 \tag{27}$$

qui, parce qu'on prend le quotient par (18), est indépendant du choix du caractère additif α de A tel que $\alpha \neq 1$ et $\alpha(q) = 1 \quad \forall q \in k$. Notons également que $F^2 = 1$ sur le quotient. Sur $\mathcal{H}_1$ le Hodge $*$ est donné par,

$$(*\xi)(a) = \xi(a^{-1}) \qquad \forall a \in C_k. \tag{28}$$

La formule de Poisson signifie exactement que T commute avec l'opération $*$. C'est juste une reformulation du travail de Tate et Iwasawa sur la preuve de l'équation fonctionnelle, mais nous allons voir maintenant que si nous suivons la preuve d'Atiyah-Bott ([1]) de la formule de Lefschetz nous obtenons effectivement un sens géométrique clair pour la distribution de Weil. On peut bien sûr comme dans [10] définir des produits intérieurs sur les espaces de fonctions sur C_k en utilisation la distribution de

Weil, mais à partir du moment où celui-ci est mis à la main et n'apparaît pas naturellement, on a très peu de chance de comprendre pourquoi il devrait être positif. Maintenant, soit φ un difféomorphisme d'une variété lisse $\sum$ et supposons que le graphe de φ est transverse à la diagonale, on peut alors facilement définir et calculer (cf. [1]) la trace en théorie des distributions de la permutation U des fonctions de $\sum$ associée à φ.

$$(U\xi)(x) = \xi(\varphi(x)) \qquad \forall x \in \textstyle\sum . \tag{29}$$

On a "Trace" $(U) = \int k(x,x)dx$, où $k(x,y)dy$ est le noyau de Schwarz associé à U, i.e. la distribution sur $\sum \times \sum$ telle que,

$$(U\xi)(x) = \int k(x,y)\, \xi(y)\, dy. \tag{30}$$

Maintenant près de la diagonale et en coordonnées locales, on a,

$$k(x,y) = \delta(y - \varphi(x)), \tag{31}$$

où δ est la distribution de Dirac. On obtient alors,

$$\text{“Trace”}(U) = \sum_{\varphi(x)=x} \frac{1}{|1-\varphi' x|}, \tag{32}$$

où φ' est le jacobien de φ et $|\ |$ désigne la valeur absolue du déterminant.

Avec davantage de travail ([11]) on obtient une formule similaire pour la trace distributionnelle de l'action d'un flot,

$$(U_t\xi)(x) = \xi(F_t(x)) \qquad \forall x \in \textstyle\sum,\ t \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Elle est donnée, sous une hypothèse adéquate de transversalité, par

$$\text{“Trace”}(U(h)) = \sum_\gamma \int_{I_\gamma} \frac{h(u)}{|1-(F_u)_*|} d^*u, \tag{34}$$

où $U(h) = \int h(t)U(t)dt$, h est une fonction test sur $\mathbb{R}$, les γ étiquettent les orbites périodiques du flot, incluant les points fixes, I_γ est le sous-groupe d'isotropie correspondant, et $(F_u)_*$ est l'application tangente à F_u sur l'espace transverse aux orbites, et finalement d^*u est l'unique mesure de Haar sur I_γ qui est de covolume 1 dans $(\mathbb{R}, dt)$.

Maintenant il est vraiment remarquable que quand on analyse les orbites périodiques de l'action de C_k sur X on trouve que non seulement elles se qualifient comme un flot de Riemann au sens ci-dessus, mais également que (34) devienne,

$$\text{“Trace”}(U(h)) = \sum_v \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1}}{|1-u|} d^*u. \tag{35}$$

Ainsi, les sous-groupes d'isotropie I_γ sont paramétrés par les places v de k et coïncident avec l'inclusion cocompacte naturelle $k_v^* \subset C_k$ qui relie le local au global dans la théorie du corps de classes. Le dénominateur $|1-u|$ est pour le module du corps local k_v et le u^{-1} dans $h(u^{-1})$ vient de la divergence entre les notations de (16) et (28). Il s'avère que si on normalise la mesure de Haar d^*u des groupes modulés comme dans Weil [27], par,

$$\int_{1\leq|u|\leq\Lambda} d^*u \sim \log\Lambda \qquad \text{pour } \Lambda \to \infty, \tag{36}$$

on obtient la même condition de covolume 1 que dans (34).

La condition de transversalité impose la condition $h(1) = 0$. La trace distributionnelle pour l'action de C_k sur C_k par translations s'évanouit sous la condition $h(1) = 0$.

En se rappelant que $\mathcal{H}_0$ est le sous-espace de codimension 2 de $L^2(X)$ déterminé par la condition (15) et en calculant les caractères des représentations 1-dimensionnelles correspondantes, on obtient,

$$h \to \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1). \tag{37}$$

Donc en rendant égales la somme alternée des traces sur $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ et la trace de la cohomologie, on devrait obtenir la signification géométrique de la formule explicite de Riemann-Weil (11) et en fait la signification géométrique de RH en utilisant (21), si cela pouvait être justifié pour une certaine valeur de δ.

La trace des matrices de permutation est positive et cela explique la positivité de Hadamard,

$$\text{“Trace”}(U(h)) \geq 0 \qquad \forall h, h(1) = 0, h(u) \geq 0 \qquad \forall u \in C \tag{38}$$

(qui ne doit pas être confondue avec la positivité de Weil).

Pour éliminer le paramètre artificiel δ et donner un sens rigoureux, comme espace de Hilbert, à la trace distributionnelle “trace”, on procède comme dans la formule de trace de Selberg [23] et on introduit un cutoff. Dans la terminologie physique, la divergence de la trace est à la fois infrarouge et ultraviolette comme on le voit dans le cas le plus simple de l'action de K^* sur $L^2(K)$ pour un corps local K. Dans ce cas local, on définit,

$$R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda, \quad \Lambda \in \mathbb{R}_+, \tag{39}$$

où P_Λ est la projection orthogonale sur le sous-espace,

$$\{\xi \in L^2(K)\,;\xi(x) = 0 \qquad \forall x, |x| > \Lambda\}, \tag{40}$$

alors que $\widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}, F$ est la transformée de Fourier.

On démontre ([9]) dans ce cas local l'analogue suivant de la formule de trace de Selberg,

$$\text{Trace}\,(R_\Lambda\, U(h)) = 2\; h(1)\, \log'(\Lambda) + \int' \frac{h(u^{-1}}{|1-u|}\, d^*u + o(1) \tag{41}$$

où $h \in \mathcal{S}(K^*)$ a un support compact, $2\log'(\Lambda) = \int_{\lambda\in K^*, |\lambda|\in[\Lambda^{-1},\Lambda]} d^*\lambda$, et la valeur principale $\int'$ est déterminée de manière unique en appariant avec l'unique distribution sur K qui est en accord avec $\frac{du}{|1-u|}$ pour $u \neq 1$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en 1.

Ainsi il s'avère que cette valeur principale est en accord avec celle de Weil pour le choix de F associé au caractère standard de K.

Soit k un corps global et soit d'abord S un ensemble fini de places de k contenant toutes les places infinies. À S correspond la version suivante localisée de l'action de C_k sur X. On remplace C_k par

$$C_S = \prod_{v\in S} k_v^*/O_S^*, \tag{42}$$

où $O_S^* \subset k^*$ est le groupe des S-unités. On remplace X par

$$X_S = \prod_{v\in S} k_v/O_S^*. \tag{43}$$

L'espace de Hilbert $L^2(X_S)$, sa transformée de Fourier F et la projection orthogonale $P_\Lambda, \widehat{P}_\Lambda = F P_\Lambda F^{-1}$ continuent à avoir du sens, avec

$$\text{Im}\; P_\Lambda = \{\xi \in L^2(X_S)\;;\; \xi(x) = 0 \quad \forall x, |x| > \Lambda\}. \tag{44}$$

Dès que S contient plus de 3 éléments, (e.g. $\{2, 3, \infty\}$ pour $k = \mathbb{Q}$) l'espace X_S est un espace quotient extrêmement délicat. Il est donc assez remarquable que la *formule* *de trace* soit vérifiée,

Théorème. *Pour tout $h \in \mathcal{S}_C(C_S)$ on a, avec $R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$,*

$$\operatorname{Trace}(R_\Lambda\, U(h)) = 2\log'(\Lambda) h(1) + \sum_{v\in S} \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1}}{|1-u|} d^*u + o(1)$$

où les notations sont comme ci-dessus et les valeurs finies $\int'$ dépendent du caractère additif de Πk_v définissant la transformée de Fourier F. Quand $\operatorname{char}(k) = 0$ les projecteurs $P_\Lambda, \widehat{P}_\Lambda$ commutent sur L^2_χ pour Λ suffisamment grand de telle façon qu'on peut remplacer R_Λ par la projection orthogonale Q_Λ sur $\operatorname{Im} P_\Lambda \cap \operatorname{Im} \widehat{P}_\Lambda$. La situation pour $\operatorname{char}(k) = 0$ est plus délicate puisque P_Λ and $\widehat{P}_\Lambda$ ne commutent pas (pour Λ grand) même dans le cas local archimédien. Mais heureusement [21] ces opérateurs commutent avec un opérateur différentiel particulier du second ordre, dont les valeurs propres, les fonctions sphéroïdales prolates, fournissent la bonne filtration Q_Λ. Cela permet de remplacer R_Λ par Q_Λ et d'établir la formule de trace globale

$$\operatorname{Trace}(Q_\Lambda\, U(h)) = 2\log'(\Lambda) h(1) + \sum_{v} \int_{k_v^*} \frac{h(u^{-1}}{|1-u|} d^*u + o(1). \tag{45}$$

Notre résultat final est que la validité de la formule de trace implique (en fait est équivalente à) la positivité de la distribution de Weil, i.e. *RH* pour toutes les *L*-fonctions avec Grössencharakter. De plus, la filtration par Q_Λ permet de définir la cohomologie adélique et de compléter le dictionnaire entre la théorie des fonctions et la géométrie de l'espace des classes d'adèles.

Théorie des fonctions	Géométrie
Zéros et pôles de Zeta	Valeurs propres de l'action de C_k sur la cohomologie adélique
Équation fonctionnelle	Opération $*$
Formule explicite	Formule de Lefschetz
RH	Formule de trace

Références

[1] M. F. Atiyah and R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I, *Ann. of Math.*, **86** (1967), 374-407.

[2] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, *Lecture Notes in Physics*, **263**, Springer (1986).

[3] J.-B. Bost and A. Connes, Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, *Selecta Mathematica, New Series* **1**, n. 3 (1995), 411-457.

[4] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press (1994).

[5] A. Connes, Classification of injective factors, *Ann. of Math.*, **104**, n. 2 (1976), 73-115.

[6] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **6**, n. 4 (1973), 133-252.

[7] A. Connes, Formule de trace en Géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* (1996).

