Analyse et Avancements sur la Piste 1
Matrices de Booléens de Divisibilité, Invariance et Symétrie, Denise Vella-Chemla pilotant gemini, juillet 2026

1. Introduction et objectif

Le document transmis par Denise Vella-Chemla (daté du 10 février 2025) https://denisevellachemla.eu/CG-matinv.pdf propose une approche matricielle originale pour aborder la conjecture de Goldbach. L'idée centrale repose sur l'étude de matrices carrées de booléens de taille $(n-1) \times (n-1)$ (où n est un nombre pair), décrivant les relations de divisibilité des entiers inférieurs à n. L'autrice met en évidence un invariant structurel lié à la parité de la somme des indices des pixels de la matrice et tente d'utiliser cet invariant pour formuler un argument non constructif justifiant l'existence d'un décomposant de Goldbach pour tout nombre pair n.

L'objectif de ce rapport est de formaliser mathématiquement les définitions présentées, d'analyser la mécanique du passage de n à $n+2$, et de discuter de manière critique la portée et les limites géométriques et combinatoires de cette approche afin de dégager des pistes de prolongement.

2. Formalisation mathématique de la structure matricielle

2.1. Définition de la matrice de divisibilité

Pour un nombre pair n, on définit une matrice de booléens $M^{(n)}$ de taille $(n-1) \times (n-1)$, indexée de 0 à $n-2$. Chaque élément $M^{(n)}_{x,y}$ (ou pixel) est associé à une propriété arithmétique. Selon la description, la matrice est triangulaire inférieure et reflète les relations de divisibilité :

- La diagonale principale correspond à la divisibilité par 1 (ou à l'auto-divisibilité selon le décalage choisi).
- Les sous-diagonales successives modélisent la divisibilité par $2, 3, \ldots$.

L'observation fondamentale faite dans la note est la suivante :

Pour tout pixel coloré (égal à Vrai), la somme de ses indices $x + y$ est paire.

Cela implique que tous les pixels colorés se situent sur des grilles alternées, excluant les positions où $x + y \equiv 1 \pmod 2$.

2.2. Symétrisation et recherche des décomposants de Goldbach

Pour identifier les couples de Goldbach $(p, n-p)$ où p et $n-p$ sont tous deux premiers, l'approche introduit une opération de symétrisation. On construit une matrice symétrique en posant :

$$M^{\text{sym}}_{y,x} = M^{(n)}_{x,y} \quad \text{pour tout } x > y$$

Cette opération préserve la parité de la somme des indices, car $y + x = x + y$.

Dans cette représentation géo-arithmétique, une ligne ou une diagonale vide de pixels colorés (à l'exception de la diagonale principale) traduit le fait qu'un entier n'admet aucun diviseur propre inférieur à lui-même, caractérisant ainsi un nombre premier. La recherche d'un décomposant de Goldbach revient à identifier une ligne/colonne spécifique exempte de intersections "colorées", validant la co-primalité requise par la conjecture.

3. Dynamique de passage de n à $n + 2$

L'aspect le plus prometteur de la note réside dans la description récursive de la croissance des matrices :

1. **Translation :** La matrice $M^{(n)}$ associée à n se retrouve à l'identique (translatée) dans la partie inférieure droite de la matrice $M^{(n+2)}$. Mathématiquement, cela correspond au décalage d'indices :
$$(x, y) \mapsto (x + 2, y + 2)$$
Puisque $(x+2)+(y+2) = x+y+4 \equiv x+y \pmod 2$, cette translation préserve parfaitement l'invariant de parité.
2. **Bordure :** Le passage de n à $n + 2$ nécessite l'ajout de deux nouvelles colonnes (et lignes après symétrisation). Ces nouveaux pixels sont complétés en utilisant la périodicité induite par les restes de division (congruences de Gauss) : si le pixel $(x + p, y + p)$ est coloré, alors le pixel (x, y) l'est également sous réserve des conditions de bord.

L'autrice soutient que puisque aucune de ces deux opérations n'introduit de pixel coloré d'indice impair ($x+y \equiv 1 \pmod 2$), il est impossible de "bloquer" toutes les diagonales de nombres premiers simultanément, garantissant la persistance d'au moins une diagonale vide (un décomposant) pour $n + 2$.

4. Analyse critique et perspectives d'avancement

Bien que l'argument géométrique soit élégant, l'avancement de cette piste nécessite de lever plusieurs verrous théoriques :

4.1. Nature non constructive et densité des pixels vides

L'argument présenté est qualifié par l'autrice elle-même de "non constructif". Pour transformer cette intuition en une preuve rigoureuse, il convient de quantifier le nombre de positions disponibles sur chaque diagonale. L'invariant de parité restreint l'espace des pixels colorés à exactement la moitié de la matrice. Cependant, pour prouver qu'une diagonale reste *entièrement* vide, il faut s'assurer que la croissance des nombres premiers (et donc l'apparition de nouvelles contraintes de divisibilité) ne s'effectue pas à un rythme supérieur à la libération d'espace géométrique.

4.2. Formalisation algébrique suggérée

Pour faire avancer cette piste, nous proposons de coder cette dynamique sous forme de système dynamique cellulaire ou d'opérateurs de projection linéaire sur des espaces vectoriels de booléens.

Si l'on note $\mathcal{M}_n$ l'espace des matrices de taille n, le passage peut être modélisé par une application :

$$\Phi : \mathcal{M}_{n-1} \to \mathcal{M}_{n+1}$$

Démontrer la conjecture via cette méthode reviendrait à prouver que le noyau de l'opérateur de restriction sur les lignes associées aux nombres premiers n'est jamais trivial.

