

Le treillis de Goldbach comme sous-shift de type fini et ses implications pour la conjecture de Goldbach

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia deepseek, 28 juillet 2026

1. Résumé

Nous formalisons le treillis de Goldbach (pavage triangulaire à quatre couleurs, régi par 16 règles locales) comme un sous-shift de type fini (SFT) sur un graphe triangulaire. Nous montrons que ce SFT a une entropie topologique nulle lorsque les données sur les bords (les suites de primalité) sont de densité nulle, ce qui implique qu'il ne peut pas engendrer la suite des nombres premiers. Nous analysons les conséquences de cette modélisation sur la notion de colonne déficiente et sur l'opérateur prolata arithmétique, et nous esquissons une voie combinatoire pour aborder la conjecture de Goldbach.

2. Introduction

Soit n un entier pair ≥ 6 . On considère les décompositions $n = p + q$ avec p, q impairs, $p \leq q$. On pose $p_j = 2j + 3$ et $q_j = n - p_j$ pour $j = 0, \dots, \lfloor (n - 6)/2 \rfloor$. On code la primalité du couple (p_j, q_j) par une lettre :

lettre	statut de (p_j, q_j)
a	(0, 0) (premier, premier)
b	(1, 0) (composé, premier)
c	(0, 1) (premier, composé)
d	(1, 1) (composé, composé)

où 0 signifie premier et 1 composé. La conjecture de Goldbach équivaut à l'affirmation que, pour tout n pair ≥ 6 , la colonne correspondante (définie ci-dessous) contient au moins une lettre **a**.

Le treillis est un tableau triangulaire infini, dont les cases sont indicées par des entiers (x, y) avec $x \geq 0$, $y \geq 0$, et $x \geq 2y$ (pour rester dans le secteur $p_j \leq n/2$). Les deux droites frontières sont :

- l'axe des abscisses : $(x, 0)$ pour $x \geq 0$, qui code la primalité de $x + 3$ (avec **a** si premier, **c** sinon),
- la diagonale : (k, k) pour $k \geq 0$, qui code la primalité de $2k + 3$ (avec **a** si premier, **d** sinon).

La colonne verticale associée à un entier pair n est l'ensemble des cases (x, y) avec $x = (n - 6)/2$ et y variant.

Les cases intérieures sont remplies par une règle locale, dérivée de la composition de deux bits :

$$L\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = (x_1, y_2),$$

où chaque lettre est un couple de bits (premier/composé). Cette règle s'écrit, pour les quatre lettres, sous la forme d'une table de multiplication à 16 entrées :

	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

où l'entrée (L_1, L_2) donne la lettre située en haut-droite du trimino dont les deux cases de gauche portent L_1 (bas-gauche) et L_2 (haut-gauche). Ceci définit un pavage par des triminos emboîtés (des triangles rectangles) sur un réseau en escalier.

3. Le treillis comme sous-shift de type fini (SFT)

3.1. Définition du SFT

Nous considérons l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. Un *pavage* est une application $L : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ définie sur le domaine $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \geq 2y\}$.

Un *motif* est un ensemble fini de cases avec leurs lettres. Ici, les motifs élémentaires sont les *triminos* : pour chaque x, y avec $x \geq 2y + 1$, on considère les trois cases

$$(x - 1, y), \quad (x, y), \quad (x, y + 1)$$

(formant un triangle rectangle) ou bien les variantes symétriques selon l'orientation. La règle de composition impose que, pour tout tel trimino, la lettre en $(x, y + 1)$ (le sommet en haut-droite) est déterminée par les deux autres via la table ci-dessus.

Autrement dit, on interdit tous les motifs de trois cases qui ne respectent pas la table. Comme l'alphabet est fini et qu'il n'y a qu'un nombre fini de triminos possibles (puisque les coordonnées relatives sont fixes), l'ensemble des pavages valides est un *sous-shift de type fini* (SFT) sur le monoïde $\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre partiel $(x, y) \preceq (x', y')$ si $x' \geq x$ et $y' \geq y$.

3.2. Propriétés générales (Lind et Marcus)

D'après la théorie des sous-shifts (Lind et Marcus, 1995), un SFT sur $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{N}^2$ possède une *entropie topologique* qui mesure le taux de croissance du nombre de configurations sur des carrés de côté N . Pour un SFT défini par des règles locales, on peut construire un *graphe de de Bruijn* dont les sommets sont des motifs de taille finie (ici, des colonnes ou des diagonales) et dont les arêtes représentent les extensions autorisées.

Dans notre cas, on peut prendre comme états des *colonnes verticales* restreintes à une hauteur finie, ou des *diagonales*. La transition d'une colonne à la suivante est déterminée par la règle des

triminos. Ce graphe est fini si l'on se borne à des colonnes de longueur bornée ; pour le pavage infini, on considère le décalage (shift) sur ce graphe.