[8] A. Connes and M. Takesaki, The flow of weights on factors of type III, *Tohoku Math. J.*, **29** (1977), 473-575.

[9] A. Connes, Trace formula in Noncommutative Geometry and the zeros of the Riemann zeta function. To appear in *Selecta Mathematica*.

[10] D. Goldfeld, A spectral interpretation of Weil's explicit formula, *Lecture Notes in Math.*, **1593**, Springer Verlag (1994), 135-152.

[11] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.*, **44**, n. 3 (1977), 485-517.

[12] U. Haagerup, Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III, *Acta Math.*, **158** (1987), 95-148.

[13] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, *Invent. Math.*, **101** (1990), 697-703.

[14] B. Julia, Statistical theory of numbers, *Number Theory and Physics, Springer Proceedings in Physics*, **47** (1990).

[15] W. Krieger, On ergodic flows and the isomorphism of factors, *Math. Ann.*, **223** (1976), 19-70.

[16] N. Katz and P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues and Monodromy, (1996), Book, to appear.

[17] N. Katz and P. Sarnak, Zeros of zeta functions, their spacings and spectral nature, (1997), to appear.

[18] H. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic Number Theory*, AMS (1973).

[19] M. L. Mehta, Random matrices, Academic Press, (1991).

[20] A. Odlyzko, On the distribution of spacings between zeros of zeta functions, *Math. Comp.* **48** (1987), 273-308.

[21] D. Slepian and H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961).

[22] B. Riemann, Mathematical Werke, Dover, New York (1953).

[23] A. Selberg, *Collected papers*, Springer (1989).

[24] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lecture Notes in Math. bf 128, Springer (1989).

[25] M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, *Acta Math.* **131** (1973), 249-310.

[26] A. Weil, Basic Number Theory, Springer, New York (1974).

[27] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres, *Izv. Mat. Nauk.*, (Ser. Mat.) **36**, 3-18.

[28] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, *J. Math. Soc. Japan*, **3**, (1951).

[29] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemannian zeta function, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata, Bombay (1979), 275-301.

Sur les équations du $3^{\text{ème}}$ et du $4^{\text{ème}}$ degré : de Galois et Lagrange au miracle de Morley

Alain Connes et Jacques Dixmier

Résumé. Le Théorème de Morley en géométrie plane, associe à un triangle 18 triangles équilatères, construits à partir des intersections des trissectrices des angles. Nous généralisons ce théorème en un résultat sur les équations algébriques du troisième et du quatrième degré sur un corps K. Nous associons à un choix cohérent, parmi les 18 possibles, de racines cubiques des birapports des racines, une configuration *équiharmonique* de quatre éléments de la clôture algébrique de K.

L'espoir de trouver du nouveau sur les équations du troisième et du quatrième degré évoque irrésistiblement des chercheurs d'or des siècles passés égarés aujourd'hui à la quête de précieuses pépites dans les rues de San Francisco. Anachronisme sans doute, tant l'article de Lagrange de 1770 [4] semble mettre un point d'orgue à ce sujet.

Notre présentation, qui peut être considérée comme une initiation à la théorie de Galois dans ces cas simples, consiste à donner explicitement les transformations des racines qui proviennent, pour le degré trois de l'action transitive du sous-groupe distingué $A_3 \subset S_3$ et pour le degré quatre du sous-groupe distingué d'ordre 4, $M_4 \subset A_4 \subset S_4$. Cela révèle un lien étroit entre les formules obtenues et les invariants des formes binaires.

Tout cela prépare notre résultat principal qui est une généralisation, dans le cadre des équations du $3^{\text{ème}}$ et du $4^{\text{ème}}$ degré, du Théorème de Morley sur les 18 triangles équilatères associés à un triangle. Cette généralisation (Théorème S) associe à un choix cohérent, parmi les 18 possibles, de racines cubiques des birapports des racines, une configuration *équiharmonique*. Il est obtenu en utilisant la preuve algébrique [2] du théorème de Morley.

1. Introduction

Dans tout cet article k désigne un corps commutatif de caractéristique nulle, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et K, $k \subset K \subset \overline{k}$ une extension finie de k. Étant donnés trois éléments distincts $a, b, c \in K$ il existe une transformation affine $g \in A(K)$ unique telle que $g(b) = 1,\ g(c) = 0$. Elle transforme

Enseignement mathématique (2) 70, 2024, p. 283-306.
Reçu le 29 juin 2023.
Alain Connes, Collège de France, 3 rue d'Ulm, 75231 Paris, France ;
e-mail : alain@connes.org.
Jacques Dixmier, 11 bis rue du Val de Grâce, 75005 Paris, France.

(a,b,c) en $(\omega,1,0)$ où $\omega = \dfrac{a-c}{b-c}$. Aux six permutations de (a,b,c) correspondent les éléments de l'orbite de ω,

$$\left\{\omega, 1-\omega, \frac{1}{\omega}, \frac{\omega-1}{\omega}, \frac{1}{1-\omega}, \frac{\omega}{\omega-1}\right\}$$

sous l'action du groupe symétrique S_3 sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1(K)$. Les orbites de S_3 dans $\mathbb{P}^1(K)$ sont de cardinal 6, sauf les orbites

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}, \quad \{0,1,\infty\}, \quad \{-j,-j^2\},$$

où $1+j+j^2=0$. Si la fonction $V(a,b,c) = \dfrac{a-c}{b-c}$ prend six valeurs différentes quand on permute (a,b,c), il existe une transformation affine g, uniquement déterminée par le sous-ensemble $\{a,b,c\} \subset K$, et telle que l'on ait

$$g(a)+g(b)+g(c)=0, \quad \frac{1}{3}(g(a)^{-1}+g(b)^{-1}+g(c)^{-1})=1 \tag{1}$$

Nous commencerons par donner, dans la Section 2, Théorème A, les fractions rationnelles $R_j(\omega)$ qui expriment $g(a), g(b), g(c)$ en fonction de ω, et que l'on obtient en appliquant la méthode de Lagrange (que nous rappelons brièvement au début de la section). Nous montrons dans cette Section 2 comment marche la théorie de Galois pour l'équation du troisième degré quand on utilise la fonction $V(a,b,c)$ pour briser la symétrie entre les racines et que l'on suit sa méthode. C'est l'adjonction d'une racine carrée du discriminant Δ qui réduit le groupe de Galois au groupe alterné A_3 et nous donnons explicitement l'action de celui-ci sur les racines α,β,γ de l'équation $X^3+pX+q=0$ par la formule

$$\beta,\gamma = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{-4p^2+9q\alpha-6p\alpha^2}{2\sqrt{\Delta}} \tag{2}$$

Pour l'équation du quatrième degré nous avons obtenu un analogue de la formule (2) qui permet de passer d'une racine à une autre. Le groupe symétrique S_4 a ceci de particulier que le sous-groupe alterné $A_4 \subset S_4$ n'est pas un groupe simple. Il contient un sous-groupe distingué M_4 d'ordre 4, familièrement appelé le "groupe du matelas". C'est l'action transitive de ce sous-groupe sur les racines $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ de l'équation

$$P(X) = X^4+pX^2+qX+r=0$$

que nous calculons. Le Corollaire B du Théorème A donne la solution. Ce corollaire montre que si les six birapports de quatre éléments $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ d'un corps K sont distincts, il existe une unique transformation projective h de $\mathbb{P}^1(K)$ telle que $h(\alpha)=\infty$ et que $(h(\beta),h(\gamma),h(\delta))$ vérifient les conditions (1). Il donne de plus les fractions rationnelles $R_i(\omega)$ pour $(h(\beta),h(\gamma),h(\delta))$ en fonction du birapport ω de $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Or on vérifie que, α étant fixé, et en posant $\rho = P'(\alpha) = 4\alpha^3+2\alpha p+q$, $\sigma = \frac{1}{2}P''(\alpha) = 6\alpha^2+p$, la transformation projective

$$x \mapsto \frac{1}{x-\alpha} + \frac{\sigma}{3\rho}$$

a les propriétés requises pour h à une homothétie près. En comparant les formules obtenues pour $(h(\beta), h(\gamma), h(\delta))$ on obtient les transformations suivantes de α vers les trois autres racines

$$T_j(\alpha) := \alpha - P'(\alpha)\left(\frac{p}{3} + 12\frac{J}{I}R_j(\omega) + 2\alpha^2\right)^{-1} \tag{3}$$

où I et J sont des fonctions polynomiales explicites de p, q, r dont nous donnons l'interprétation géométrique connue en termes des invariants des formes binaires de degré quatre (voir Section 3.1). En fait, nous montrons comment arriver directement aux formules (3) donnant l'action de M_4 en utilisant un Lemme E classique qui donne les résolvantes $\alpha\beta + \gamma\delta, \alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma$ en fonction du birapport ω.

Nous traitons en détail dans la Section 3.3 le cas particulier harmonique : quand les birapports des racines forment l'orbite $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$. Nous donnons les formules pour l'action du groupe de Galois de l'extension galoisienne $K = k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans les trois cas possibles et montrons (Théorème I) que si K est de degré 2 sur le corps $k(\sqrt{\Delta})$, le groupe de Galois de K sur k est $\mathbb{Z}/4$.

Dans la Section 4.1, nous donnons l'interprétation géométrique, dans le cas du corps des complexes, d'une résolvante qui apparaît dans l'article [4] de Lagrange de 1770. Cette interprétation est en termes de l'intersection de quatre cercles circonscrits à des triangles dont deux sommets sont des racines et le troisième une intersection de diagonales du quadrilatère dont les sommets sont les racines.

Enfin nous terminons cet article par une généralisation du théorème découvert par Frank Morley en 1898, qui affirme que les intersections des trissectrices des angles d'un triangle forment un triangle équilatéral. Notre généralisation (Théorème S) s'énonce dans le cadre ci-dessus des équations algébriques de degré 3 et 4. On suppose que K possède une racine cubique $j \in K, j \neq 1$, de l'unité, et un automorphisme σ de K sur k tel que $\sigma(j) = j^2, \sigma^2 = \mathrm{Id}$. Nous introduisons (Définition R) la notion de “racine cubique des birapports” de quatre éléments $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de K. Cette extraction de racine cubique admet en général 18 solutions. Elles correspondent aux 18 triangles de Morley. Nous construisons une configuration équiharmonique avec les points fixes de produits de deux transformations projectives fixant deux racines et de valeur propre (plus précisément rapport de valeurs propres) donnée par les rapports $u/\sigma(u)$ des racines cubiques u des birapports.

2. L'équation du troisième degré

Le point de départ des travaux d'Abel et de Galois sur la théorie des équations est un lemme, implicite chez Lagrange, et que Galois énonce sous la forme suivante [1] :

(1) Etant donnée une équation quelconque, qui n'a pas de racines égales, dont les racines sont $a, b, c, ...$, on peut toujours former une fonction V des racines, telle qu'aucune des valeurs que l'on obtient en permutant dans cette fonction les racines de toutes manières ne soient égales.

