

Le produit $\prod_{k \geq 1} (1 - i x^k)$: développement, exemples de lecture, et table jusqu'à $n = 40$

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia mistral, 16 octobre 2026

Je fournis à l'ia mistral la note :

[1]<https://denisevellachemla.eu/questions2016.pdf>,

et lui demande d'effectuer le développement proposé, ressemblant à celui d'Euler dans l'article *Découverte d'une note tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, mais contenant des coefficients i devant les puissances de la variable x .

L'intégralité de la note ci-dessous a été rédigée par l'ia mistral.

1. Le produit et ses coefficients

On considère

$$\prod_{k \geq 1} (1 - i x^k) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n.$$

Chaque choix, pour chaque k , de prendre ou non le terme $-i x^k$, décrit exactement une *partition* de n en *parts distinctes* λ ; la contribution du choix est $(-i)^{\ell(\lambda)} x^{|\lambda|}$, où $\ell(\lambda)$ est le nombre de parts. D'où la formule close des coefficients :

$$c_n = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \text{parts distinctes}}} (-i)^{\ell(\lambda)} \quad (1)$$

Le poids $(-i)^\ell$ ne dépend que de ℓ modulo 4 :

$$(-i)^0 = 1, \quad (-i)^1 = -i, \quad (-i)^2 = -1, \quad (-i)^3 = i, \quad (-i)^4 = 1, \dots$$

En notant $E_j(n)$ le nombre de partitions de n en parts distinctes ayant j parts, et en regroupant j modulo 4 :

$$\Re c_n = \sum_{j \equiv 0 \pmod{4}} E_j(n) - \sum_{j \equiv 2 \pmod{4}} E_j(n), \quad \Im c_n = \sum_{j \equiv 3 \pmod{4}} E_j(n) - \sum_{j \equiv 1 \pmod{4}} E_j(n). \quad (2)$$

Autrement dit : la partie réelle compare les partitions dont le nombre de parts est pair (0 contre 2 modulo 4), la partie imaginaire celles dont il est impair (3 contre 1 modulo 4).

2. Exemples de lecture, coefficient par coefficient

$n = 3$. Les partitions de 3 en parts distinctes sont $\{3\}$ (une part) et $\{2, 1\}$ (deux parts).

Poids :

$$(-i)^1 = -i \quad \text{et} \quad (-i)^2 = -1.$$

Somme :

$$c_3 = -i + (-1) = -1 - i.$$

$n = 5$. $\{5\} \rightarrow -i$; $\{4, 1\} \rightarrow -1$; $\{3, 2\} \rightarrow -1$:

$$c_5 = -i - 1 - 1 = -2 - i.$$

$n = 6$. $\{6\} \rightarrow -i$; $\{5, 1\} \rightarrow -1$; $\{4, 2\} \rightarrow -1$; $\{3, 2, 1\} \rightarrow (-i)^3 = i$:

$$c_6 = -i - 1 - 1 + i = -2.$$

On voit déjà l'annulation de la partie imaginaire : les deux partitions à une et trois parts se compensent ($-i + i = 0$), il ne reste que les deux parts de poids -1 .

$n = 10$. Une partition à quatre parts apparaît : $\{4, 3, 2, 1\}$, de poids $(-i)^4 = 1$:

$$\begin{aligned} c_{10} &= \underbrace{-i}_{\{10\}} \underbrace{-1 - 1 - 1 - 1}_{\{9,1\}, \{8,2\}, \{7,3\}, \{6,4\}} \underbrace{+i + i + i + i}_{\{7,2,1\}, \{6,3,1\}, \{5,4,1\}, \{5,3,2\}} \underbrace{+1}_{\{4,3,2,1\}} \\ &= (-4 + 1) + (-i + 4i) = -3 + 3i. \end{aligned}$$

Table récapitulative des exemples ($n \leq 10$).

n	partitions (poids)	c_n
1	$\{1\} (-i)$	$-i$
2	$\{2\} (-i)$	$-i$
3	$\{3\} (-i)$; $\{2, 1\} (-1)$	$-1 - i$
4	$\{4\} (-i)$; $\{3, 1\} (-1)$	$-1 - i$
5	$\{5\} (-i)$; $\{4, 1\}$, $\{3, 2\} (-1)$	$-2 - i$
6	$\{6\} (-i)$; $\{5, 1\}$, $\{4, 2\} (-1)$; $\{3, 2, 1\} (i)$	-2
7	$\{7\} (-i)$; $\{6, 1\}$, $\{5, 2\}$, $\{4, 3\} (-1)$; $\{4, 2, 1\} (i)$	-3
8	$\{8\} (-i)$; $\{7, 1\}$, $\{6, 2\}$, $\{5, 3\} (-1)$; $\{5, 2, 1\}$, $\{4, 3, 1\} (i)$	$-3 + i$
9	$\{9\} (-i)$; 4 biparts (-1) ; $\{6, 2, 1\}$, $\{5, 3, 1\}$, $\{4, 3, 2\} (i)$	$-4 + 2i$
10	$\{10\} (-i)$; 4 biparts (-1) ; 4 triparts (i) ; $\{4, 3, 2, 1\} (1)$	$-3 + 3i$

