Décomposants de Goldbach dans le plan complexe (Denise Vella-Chemla, 8.7.2024)

On partage ci-dessous les graphiques obtenus par programme, qui montrent les parties réelle et imaginaire des produits :

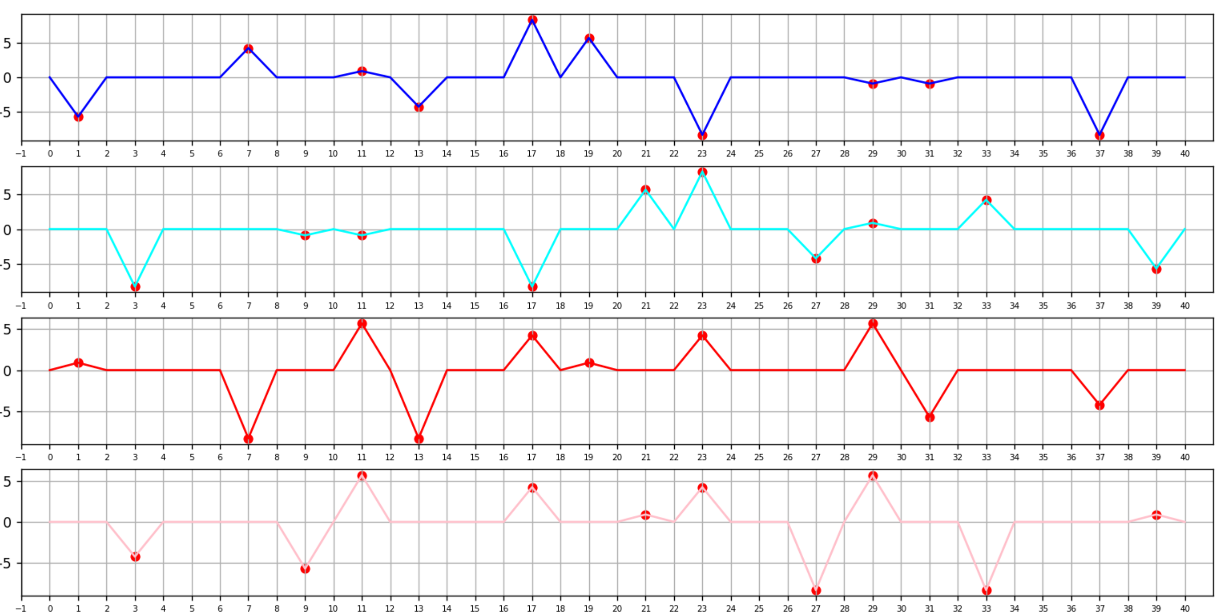
$$A = \prod_{\substack{x \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq n \\ 2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \left(1 - \exp\left(\frac{2i\pi x}{p}\right)\right)$$

et

$$A' = \prod_{\substack{x \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq n \\ 2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \left(1 - \exp\left(\frac{2i\pi (n-x)}{p}\right)\right).$$