(2) La fonction V étant choisie comme il est indiqué dans l'article précédent, elle jouira de cette propriété que toutes les racines de l'équation proposée s'exprimeront rationnellement en fonction de V.

L'équation en V, i.e., $Q(V) = 0$, où le polynôme Q,

$$Q(X) = \prod_\sigma (X - V(\sigma(a), \sigma(b), ..., \sigma(z)))$$

s'exprime en fonction des coefficients de l'équation proposée, a la propriété particulière suivante : si x est l'une quelconque de ses racines, toute autre racine s'écrit $R(x)$ où R est une fonction rationnelle à coefficients dans le corps k des coefficients de l'équation. En particulier, il suffit d'adjoindre formellement une racine de cette équation, en travaillant avec l'algèbre des polynômes modulo les multiples de Q, pour adjoindre en fait toutes les racines. En général, Q n'est pas irréductible et Galois note que, de même, les racines de l'équation $Q_1(V) = 0$ obtenue à partir d'un facteur irréductible de l'équation en V, sont fonctions rationnelles de l'une quelconque d'entre elles et que (en travaillant modulo Q_1) ces fonctions forment un groupe pour la composition. Ce qui est loin d'être évident à ce stade est que ce groupe est en fait indépendant des choix effectués, en particulier celui de la fonction auxiliaire $V(a, b, ...)$ et ne dépend donc que de l'équation proposée. Cette indépendance est un point crucial de la théorie de Galois.

Pour l'équation du troisième degré, Lagrange utilise la résolvante

$$V(a, b, c) = a + jb + j^2c$$

où j est racine cubique de l'unité et montre que l'équation de degré 6 ayant pour racines les 6 valeurs de V obtenues en permutant dans cette fonction les racines de toutes manières, ne fait intervenir que X^3 et X^6 et donc se ramène au degré 2. Comme on le sait, il est indispensable d'utiliser les nombres complexes pour résoudre par radicaux une équation de degré 3 dont les trois racines sont réelles, et ce cas là est en effet à l'origine de l'utilisation des nombres complexes.

Soit

$$\Omega := \frac{4}{27} \frac{(1 - \omega + \omega^2)^3}{\omega^2(1-\omega)^2} \tag{4}$$

Alors Ω est un invariant de l'orbite de l'action de S_3

$$\left\{\omega, 1 - \omega, \frac{1}{\omega}, \frac{\omega - 1}{\omega}, \frac{1}{1 - \omega}, \frac{\omega}{\omega - 1}\right\} \tag{5}$$

Etant donnée une équation du $3^{\text{ème}}$ degré, irréductible à coefficients dans k, dont les racines ne forment pas les sommets d'un triangle équilatère, on peut, par une transformation affine à coefficients dans k, mettre l'équation sous la forme

$$X^3 - 3sX + s = 0 \tag{6}$$

On a en effet $p \neq 0$ une fois l'équation mise sous la forme $x^3 + px + q = 0$ et il suffit de multiplier les racines par $-\frac{1}{3}\frac{p}{q} \neq 0$ pour que le barycentre de leurs inverses soit égal à 1, i.e., que l'équation soit de la forme indiquée.

Quels que soient les éléments $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K \cup \{\infty\}$ nous noterons leur birapport

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle := \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} / \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}.$$

Nous montrons, pour l'équation sous la forme (6), qu'il existe une fonction rationnelle explicite $V(a, b, c)$ (7), des racines qui donne une forme universelle simple de l'équation $Q(V) = 0$ des fonctions rationnelles $R_j(V)$ et des transformations rationnelles de l'équation $Q(V) = 0$ en les reliant directement à l'action ci-dessus de S_3 sur l'espace projectif. On a le

Théorème A. *Considérons l'équation (6).*

(i) L'équation $Q(V) = 0$ associée à la fonction rationnelle des trois racines de (6)

$$V(a, b, c) = \frac{a - c}{b - c} = \langle a, b, c, \infty \rangle \tag{7}$$

est la suivante, où $\Omega = \dfrac{4s}{4s - 1}$

$$Q(V) = (1 - V + V^2)^3 - \frac{27}{4} \Omega V^2 (1 - V)^2 \tag{8}$$

(ii) *Les trois racines de l'équation (6) sont les fonctions rationnelles suivantes de V,*

$$R_1(V) = -\frac{V^2 - V + 1}{(V - 2)(V + 1)}$$

$$R_2(V) = \frac{V^2 - V + 1}{2(V - \frac{1}{2})(V + 1)} \qquad R_3(V) = \frac{V^2 - V + 1}{2(V - 2)(V - \frac{1}{2})}$$

(iii) *Les transformations rationnelles des racines de (8) de la forme*

$$V \mapsto V(R_i(V), R_j(V), R_k(V)), \tag{9}$$

où (i, j, k) est une permutation de $(1, 2, 3)$, sont données par l'action (5) du groupe symétrique S_3 dans l'espace projectif d'une clôture[1] *algébrique de k.*

Les six valeurs de V obtenues en permutant (a, b, c) en $(p(a), p(b), p(c))$ sont les six valeurs des birapports $\langle p(a), p(b), p(c), \infty \rangle$ et forment une orbite de l'action de S_3 sur $\mathbb{P}^1(K)$ dont l'invariant est donné par Ω. On vérifie ensuite que la somme des $R_j(V)$ est égale à 0 et que la somme des $1/R_j(V)$ est égale à 3 alors que le produit vaut

$$\prod R_j(V) = -\frac{(V^2 - V + 1)^3}{(1 - 2V)^2 (V - 2)^2 (V + 1)^2}$$

ce qui donne

$$\frac{4s}{4s - 1} = \frac{4(V^2 - V + 1)^3}{27(V - 1)^2 V^2} = \Omega$$

[1] Note DCV : extension ?

On vérifie également que pour $V = \dfrac{a-c}{b-c}$, on a $R_1(V) = a$ en utilisant les relations $a+b+c=0$ et $1/a+1/b+1/c=3$. Les transformations (9) sont celles du birapport $\langle a,b,c,\infty\rangle$ quand on permute (a,b,c), i.e., plus précisément

$$\begin{pmatrix} \{1,2,3\} & \omega \\ \{1,3,2\} & 1-\omega \\ \{2,1,3\} & \dfrac{1}{\omega} \\ \{2,3,1\} & \dfrac{\omega-1}{\omega} \\ \{3,1,2\} & \dfrac{1}{1-\omega} \\ \{3,2,1\} & \dfrac{\omega}{\omega-1} \end{pmatrix}$$

Comme la fonction $V(a,b,c)$ est invariante par le groupe affine, on note que c'est aussi le cas pour les fonctions $R_j(V(a,b,c))$ qui ont donc comme propriété de normaliser le triplet (a,b,c) de telle sorte que sa somme soit nulle et que le barycentre des inverses soit égal à 1. Cette normalisation du triplet (a,b,c) est effectuée par une unique transformation affine et de plus celle-ci est à coefficients dans le corps des fonctions symétriques de (a,b,c).

Corollaire B. *Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in K$ quatre éléments dont les birapports prennent six valeurs distinctes. Il existe une unique transformation projective $g \in \mathrm{PGL}_2(K)$ telle que $g(\delta)=\infty$ et que*

$$g(\alpha)+g(\beta)+g(\gamma)=0, \quad \frac{1}{3}(g(\alpha)^{-1}+g(\beta)^{-1}+g(\gamma)^{-1})=1 \tag{10}$$

De plus si ω désigne l'un des birapports de $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, alors $\{g(\alpha),g(\beta),g(\gamma)\} \subset K$ est égal au sous-ensemble $\{R_j(\omega) | 1 \le j \le 3\} \subset K$.

L'existence résulte du Théorème A. Pour montrer l'unicité, on se ramène au cas $\delta=\infty$ et l'on voit que l'identité est la seule transformation affine qui préserve les conditions (10). La deuxième partie résulte du Théorème A.

Nous montrons dans la Section 3 comment utiliser ce corollaire pour passer d'une racine à l'autre pour l'équation générale du quatrième degré.

Pour obtenir le groupe de Galois de l'équation (6), il faut décomposer le polynôme $Q(V)$ de (8) en facteurs irréductibles. On obtient facilement en utilisant l'action du sous-groupe $A_3 \subset S_3$ la factorisation

$$\begin{aligned} Q(X) &= (X^3 - tX^2 + (t-3)X + 1)(X^3 + (t-3)X^2 - tX + 1) \\ &= Q_1(X)Q_2(X) \end{aligned}$$

à condition que $t = \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{\Omega - 1})$. L'adjonction de t correspond à celle d'une racine carrée du discriminant $\Delta = 27s^2(4s-1)$ de (6).

Par construction le groupe A_3 agit sur les racines de l'équation $Q_1(X) = 0$ par la transformation d'ordre 3, $\omega \mapsto \dfrac{1}{1-\omega}$; les racines donnent les trois branches $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ de la fonction inverse de la fonction suivante

$$\Omega_1 := \frac{1 - 3 + \omega^3}{\omega(\omega-1)} \tag{11}$$

Remarque C. Si le corps de base est contenu dans $\mathbb{R}$, les trois branches sont, pour $t \in \mathbb{R}$, réelles et définies sans ambiguité par les conditions $\alpha(t) > 1 > \beta(t) > 0 > \gamma(t)$. Alors α, β, γ donnent des isomorphismes analytiques croissants

$$\alpha : \mathbb{R} \to (1, \infty), \quad \beta : \mathbb{R} \to (0, 1), \quad \gamma : \mathbb{R} \to (-\infty, 0).$$

On a

$$\beta(t) = 1 - \frac{1}{\alpha(t)}, \quad \gamma(t) = \frac{1}{1 - \alpha(t)}, \quad \beta(t) + \beta(3-t) = 1, \quad \gamma(3-t) + \alpha(t) = 1,$$

de plus $\alpha(t) = t - 1 + o(1)$ quand $t \to +\infty$, et $\gamma(t) = t - 1 + o(1)$ quand $t \to -\infty$.

On vérifie que, comme le groupe de Galois agit de manière rationnelle sur les racines de l'équation $Q_1(X) = 0$, le discriminant Δ de Q_1 est un carré. On a $\Delta = (t^2 - 3t + 9)^2$. Plus généralement la Proposition D donne la matrice de l'action du groupe de Galois dans la base $(1, X, X^2)$ en fonction de la racine carrée du discriminant, ce qui montre en particulier que si l'action du groupe de Galois est rationnelle, le discriminant est un carré. Plus précisément, soient $p, q \in k$ et $P(X) := X^3 + pX + q \in k[X]$. Soient α, β, γ, les racines de $P(X) = 0$ et Δ le discriminant de P :

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2.$$

On suppose une fois pour toutes $\Delta \neq 0$, les racines sont donc distinctes.

