Des formes (Denise Vella-Chemla, 27.9.2020)

On voudrait fournir ici des visualisations produites par de multiples expérimentations informatiques, qui nous semblent bien faire appréhender le lien nombre-forme. Ces visualisations commencent par surprendre, puis ce qui est découvert *de visu* peut ensuite être rationnellement compris (sans pour autant qu'on le démontre).

Dernièrement, on a choisi de représenter les nombres par des points sur un disque "normalisé". On se place dans une sorte de "base de représentation", un ensemble E $= \{b_1, b_2, \ldots\}$ de nombres non obligatoirement premiers, et selon lesquels vont être calculés les restes modulaires des nombres successifs. On représente alors géométriquement chaque nombre entier x (inférieur à une certaine valeur) par sa somme de complexes associée :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{k=|E|} e^{\frac{2i\pi(x \bmod b_k)}{b_k}}$$

Les programmes utilisés sont une variation du programme python ci-dessous :

```
import math
from math import *
import matplotlib
from matplotlib import *
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.pyplot import *

def prime(atester):
  pastrouve = True ; k = 2 ;
  if (atester in [0,1]): return False ;
  if (atester in [2,3,5,7]): return True ;
  while (pastrouve):
    if ((k * k) > atester): return True
    else:
      if ((atester % k) == 0): return False
      else: k=k+1

n = 42*42 ; x = 1 ; xmax = 100 ; fig = plt.figure() ; ax = fig.gca() ;
Ens = [41,43]
nbprime = len(Ens) + 0.25 ; print(str(nbprime))
ax.set_xlim((-1)*nbprime*xmax-10,nbprime*xmax+10) ;
ax.set_ylim((-1)*nbprime*xmax-10,nbprime*xmax+10)
cercle = plt.Circle((0,0), nbprime*xmax, fill=False)
ax.add_artist(cercle)

#plt.plot(0, 0, 'black', marker='*', markersize=8)
xprec,yprec= 0, 0
while x <= n:
  x0, y0 = 0, 0
  for element in Ens:
    t = 2*pi*(x % element)/element
    x0 = x0 + xmax*math.cos(t)
    y0 = y0 + xmax*math.sin(t)
  #print(str(x0)+'   '+str(y0))
  if (prime(x)):
    plt.plot(x0, y0, 'r', marker='o', markersize=1)
    ax.text(x0, y0, str(x), color='r', fontsize=8, ha='right', alpha=0.8)
  #else:
    #plt.plot(x0, y0, 'g', marker='o', markersize=1)
    #ax.text(x0, y0, str(x), color='g', fontsize=8, ha='right', alpha=0.8)
  #if (x != 1):
    #if (x <= 42*42/2):
      #ax.plot([xprec,x0],[yprec,y0],'red', alpha=0.25)
    #else:
      #ax.plot([xprec,x0],[yprec,y0],'blue', alpha=0.25)
  xprec = x0
  yprec = y0
  ax.set_aspect('equal')
  x = x+1
plt.show()
sys.exit(0)
```

Si on prend E $= \{3, 103\}$, et que l'on visualise successivement sur les trois dessins ci-dessous les nombres jusqu'à 103, puis jusqu'à 206, et jusqu'à 309, on obtient :

