

1. Résumé

Nous montrons que le treillis des décompositions de Goldbach, muni des 16 règles de composition à quatre lettres, peut être interprété comme la discrétisation d'un flot de Kronecker sur un tore tronqué. Cette analogie offre une vision géométrique du problème, mais elle ne fournit pas de preuve de la conjecture de Goldbach, en raison de la nature exceptionnelle (densité nulle) de l'ensemble des nombres premiers et de l'absence de contrôle uniforme. Nous détaillons les limites mathématiques de cette approche.

2. Introduction

Dans des travaux antérieurs, Denise Vella-Chemla a introduit un treillis codant les décompositions de Goldbach par quatre lettres (a, b, c, d) selon la primalité des deux termes. Les 16 règles de composition locales, dérivées de la règle $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, y_2)$, donnent une structure de pavage du demi-plan. DVC a observé que ce pavage, une fois exprimé dans des coordonnées adaptées, rappelle la dynamique du flot de Kronecker sur le tore. L'objet de cette note est de formaliser cette analogie et d'en identifier les limites.

3. Rappel du treillis

Soit n un entier pair ≥ 6 . On note $p_j = 2j + 3$ pour $j \geq 0$ et $q_j = n - p_j$. La case (x, y) du treillis, avec $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x \geq 2y$, correspond à la décomposition $n = p_x + q_y$ avec $p_x = 2x + 3$ et $q_y = 2y + 3$? En réalité, la coordonnée x dans le treillis est l'indice du petit sommant, et y est un décalage. On pose plus précisément :

- x est l'indice du petit sommant $p = 2x + 3$,
- y est l'indice du complément $q = 2y + 3$,
- la relation $x \geq 2y$ assure que $p \leq n/2$ pour un certain n à déterminer.

La lettre en (x, y) est (u_x, u_{x-y}) où $u_k = 0$ si $2k + 3$ est premier, 1 sinon. En effet, le complément $q = n - p = 2(x - y) + 3$ a pour indice $x - y$. Ainsi, la colonne x (qui correspond à $n = 2x + 6$) contient la lettre a en position (x, y) si $u_x = 0$ et $u_{x-y} = 0$.

4. Changement de coordonnées et flot de Kronecker

Introduisons les coordonnées

$$X = x - 2y, \quad Y = y.$$

Alors $x = X + 2Y$, et la lettre en (X, Y) est (u_{X+2Y}, u_{X+Y}) . Le domaine $x \geq 2y$ se traduit par $X \geq 0$, et $Y \geq 0$. La propagation des 16 règles le long des triminos correspond à des relations entre les cases (X, Y) , $(X + 1, Y)$, etc. Plus précisément, la règle de composition impose que la suite des

lettres le long des lignes $X = \text{constante}$ soit déterminée par la suite u .

Si l'on ignore la suite u et que l'on considère le flot continu sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ défini par

$$\Phi_t(X, Y) = (X + t, Y + \alpha t),$$

la trajectoire issue de (X_0, Y_0) est l'ensemble des points $(X_0 + t, Y_0 + \alpha t)$. Ici, la discrétisation le long de l'axe Y (ou de X) correspond à un flot de pente $dY/dX = 1/2$ (car $x = X + 2Y$, donc Y croît de 1 lorsque X croît de 2). Cette pente est rationnelle.

5. L'analogie avec le flot de Kronecker

Le flot de Kronecker est généralement étudié pour des pentes irrationnelles, car alors l'orbite est dense et équirépartie [2]. Ici, la pente est 1, donc le flot est périodique sur le tore entier. La non-périodicité du treillis vient entièrement de la suite u_j , qui code les nombres premiers. En d'autres termes, le treillis est le produit de deux copies de la suite u évaluées le long des droites $X = \text{constante}$. On peut donc voir chaque colonne x comme l'intersection de l'orbite discrète ($y \mapsto (x - y, y)$) avec l'ensemble des paires où les deux coordonnées sont des nombres premiers.

Proposition 1. *La colonne x contient une lettre a si et seulement s'il existe $y \geq 0$ tel que $2(x-y)+3$ et $2y+3$ soient premiers. C'est exactement la conjecture de Goldbach pour $n = 2x + 6$.*

Ainsi, la conjecture de Goldbach équivaut à : pour tout x assez grand, l'orbite discrète du flot de Kronecker (de pente rationnelle) coupe l'ensemble des paires de nombres premiers.

6. Limites de l'analogie

L'analogie avec le flot de Kronecker est séduisante mais ne permet pas de résoudre la conjecture. Les raisons de cette impossibilité sont les suivantes :

1. **pente rationnelle** : le flot pur est périodique. L'équidistribution des flots irrationnels ne s'applique pas. La structure de l'ensemble des nombres premiers est la seule source de non-périodicité.
2. **densité nulle** : l'ensemble des nombres premiers a une densité nulle dans $\mathbb{N}$ ($\sim 1/\log N$). Les théorèmes d'équidistribution (Weyl, etc.) ne s'appliquent pas à des ensembles de densité nulle, sauf avec des mesures pondérées, mais alors on perd le contrôle uniforme.
3. **absence de contrôle uniforme** : même si on savait que pour presque tout x il existe un a (ce qui serait une forme faible de la conjecture de Hardy-Littlewood), cela ne prouverait pas la conjecture pour tout x . La conjecture de Goldbach est un énoncé universel, pas un énoncé de densité.
4. **corrélations des nombres premiers** : trouver y tel que y et $x - y$ soient simultanément premiers revient à étudier la corrélation entre les nombres premiers et leur translaté. C'est un problème profond, qui n'est pas résolu par des arguments de flot. Les résultats connus (Chen, Maynard) ne suffisent pas pour le cas binaire.

7. Conclusion

L'analogie entre le treillis de Goldbach et le flot de Kronecker sur un tore tronqué offre une vision géométrique et dynamique du problème. Elle permet de reformuler la conjecture comme une question d'intersection d'une orbite discrète avec un ensemble arithmétique. Cependant, cette reformulation ne fournit pas d'outil nouveau pour attaquer la conjecture, car la structure du flot (pente rationnelle) ne donne aucun avantage par rapport à la formulation originale. En particulier, l'équidistribution n'est pas applicable et le contrôle uniforme reste hors de portée des méthodes actuelles.

Cette analogie peut néanmoins être utile pour des travaux heuristiques ou pour expliquer la structure du treillis à d'autres mathématiciens.

Références

- [1] L. Kronecker, *Über die ganzzahligen Auflösungen von Gleichungen*, 1884. [Référence bibliographique fausse!](#) La référence correcte est celle-ci : Kronecker, L. (1884), “Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen”, Berl. Ber. : 1179–1193, 1271–1299.
- [2] G.H. Hardy et J.E. Littlewood, *Some problems of “Partitio numerorum” III*, 1923.