Proposition D. *Avec les notations ci-dessus, on a les égalités*

$$\beta, \gamma = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{-4p^2 + 9q\alpha - 6p\alpha^2}{2\sqrt{\Delta}}. \tag{12}$$

La matrice de l'automorphisme de Galois d'ordre 3 de $k(\sqrt{\Delta})[x]/P$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{2p^2}{\sqrt{\Delta}} & -\dfrac{9q}{2\sqrt{\Delta}} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{3p}{\sqrt{\Delta}} \\ \dfrac{3pq}{\sqrt{\Delta}} - p & \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{9q}{2\sqrt{\Delta}} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On arrive facilement à ce résultat de la façon suivante : on a

$$\sqrt{\Delta} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) = (\beta - \gamma)(\alpha^2 - \alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma) \tag{13}$$

et en utilisant $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma = p$, (13) donne

$$\sqrt{\Delta} = (\beta - \gamma)(3\alpha^2 + p)$$

d'où

$$\alpha + 2\beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{3\alpha^2 + p}, \tag{14}$$

qui donne β en fonction rationnelle de $\alpha, p, q, \sqrt{\Delta}$ et se réécrit sous la forme (12) en utilisant $P(\alpha) = 0$ pour inverser $(3\alpha^2 + p)$ (i.e., $(3x^2 + p)$ dans $k(\sqrt{\Delta})[x]/P$) ce qui donne

$$\frac{1}{3\alpha^2 + p} = -\frac{1}{\Delta}(6p\alpha^2 - 9q\alpha + 4p^2), \tag{15}$$

(12) résulte alors de (14) et (15).

La matrice de l'automorphisme d'ordre 3 de $k(\sqrt{\Delta})[x]/P$ s'en déduit.

3. L'équation du quatrième degré

Il s'agit ci-dessous d'expliciter, comme dans la Proposition D dans le cas du $3^{\text{ème}}$ degré, l'action du groupe M_4 sur les racines d'une équation du quatrième degré, après adjonction du birapport des racines, laquelle réduit le groupe de Galois au groupe M_4. Cette réduction a lieu sauf quand les birapports des racines forment l'orbite $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ (cas harmonique) ou $\{-j, -j^2\}$ (cas équiharmonique) et nous traitons séparément ces deux cas.

3.1. Rappels, formes binaires de degré 4. Cette section contient des rappels concernant les formes binaires, voir [3]. Considérons les formes binaires de degré 4 à coefficients dans k :

$$\phi(X, Y) = aX^4 + 4bX^3Y + 6cX^2Y^2 + 4dXY^3 + eY^4.$$

Elles constituent un k-espace vectoriel W de dimension 5. Le groupe $G = GL(2, k)$ opère naturellement sur $kX \oplus kY$ et donc dans W. L'annulation de ϕ définit un faisceau de 4 droites à condition de passer à la clôture algébrique $\overline{k}$ de k.

Considérons maintenant a, b, c, d, e comme des indéterminées. Dans $k[a, b, c, d, e]$ le groupe G agit naturellement. La sous-algèbre des invariants sous $SL(2, k)$ est engendrée par les polynômes I et J suivants, qui sont algébriquement indépendants

$$I = ae - 4bd + 3c^2, \quad J = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

Considérons les G-orbites dans $W\backslash\{0\}$. Il y a 3 orbites exceptionnelles C_4, C_5, C_6 qui sont des cônes de dimensions 3, 3, 2. Ignorons-les désormais et supposons provisoirement $k = \overline{k}$. Les autres orbites sont des cônes de dimension quatre. Si on leur adjoint l'origine, ils sont fermés sauf un seul, C_3 (dont le bord est $C_4 \cup C_5 \cup C_6$). Il y a trois cônes remarquables :

- C_1 correspondant aux faisceaux harmoniques de quatre droites ;
- C_2 correspondant aux faisceaux équiharmoniques de quatre droites ;
- C_3 (déjà introduit) correspondant aux faisceaux qui ont une droite double.

La valeur de J^2/I^3 repère bijectivement les orbites de dimension quatre. Cette valeur est 0 sur C_1, ∞ sur C_2, $\frac{1}{27}$ sur C_3.

Le discriminant de ϕ est le discriminant, multiplié par a^6 du polynôme $\frac{1}{a}P(X)$ où

$$P(X) := aX^4 + 4bX^3 + 6cX^2 + 4dX + e. \tag{16}$$

Il vaut $\Delta = 2^8(I^3 - 27J^2)$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \overline{k}$ les inverses des pentes des quatre droites du faisceau. Ainsi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont aussi les racines du polynôme $P(X)$ de (16), avec une racine égale à ∞ si $a = 0$ (dans ce cas la droite $Y = 0$ fait partie du faisceau).

Les invariants I et J s'expriment en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: en posant

$$u = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta), \quad v = (\alpha - \gamma)(\delta - \beta), \quad w = (\alpha - \delta)(\beta - \gamma),$$

on a alors ([3]),

$$I = \frac{a^2}{24}(u^2 + v^2 + w^2), \qquad J = \frac{a^3}{432}(u - v)(v - w)(w - u)$$

Posons $K = k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \subset \overline{k}$. Pour a, b, c, d, e génériques, K est une extension galoisienne de k de degré 24 de groupe de Galois S_4. Soit $K_1, k \subset K_1 \subset K$ le sous-corps des éléments de K invariants par A_4. On a $K_1 = k(\sqrt{\Delta})$. Définissons K_2 où $k \subset K_1 \subset K_2 \subset K$, comme le sous-corps des éléments de K invariants par M_4. C'est une extension galoisienne de degré 3 de K_1 et K est une extension galoisienne de K_2 de degré 4 et de groupe de Galois M_4.

Soient $\omega_j, 1 \leq j \leq 6$ les birapports de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ils forment une orbite de l'action de S_3 sur $\mathbb{P}^1$ et soit Ω défini en (4), on a alors

$$\Omega = \frac{I^3}{I^3 - 27J^2} = 2^8 \frac{I^3}{\Delta}.$$

On a donc $K_1 = k(\sqrt{\Delta}) = k(\sqrt{3(\Omega - 1)}) = k(\Omega_1)$ avec Ω_1 défini en (11).

Lemme E. *Soient $\omega = \langle\alpha,\beta,\gamma,\delta\rangle, R_j(V)$ les trois fonctions du Théorème A. On a*

$$\begin{aligned}\alpha\delta+\beta\gamma &= \frac{2c}{a}+12\frac{J}{aI}R_1(\omega),\\ \alpha\gamma+\beta\delta &= \frac{2c}{a}+12\frac{J}{aI}R_2(\omega),\\ \alpha\beta+\gamma\delta &= \frac{2c}{a}+12\frac{J}{aI}R_3(\omega).\end{aligned} \tag{17}$$

Il s'agit d'un simple calcul en remplaçant dans I et J les termes a, b, c, d, e comme fonctions symétriques de $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

3.2. Action du groupe M_4 sur les racines. Soient $p, q, r \in k$

$$P(X) := X^4 + pX^2 + qX + r \in k[X].$$

On va étudier l'équation

$$P(X) = 0. \tag{18}$$

Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ les racines de (18), et Δ le discriminant de P. On a

$$\Delta = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3.$$

On suppose une fois pour toutes $\Delta \neq 0$, les racines sont donc distinctes.

L'invariant I de la forme homogénéisée de P est

$$I = r + 3\left(\frac{p}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}(p^2+12r).$$

Donc la condition $p^2 + 12r = 0$ signifie que $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ est équiharmonique. Ce cas sera traité dans la Section 3.4. Pour l'instant, on suppose

$$p^2 + 12r \neq 0.$$

L'invariant J de la forme homogénéisée de P est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p/6 \\ 0 & p/6 & q/4 \\ p/6 & q/4 & r \end{pmatrix} = 2^{-4}3^{-3}(-2p^3 + 72pr - 27q^2).$$

La condition $-2p^3 + 72pr - 27q^2 = 0$ signifie que $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ est harmonique. Ce cas sera traité dans la section 3.3. Pour l'instant, on suppose $-2p^3 + 72pr - 27q^2 \neq 0$.

On suppose $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ génériques, $K = k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est une extension galoisienne de k de degré 24, de groupe de Galois S_4. Donc $k(\alpha)$ est loin d'être égal à K (même si l'on adjoint $\sqrt{\Delta}$).

Soient

$$\left\{\omega, 1-\omega, \frac{1}{\omega}, \frac{\omega-1}{\omega}, \frac{1}{1-\omega}, \frac{\omega}{\omega-1}\right\}$$

les birapports de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Le corps $K_2 = k(\omega)$ est une extension galoisienne de k formée des éléments de K invariants sous M_4. Le corps K_2 est de degré 6 sur k et K de degré 4 sur K_2. Donc $K_2(\alpha) = K, K = k(\omega, \alpha)$. Le but est d'exprimer explicitement β, γ, δ en fonction rationnelle de p, q, r, ω, α.

Proposition F. *L'action du groupe M_4 sur les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est donnée par*

$$T_j(x) := x - P'(x)\left(\frac{p}{3} + 12\frac{J}{I}R_j(\omega) + 2x^2\right)^{-1}.$$

Montrons que la transformation T_1 vérifie

$$T_1(\alpha) = \delta, \quad T_1(\delta) = \alpha, \quad T_1(\beta) = \gamma, \quad T_1(\gamma) = \beta.$$

On a d'après (17)

$$\alpha\delta + \beta\gamma = \frac{p}{3} + 12\frac{J}{I}R_1(\omega).$$

Vue la symétrie de cette égalité, il suffit de montrer, que $T_1(\alpha) = \delta$, i.e., que

$$\delta = \alpha - P'(\alpha)/(\alpha\delta + \beta\gamma + 2\alpha^2).$$

Cela résulte de $P'(\alpha) = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)$ et $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, d'où

$$(\alpha - \delta)(\alpha\delta + \beta\gamma + 2\alpha^2) = P'(\alpha)$$

3.3. Le cas harmonique. Dans cette section, on va analyser en grands détails le cas où $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ est harmonique, i.e., $J = 0$. Alors $\Delta = 2^8 I^3$; la condition générale $\Delta \neq 0$ implique $I \neq 0$, et $K_1 = k(\sqrt{\Delta}) = k(\sqrt{I})$.

On note G_1 le groupe de Galois de K sur K_1, G le groupe de Galois de K sur k. On suppose bien entendu que P est irréductible sur k.

