

Distinguer $2 + 3$ de $3 + 2$: segments, commutativité et structures plus riches que les simples valeurs

Denise Vella-Chemla pilotant mistral-vibe, 6 octobre 2026

Résumé

Transcription d'une conversation humain/ia : comment distinguer $2 + 3$ de $3 + 2$ alors même qu'ils sont égaux, via la représentation par des segments marqués ; formalisation mathématique complète (décompositions ordonnées, quotient, catégorie des ensembles ordonnés), puis extension au produit (2×3 contre 3×2) et à l'exponentiation (2^3 contre 3^2).

1. Question initiale

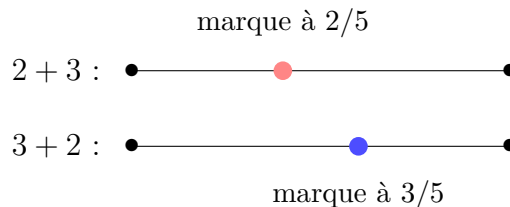
Comment pourrait-on distinguer $2 + 3$ de $3 + 2$? Je sais qu'ils sont égaux, mais représentés par un segment avec point central, les deux sommes seraient représentées par des segments différents.

1.1. Réponse : la position de la marque

Les deux sommes sont *égales numériquement* (même longueur totale, 5), mais leur *structure interne* les distingue.

Si on oriente le segment de gauche à droite :

- $2 + 3$: le point de séparation est à 2 unités du départ si le segment mesure 5 unités ;
- $3 + 2$: le point de séparation est à 3 unités du départ si le segment mesure 5 unités.



Trois façons de les distinguer :

1. *la position du point de coupure* : à $2/5$ dans un cas, à $3/5$ dans l'autre (si l'on considère que le segment global est de taille unité). Les deux segments sont de même longueur mais découpés différemment.
2. *la symétrie* : l'un est le retournement (miroir) de l'autre.
 $2 + 3$ et $3 + 2$ sont images l'un de l'autre par la réflexion qui échange les extrémités.
3. *les points centraux des sous-parties* : le milieu du morceau de longueur 2 est à 1 unité de l'extrémité origine du segment, celui du morceau de longueur 3 est à 3.5 de l'extrémité origine du segment ; dans la deuxième configurations, les milieux sont en 1.5 et 4 ; les milieux des sous-parties sont différents dans les deux configurations.

C'est exactement ce que formalise la *commutativité* de l'addition : $a + b = b + a$ en tant que *résultat*, mais pas en tant que *processus*. Le segment capture le résultat (la longueur 5), et c'est le placement de la marque intérieure qui capture le processus.

2. Formalisation mathématique

2.1. Le cadre : sommes ordonnées comme segments pointés

On travaille dans $(\mathbb{R}, \leq)$ muni de sa structure d'espace affine orienté (la droite).

Soit $I = [0, L]$ un segment de longueur $L = a + b$.

Définition. Une *décomposition ordonnée* de I en (a, b) est une application croissante

$$\delta_{(a,b)} : \{1, 2\} \hookrightarrow [0, a + b]$$

définie par le point de coupure :

- $\delta(1) = a$ (la marque est à la distance a de l'origine),
- les sous-segments sont $S_1 = [0, a]$ et $S_2 = [a, a + b]$.

Ainsi $2 + 3$ et $3 + 2$ sont deux objets distincts :

$$\delta_{(2,3)} : \text{marque en } 2, \quad \delta_{(3,2)} : \text{marque en } 3.$$

Ce sont deux éléments différents de l'ensemble des décompositions

$$D(5) = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a + b = 5\},$$

ensemble de cardinal 6 : $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0), (0, 5)$.

2.2. Les segments décomposés sont isomorphes au produit ordonné

L'application

$$\Phi : D(L) \longrightarrow \{\text{segments de longueur } L \text{ munis d'une marque}\},$$

$$(a, b) \longmapsto ([0, L], \text{ marque en } a)$$

est une *bijection* (à isomorphisme d'espaces affines orientés près). Autrement dit, “segment avec point de coupure” et “couple ordonné (a, b) ” sont la même structure : c'est ce qu'on appelle “isomorphes au produit ordonné”. L'ordre dans le couple encode l'orientation du segment : $(2, 3) \neq (3, 2)$ car l'application

$$\sigma : D(5) \rightarrow D(5), \quad (a, b) \mapsto (b, a)$$

est une involution *non triviale* : $\sigma(2, 3) = (3, 2) \neq (2, 3)$.

