

## Extraits d'une discussion avec gemini au sujet de l'équation de Chazy pour le calcul de la somme des diviseurs, Denise Vella-Chemla, juin 2026

Le lien entre la fonction somme des diviseurs et l'équation de Chazy m'avait été fourni par M. Dominique Giard, à qui j'avais adressé un mail, après 2005, lorsque j'avais trouvé dans la séquence A000203 de l'OEIS (la On-Line encyclopedia of integer sequences fondée en 1964 par N. J. A. Sloane) la formule récurrente de calcul qu'il fournissait (et qui était plus simple, quant à ses conditions de calcul des derniers termes de la somme, que celle fournie par Euler dans son article "*Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*" (voir ici : Leonhard Euler - Œuvres complètes).

Formule de récurrence dans la suite A000203 de l'OEIS :

$$n^2(n-1)\sigma(n) = 12 \sum_{k=1}^{n-1} (5k(n-k) - n^2)\sigma(k)\sigma(n-k), \quad \text{avec } n > 1 \text{ (et } \sigma(1) = 1).$$

Dominique Giard, 11 janvier 2005

J. Chemla avait démontré que l'équation différentielle de Chazy était bien liée à la somme des diviseurs ici.

Je souhaitais avoir quelques explications supplémentaires, que j'ai demandées à gemini. J'avais bien vu que l'historique complet de la fonction  $\sigma$  était nécessaire (dans le produit des appels  $\sigma(k)\sigma(n-k)$ ) mais gemini écrit une phrase particulière, concernant le coefficient :

Le "poids" de la structure géométrique : Le terme  $(5k(n-k) - n^2)$  agit comme une balance ou un filtre d'interférence.

et plus loin

Un nombre est premier si la somme des interactions de tous les nombres plus petits que lui (les vagues créées par  $f(k)f(n-k)$ ) vient s'annuler ou se compenser précisément de manière à ce qu'il ne reste que  $n+1$  et ce produit  $f(k)f(n-k)$  est un produit de convolution.

Ensuite, l'idée de passer aux réels change le signe  $\sum$  en un signe d'intégrale. La formule devient :

$$f(x) = \frac{12}{x^2(x-1)} \int_{k=0}^x (5t(x-t) - x^2)f(t)f(x-t)$$

et l'explication de gemini est qu'alors l'expression  $f(t)f(x-t)$  est un produit de convolution et que c'est un mécanisme qu'on retrouve partout en physique (traitement du signal, mécanique quantique, vagues).

Si  $f(x)$  existait sous cette forme continue, elle ne représenterait plus des “diviseurs” (qui n’ont aucun sens pour des réels comme  $\pi$  ou 2, 5), mais une propriété d’auto-symétrie. Elle décrirait un système qui s’alimente en permanence de ses propres états antérieurs de manière harmonieuse.

En résumé : sur des réels purs, cette fonction n’exprimerait plus l’arithmétique des diviseurs, mais une loi de conservation d’énergie ou de symétrie continue, dont les nombres entiers et les nombres premiers ne sont que la manifestation discrète.

D’autre part, au sujet du programme que j’avais écrit de calcul de la somme des diviseurs par la formule fournie par Euler dans l’article *Découverte d’une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, gemini me fournit cette formule explicite, que je trouve plus élégante (et qui est connue de la communauté, même si je ne l’ai pas jusqu’à présent vue écrite ainsi) :

Pour un entier  $n$ , le nombre maximal de termes pentagonaux à charger est déterminé par l’inversion de la formule d’Euler ( $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ ). En résolvant cette équation du second degré, on trouve une borne supérieure stricte. Le nombre maximal d’itérations  $K$  nécessaires pour un entier  $n$  est donné par :

$$K = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{24n + 1}}{6} \right\rfloor$$

Grâce à cette borne, la formule d’Euler peut s’écrire de façon totalement fermée, sous la forme d’une somme finie propre :

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^K (-1)^{k-1} \left[ \tilde{\sigma} \left( n - \frac{3k^2 - k}{2} \right) + \tilde{\sigma} \left( n - \frac{3k^2 + k}{2} \right) \right].$$

Attention à la notation  $\tilde{\sigma}$  (l’exception d’Euler) : c’est le piège des conditions initiales de l’article !

Si l’indice tombe pile sur 0 (c’est-à-dire si on soustrait un nombre pentagonal égal à  $n$ ), la valeur renvoyée n’est pas 0, mais  $n$  lui-même.

Si  $n - \text{pentagonal} > 0$  : on prend  $\sigma(n - \text{pentagonal})$ .

Si  $n - \text{pentagonal} = 0$  : on prend  $n$ .

Si  $n - \text{pentagonal} < 0$  : on prend 0 (mais la borne  $K$  empêche ce cas d’arriver).