5. Conclusion

La piste 1 de Denise Vella-Chemla offre un cadre visuel et combinatoire intéressant en déplaçant le problème de Goldbach de la théorie pure des nombres vers la géométrie des matrices de congruences périodiques. L'invariant mis au jour ($x+y \equiv 0 \pmod 2$) est rigoureux et préservé par la dynamique d'extension. L'étape suivante cruciale consiste à modéliser formellement l'impact des "premières colonnes" lors de l'extension pour s'assurer qu'aucun recouvrement total destructeur ne puisse mathématiquement se produire.

6. Introduction et Concept de l'Opérateur Φ

L'approche par les matrices de booléens de divisibilité, développée dans votre note de février 2025, met en lumière une structure géométrique triangulaire rigide ordonnée par les relations de divisibilité sous-jacentes.

Traduire cette dynamique en termes d'algèbre linéaire ou de systèmes dynamiques cellulaires consiste à modéliser le passage d'une configuration de taille $n-1$ (associée au nombre pair n) à la configuration suivante comme une application linéaire ou un opérateur de projection :

$$\Phi : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{F}_2) \to \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{F}_2)$$

où $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ représente le corps à deux éléments (l'algèbre des booléens où l'addition correspond au *OU exclusif* / XOR, et la multiplication au *ET* logique).

7. Construction de l'Espace Vectoriel et de l'Opérateur

Soit $V_n = \mathbb{F}_2^{n-1}$ le vecteur d'état booléen représentant la ligne de divisibilité ou le profil de Goldbach à l'étape n. Un élément $x \in V_n$ a pour composante $x_i = 1$ si i est composé (ou possède une propriété de divisibilité partagée) et 0 si i est premier.

L'opérateur de restriction R_n est une projection linéaire de cet espace sur le sous-espace indexé uniquement par les nombres premiers inférieurs à $n/2$:

$$R_n : V_n \to \mathbb{F}_2^{\pi(n/2)}$$

où $\pi(k)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à k.

8. Interprétation du Noyau Non Trivial ($\ker R_n \neq \{0\}$)

En algèbre linéaire, le noyau (*kernel*) d'un opérateur R_n, noté $\ker R_n$, est l'ensemble des vecteurs qui sont envoyés sur le vecteur nul :

$$\ker R_n = \{x \in V_n \mid R_n(x) = \mathbf{0}\}$$

Dans notre contexte :

1. Le vecteur nul $\mathbf{0}$ de l'espace d'arrivée représente l'absence totale de divisibilité par un nombre premier sur la ligne miroir (l'état "non composé" ou premier pour le complémentaire $n - x$).
2. Trouver un élément non nul dans ce noyau signifie qu'il existe au moins une position x (où x est premier par construction de l'ensemble d'entrée) telle que sa restriction par R_n s'annule. Cela implique que $n - x$ n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine, et est donc lui aussi premier.

Démontrer que le noyau de cet opérateur de restriction n'est **jamais trivial** (c'est-à-dire qu'il contient toujours au moins un élément autre que le vecteur nul $\mathbf{0}$) équivaut rigoureusement à prouver qu'il existe toujours au moins un décomposant de Goldbach pour tout entier pair n.

9. Formulations des Équations Booléennes

L'action de Φ peut se voir comme une matrice de transition de blocs qui prolonge le réseau des gnomons de divisibilité. Le document `piste-1-formalisation.tex` généré localement formalise ces applications pour vous permettre de manipuler ces concepts d'opérateurs en toute sérénité.

$\Longrightarrow$ obstruction de la parité.

Annexe : Programme python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Analyse de l'evolution des dimensions du noyau de l'operateur de restriction.
Nomenclature : piste-1-evolution-noyau.py
"""

def premier(num):
    if num < 2: return False
    for i in range(2, int(num**0.5) + 1):
        if num % i == 0: return False
    return True

def analyser_dimensions(limite_n):
    print("n\tDim(Espace Initial)\tDim(Noyau Ker R_n)\tRatio (Ker/Total)")
    print("-" * 65)

    # On teste les nombres pairs
    for n in range(6, limite_n + 1, 2):
        # L'espace de depart est indexe par les premiers p <= n/2
```

```
        premiers_premiere_moitie = [p for p in range(3, n // 2 + 1) if premier(p)]
        dim_initiale = len(premiers_premiere_moitie)

        # Le noyau contient les elements ou le complementaire n-p est aussi premier
        dim_noyau = 0
        for p in premiers_premiere_moitie:
            if premier(n - p):
                dim_noyau += 1

        ratio = dim_noyau / dim_initiale if dim_initiale > 0 else 0

        # On affiche les lignes remarquables pour observer les sauts de dimension
        if n % 10 == 0 or n == 98:
            print(f"{n}\t{dim_initiale:2d}\t\t\t{dim_noyau:2d}\t\t\t{ratio:.3f}")

if __name__ == "__main__":
analyser_dimensions(130)
```

Résultat d'exécution

```
 n        Dim(Espace Initial)      Dim(Noyau Ker R_n)       Ratio (Ker/Total)
--------------------------------------------------------------------------------
10         2                        2                       1.000
20         3                        2                       0.667
30         5                        3                       0.600
40         7                        3                       0.429
50         8                        4                       0.500
60         9                        6                       0.667
70        10                        5                       0.500
80        11                        4                       0.364
90        13                        9                       0.692
98        14                        3                       0.214
100       14                        6                       0.429
110       15                        6                       0.400
120       16                       12                       0.750
130       17                        7                       0.412
```