Droites et cercles, Denise Vella-Chemla, juin 2026.

Notre objectif est de démontrer la conjecture de Goldbach, qui énonce que tout nombre pair (≤ 6) est la somme de deux nombres premiers (impairs).

Cette note est une adaptation géométrique des idées du Snurpf (pour Système de Numération par les Restes dans les parties finies de $\mathbb{N}$) à base de cercles et projections.

On commence par rappeler notre idée initiale : pour trouver les décomposants de Goldbach de n supérieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, il suffit de cribler deux sortes de nombres :

- les nombres congrus à 0 modulo tout nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$,
- et les nombres congrus à n selon ces mêmes modules.

On fournit la démonstration qu'avait écrite Leila Schneps que cette opération de double-crible permet bien de trouver les décomposants de Goldbach de n supérieurs à $\sqrt{n}$.

On définit

$$E(n,p) = \{m \in 2\mathbb{N}+1 \mid 3 \leq m \leq n/2, m \not\equiv 0 \pmod p, m \not\equiv n \pmod p\}.$$

L'intersection des ensembles $E(n,p)$ associés à tous les nombres premiers p compris entre 3 et $\sqrt{n}$ est :

$$D(n) = \bigcap_{\substack{p \text{ premier} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} E(n,p).$$

Montrons qu'un élément de $D(n)$ est un décomposant de Goldbach de n, i.e. montrons qu'il est nécessairement premier et que son complémentaire l'est aussi.

Lemme 1 : *Soit m un entier impair. Si m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$ alors m est premier.*

Preuve : Si m est composé, $m = pq$ où p est le plus petit nombre premier de la factorisation de m en nombres premiers et q est le produit des facteurs restants dans la factorisation. m étant impair, $p \geq 3$, et puisque $q \geq p$ (q étant un produit d'entiers $\geq p$), $m = pq \geq pp = p^2$,et donc $\sqrt{m} \geq p$, la fonction racine carrée étant croissante. On a ainsi montré que si m un nombre impair est composé, il est divisible par un nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$. Le lemme 1 étant la contraposée de ce qui vient d'être démontré est par conséquent démontré. $\square$

Lemme 2 : *$D(n)$ ne contient que des nombres premiers.*

Preuve : Soit $m \in D(n)$. Alors $m \in E(n,p) \forall p$, un nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$. Donc m est impair et m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$ (puisque $m \not\equiv 0 \pmod p$) ; donc m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{m}$ car $m \leq n/2 \implies m \leq n \implies \sqrt{m} \leq \sqrt{n}$. Il s'ensuit que m est donc un nombre premier par le lemme 1. $\square$

Lemme 3 : *L'ensemble des nombres de la forme $n-k$ avec $k \in D(n)$ ne contient que des nombres premiers.*

Preuve : Soit $m \in D(n)$. Alors $\forall p$ un nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$, on a $m \in E(n,p)$. Donc $n-m$ est impair (car m est impair et n est pair). D'autre part, quelque soit p un nombre premier p compris entre 3 et $\sqrt{n}$, puisque $m \not\equiv n \pmod{p}$, $n-m$ n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{n}$, et donc il n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{n-m}$ car $n-m \leq n \implies \sqrt{n-m} \leq \sqrt{n}$. $n-m$ est donc un nombre premier par le lemme 1. $\square$

Lemme 4 : *Soit n un nombre pair ≥ 6. Si $D(n) \neq \varnothing$ alors n vérifie la conjecture de Goldbach.*

Preuve : Si $D(n) \neq \varnothing$, p un élément de $D(n)$ est premier par le lemme 1 et son complémentaire à n, notons le $q = n-p$ est premier également par le lemme 2, et donc $n = p+q$ admet une décomposition de Goldbach (ou vérifie la conjecture de Goldbach).

jaimebienarcs.png

Ci-dessus est présenté un graphique qui, bien qu'il ne nous permette pas d'avancer davantage, montre bien les idées des lemmes ci-dessus :

- les quarts de cercles de centre le coin bas-gauche, ou origine $(0,0)$ montrent, là où ils croisent l'axe des abscisses, les multiples impairs des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ (des couleurs différentes ont été utilisées pour distinguer les modules, mais les nombres divisibles par plusieurs modules voient leurs couleurs mélangées) ; les abscisses non touchées par un arc sur l'axe des abscisses sont donc les nombres premiers supérieurs à $\sqrt{n}$;
- les quarts de cercles de centre le coin haut-gauche $(0,n)$ montrent, là où ils croisent l'axe des ordonnées, les nombres congrus à n modulo chaque nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$;
- les points sur la diagonale descendante sont de coordonnées $(x, n-x)$. On les projette sur les axes des coordonnées. Seuls ceux dont ni la projection sur l'axe des abscisses, ni la projection

sur l'axe des ordonnées ne croise un cercle sur l'un des axes sont colorés en vert. Ils ne sont ni congrus à 0, ni congrus à n. Ils correspondent aux décomposants de Goldbach de n.

Le dessin possède une symétrie horizontale (par rapport à la droite $y = n/2 = 20$) puisqu'on a utilisé les mêmes écartements pour les quarts de cercles à partir de l'origine $(0,0)$ en bas à gauche ou à partir du point $(0,n)$ en haut à gauche.