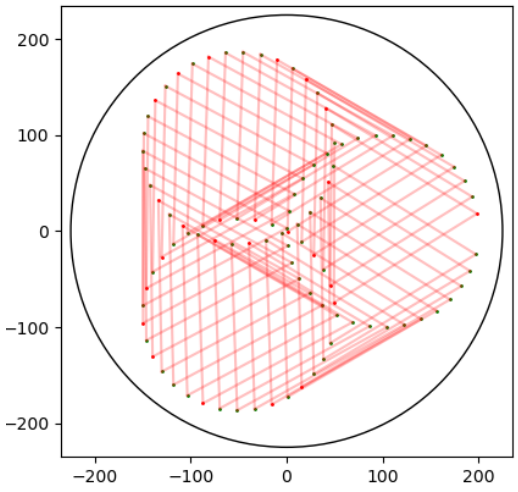

Fig. 1 : x < 103, E = {3,103}

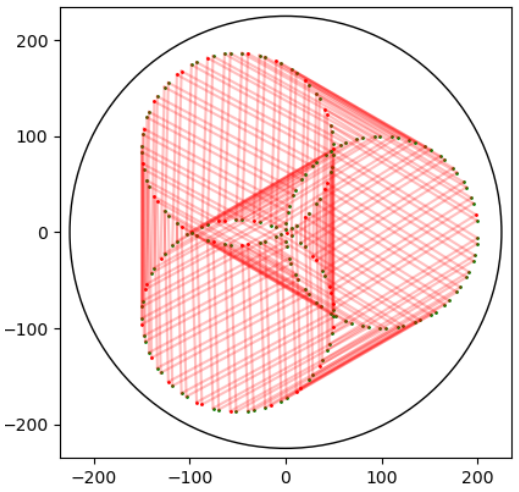

Fig. 2 : x < 206, E = {3,103}

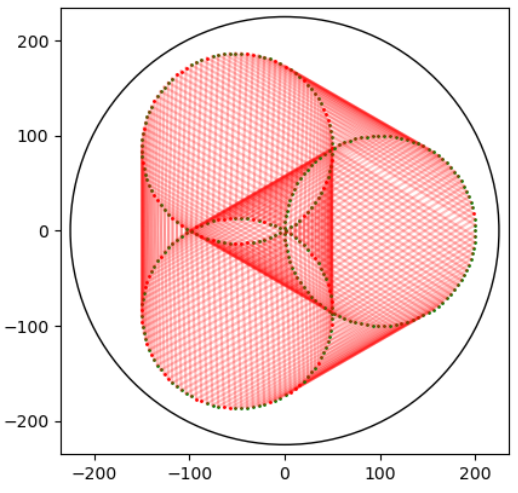

Fig. 3 : x < 309, E = {3,103}

En haut à gauche, il y a les nombres de la forme $3x+1$, en bas à gauche les nombres de la forme $3x+2$ et à droite les multiples de 3. Le parcours général pour passer d'un nombre au suivant suit la forme :

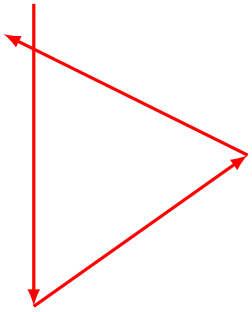

Fig. 4 : le "motif" de base parcouru dans les Figures 1, 2 et 3

Les trois cercles sont d'abord remplis au tiers de leur "espace", puis aux 2/3, puis complètement.

À l'origine de ces expérimentations, il y a le fait qu'on pensait que la démonstration qu'Alain Connes avait fournie pour le théorème de Morley était peut-être généralisable à tout polygone régulier quel qu'en soit le nombre de côtés : on avait cet espoir d'établir un petit lien "nombre, forme" (en oubliant grandeur mais elle y est par les racines de l'unité) en mettant en correspondance un polygone à neuf côtés, avec les trois triangles qui le constituent, en utilisant les racines de l'unité sur les polygones en question. Du côté des polynômes, au nombre 9 par exemple correspond le polynôme $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$ et de même qu'on a $9=3\times 3$, on a du côté des polynômes le fait qu'on peut factoriser : $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$ en $(1+x+x^2)+x^3(1+x+x^2)+x^6(1+x+x^2)$ et on voit ainsi que du côté des formes, on peut mettre des triangles dans le 9-gone. Cette idée est très naturelle et montre bien que "faire 9 fois un truc", c'est simplement "faire 3 fois un truc plus petit qui lui-même consiste à faire 3 fois un truc". Dans nos dessins, le truc consiste à suivre une fois le petit parcours de la figure 4.

On fournit ensuite les dessins en prenant $\mathrm{E}=\{5,103\}$ jusqu'à 515 et à droite, en ne "plottant" que les positions des seuls nombres premiers.