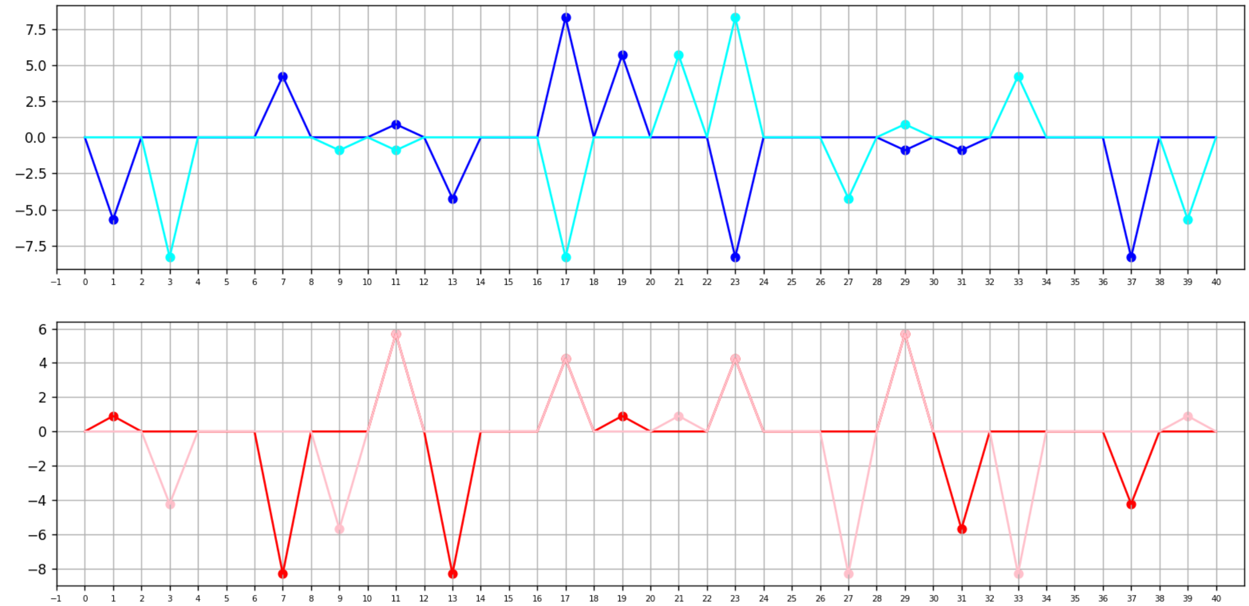
Dans le premier graphique, en bleu, la partie réelle $\mathfrak{Re}(A)$, en cyan, la partie réelle $\mathfrak{Re}(A')$, symétrique par rapport à 0 de la courbe bleue (par l'application $x \mapsto n - x$). En rouge, la partie imaginaire $\mathfrak{Im}(A)$, en rose, la partie imaginaire $\mathfrak{Im}(A')$, symétrique par rapport à 0 de la courbe rouge (par l'application $x \mapsto n - x$).

Sur toutes les courbes, on note par des petits cercles pleins les points de la courbe dont l'abscisse x est un entier impair d'image strictement positive.

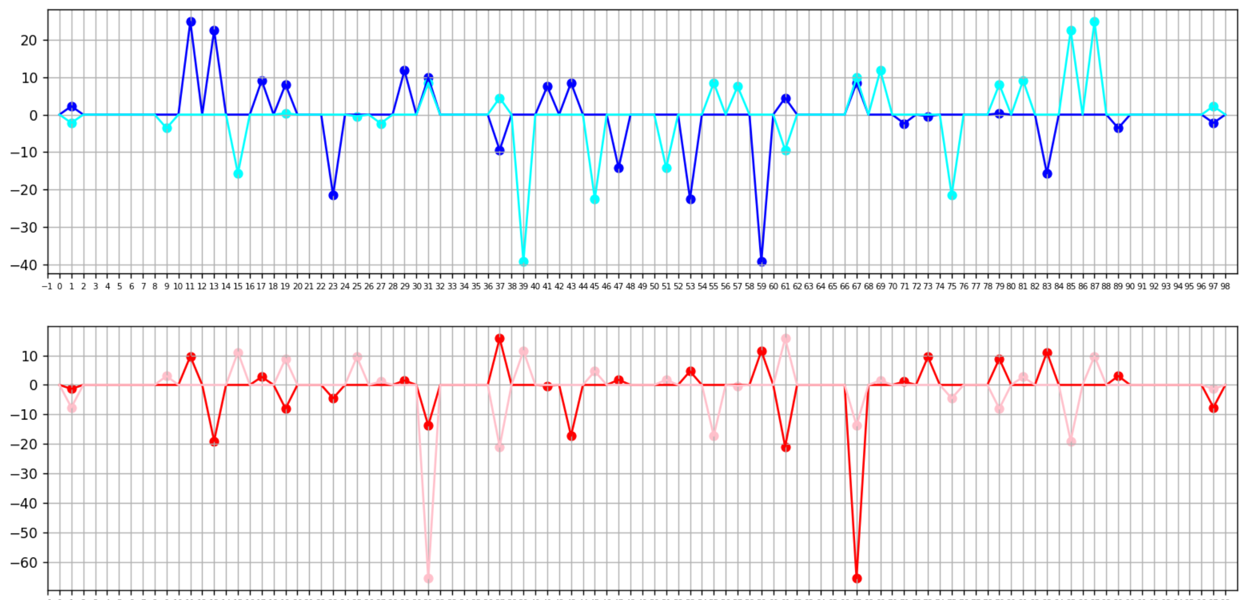


On regroupe dorénavant sur un même graphique les courbes et leur courbe symétrique.