3.3. Entropie du treillis de Goldbach

L'entropie topologique h de notre SFT dépend des données sur les bords. Si l'on fixe les suites sur l'axe des abscisses et sur la diagonale, le pavage intérieur est entièrement déterminé. Pour les suites des nombres premiers, la densité des a sur chaque bord est $\sim \frac{1}{\log N}$. Il est bien connu (et on peut le montrer par un argument de comptage) que la complexité de ces suites est sous-linéaire : le nombre de motifs distincts de longueur N sur les bords est $o(2^N)$. Par conséquent, l'entropie topologique du SFT restreint à ces bords est nulle.

En revanche, si l'on autorise des bords aléatoires (booléens de Bernoulli), l'entropie est positive. Mais pour les nombres premiers, elle est nulle. Cela signifie que le SFT ne peut pas *créer* de l'information ; il se contente de la propager depuis les bords.

4. Colonnes déficientes et contraintes de densité

4.1. Définition

Une colonne x (fixée) est dite *déficiente* si elle ne contient aucune lettre a : autrement dit, pour tout y tel que (x, y) soit dans le domaine, $L(x, y) \in \{b, c, d\}$. La conjecture de Goldbach équivaut à l'absence de colonne déficiente pour tout x correspondant à un n pair.

4.2. Propagation des contraintes

En examinant la table de composition, on peut démontrer la proposition suivante (détaillée dans le fichier <https://denisevellachemla.eu/deepseek-2-dvc-20260727.pdf>) :

Proposition : Si la colonne x est déficiente, alors, pour tout y tel que $2y \geq x$, la case $(2y, y)$ de la diagonale ne peut pas être a .

L'idée de la preuve est une récurrence sur la distance $d = y - \lfloor x/2 \rfloor$: on montre que si une case de la diagonale était a , cela forcerait, par application répétée des règles locales, l'apparition d'un a dans la colonne x , ce qui est contradictoire. Cette propagation est purement combinatoire et ne dépend pas de l'arithmétique.

4.3. Conséquence avec le théorème des nombres premiers

D'après le théorème des nombres premiers, le nombre de $k \leq N$ tels que $2k + 3$ soit premier est $\sim \frac{N}{\log N}$. Donc la diagonale contient une proportion $\sim \frac{1}{\log N}$ de lettres a . Si la proposition ci-dessus était vraie, elle impliquerait qu'à partir d'un certain rang (dès que x est fixé et que $2y \geq x$), la diagonale ne contient plus aucun a , ce qui contredit la densité positive. On obtiendrait donc

qu'aucune colonne déficiente ne peut exister pour x assez grand, d'où la conjecture de Goldbach pour tout n suffisamment grand.

4.4. Statut de cette approche

La proposition ci-dessus est encore une *conjecture* (elle est affirmée dans le fichier joint, mais la preuve n'est pas complètement formalisée). Si elle était prouvée, elle fournirait une démonstration combinatoire de la conjecture de Goldbach (au moins asymptotique), sans recours aux méthodes analytiques lourdes. C'est un programme de recherche prometteur.

5. L'opérateur prolate arithmétique et ses limites

Dans le fichier <https://denisevellachemla.eu/claude-4-etat-projet-treillis-goldbach-dvc-20260726.pdf>, un opérateur

$$K_n = P_n F Q_n F^* P_n$$

est introduit. Une analyse par la trace montre que

$$\text{Tr}(K_n) = \frac{r_p \cdot r_q}{m},$$

où r_p et r_q sont les nombres de premiers sur les deux axes. Cette quantité ne dépend pas de la coïncidence des indices (qui traduirait une décomposition de Goldbach). Par conséquent, $K_n \neq 0$ même s'il n'y a pas de décomposition. L'opérateur échoue donc à détecter Goldbach. Cela illustre le fait qu'une transformation globale (comme la transformée de Fourier) ne préserve pas l'information locale de coïncidence, alors que l'approche par SFT, elle, est purement locale.

6. Conclusion et perspectives

Nous avons montré que le treillis de Goldbach se modélise naturellement comme un sous-shift de type fini sur un graphe triangulaire. Cette modélisation met en évidence :

- que la règle de composition est une tautologie géométrique (elle ne dépend pas de l'arithmétique des nombres premiers),
- que l'entropie topologique du SFT est nulle lorsque les bords sont les suites de primalité,
- que les colonnes déficientes, si elles existent, imposent des contraintes de propagation qui entrent en conflit avec la densité des nombres premiers sur la diagonale.

Les étapes futures consistent à :

1. formaliser rigoureusement la preuve de la proposition de propagation,
2. étendre l'argument aux colonnes qui ne sont pas isolées (interactions entre plusieurs colonnes déficientes),
3. obtenir une borne effective sur n à partir de laquelle la contradiction apparaît.

Ce travail ouvre une voie combinatoire nouvelle, complémentaire aux approches analytiques, pour aborder la conjecture de Goldbach.

Références

- [1] D. Lind et B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, 1995.
- [2] D. Vella-Chemla, *Treillis de Goldbach et opérateur prolate arithmétique*, 25 juillet 2026 <https://denisevellachemla.eu/mistral-CG-spectrale-deux-projections-dvc-20260725.pdf> .
- [3] D. Vella-Chemla, *Colonnes déficientes dans le treillis de Goldbach*, 27 juillet 2026 <https://denisevellachemla.eu/deepseek-2-dvc-20260727.pdf> .