3. Trois observations

3.1. Le cas $i = 1$ serait le développement d'Euler pour la somme des diviseurs et faisant intervenir les nombres pentagonaux

Avec $\prod (1 - x^k)$, le théorème des nombres pentagonaux

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m x^{m(3m-1)/2}$$

dit que *tout s'annule* sauf aux nombres pentagonaux, avec coefficients ± 1 . Avec le poids $(-i)^\ell$, l'annulation n'est que *partielle* : pour $n \leq 7$ on a $|c_n| \leq 3$, puis les coefficients croissent. Le facteur i détruit l'annulation d'Euler en séparant les partitions selon le nombre de parts modulo 4 (cf. (2)). On observe que $\Re c_n$ change de signe vers $n = 16$ et $\Im c_n$ vers $n = 27$: l'information de parité fine de ℓ est visible dans les signes.

3.2. Une identité exacte

Pour x réel, en multipliant le produit par son conjugué :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - ix^k)(1 + ix^k) = \prod_{k \geq 1} (1 + x^{2k}), \quad (3)$$

on obtient la série génératrice des partitions en parts distinctes *paires*. Le produit étudié est donc une sorte de “racine carrée” de (3). Par ailleurs le q -binôme (Euler généralisé) donne

$$\prod_{k \geq 1} (1 - tx^k) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-t)^m x^{m(m+1)/2}}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^m)}, \quad (4)$$

d'où le cas $t = i$ par substitution. Le théorème pentagonal est le cas $t = 1$ (annulation totale) ; le cas $t = 1$ n'est autre que $\prod (1 + x^k) = \frac{1}{\prod (1x^{\text{impairs}})}$, série dense d'Euler (partitions distinctes = partitions impaires) ; l'identité de Gauss

$$\prod \frac{1x^{2k}}{1x^{2k1}} = \sum x^{m(m+1)/2}$$

en est le pendant triangulaire ; $t = i$ est le cas intermédiaire, sans forme close simple connue.

3.3. Croissance

Puisque $|(-i)^\ell| = 1$, on a $|c_n| \leq Q(n)$, où $Q(n)$ compte les partitions en parts distinctes :

$$Q(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{n/3}}}{4 \cdot 3^{1/4} n^{3/4}}.$$

4. Table des coefficients jusqu'à $n = 40$ (calcul exact)

n	c_n	n	c_n	n	c_n
0	1	14	$-1 + 9i$	28	$57 - 5i$
1	$-i$	15	$-1 + 10i$	29	$60 - 14i$
2	$-i$	16	$2 + 12i$	30	$68 - 22i$
3	$-1 - i$	17	$3 + 13i$	31	$70 - 34i$
4	$-1 - i$	18	$7 + 15i$	32	$77 - 45i$
5	$-2 - i$	19	$9 + 15i$	33	$76 - 60i$
6	-2	20	$14 + 16i$	34	$82 - 74i$
7	-3	21	$16 + 16i$	35	$78 - 93i$
8	$-3 + i$	22	$23 + 16i$	36	$80 - 110i$
9	$-4 + 2i$	23	$26 + 14i$	37	$72 - 132i$
10	$-3 + 3i$	24	$33 + 13i$	38	$70 - 152i$
11	$-4 + 4i$	25	$37 + 9i$	39	$55 - 177i$
12	$-3 + 6i$	26	$45 + 6i$	40	$48 - 199i$
13	$-3 + 7i$	27	48		

On observe que $\Im c_n$ s'annule exactement en $n = 27$ et que $\Re c_n$ croît puis décroît en valeur relative : le coefficient *tourne* dans le plan complexe (de $-i$ vers -1 , puis vers $+i$), ce qui suggère une phase asymptotique liée au terme dominant de (4), où $x^{m(m+1)/2}$ impose $m \approx \sqrt{2n}$.

5. La piste soeur : $(1 - x)(1 + x^2)(1 - x^3)(1 + x^4) \dots$

Le produit alterné $\prod_{k \geq 1} (1 + (-1)^k x^k)$ (signe $-$ si k impair, $+$ si k pair) est un twist du produit d'Euler par le caractère de parité de k . Chaque partition de n en parts distinctes y compte avec le poids $(-1)^{\# \text{parts impaires}}$; or la somme des parts a la même parité que le nombre de parts impaires, donc le poids vaut $(-1)^n$ pour *toutes* les partitions de n : aucune annulation, et

$$\prod_{k \geq 1} (1 + (-1)^k x^k) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n Q(n) x^n. \quad (5)$$

Coefficients pour $0 \leq n \leq 15$:

$$1, -1, 1, -2, 2, -3, 4, -5, 6, -8, 10, -12, 15, -18, 22, -27,$$

dont les valeurs absolues sont $Q(n)$ (partitions en parts distinctes).