Géométriquement, σ est la réflexion $x \mapsto L - x$, qui échange les extrémités.

2.3. L'égalité $2 + 3 = 3 + 2$ est une identification *postérieure*

La longueur du segment définit une fonction

$$\ell : D(L) \rightarrow \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

qui “oublie” la position de la marque. L'égalité arithmétique est alors une relation d'équivalence sur $D(L)$:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff \ell(a, b) = \ell(a', b').$$

Et $2 + 3 = 3 + 2$ signifie précisément :

$$\ell(2, 3) = \ell(3, 2), \quad [(2, 3)]_\sim = [(3, 2)]_\sim \text{ dans le quotient } D(5)/\sim.$$

Notons bien l'ordre des choses : on a d'abord des objets distincts $(2, 3)$ et $(3, 2)$, *puis* on les identifie par passage au quotient. C'est pourquoi la commutativité est un théorème (on démontre que la classe de (a, b) égale la classe de (b, a)), et non une tautologie.

2.4. Reformulation catégorique

Dans la catégorie Ord des ensembles ordonnés, la somme de deux objets est le *coproduit* :

$$2 + 3 = \bigsqcup_{\text{Ord}} \{0 < 1\} \sqcup \{0 < 1 < 2\}$$

avec l'ordre qui met tout élément de 2 avant tout élément de 3.

Ce coproduit ordonné *n'est pas symétrique* en toute généralité : le diagramme d'échange est

$$2 \sqcup 3 \xrightarrow{\sigma} 3 \sqcup 2$$

et dans Ord , σ n'est pas un isomorphisme d'ordre entre les coproduits *pré-quotientés* - c'est un isomorphisme seulement après application du foncteur d'oubli $U : \text{Ord} \rightarrow \text{Set}$, qui efface la structure :

$$U(2 \sqcup 3) \cong U(3 \sqcup 2) \cong 5.$$

On retrouve exactement l'intuition initiale : la *flèche d'oubli* U est le passage du segment marqué au segment nu, et l'égalité arithmétique vit dans la catégorie appauvrie, pas dans la catégorie riche.

2.5. Résumé en une ligne

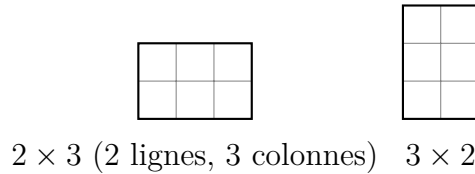
$$\underbrace{(2, 3) \neq (3, 2)}_{\text{objets distincts de } D(5)} \quad \text{mais} \quad \underbrace{[(2, 3)] = [(3, 2)]}_{\text{après quotient par } \ell},$$

et le segment “avec point de coupure” est le modèle géométrique de l'objet *avant* quotient, le segment “nu” le modèle de l'objet *après* - c'est la non-trivialité de σ qui fait de la commutativité un contenu mathématique et non une évidence.

3. Extension : 2×3 contre 3×2

3.1. Représentation géométrique

Le produit se représente naturellement par un *rectangle*. Ici, contrairement à l'addition, les deux objets ont même aire (6) *et* même forme au sens strict : le rectangle 2×3 (2 lignes, 3 colonnes) et le rectangle 3×2 (3 lignes, 2 colonnes) sont *isométriques* - ils sont échangés par une rotation d'angle $\pi/2$.



3.2. Analyse structurelle

- *Cas continu (rectangles réels)* : un rectangle 2×3 et un rectangle 3×2 sont proprement *congrus* : il existe une isométrie (rotation de 90°) envoyant l'un sur l'autre. Les objets géométriques non orientés sont identiques, au point de coupure près - plus rien ne les distingue !
- *Cas discret (grilles)* : si l'on munit la grille d'une *orientation* (ordre lexicographique : ligne puis colonne), alors le carré 2×3 et le carré 3×2 redeviennent distincts : les chaînes

$$\text{Lex}(2 \times 3) : (1, 1) < (1, 2) < (1, 3) < (2, 1) < (2, 2) < (2, 3)$$

$$\text{Lex}(3 \times 2) : (1, 1) < (1, 2) < (2, 1) < (2, 2) < (3, 1) < (3, 2)$$

sont deux ordres totaux différents sur un ensemble à 6 éléments.