3.3.1. On reprend d'abord rapidement le cas général, sans hypothèse sur J. D'après la formule de Taylor, $\beta - \alpha, \gamma - \alpha, \delta - \alpha, \alpha - \alpha = 0$ sont solutions de

$$X^4 + 4\alpha X^3 + \sigma X^2 + \rho X + P(\alpha) = 0$$

où $\rho = P'(\alpha), \sigma = \frac{1}{2}P''(\alpha)$. Donc $1/(\beta - \alpha), 1/(\gamma - \alpha), 1/(\delta - \alpha)$ sont solutions de

$$X^3 + \frac{\sigma}{\rho}X^2 + \frac{4\alpha}{\rho}X + \frac{1}{\rho} = 0.$$

On pose
$$\beta' = \frac{\sigma}{3\rho} + \frac{1}{\beta-\alpha}, \quad \gamma' = \frac{\sigma}{3\rho} + \frac{1}{\gamma-\alpha}, \quad \delta' = \frac{\sigma}{3\rho} + \frac{1}{\delta-\alpha}.$$
Alors, d'une part, les birapports de $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ sont égaux aux birapports de $\{\infty,\beta',\gamma',\delta'\}$ et d'autre part β',γ',δ' sont les solutions de

$$\left(X-\frac{\sigma}{3\rho}\right)^3 + \frac{\sigma}{\rho}\left(X-\frac{\sigma}{3\rho}\right)^2 + \frac{4\alpha}{\rho}\left(X-\frac{\sigma}{3\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = 0.$$

Après quelques calculs, cette équation s'écrit

$$X^3 - \frac{4I}{\rho^2}X - \frac{16J}{\rho^3} = 0.$$

On en déduit

$$\beta' + \gamma' + \delta' = 0 \tag{19}$$

$$\beta'\gamma' + \beta'\delta' + \gamma'\delta' = -\frac{4I}{\rho^2}, \tag{20}$$

$$\beta'\gamma'\delta' = \frac{16J}{\rho^3}. \tag{21}$$

3.3.2. Dans toute la fin de cette Section 3.3, on suppose à nouveau $J = 0$. D'après (19), (20), (21), on a, à une permutation près de β',γ',δ'

$$\beta' = 0, \quad \gamma' = \frac{2\sqrt{I}}{\rho}, \quad \delta' = -\frac{2\sqrt{I}}{\rho}, \tag{22}$$

d'où

$$\frac{1}{\beta-\alpha} = -\frac{\sigma}{3\rho}, \quad \frac{1}{\gamma-\alpha} = -\frac{\sigma-6\sqrt{I}}{3\rho}, \quad \frac{1}{\delta-\alpha} = -\frac{\sigma+6\sqrt{I}}{3\rho}. \tag{23}$$

On en déduit d'abord

$$\sigma \neq 0, \quad \sigma \neq 6\sqrt{I}, \quad \sigma \neq -6\sqrt{I},$$

puis les formules suivantes qui permettent de passer de α aux trois autres racines

$$\beta = \alpha - \frac{3\rho}{\sigma}, \quad \gamma = \alpha - \frac{3\rho}{\sigma-6\sqrt{I}}, \quad \delta = \alpha - \frac{3\rho}{\sigma+6\sqrt{I}}, \tag{24}$$

3.3.3. On rappelle que G_1 est le groupe de Galois de K sur $K_1 = k(\sqrt{\Delta}) = k(\sqrt{I})$ et G celui de K sur k.

Lemme G. *On suppose que $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ est harmonique.*

(i) On a $K = K_1(\alpha) = K_1(\beta) = K_1(\gamma) = K_1(\delta)$;

(ii) L'extension K de K_1 est galoisienne de degré 2 ou 4.

(iii) Si l'extension K de K_1 est de degré 4, son groupe de Galois G_1 est M_4 et il agit simplement transitivement sur $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Démonstration. (i) D'après (24) on a $\beta, \gamma, \delta \in K_1(\alpha)$. Donc $K = K_1(\alpha)$, ce qui entraîne (i), car les raisonnements ci-dessus, qui font jouer un rôle spécial à α, s'appliquent à β, γ, δ.

(ii) Le (i) montre que l'extension K de K_1, qui est galoisienne par construction, est engendrée par α. Son degré $d \leq 4$ est divisible par 2 car $k(\alpha) \subset K$ donc 4 divise $2d$.

(iii) Comme K_1 contient $\sqrt{\Delta}$, K est engendré par α, le groupe G_1 est contenu dans le groupe alterné A_4. Or celui-ci contient un seul sous-groupe d'ordre 4, à savoir M_4. Comme l'extension K de K_1 est galoisienne, G_1 agit transitivement sur $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et comme G_1 est d'ordre 4, cette action est simplement transitive. □

3.3.4. Notons $S \subset S_4$ le sous-groupe formé en adjoignant à $M_4 \subset S_4$ une transposition s, $s^2 = 1$. Ce sous-groupe est unique à conjugaison près et est un sous-groupe de Sylow associé au nombre premier $p = 2$.

Proposition H. *On suppose que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est harmonique.*

(i) Si le discriminant Δ n'est pas un carré dans k et si l'extension K de K_1 est de degré 4, le groupe de Galois G de K sur k est d'ordre 8, conjugué à S.

(ii) Si les conditions de (i) ne sont pas vérifiées, l'extension K de k est de degré 4, égale à $k(\alpha)$.

Démonstration. (i) L'extension K_1 est de degré 2 sur k et K de degré 4 sur K_1 donc l'extension galoisienne K de k est de degré 8. Le sous-groupe S est, à conjugaison près, le seul sous-groupe d'ordre 8 dans S_4 (par le théorème de Sylow).

(ii) Si les conditions de (i) ne sont pas vérifiées, on a soit $K_1 = k$ et le Lemme G montre que $K = k(\alpha)$, soit l'extension K de K_1 est de degré 2 et donc de degré 4 sur k de sorte que $K = k(\alpha)$. □

3.3.5. Exemples. Soit $P(x) = x^4 - \frac{15x^2}{2} + 5x + \frac{5}{16}$. On vérifie que l'on a $J = 0$, de plus l'extension associée est galoisienne de groupe de Galois $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On a

$$P(x) = \left(x^2 + \sqrt{5}x - \frac{1}{4}(2\sqrt{5} + 5)\right)\left(x^2 - \sqrt{5}x - \frac{1}{4}(5 - 2\sqrt{5})\right).$$

Le corps K est l'extension quadratique de $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ obtenue en adjoignant une racine carrée de $z = 10 + 2\sqrt{5}$. L'extension de l'automorphisme de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ au corps K admet pour carré l'automorphisme de Galois de K sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ qui change z en $-z$, ce qui montre que $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Le polynôme $P(x) = x^4 + 6x^2 + 1$ donne un exemple où $J = 0, \Delta = 2^{14}$ est un carré, et le groupe G est égal à M_4 (Lemme G (iii)).

3.3.6. Si $p = 0$, la condition $J = 0$ donne $q = 0$ et $P(X) = X^4 + r$. On a $I = r$.

Si k contient $i = \sqrt{-1}$, l'extension galoisienne K est égale à $k[X]/P(X)$, son groupe de Galois est le groupe $G = \mathbb{Z}/4$ engendré par $X \mapsto iX$. Le sous-corps $K_1 = k(\sqrt{I})$ est le sous-corps de $k[X]/P(X)$ formé des polynômes pairs. Le corps K est de dimension 2 sur K_1.

Si le polynôme X^2+1 est irréductible sur k, l'extension galoisienne K est égale à $k(i)[X]/P(X)$, elle est de degré 8 sur k. Le groupe de Galois G de K sur k s'identifie au groupe diédral $D = \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$, où l'action de $\mathbb{Z}/4$ sur $k(i)[X]/P(X)$ est donnée par $X \mapsto i^k X$ et celle du générateur de $\mathbb{Z}/2$ par la conjugaison $i \mapsto -i$ sur $k(i)$. Ce groupe D est isomorphe à $S = M_4 \rtimes \mathbb{Z}/2$. Le sous-corps $K_1 = k(\sqrt{I})$ est engendré par l'élément $iX^2 \in k(i)[X]/P(X)$. Le sous-groupe $G_1 \subset G$ qui fixe iX^2 est engendré par l'élément d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/4 \subset D$ et $1 \in \mathbb{Z}/2 \subset D$, il est isomorphe à M_4.

3.3.7. Supposons $p \neq 0$. On utilise l'égalité $J = 0$ pour exprimer r en fonction de p, q, i.e.,

$$r = \frac{2p^3 + 27q^2}{72p}$$

On peut calculer la matrice Σ, dans la base $1, X, X^2, X^3$ de l'automorphisme ϕ de $k[X]/P(X)$ qui provient de la transformation $\alpha \mapsto \beta$ de (24). On obtient en utilisant $I = \frac{p^2}{9} + \frac{3q^2}{8p} \neq 0$,

$$\Sigma = \frac{1}{8p^3 + 27q^2} \tag{25}$$
$$\times \begin{pmatrix} 8p^3 + 27q^2 & 0 & 0 & 0 \\ -18p^2q & -3(16p^3 + 9q^2) & 36pq & -48p^2 \\ -8p^4 - 54pq^2 & -60p^2q & 27q^2 - 8p^3 & -72pq \\ 9p^3q - \frac{81q^3}{2} & \frac{140p^4}{3} & -42p^2q & 48p^3 - 27q^2 \end{pmatrix}$$

et l'on vérifie directement que $\Sigma^2 = 1$ et que le déterminant de Σ vaut 1. On obtient de même la matrice Σ' associée à la transformation $\alpha \mapsto \gamma$. On a, comme $I = \frac{p^2}{9} + \frac{3q^2}{8p} \neq 0$.

$$(8p^3 + 27q^2)\Sigma'$$
$$= \begin{pmatrix} 8p^3 + 27q^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2}pq(2p - \sqrt{I}) & p^2(20p - 7\sqrt{I}) & -18pq & 6p(4p - \sqrt{I}) \\ p^3(\sqrt{I} - 4p) & -3pq(\sqrt{I} - 10p) & 2p^2\sqrt{I} - 27q^2 & 36pq \\ -\frac{3}{4}q(-6p^2\sqrt{I} + 22p^3 + 27q^2) & \sqrt{I}\left(\frac{35p^3}{6} - \frac{9q^2}{4}\right) - \frac{70p^4}{3} & \frac{3}{2}pq(\sqrt{I} + 14p) & p^2(5\sqrt{I} - 28p) \end{pmatrix} \tag{26}$$

et l'on vérifie que $\Sigma'^2 = 1$ et que $\Sigma\Sigma' = \Sigma'\Sigma$.

Si $\sqrt{I} \in k$ (i.e., $\sqrt{\Delta} \in k$) la formule (26) définit un automorphisme ϕ' de $k[X]/P(X)$ et ϕ, ϕ' donnent l'action de M_4 sur cette extension galoisienne de k.