Pour $n = 40$ ci-dessous, apparaissent sur les courbes bleu et cyan les décompositions de Goldbach $11 + 29$ et $17 + 23$.

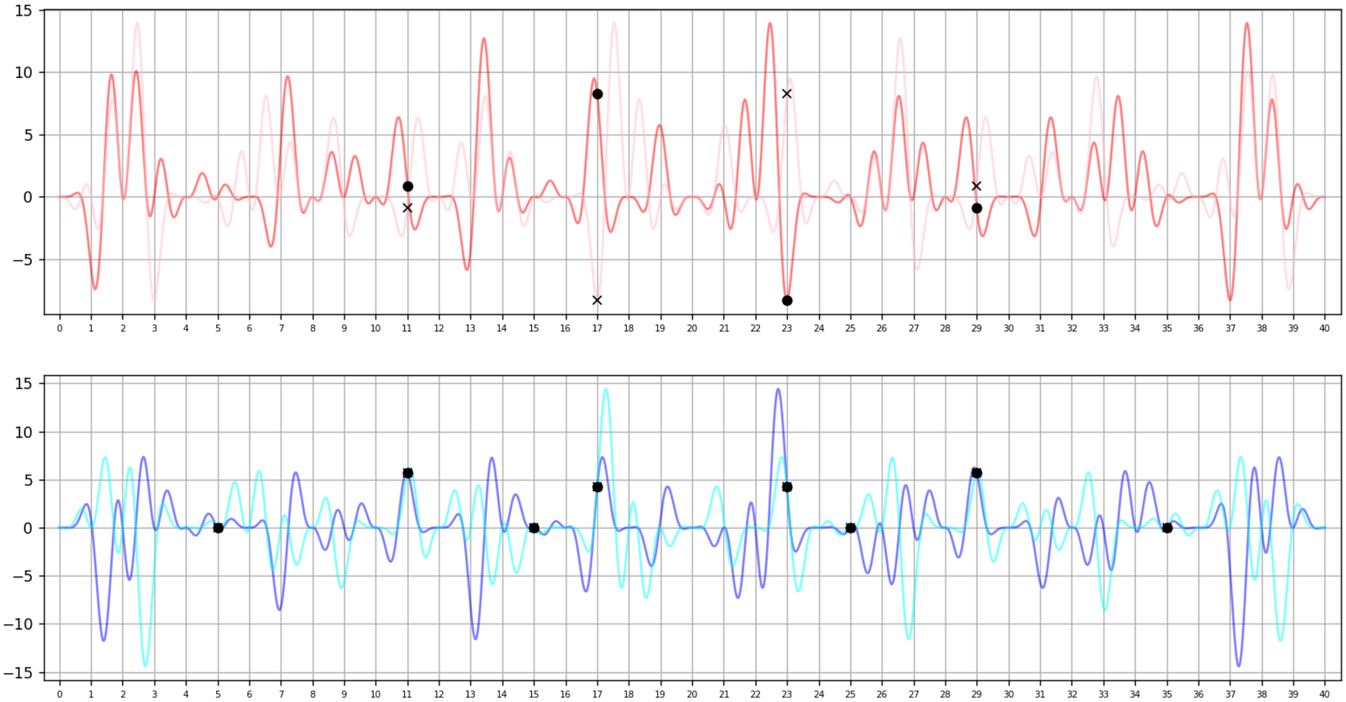


Pour $n = 98$ ci-dessous, apparaissent les décompositions de Goldbach $19 + 79$, $31 + 67$ et $37 + 61$ de 98.