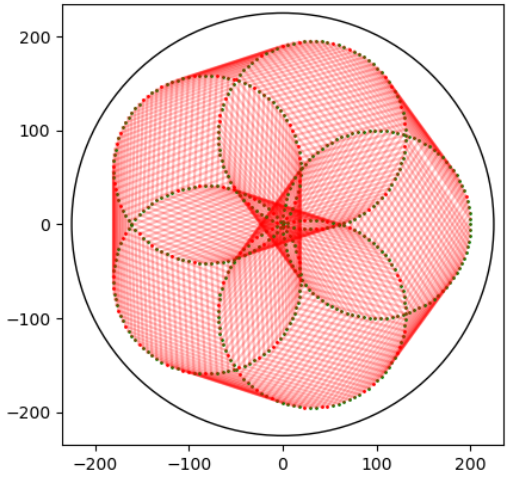

Fig. 5 : x < 515, E = {5,103}

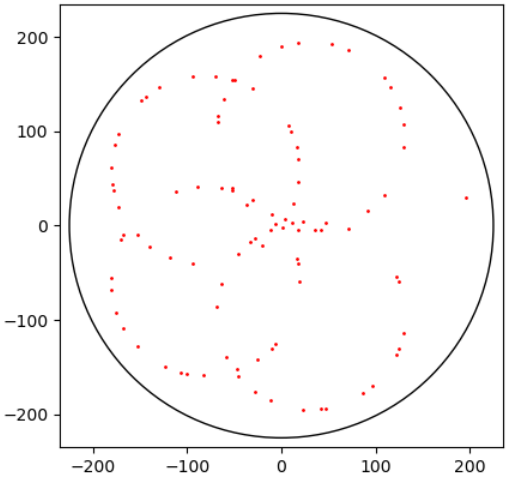

Fig. 6 : seuls les premiers, E = {5,103}

Prenons maintenant $\mathrm{E}=\{11,13\}$. On détecte bien la périodicité normale des restes qui fait que l'on "revient au début" pour le nombre $144=12\times 12$, qui est le nombre qui respecte le système de congruences

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod{11} \\ x\equiv 1 \pmod{13} \end{cases}.$$

On a utilisé 4 couleurs pour voir l'atteinte du centre par la spirale "entrante vers 0" à 36 (elle part en rouge de 1, légèrement au nord-est), puis "repartant vers l'extérieur" jusqu'à 72 (en bleu), puis "rerentrant vers le centre" à 108 (en vert), puis (en orange) "repartant vers l'extérieur" pour rejoindre l'origine du graphique (le nombre 1, qui sera "repassé" par 144).

À droite, c'est un graphique selon la même idée exactement, si ce n'est qu'il est plus "touffu" car on a pris les restes selon les nombres premiers jumeaux 41 et 43 (et deux couleurs seulement, jusqu'à la moitié, ne laissant apparaître que la symétrie haut-bas et non la symétrie droite-gauche).