- *Produit d'ordres* : dans Ord , le produit catégorique de la chaîne 2 par la chaîne 3 est l'ordre produit 2×3 , et

$$2 \times 3 \cong 3 \times 2$$

sont bien isomorphes en tant qu'ensembles ordonnés - contrairement au coproduit ordonné de la section 2.4, le produit ordonné est, lui, *commutatif à isomorphisme près* : l'application $(i, j) \mapsto (j, i)$ est un isomorphisme d'ordre.

Remarque : la commutativité du produit est donc “plus facile” que celle de la somme : l'échange des coordonnées est un isomorphisme de structure, pas seulement une identification après oubli de structure. Une conséquence concrète : la transposition de matrices, $(AB)^t = B^t A^t$, exploite exactement cet isomorphisme $(i, j) \mapsto (j, i)$.

4. Extension : 2^3 contre 3^2

4.1. Les valeurs

Ici, la non-commutativité devient *visible sur la valeur elle-même* :

$$2^3 = 8 \quad \text{tandis que} \quad 3^2 = 9, \quad 8 \neq 9.$$

C'est le phénomène le plus frappant de la série : l'addition et la multiplication sont commutatives, l'exponentiation ne l'est pas.

4.2. Représentations structurelles

Les deux objets ont des structures entièrement différentes :

- 2^3 est le nombre d'*applications* d'un ensemble à 3 éléments vers un ensemble à 2 éléments :

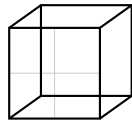
$$2^3 = \left| \{f : \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1\}\} \right| = 8$$

(trois questions binaires, $2 \times 2 \times 2$ réponses possibles). C'est un *cube* : le treillis $2 \times 2 \times 2$.

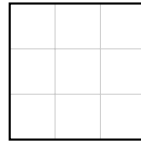
- 3^2 est le nombre d'applications d'un ensemble à 2 éléments vers un ensemble à 3 éléments :

$$3^2 = \left| \{f : \{a, b\} \rightarrow \{0, 1, 2\}\} \right| = 9$$

(deux questions ternaires, carré 3×3).



$2^3 = 8$: cube



$3^2 = 9$: carré

4.3. La dissymétrie fondamentale : base et exposant

Contrairement à $+$ et $\times$, les deux arguments de l'exponentiation ont des *rôles* différents :

- la *base* a décrit l'ensemble des valeurs possibles (alphabet) ;
- l'*exposant* b décrit le nombre de positions ("longueur des mots") ;
- a^b est la cardinalité de l'ensemble des *mots de longueur b sur un alphabet de taille a* : 2^3 compte les mots binaires de longueur 3 (000, 001, ..., 111), 3^2 les mots ternaires de longueur 2 (00, 01, ..., 22).

Les deux objets ne sont donc pas seulement de tailles différentes (8 contre 9), ils *ne peuvent même pas être comparés structurellement* : l'un est un produit de 3 facteurs égaux à 2 (un produit *itéré*, associatif à droite par convention), l'autre un produit de 2 facteurs égaux à 3 :

$$2^3 = 2 \times (2 \times 2), \quad 3^2 = 3 \times 3.$$

Aucune symétrie, aucune réflexion, aucune rotation n'échange les deux objets : la dissymétrie n'est plus dans la structure fine mais dans la valeur elle-même.

4.4. Hiérarchie récapitulative

$$\underbrace{2+3=3+2}_{\text{égalité, structures distinctes}} < \underbrace{2 \times 3 \cong 3 \times 2}_{\text{égalité, structures isomorphes}} < \underbrace{2^3 = 8 \neq 9 = 3^2}_{\text{inégalité des valeurs}}.$$

Plus on monte dans la hiérarchie des opérations (loi de succession : addition, multiplication, exponentiation), plus la symétrie entre les arguments se brise :

Opération	Commutative ?	Objets 2, 3	Distinction
+	oui	segments marqués différents	position de la marque
×	oui	grilles congrues	orientation de la lecture
^	non	cube contre carré	la valeur elle-même

Remarque : on retrouve la même hiérarchie en théorie des catégories : addition et multiplication des cardinaux finis correspondent à des constructions (coproduit, produit) qui sont commutatives à *isomorphisme près* dans Set, tandis que l'exponentiation correspond au foncteur Hom : $B^A = \text{Hom}(A, B)$, foncteur *contravariant* en A et *covariant* en B - la dissymétrie des rôles est inscrite dans la variance même du foncteur.