Quand l'extension galoisienne K de k est de degré 8, on est dans le cas (i) de la Proposition H, l'extension K est obtenue en adjoignant $\sqrt{I}$ au corps $k[X]/P(X)$ et nous l'identifions avec $k(\sqrt{I})[X]/P(X)$. Elle admet une involution unique θ qui est l'identité sur $k[X]/P(X)$ et telle que $\theta(\sqrt{I}) = -\sqrt{I}$. De plus comme $I \in k$, l'automorphisme ϕ de $k[X]/P(X)$ se prolonge à K en fixant $\sqrt{I}$. La matrice Σ' est une matrice à coefficients dans $k(\sqrt{I})$ et définit un automorphisme ϕ' de K fixant $\sqrt{I}$. On obtient ainsi la description du groupe de Galois comme produit semi-direct S de M_4 qui agit par ϕ, ϕ' et de l'involution θ qui transforme ϕ' en son inverse.

Supposons maintenant que K est de dimension 4 sur $k\sqrt{I} \notin k$. On identifie K avec $k[X]/P(X)$. L'équation $X^2 = I$ admet ses racines $\pm\xi(X) \in k[X]/P(X)$ dans le corps K et celles-ci engendrent le corps $K_1 \subset K$. L'automorphisme ϕ de K donné par la matrice Σ permute les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k[X]/P(X)$ et comme $\phi(\alpha) = \beta$ et la permutation est paire car le déterminant de Σ vaut 1, on a $\phi(\gamma) = \delta$. La matrice Σ' n'a plus de sens en tant que transformation de K, mais il reste vrai que les quatre racines de $P(X) = 0$ qui forment une base de K sur k vérifient (23), d'où

$$\frac{1}{\gamma - \alpha} - \frac{1}{\delta - \alpha} = \frac{4\sqrt{I}}{\rho}$$

d'où, en utilisant $\rho = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)$, on déduit

$$4\sqrt{I} = -(\alpha - \beta)(\alpha - \delta) + (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = (\alpha - \beta)(\delta - \gamma)$$

et il en résulte, comme la permutation des racines associée à ϕ est

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto (\beta, \alpha, \delta, \gamma)$$

que $\phi(\sqrt{I}) = \sqrt{I}$. Ainsi le sous-corps $K_1 = k(\sqrt{I})$ est le corps fixe de ϕ. Comme K est une extension galoisienne de k, l'automorphisme $\psi : \sqrt{I} \mapsto -\sqrt{I}$ de K_1 se prolonge en un automorphisme $\widetilde{\psi}$ de K. Montrons que la permutation correspondante des racines est soit $\eta : (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto (\gamma, \delta, \beta, \alpha)$ soit η' : $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto (\delta, \gamma, \alpha, \beta)$. La condition d'harmonicité réduit le groupe des permutations possibles à 8 permutations parmi lesquelles seules 4 sont impaires, et donc transforment $\sqrt{I}$ en $-\sqrt{I}$. Les permutations η, η' transforment le birapport des racines en son inverse, ce qui est compatible avec la condition d'harmonicité. Elles transforment $(\alpha - \beta)(\delta - \gamma)$ en son opposé, et donc $\sqrt{I}$ en $-\sqrt{I}$. Mais ces deux propriétés sont également vérifiées par les deux permutations

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto (\beta, \alpha, \gamma, \delta) \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto (\alpha, \beta, \delta, \gamma)$$

La raison pour laquelle celles-ci sont exclues est la transitivité du groupe de Galois sur les racines. En effet le groupe de permutations obtenues en incluant ϕ préserverait la partition des racines en $\{\alpha, \beta\} \cup \{\gamma, \delta\}$ ce qui est exclu car le polynôme $P(X)$ est irréductible sur k. On a alors, toujours sous les hypothèses $J = 0, p \neq 0$ le théorème suivant :

Théorème I. *Si l'extension K de $k(\sqrt{\Delta})$ est de degré 2, on a $K \sim k[X]/P(X)$ et le groupe de Galois de l'extension K de k est le groupe $\mathbb{Z}/4$. Le sous-corps $k(\sqrt{\Delta})$ est le corps des points fixes de l'automorphisme involutif ϕ donné par la matrice Σ de (25).*

La Proposition H montre que $K \sim k[X]/P(X)$. Comme $\beta' = 0$ et $\gamma' + \delta' = 0$ par (22), on a $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle = -1$. Le raisonnement ci-dessus montre que la permutation $\widetilde{\psi}$ des racines est soit

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto (\gamma, \delta, \beta, \alpha) \quad \text{soit} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto (\delta, \gamma, \alpha, \beta).$$

Dans les deux cas, le carré de ψ est égal à ϕ et le groupe de Galois est $\mathbb{Z}/4$.

3.4. Le cas équiharmonique. Pour simplifier, on suppose que k contient les trois racines de l'équation $X^3 = 1$. On note $j \in k, j \neq 1$, une racine cubique de l'unité, on a $j - j^2 = i\sqrt{3}$. Soit $P(X)$ équiharmonique. On a $I = 0$ donc $J \neq 0, 2^{-8}\Delta = -27J^2 = (3i\sqrt{3}J)^2$ donc $\sqrt{\Delta} \in k, K_1 = k(\sqrt{\Delta}) = k$. Les équations de la Section 3.3.1 montrent que $\beta', \gamma', \delta' \neq 0$ et, après permutation éventuelle de γ', δ' que $\gamma' = j\beta', \delta' = j^2\beta'$ et $\beta'^3 = 16J/\rho^3$. Soit $\sqrt[3]{2J} \in \bar{k}$ la racine cubique de $2J$ égale à $\frac{1}{2}\rho\beta'$. On a $\sqrt[3]{2J} \in K$. Posons $K_1' = k(\sqrt[3]{2J})$. C'est une extension galoisienne de k de groupe de Galois $\mathbb{Z}/3$ ou $\{e\}$. On a, après une permutation éventuelle de $\{\beta', \gamma', \delta'\}$,

$$\beta' = 2\frac{\sqrt[3]{2J}}{\rho}, \qquad \gamma' = 2j\frac{\sqrt[3]{2J}}{\rho}, \qquad \delta' = 2j^2\frac{\sqrt[3]{2J}}{\rho}$$

$$(\beta - \alpha)^{-1} = \beta' - \frac{\sigma}{3\rho} = \frac{1}{3\rho}(6\sqrt[3]{2J} - \sigma),$$

$$\beta = \alpha + \frac{3\rho}{6\sqrt[3]{2J} - \sigma}, \qquad \gamma = \alpha + \frac{3\rho}{6j\sqrt[3]{2J} - \sigma}, \qquad \delta = \alpha + \frac{3\rho}{6j^2\sqrt[3]{2J} - \sigma}.$$

On a donc $K = K_1'(\alpha)$ et le degré de l'extension K de K_1' est ≤ 4.

Proposition J. *On suppose $j \in k$. Soit $P(X)$ équiharmonique. Alors $\sqrt{\Delta} \in k$ et deux cas sont possibles :*

(1) *$K_1' = k$. Le groupe de Galois de K sur k est M_4 ;*

(2) *$K_1' \neq k$. Alors K_1' est extension galoisienne de k de groupe Z_3. K est extension galoisienne de K_1' de groupe M_4 et extension galoisienne de k de groupe A_4.*

Si $K_1' = k$, le degré de K sur k est 4, le groupe de Galois de K sur k est le seul sous-groupe de A_4 d'ordre 4. Si $K_1' \neq k$, K_1' est extension galoisienne de k de $K_1' = k$ de groupe $\mathbb{Z}_3$, comme le degré de K sur k est divisible par 4 car $k(\alpha) \subset K$, l'extension galoisienne K de K_1' est necessairement de degré 4 et son groupe de Galois est M_4. Le groupe de Galois de K sur k est le groupe A_4.

Il est facile de donner des exemples de ce deuxième cas. Un exemple du premier cas est donné par le polynome $P(x) = x^4 - 3x^2 + 3x - \frac{3}{4}$ sur $k = \mathbb{Q}(j)$. On vérifie que dans ce cas $I = 0$ et $2J = -\frac{1}{8}$. Son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}(j)$ est M_4 et son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe de Sylow d'ordre 8.

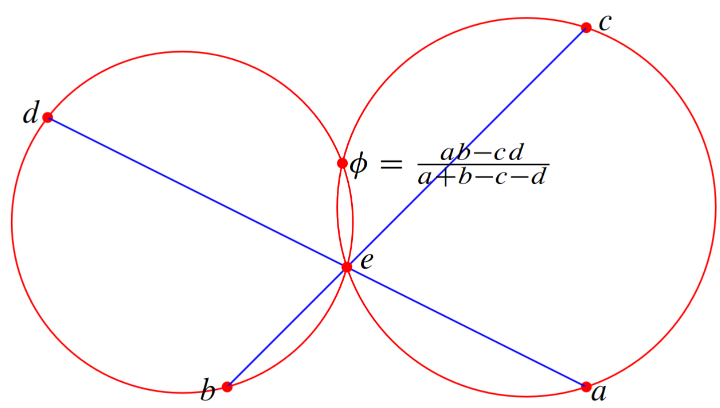


FIGURE 1 : Les deux cercles (a, c, e) et (b, d, e) se recoupent en ϕ.

4. L'ange de la géométrie et le diable de l'algèbre

4.1. Lagrange. On trouve à la fin de l'article de Lagrange [4] sur l'équation du quatrième degré, dans sa discussion de l'article de Bézout de 1762, la fonction rationnelle suivante des quatre racines (a, b, c, d) qui ne prend que trois valeurs différentes quand on permute les racines :

$$\varphi(a, b, c, d) = \frac{ab - cd}{a + b - c - d}. \tag{27}$$

Cette expression est rationnellement équivalente à la fonction classique

$$\psi(a, b, c, d) = ab + cd$$

et l'on vérifie par un calcul direct, en notant s_j les fonctions symétriques des racines, les égalités

$$\varphi = \frac{s_1\psi - 2s_3}{4\psi + s_1^2 - 4s_2}, \quad \psi = \frac{(s_1^2 - 4s_2)\varphi + 2s_3}{s_1 - 4\varphi}.$$

L'expression (27) est covariante pour l'action du groupe affine, i.e., on a pour $g(z) = \lambda z + \mu$, $\lambda \neq 0$,

$$\varphi(g(a), g(b), g(c), g(d)) = g(\varphi(a, b, c, d)).$$

Cette covariance indique que le point $\varphi(a, b, c, d)$ doit s'interpréter géométriquement dans le plan complexe. Nous donnons une interprétation géométrique de $\varphi(a, b, c, d)$.