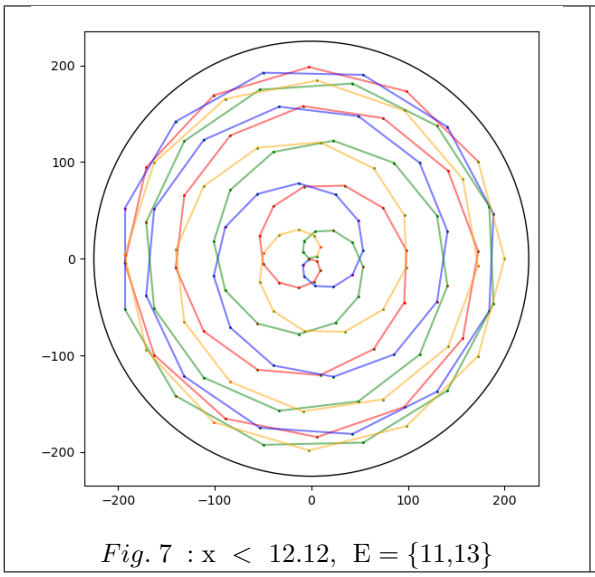

Fig. 7 : x < 12.12, E = {11,13}

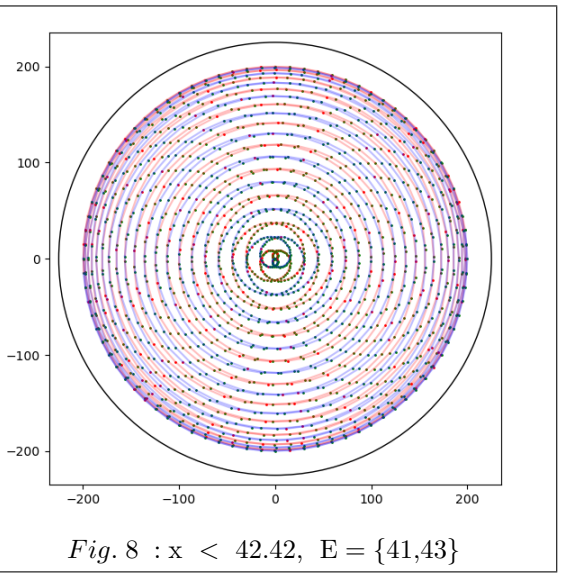

Fig. 8 : x < 42.42, E = {41,43}

Ci-dessous, on ne montre que les nombres premiers sur le dessin (mod 41, mod 43). On voit apparaître des alignements en rayons de roue de vélo, qu'on souhaite comprendre.

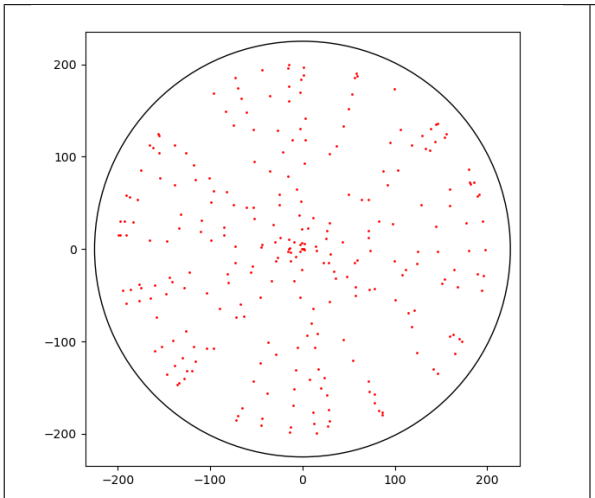

Fig. 9 : seuls les premiers, E = {41,43}

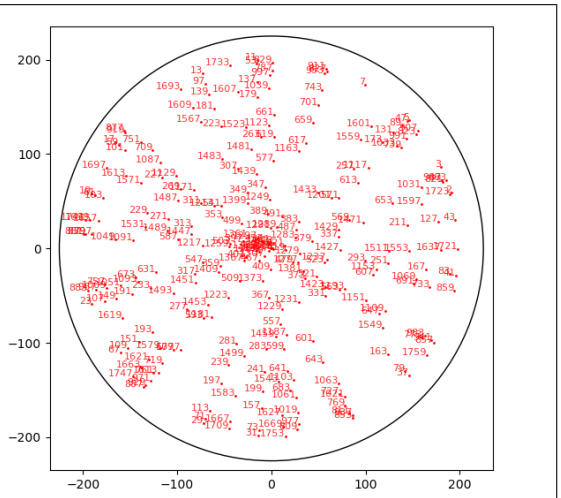

Fig. 10 : seuls les premiers, E = {41,43}

Prenons les nombres alignés 113, 197, 239 et 281 et écrivons les comme des couples de coordonnées par leurs restes modulaires selon les nombres premiers 41 et 43. Leur correspondent les couples :

$$\binom{31}{27}, \binom{33}{25}, \binom{34}{24}, \binom{35}{23}.$$

On voit que les coordonnées des points alignés sont linéairement liées. De même, pour les nombres 1511 $\binom{35}{6}$, 1553 $\binom{36}{5}$, 1637 $\binom{38}{3}$, 1721 $\binom{40}{1}$ ou enfin les nombres 1693 $\binom{12}{16}$, 1609 $\binom{10}{18}$, 1567 $\binom{9}{19}$ et 1483 $\binom{7}{21}$.

