Matrices de pgcd booléennes et extraction de l'indicateur d'Euler
Denise Vella-Chemla pilotant gemini, juillet 2026

1. Introduction et définition matricielle

Le document https://denisevellachemla.eu/matindicEuler.pdf (août 2015), formalise le calcul de l'indicateur d'Euler $\varphi(x)$ par le biais d'un opérateur linéaire discret. On définit une matrice carrée booléenne $M = (m_{n,d})$ de taille $n \times n$ caractérisée par :

$$m_{n,d} = \begin{cases} 1 & \text{si pgcd}(d, n+1) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Diagonale réduite et propriétés de périodicité

Le produit de cette matrice avec une matrice triangulaire supérieure unité U permet d'isoler sur sa diagonale principale les valeurs exactes de l'indicateur d'Euler :

$$S_{i,i} = \varphi(i+1).$$

L'autrice met en lumière des structures de périodicité spécifiques le long des colonnes (notamment indexées par les multiples pairs), révélant la rigidité combinatoire du crible multiplicatif qui gouverne les positions des nombres premiers.

Annexe : Programme python

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
import math
def generer_matrice_euler(n=10):
    print(f"--- Piste 11 : Matrice de PGCD pour n = {n} ---")
    for i in range(1, n + 1):
        ligne = [1 if math.gcd(d, i + 1) == 1 else 0 for d in range(1, i + 1)]
        phi = sum(1 for d in range(1, i + 1) if math.gcd(d, i + 1) == 1)
        print(f"Ligne {i:2d} (phi={phi:2d}) : {ligne}")
if __name__ == "__main__":
    generer_matrice_euler(12)
```

Résultat d'exécution

```
--- Piste 11 : Matrice de PGCD pour n = 12 ---
Ligne  1 (phi= 1) : [1]
Ligne  2 (phi= 2) : [1, 1]
Ligne  3 (phi= 2) : [1, 0, 1]
Ligne  4 (phi= 4) : [1, 1, 1, 1]
Ligne  5 (phi= 2) : [1, 0, 0, 0, 1]
Ligne  6 (phi= 6) : [1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

```
Ligne  7 (phi= 4) : [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]
Ligne  8 (phi= 6) : [1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1]
Ligne  9 (phi= 4) : [1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1]
Ligne 10 (phi=10) : [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
Ligne 11 (phi= 4) : [1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
Ligne 12 (phi=12) : [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
```