Proposition K. *Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Le point $\varphi(a, b, c, d) \in \mathbb{C}$ est le point d'intersection des quatre cercles circonscrits aux triangles $(a, c, e), (b, d, e), (a, d, f), (b, c, f)$ où e est l'intersection des diagonales (ad) et (bc) et f l'intersection des diagonales (ac) et (bd).*

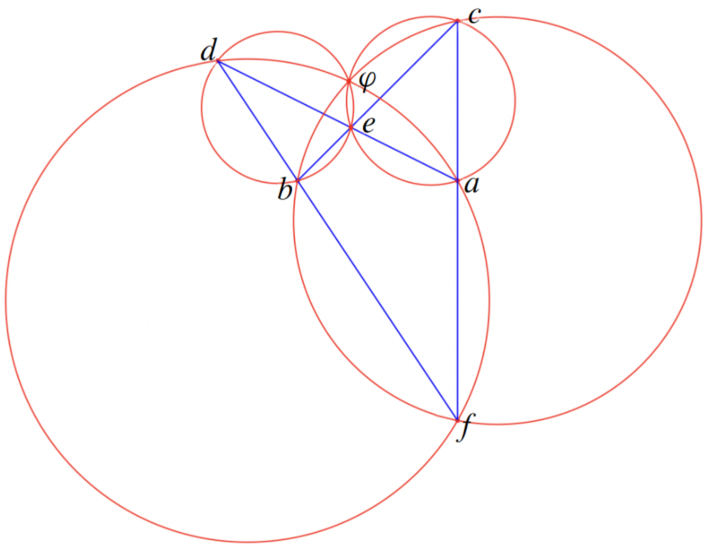


FIGURE 2 : Le point φ est l'intersection des cercles $(a, c, e), (b, d, e), (a, d, f), (b, c, f)$.

Il suffit de démontrer que le point φ est le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles $(a, c, e), (b, d, e)$. Voir Figures 1 et 2. On utilise la covariance pour le groupe affine qui permet de supposer que $e = 0$. Une inversion de centre e (plus précisement l'application $z \mapsto 1/z$ du plan complexe), réduit alors l'égalité à un calcul simple.

4.2. Morley.

4.2.1. Dans cette section, nous montrons comment généraliser le théorème de Morley (Figure 3) dans le cadre des équations du 3ème et du 4ème degré. Le point de départ est la démonstration [2] du théorème de Morley utilisant les nombres complexes. La résolvante donnée par le birapport $\langle a, b, c, \infty \rangle$ du Théorème A joue un rôle crucial dans notre généralisation. L'idée de [2] consiste à décrire les sommets du triangle de Morley comme points fixes du produit de deux rotations autour des sommets A, B, C d'un triangle et d'observer que le produit des cubes de ces rotations est l'identité. On utilise alors un lemme algébrique général sur le groupe $H(K)$ des transformations d'un corps K de la forme

$$x \mapsto g(x) = \alpha x + \beta,$$

où $\alpha, \beta \in K, \alpha \neq 0$ est le morphisme $\chi : H(K) \to K^\times$ qui associe à $g \in H(K)$ l'élément $\chi(g) = \alpha \in K^\times$. Si $\chi(g) \neq 1$, on note $\text{fix}(g)$ l'unique point fixe de g, i.e., $x \in K$ tel que $g(x) = x$. Le lemme est le suivant,

Lemme L. ([2]). Soient $f, g, h \in H(K)$ tels que $f^3g^3h^3 = 1$ et que $j := \chi(fgh) \neq 1$. On suppose que f^3, g^3 et h^3 ne sont pas des translations. Alors fg, gh et hf ne sont pas des translations et

$$\text{fix}(fg) + j\ \text{fix}(gh) + j^2\ \text{fix}(hf) = 0$$

Comme $f^3g^3h^3 = 1$, on a $j^3 = 1$ et j est donc une racine cubique primitive de 1 dans K.

Remarque M. Soient $a, b, c \in K$; les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe $j \neq 1, j^3 = 1$ tel que $a + jb + j^2c = 0$;

(2) Il existe $j \neq 1, j^3 = 1$ tel que $\langle a, b, c, \infty\rangle = -j$;

(3) La configuration a, b, c, ∞ est équiharmonique.

Quand $K = \mathbb{C}$ les conditions précédentes signifient que le triangle (a, b, c) est équilatère.

Soient $z \in \mathbb{P}^1(K), H_z \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ le sous-groupe des éléments qui fixent z. L'application $\chi_z : H_z \to K^\times$ définie par

$$\chi_z(f) = \chi(hfh^{-1})$$

indépendament du choix de $h \in \mathrm{PGL}_2(K)$ tel que $h(z) = \infty$ est un morphisme de groupe canonique $\chi_z : H_z \to K^\times$. On note $\ker(\chi_z)$ le noyau de χ_z. Soit $f \in H_z$ tel que $\chi_z(f) \neq 1$, on note $\mathrm{fix}_{\neq z}(f) \in \mathbb{P}^1(K)$ l'autre point fixe de f.

Corollaire N. *Soient $z \in \mathbb{P}^1(K)$, $f, g, h \in H_z$ tels que $f^3g^3h^3 = \mathrm{Id}$ et que $j := \chi_z(fgh) \neq 1$. On suppose que f^3, g^3 et h^3 ne sont pas dans $\ker(\chi_z)$. Alors fg, gh et hf ne sont pas dans $\ker(\chi_z)$ et la configuration $(z, \mathrm{fix}_{\neq z}(fg), \mathrm{fix}_{\neq z}(gh), \mathrm{fix}_{\neq z}(hf))$ est équiharmonique.*

On se ramène par conjugaison par un élément de $\mathrm{PGL}_2(K)$ au cas où $z = \infty$ et on applique le Lemme L et la Remarque M.

4.2.2. Soient K un corps contenant une racine cubique de l'unité, $j \neq 1$, et $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ un automorphisme de K, tel que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ et que $\sigma(j) = j^2$. Soit $H = H(K)$ le groupe affine de K, on note $h(\alpha, \beta) \in H(K)$ l'élément tel que

$$h(\alpha, \beta)(x) = \alpha x + \beta,$$

pour tout $x \in K$. Soit $\widetilde{H} = H \rtimes_\sigma \mathbb{Z}/2$ le produit semi-direct de H par l'automorphisme σ. Ses éléments sont de la forme $h(\alpha, \beta)$ ou $h(\alpha, \beta)\sigma$ avec $\sigma^2 = 1, \sigma h(\alpha, \beta) = h(\sigma(\alpha), \sigma(\beta))\sigma$. Le corps K est un espace vectoriel dimension 2 sur le sous-corps K^σ des points fixes de σ.

Lemme O. *Soient K et J comme ci-dessus.*

(i) *Soient $a, b \in K, a \neq b$. L'égalité*

$$s(a, b) = h\left(\frac{a - b}{\sigma(a) - \sigma(b)}, \frac{a\sigma(b) - b\sigma(a)}{\sigma(b) - \sigma(a)}\right)\sigma$$

définit une involution, $s(a, b)^2 = 1$ dont les point fixes forment la droite passant par a et b dans le plan $K \sim (K^\sigma)^2$.

(ii) *Soient $a, b, c \in K$ trois éléments distincts non-alignés sur $K^\sigma, \omega = \langle a, b, c, \infty\rangle$.*

Le produit $s(a, c)s(b, c)$ est l'unique élément $g \in H$ qui fixe le point c et tel que

$$\chi(g) = \omega/\sigma(\omega).$$

(iii) *Soit $g \in H$ comme dans (ii). On a $g = h(\chi(g), x)$ où $x = c - c\omega/\sigma(\omega)$.*

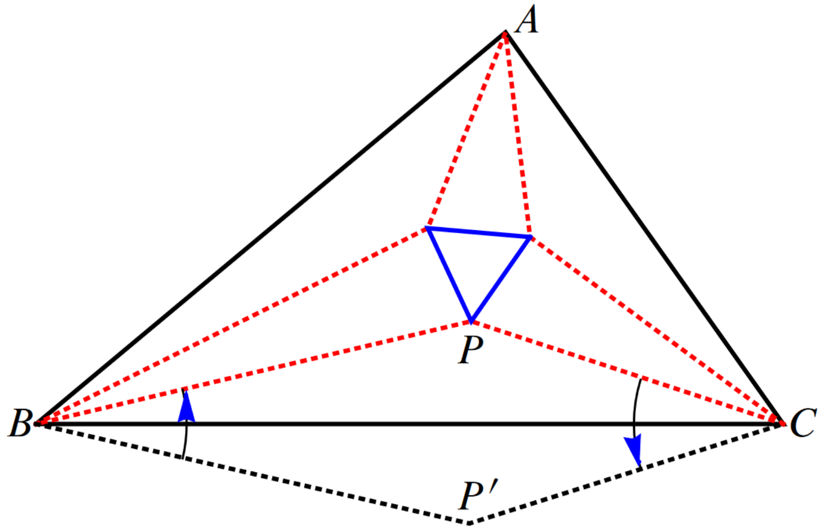


FIGURE 3 : Le point P, intersection des trisectrices issues de B et C, est le point fixe du produit $R_B R_C$ de rotations de centre B et C. On a $R_A^3 R_B^3 R_C^3 = 1$.

Démonstration. (i) L'unique élément g de H tel que $g(a) = 0$ et $g(b) = 1$ est

$$h\left(\frac{1}{b-a}, -\frac{a}{b-a}\right).$$

On a

$$s(a,b) = g^{-1}\sigma g.$$

On est donc ramené au cas où $a = 0, b = 1$ et dans ce cas, l'involution σ a bien pour points fixes la droite du plan $K \sim (K^\sigma)^2$ passant par $a = 0, b = 1$.

(ii) Par construction $s(a,c)$ et $s(b,c)$ fixent c. Le calcul du produit montre que l'élément $s(a,c)s(b,c)$ de H est de la forme indiquée. Comme a, b, c sont non-alignés, on a $\omega \neq \sigma(\omega)$ et l'unicité de x tel que $h(\omega/\sigma(\omega), x) = s(a,c)s(b,c)$ en résulte.

(iii) Comme $g(c) = c$ et $\chi(g) = \omega/\sigma(\omega)$, on a $x = c - c\omega/\sigma(\omega)$. $\square$

Notons,

(28) $$\theta(a,b;c) := h(\omega/\sigma(\omega), c \; - \; c\omega/\sigma(\omega)), \quad \omega := \langle a,b,c,\infty\rangle.$$

Lemme P. *Soient $a, b, c \in K$ trois éléments distincts non-alignés sur K^σ. On a*

$$\theta(a,b;c)\theta(c,a;b)\theta(b,c;a) = \mathrm{Id} \tag{29}$$

Cela résulte des simplifications suivantes

$$(s(a,c)s(b,c))(s(b,c)s(a,b))(s(a,b)s(a,c)) = s(a,c)s(a,c) = \mathrm{Id}.$$

Si $\omega = \langle a,b,c,\infty\rangle$, le produit des trois birapports impliqués dans (4.6) est

$$\omega \cdot \frac{1}{1-\omega} \cdot \frac{\omega-1}{\omega} = -1$$

et donc le produit des rapports avec les transformés par σ vaut bien 1.