On constate également dans la visualisation de la Figure 8 (les restes modulaires utilisées sont ceux modulo 41 et 43) que du fait de la proximité des nombres premiers choisis (des nombres premiers jumeaux), les branches sortant d'un noeud sont proches, ce qui nous permet de voir parfois comme des petits doublons de points rapprochés. Étudions les propriétés de points proches : on a 179 $\binom{15}{7}$

qui est proche de 1081 $\binom{15}{6}$ d'un côté tandis qu'ailleurs, 704 $\binom{7}{16}$ est proche de 1564 $\binom{6}{16}$, à moins qu'il ne forme plutôt un petit doublon avec 1606 $\binom{7}{15}$. On découvre ces doublons *de visu*, et on constate ensuite qu'on a comme attendu $1506 - 1564 = 42$, ou bien $1564 - 704 = 860 = 43.20$ ou encore $1606 - 704 = 902 = 41.22$ La proximité de points sur le dessin correspond à des propriétés de divisibilités particulières des nombres que ces points représentent.

Ayant suffisamment étudié les nombres premiers jumeaux, on décide de passer aux nombres premiers dits "sexy", 23 et 29, pour voir se former au centre une rosace à 6 pétales (l'écart entre 23 et 29), ce qui semble logique : il y avait 2 pétales au centre pour les nombres premiers jumeaux. À droite, la visualisation habituelle ne "plotte" que les nombres premiers. Ensuite, sur la visualisation suivante (Fig. 13), on a l'idée de visualiser les restes modulaires selon d'autres bases, dont les deux nombres seraient aussi écartés de 6, mais qui ne seraient pas des nombres premiers, en l'occurrence 30 et 36 et là, la belle symétrie est brisée, seule la partie droite des schémas habituels est conservée. Comprenons ce qui se passe : quand revient-on au début ? i.e. quand retombe-t-on sur 1, c'est à dire quel est le nombre qui ait à la fois un reste de 1 quand on le divise par 30 et un reste de 1 quand on le divise par 36. 30 a pour factorisation 2.3.5 tandis que 36 est égal à $2^2.3^2$. Le nombre recherché est 180, dont la factorisation "couvre" au sens de l'inclusion ensembliste les deux factorisations de 30 et 36 : la factorisation de 180 est en effet $2^2.3^2.5$ qui "contient" en termes ensemblistes à la fois l'ensemble d'éléments comptés avec multiplicités $\{2, 3, 5\}$ et l'ensemble $\{2, 2, 3, 3\}$.