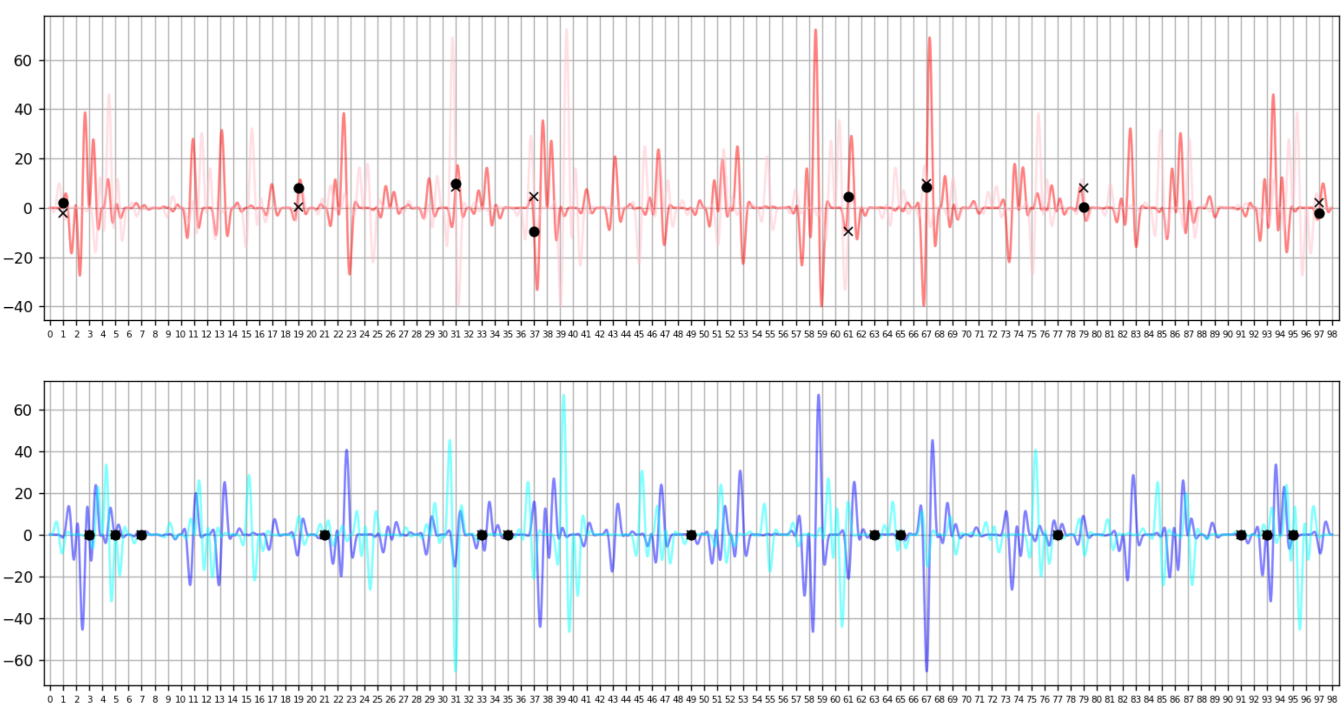


On “lisse” maintenant les courbes, en intercalant de nouveaux points dans leur domaine de définition, i.e. en intercalant entre les images des entiers les images de nombres rationnels de plus en plus resserrés.

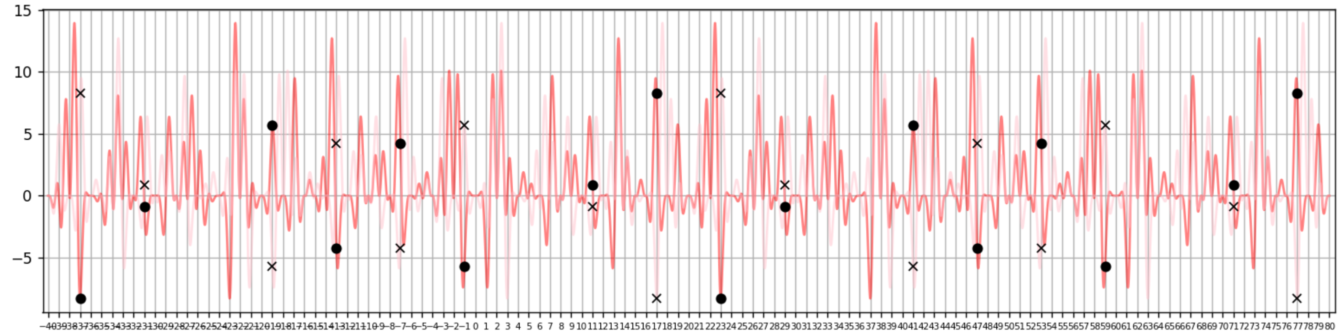
Sur les courbes bleu et cyan, on note les points tels que x et $n - x$ ont la même image. Ci-dessous les courbes continues pour le cas $n = 40$.