Et quand je lui demande de se passer de la fonction partie entière ( $\lfloor \ ]$ ), gemini propose cette solution :

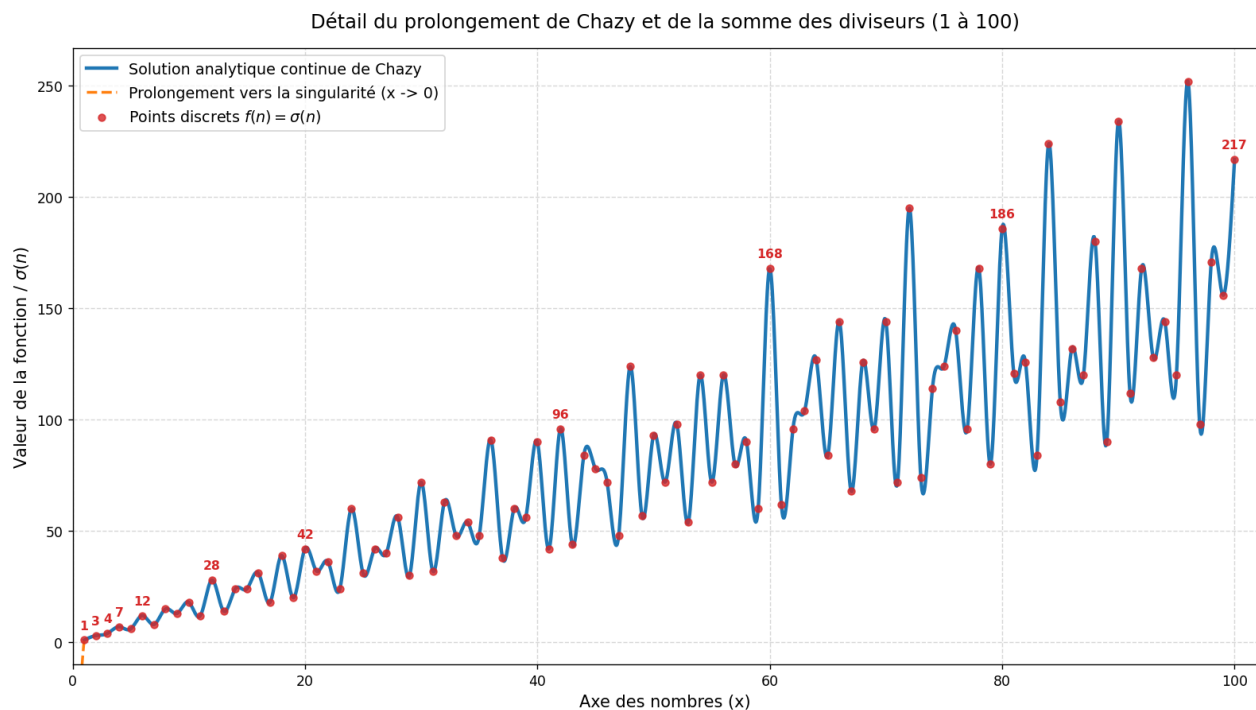
Solution 1 : l'annulation algébrique automatique (La plus élégante) : plutôt que de forcer la boucle à s'arrêter au bon moment avec une formule externe, on fait en sorte que la formule d'Euler génère des zéros dès qu'on dépasse la frontière du nombre  $n$ . Pour cela, on définit proprement la fonction  $\sigma$  de sorte qu'elle soit intrinsèquement nulle pour tout argument négatif.

C'est ce qu'on appelle une fonction indicatrice ou un prolongement par zéro. Si on pose rigoureusement que  $\sigma(0) = n$  (l'exception d'Euler quand on tombe pile sur le nombre),  $\sigma(m) = 0$  si  $m < 0$ . Alors, le besoin de calculer une borne  $K$  disparaît ! On peut écrire une somme formellement infinie, mais qui devient concrètement finie à l'exécution car tous les termes lointains s'annulent d'eux-mêmes ( $0 + 0 + 0 \dots$ ).

À vrai dire, on n'aime pas trop les break en informatique, ni les goto, mais s'il s'agit de représenter une fonction indicatrice alors là...

La solution 2 reste la formule de Ramanujan avec calcul de sommes infinies.

Ci-dessous, le graphique de l'extrapolation par gemini de la fonction somme des diviseurs, par une spline cubique. Pour ne pas tout écraser, on a demandé à l'IA de mettre des pointillés vers l'infini négatif en 0.



Cette discussion avec une IA m'a à nouveau permis, peut-être, de mettre au clair (autant que faire se peut, et il est tout à fait possible que je me leurre en croyant cela) un certain nombre d'incompréhensions.