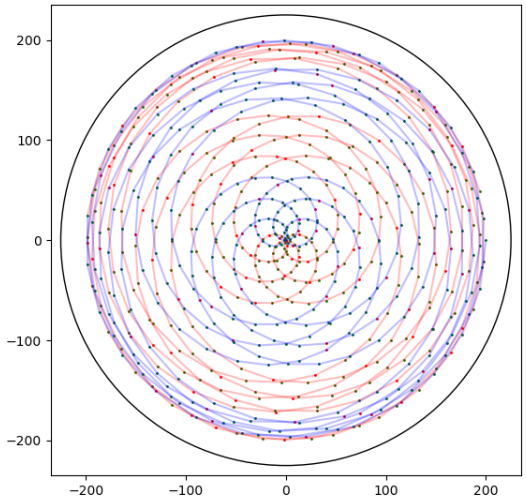

Fig. 11 : x < 23.29, E = {23,29}

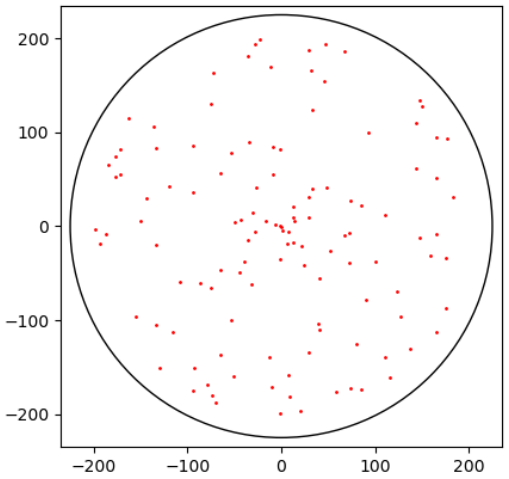

Fig. 12 : seuls les premiers, E = {23,29}

Pour comprendre encore (Fig. 14, 15 et 16), fixons-nous pour terminer sur les ensembles $E = \{3, 36\}$, puis $E = \{6, 36\}$ et enfin $E = \{12, 36\}$. On obtient les dernières visualisations ci-dessous. Ces 3 dernières visualisations illustrent également, que selon les angles que font le segment entrant en un point et le segment sortant de ce point, on a parfois une impression de continuité (de "lissité", Fig. 16) des courbes et parfois une impression d'être face à un caractère plus discret, moins lisse, plein d'aspérités et de singularités (Figures 15 et 14). On perçoit bien là la façon dont la continuité est liée à l'écart choisi entre les nombres, ce qu'on appelle l'unité de longueur, la granularité mesurant la sensation de rupture que l'on a lorsqu'on observe un dessin.