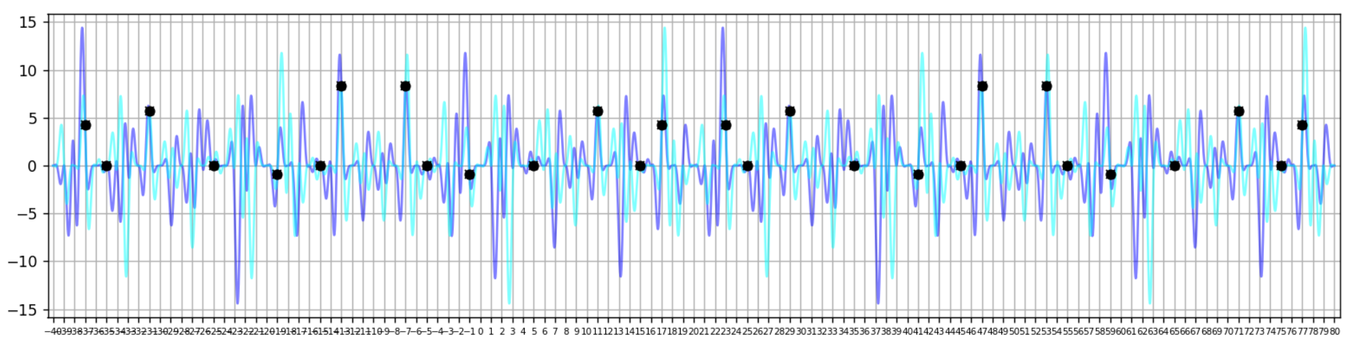


Voyons les courbes lorsque $n = 98$.



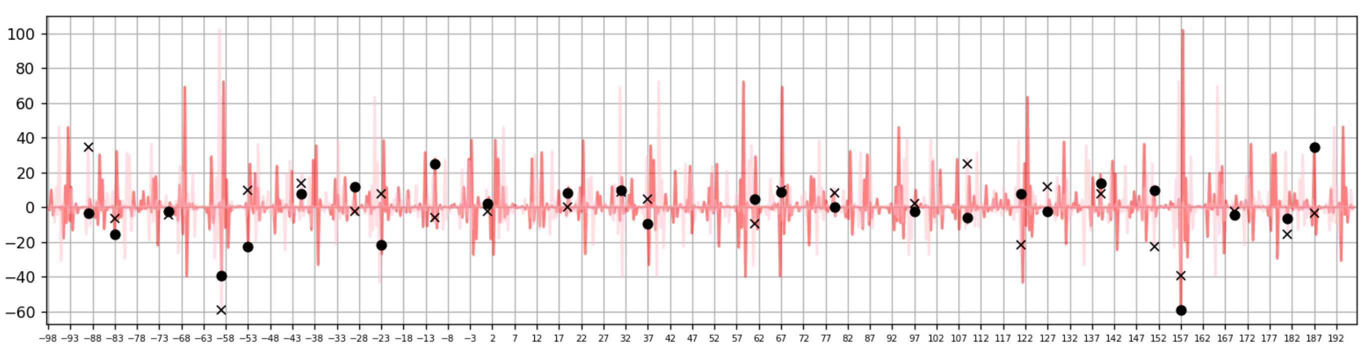
On peut d'autre part étendre l'intervalle d'étude des décompositions. Ci-dessous, le cas $n = 40$.





Pour $n = 40$, sur un intervalle étendu $[-40, 80]$, on trouve de nouvelles décompositions de Goldbach qui font intervenir des nombres premiers impairs négatifs $(-7)+47, (-13)+53, (-19)+59, (-31)+71$. La décomposition $(-37)+77$ n'est pas une décomposition de Goldbach de 40 car 77 est divisible par 7 qui est un nombre premier supérieur à la racine carrée de 40.

Voyons le cas $n = 98$.



Pour $n = 98$, sur un intervalle étendu (moins bien lisible) $[-98, 196]$, on trouve de nouvelles décompositions de Goldbach qui font intervenir des nombres impairs négatifs $(-11)+109, (-29)+127, (-41)+139, (-53)+151, (-59)+157, (-83)+181$. Les décompositions $(-23)+121, (-71)+169$ et $(-89)+187$ ne sont pas des décompositions de Goldbach de 98 (bien que notées sur le graphique comme points d'abscisse impaire et d'ordonnée strictement positive).[1]

[1]On trouvera les courbes fournissant les décompositions de Goldbach des nombres compris entre 6 et 100 dans le fichier https://denisevellachemla.eu/toutes-courbes.pdf.