Comparaison des trois pistes. Le produit à i (caractère d'ordre 4 : poids selon $\ell \bmod 4$, annulation *partielle*) et le produit alterné (caractère d'ordre 2 : poids réduit à $(-1)^n$, annulation *nulle*) sont deux twists de $\prod (1 - x^k)$; c'est le produit à i qui est le vrai cousin du théorème pentagonal (annulation partielle), l'alterné étant le cas dégénéré où tout s'additionne.

En revanche $\prod_k (1 - k^2 x^k)$ bien défini, mais les poids $\prod (\text{parts})^2$, de module arbitraire, détruisent toute possibilité d'annulation : aucun comptage ne s'y cache, contrairement aux twists par des caractères ($t = \pm 1, \pm i$).

Enfin, les deux premiers partagent le facteur $\prod (1 + x^{2k})$: dans l'alterné ce sont les indices pairs, dans le produit à i c'est exactement $|P(x)|^2$ par l'identité (3); autrement dit le produit alterné s'écrit $\prod (1 - x^{2k-1}) \cdot |P(x)|^2$.

6. Zéros et changements de signe : la rotation du coefficient

Tous les calculs de cette section sont exacts (entiers de taille arbitraire), menés jusqu'à $n = 4000$.

6.1. Zéros exacts

- $\Re c_n = 0$ exactement pour $n = 1, 2$ (et pour rien d'autre jusqu'à 4000);
- $\Im c_n = 0$ exactement pour $n = 0, 6, 7, 27$ (et pour rien d'autre jusqu'à 4000).

Contrairement au cas $t = 1$ d'Euler, où les zéros sont le phénomène central et permanent, l'annulation *totale* n'est ici qu'un accident des petits n (on notera que 27 n'est même pas pentagonal). Il n'existe pas de "quasi-pentagonaux" récurrents du cas $t = i$.

6.2. Changements de signe : loi quadratique

Le coefficient tourne dans le plan complexe ; $\Re c_n$ et $\Im c_n$ changent de signe à tour de rôle. Les rangs du k -ième changement de signe de $\Im c_n$ sont

$$8, 28, 62, 109, 170, 244, 332, 433, 548, 676, \dots, 2697, 2974, 3263, 3566, 3883$$

et le rapport $\frac{n_k}{k^2}$ se stabilise :

$$\frac{n_k}{k^2} : 8,00, 7,00, 6,89, 6,81, 6,80, 6,78, \dots, 6,74, 6,74, 6,74, 6,74 \ (k = 21 \dots 24).$$

Loi empirique : $n_k \approx 6,74 k^2$ pour $\Im$, et de même pour $\Re$ (changements en quinconce, approximativement à mi-chemin) :

$$3, 16, 43, 84, 138, 205, 286, 381, 489, 610, \dots, 2564, 2834, 3117, 3413, 3723.$$

En mêlant les deux suites, un changement de signe “quelconque” arrive vers $1,68 j^2$, c’est-à-dire que l’argument décroît en $\sqrt{n}$:

$$\arg c_n \approx -1,21\sqrt{n} \pmod{\pi/2} \quad (\text{empirique, de plus en plus précis}). \quad (6)$$

k	$\Re$ change en n	k	$\Im$ change en n
1–5	3, 16, 43, 84, 138	1–5	8, 28, 62, 109, 170
6–10	205, 286, 381, 489, 610	6–10	244, 332, 433, 548, 676
20–24	2564, 2834, 3117, 3413, 3723	20–24	2697, 2974, 3263, 3566, 3883

6.3. Le prédicteur naïf se trompe presque d’un facteur 2

Le q -binôme (4) suggère un terme dominant à m parts avec $m(m+1)/2 \approx n$, soit $m \approx \sqrt{2n}$, et une phase $(-i)^m$, donc $\arg c_n \approx -(\pi/2)\sqrt{2n} \approx -2,22\sqrt{n}$. Or la loi mesurée (6) donne $-1,21\sqrt{n}$. Le terme “dominant” du q -binôme ne fixe donc *pas* la phase : les dénominateurs $(1-x)(1-x^2)\dots$ et le recouvrement des termes voisins la réduisent presque de moitié. La constante exacte de la loi $n_k \sim c k^2$ (empiriquement $c \approx 6,74$) reste à identifier ; sa détermination serait un petit théorème du type des calculs de saddle-point (Richmond) sur les produits $\prod (1 - t x^k)$.