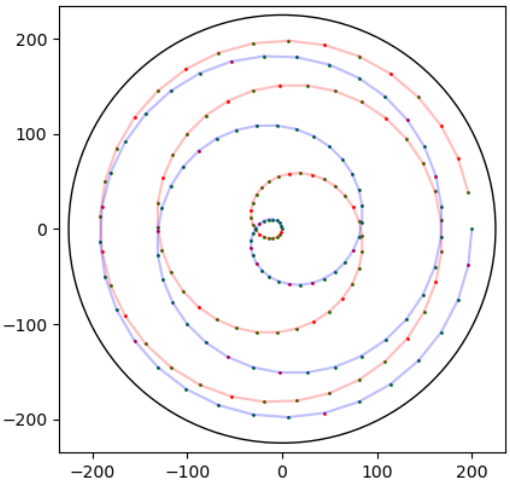

Fig. 13 : x < 180, E = {30,36}

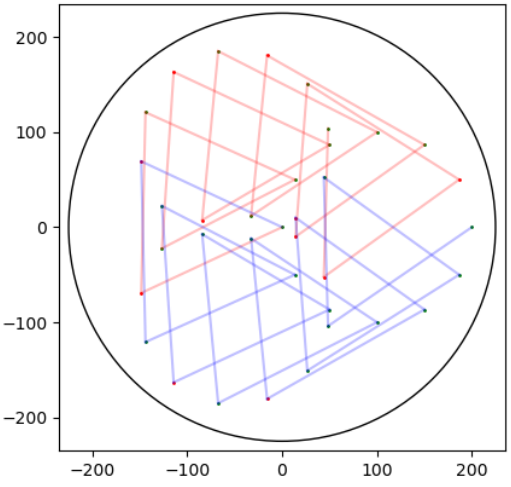

Fig. 14 : x < 36, E = {3,36}

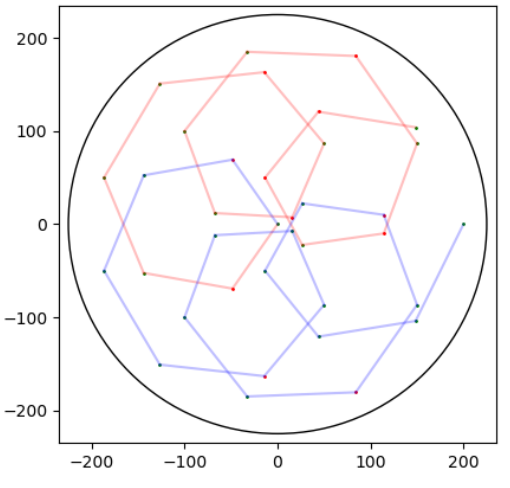

Fig. 15 : x < 36, E = {6,36}

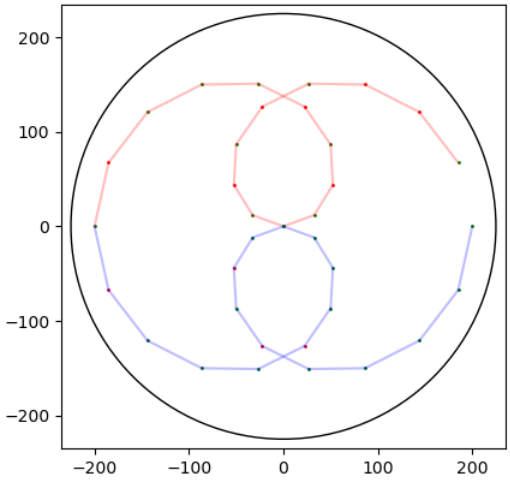

Fig. 16 : x < 36, E = {12,36}

Littérature

Alexander Grothendieck a écrit de superbes passages dans *Récoltes et semailles* sur le lien entre la forme, le nombre et la grandeur, reproduites ici : ce sont les plus belles phrases écrites sur cette quête qui anime les mathématiciens.

Traditionnellement, on distingue trois types de "qualités" ou d'"aspects" des choses de l'Univers, qui soient objet de la réflexion mathématique : ce sont le nombre[1]*, la grandeur, et la forme. On peut aussi les appeler l'aspect "arithmétique", l'aspect "métrique" (ou "analytique"), et l'aspect "géométrique" des choses. Dans la plupart des situations étudiées dans la mathématique, ces trois aspects sont présents simultanément et en interaction étroite.*

1. Il est entendu ici qu'il s'agit des "nombres" dits "entiers naturels" 0, 1, 2, 3 etc, ou (à la rigueur) des nombres (tels les nombres fractionnaires) qui s'expriment à l'aide de ceux-ci par des opérations de nature élémentaire. Ces nombres ne se prêtent pas, comme les "nombres réels", à mesurer une grandeur susceptible de variation continue, telle la distance entre deux points variables sur une droite, dans un plan ou dans l'espace.

[...]

C'est dire que s'il y a une chose en mathématique qui (depuis toujours sans doute) me fascine plus que toute autre, ce n'est ni "le nombre", ni "la grandeur", mais toujours ***la forme****. Et parmi les mille-et-un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c'est la structure cachée dans les choses mathématiques.*

La structure d'une chose n'est nullement une chose que nous puissions "inventer". Nous pouvons seulement la mettre à jour patiemment, humblement en faire connaissance, la "découvrir". S'il y a inventivité dans ce travail, et s'il nous arrive de faire œuvre de forgeron ou d'infatigable bâtisseur, ce n'est nullement pour "façonner", ou pour "bâtir", des "structures". Celles-ci ne nous ont nullement attendues pour être, et pour être exactement ce qu'elles sont ! Mais c'est pour exprimer, le plus fidèlement que nous le pouvons, ces choses que nous sommes en train de découvrir et de sonder, et cette structure réticente à se livrer, que nous essayons à tâtons, et par un langage encore balbutiant peut-être, à cerner. Ainsi sommes-nous amenés à constamment "inventer" le langage apte à exprimer de plus en plus finement la structure intime de la chose mathématique, et à "construire" à l'aide de ce langage, au fur et à mesure et de toutes pièces, les "théories" qui sont censées rendre compte de ce qui a été appréhendé et vu. Il y a là un mouvement de va-et-vient continuel, ininterrompu, entre l'appréhension des choses, et l'expression de ce qui est appréhendé, par un langage qui s'affine et se re-crée au fil du travail, sous la constante pression du besoin immédiat.

[...]

On peut dire que "le nombre" est apte à saisir la structure des agrégats "discontinus", ou "discrets" : les systèmes, souvent finis, formés d'"éléments" ou "objets" pour ainsi dire isolés les uns par rapport aux autres, sans quelque principe de "passage continu" de l'un à l'autre. "La grandeur" par contre est la qualité par excellence, susceptible de "variation continue" ; par là, elle est apte à saisir les structures et phénomènes continus : les mouvements, espaces, "variétés" en tous genres, champs de force etc. Ainsi, l'arithmétique apparaît (grosso modo) comme la science des structures discrètes, et l'analyse, comme la science des structures continues.