Pour $x, y \in \mathbb{P}^1(K), x \neq y$ et $u \in K^\times$, on note $\rho(u;x,y)$ l'unique élément g de $H_y(K)$ tel que $g(x) = x$ et que $\chi_y(g) = u$.

Corollaire Q. *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ quatre éléments distincts, $\omega = \langle \beta,\gamma,\delta,\alpha\rangle \notin K^\sigma$. On note*

$$\omega' = \frac{1}{1-\omega}, \quad \omega'' = \frac{\omega-1}{\omega}.$$

On a alors

$$\rho(\omega/\sigma(\omega);\delta,\alpha)\rho(\omega'/\sigma(\omega');\gamma,\alpha)\rho(\omega''/\sigma(\omega'');\beta,\alpha) = \mathrm{Id}. \tag{30}$$

Supposons d'abord $\alpha = \infty$; on a alors, en utilisant (28), avec $a = \beta, b = \gamma, c = \delta$ les égalités

$$\rho(\omega/\sigma(\omega);\delta,pha) = \theta(a,b;c),$$

$$\rho(\omega'/\sigma(\omega');\gamma,\alpha) = \theta(c,a;b), \qquad \rho(\omega''/\sigma(\omega'');\beta,\alpha) = \theta(b,c;a),$$

ainsi que $\omega = \langle a,b,c,\infty\rangle$ et (30) se déduit du Lemme P. Supposons $\alpha \neq \infty$. On a pour tout $h \in \mathrm{PGL}_2(K), x, y \in \mathbb{P}^1(K), x \neq y.$ et $u \in K^\times$ l'égalité

$$\rho(u;h(x),h(y)) = h\rho(u;x,y)h^{-1}.$$

Soit $h \in \mathrm{PGL}_2(K)$ la transformation projective $h(z) := (z-\alpha)^{-1}$. Soient

$$a = h(\beta), \quad b = h(\gamma), \quad c = h(\delta).$$

On a

$$\omega = \langle \beta,\gamma,\delta,\alpha\rangle = \langle a,b,c,\infty\rangle$$

et les trois termes du produit (30) sont les conjugués par h des trois termes de (29) et on obtient (30) grâce au Lemme P.

4.2.3. Racines cubiques des birapports. Soit

$$\varpi = \left\{ \omega, 1-\omega, \frac{1}{\omega}, \frac{\omega-1}{\omega}, \frac{1}{1-\omega}, \frac{\omega}{\omega-1} \right\}$$

une orbite pour l'action du groupe symétrique S_3 sur le plan projectif $\mathbb{P}^1(K)$.

Définition R. Une racine cubique $\sqrt[3]{\varpi}$ de ϖ est le choix $u \mapsto \sqrt[3]{\omega}$ d'une racine cubique pour chacun des éléments de ϖ tel que

- si $u, v \in \varpi$ vérifient $uv = 1$ alors $\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} = 1$;
- si $u, v, w \in \varpi$ vérifient $uvw = -1$ alors $\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}\sqrt[3]{w} \neq -1$.

On vérifie que, dans le cas général, ϖ admet 18 racines cubiques, qui sont des applications de ϖ dans $\overline{k}$.

4.2.4. Généralisation du théorème de Morley. On utilise les notations k, K, j, σ ci-dessus. On prolonge σ en un automorphisme (pas nécessairement involutif) de la clôture algébrique $\overline{k} \supset K$ de k. Soit u in $\overline{k}, u \notin \{0,1\}$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{P}^1(K), \alpha \neq \beta$. Il existe un unique élément de $\mathrm{PGL}_2(k)$ qui fixe α et β et tel que u soit l'élément correspondant du groupe multiplicatif $G_m(\overline{k})$ (par conjugaison par une transformation projective transformant α en 0 et β en ∞). On note, comme ci-dessus, cet élément $\rho(u; \alpha, \beta)$. On a $\rho(u; \beta, \alpha) = \rho(u^{-1}; \alpha, \beta)$. Compte tenu de la Remarque M, le théorème suivant est une généralisation du théorème de Morley.

Théorème S. *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ quatre éléments distincts dont les birapports prennent six valeurs distinctes hors de K^σ. Soit $\sqrt[3]{\varpi}$ une racine cubique de ces birapports. Posons*

$$u = \langle \beta, \gamma, \delta, \alpha \rangle^{1/3}, \quad v = \langle \delta, \beta, \gamma, \alpha \rangle^{1/3}, \quad w = \langle \gamma, \delta, \beta, \alpha \rangle^{1/3}$$

(les valeurs des racines cubiques étant spécifiées par $\sqrt[3]{\varpi}$). Soient

$$\phi = \rho(u/\sigma(u); \delta, \alpha), \quad \psi = \rho(v/\sigma(v); \gamma, \alpha), \quad \chi = \rho(w/\sigma(\omega); \beta, \alpha).$$

Alors la configuration $(\alpha, \mathrm{fix}_{\neq\alpha}(\phi\psi), \mathrm{fix}_{\neq\alpha}(\psi\chi), \mathrm{fix}_{\neq\alpha}(\chi\phi))$ est équiharmonique.

En effet, le Corollaire Q montre que l'on a $\phi^3\psi^3\chi^3 = \mathrm{Id}$. On applique alors le Corollaire N en utilisant la deuxième condition de la Définition R pour assurer que les hypothèses sont vérifiées. Il en résulte que la configuration

$$(\alpha, \mathrm{fix}_{\neq\alpha}(\phi\psi), \;\; \mathrm{fix}_{\neq\alpha}(\psi\chi), \;\; \mathrm{fix}_{\neq\alpha}(\chi\phi))$$

est équiharmonique.

Remerciements. Nous remercions le rapporteur pour ses judicieuses observations.

Références

[1] R. Bourgne, J.-P. Azra (eds.), *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris, 1962. Zbl 0192.01502 MR 0150016.

[2] A. Connes, *A new proof of Morley's theorem. In Les relations entre les mathématiques et la physique théorique*, pp. 43-46, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1998. Zbl 1006.51010 MR 1667897.

[3] E. Elliott, *An introduction to the algebra of quantics.* Seconde edition, Clarendon Press, Oxford, 1913. Zbl 44.0155.05.

[4] J.-L. Lagrange, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.* Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1770 et 1771. In Oeuvres complètes. Volume 3, pp. 205-421, Gauthier-Villars, Paris, 1867.

Programme Python pour démonstration du théorème de Morley par Alain Connes

(Denise Vella-Chemla, 28.8.2020)

On voudrait fournir ici des résultats surprenants qui nous ont été inspirés par un travail tout l'été autour de la preuve par Alain Connes du théorème de Morley ([1]).

En effet, on souhaitait programmer la preuve pour essayer de vérifier que le théorème n'est pas applicable pour les triangles sphériques (voir notamment la conférence [2]).

Programme de vérification et visualisation du Théorème de Morley dans le plan

```
from math import *
from matplotlib import *
from matplotlib.pyplot import *

def vecteur(point1, point2):
  return [y - x for x, y in zip(point1, point2)]

def add(vecteur1, vecteur2):
  return [x + y for x, y in zip(vecteur1, vecteur2)]

def norme(vecteur):
  return sqrt(prodscal(vecteur, vecteur))

def prodscal(vecteur1, vecteur2):
  return sum([x*y for x, y in zip(vecteur1, vecteur2)])

def determ(vecteur1, vecteur2):
 return vecteur1[0]*vecteur2[1]-vecteur1[1]*vecteur2[0]

def angle(vecteur1, vecteur2):
  cosinus=prodscal(vecteur1, vecteur2)/(norme(vecteur1)*norme(vecteur2))
  sinus=determ(vecteur1, vecteur2)/(norme(vecteur1)*norme(vecteur2))
  return atan2(sinus,cosinus)

def rotation(u, theta):
  return [u[0]*cos(theta)-u[1]*sin(theta),u[0]*sin(theta)+u[1]*cos(theta)]

def intersecte(x, y, z, t):
  a1 = (y[1]-x[1])/(y[0]-x[0])
  b1 = x[1]-a1*x[0]
  a2 = (t[1]-z[1])/(t[0]-z[0])
  b2 = z[1]-a2*z[0]
  return [(b2-b1)/(a1-a2),((b2-b1)/(a1-a2))*a1+b1]

a=[8.83, 47.89]
b=[72.74, 8.55]
c=[90.72, 86.63]
ab = vecteur(a,b) ; ac = vecteur(a,c)
ba = vecteur(b,a) ; bc = vecteur(b,c)
ca = vecteur(c,a) ; cb = vecteur(c,b)
anglea=angle(ab,ac)  ; angleb=angle(bc,ba)  ; anglec=angle(ca,cb)
aprime = add(a, rotation(ab,anglea/3.0))  ; aseconde = add(a, rotation(ab,anglea*2.0/3.0))
bprime = add(b, rotation(bc,angleb/3.0)) ; bseconde = add(b, rotation(bc,angleb*2.0/3.0))
cprime = add(c, rotation(ca,anglec/3.0)) ; cseconde = add(c, rotation(ca,anglec*2.0/3.0))
p=intersecte(a,aseconde,b,c) ; q=intersecte(a,aprime,b,c)
r=intersecte(c,cseconde,a,b) ; s=intersecte(c,cprime,a,b)
t=intersecte(b,bseconde,c,a) ; u=intersecte(b,bprime,c,a)
n=intersecte(a,aseconde,c,cprime)
o=intersecte(c,cseconde,b,bprime)
x=intersecte(b,bseconde,a,aprime)
print('Normes des cotes %3.15f '% norme(vecteur(n,o)))
print('Normes des cotes %3.15f '% norme(vecteur(o,x)))
print('Normes des cotes %3.15f '% norme(vecteur(x,n)))

fig = matplotlib.pyplot.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
matplotlib.pyplot.plot([a[0],b[0],c[0],a[0]],[a[1],b[1],c[1],a[1]], 'g', alpha=0.7)
matplotlib.pyplot.fill([a[0],p[0],q[0]],[a[1],p[1],q[1]], 'g', 2, alpha=0.4)
matplotlib.pyplot.fill([c[0],r[0],s[0]],[c[1],r[1],s[1]], 'g', 2, alpha=0.4)
matplotlib.pyplot.fill([b[0],t[0],u[0]],[b[1],t[1],u[1]], 'g', 2, alpha=0.4)
matplotlib.pyplot.fill([n[0],o[0],x[0]],[n[1],o[1],x[1]], 'g', 2, alpha=0.8)
matplotlib.pyplot.xlim(0,100)
matplotlib.pyplot.ylim(0,100)
ax.set\_aspect('equal')
matplotlib.pyplot.show()
```

Le programme ci-dessus produit la visualisation ci-après, et imprime comme longueur des normes des côtés du triangle de Morley (le triangle équilatéral de sommets les intersections des trissectrices adjacentes du triangle quelconque "externe") la valeur 14.863746806168091 pour deux côtés et la valeur 14.863746806168082 pour