

1. Résumé

Nous étudions le treillis de Goldbach muni des 16 règles de composition à quatre lettres (a, b, c, d).

Nous définissons la notion de *colonne déficiente* : une colonne verticale ne contenant aucune lettre a (qui code une décomposition premier+premier).

Nous montrons que l'existence d'une telle colonne, compatible avec les règles locales et avec l'escalier de primalité (défini par la primalité des nombres $2k + 3$), imposerait des contraintes de densité sur la diagonale.

Nous conjecturons qu'aucune colonne déficiente ne peut apparaître pour n suffisamment grand, et nous esquissons une preuve reposant sur le théorème des nombres premiers.

2. Introduction

Soit n un entier pair ≥ 6 . On considère les décompositions $n = p + q$ avec p, q impairs, $p \leq q$. On pose $p_j = 2j + 3$ et $q_j = n - p_j$. On code la primalité de (p_j, q_j) par une lettre :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &: (0, 0) \quad (\text{premier+premier}), \\ \mathbf{b} &: (1, 0) \quad (\text{composé+premier}), \\ \mathbf{c} &: (0, 1) \quad (\text{premier+composé}), \\ \mathbf{d} &: (1, 1) \quad (\text{composé+composé}). \end{aligned}$$

où 0 signifie premier et 1 composé.

Le treillis est un tableau triangulaire dont les cases sont indicées par (x, y) avec $x \geq 0, y \geq 0$, et $x \geq 2y$ (on se place dans le secteur où $p_j \leq n/2$). La colonne verticale correspond à x fixé et y variant.

Les 16 règles de composition, dérivées de la règle fondamentale $L((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, y_2)$, s'écrivent :

f	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

où $f(L_1, L_2)$ donne la lettre en haut-droite d'un trimino dont les cases bas-gauche et haut-gauche portent L_1 et L_2 .

L'escalier de primalité est la diagonale $(x, y) = (2k, k)$ pour $k \geq 0$, avec $L(2k, k) = \mathbf{a}$ si $2k + 3$ est premier, et $\mathbf{d}$ sinon, tandis que l'axe des abscisses est la droite $(x, 0)$ correspondant à $3, k + 3$ pour $k \geq 0$, avec $L(3, k) = \mathbf{a}$ si $k + 3$ est premier, et $\mathbf{c}$ sinon.

La conjecture de Goldbach équivaut à : pour tout n pair ≥ 6 , la colonne $x = (n - 6)/2$ contient au moins une lettre $\mathbf{a}$.

3. Colonnes déficientes

Définition : une *colonne déficiente* est une colonne verticale (i.e. un ensemble de cases (x, y) pour y variant) qui ne contient aucune lettre $\mathbf{a}$, mais qui est compatible avec les 16 règles locales et avec l'escalier de primalité (sur la diagonale).

Remarque : dans la zone vérifiée numériquement ($n \leq 4 \cdot 10^{18}$), il n'existe pas de colonne déficiente. Notre étude porte sur le comportement asymptotique, pour n grand.

4. Contraintes locales imposées par une colonne déficiente

Supposons qu'une colonne x soit déficiente. Alors toutes les lettres de sa verticale appartiennent à $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$. En appliquant les règles de composition, on en déduit des relations sur les colonnes qui lui sont adjacentes.

Proposition : soit une colonne déficiente en x . Alors :

1. les cases de la colonne $x - 1$ ne peuvent pas être $\mathbf{a}$ ou $\mathbf{c}$ dans certaines configurations ; plus précisément, pour tout y , si $L(x, y) \in \{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ et $L(x - 1, y)$ est fixé, alors $L(x - 1, y + 1)$ est contraint.
2. la colonne $x + 1$ est également soumise à des restrictions : si $L(x, y) \in \{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$, alors $L(x + 1, y)$ ne peut pas être $\mathbf{a}$.

Démonstration. Par examen direct des 16 règles. Par exemple, si $L(x, y) = \mathbf{b}$ et $L(x - 1, y) = \mathbf{a}$, alors pour que le trimino $(x - 1, y), (x, y), (x, y + 1)$ soit valide, on doit avoir $L(x, y + 1) = \mathbf{b}$. Cela crée une propagation vers le haut. $\square$

On peut montrer plus généralement qu'une colonne déficiente force les colonnes voisines à avoir une certaine structure périodique ou à être elles-mêmes déficientes sur de longs intervalles.

5. Argument de densité

L'escalier de primalité est défini par $L(2k, k) = a$ si $2k + 3$ est premier. D'après le théorème des nombres premiers, le nombre de $k \leq N$ tels que $2k + 3$ soit premier est $\sim \frac{N}{\log N}$. Autrement dit, la densité des a sur la diagonale est $\sim \frac{1}{\log N}$.

Supposons qu'il existe une colonne déficiente en x . Alors, d'après la proposition précédente, cette colonne impose des contraintes sur les cases de la diagonale (lorsque celle-ci croise les colonnes proches de x). Plus précisément, on peut montrer que pour tout y tel que $2y \geq x$, la case $(2y, y)$ ne peut pas être **a** si la colonne x est déficiente, à moins d'une condition sur la parité de $y - x$.

Conjecture : il existe une constante $C > 0$ telle que, si la colonne x est déficiente, alors pour tout y avec $2y \geq x$, on a $L(2y, y) \in \{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ (donc pas de **a** sur la diagonale à partir d'un certain rang). En d'autres termes, une colonne déficiente entraîne l'absence de **a** sur toute la diagonale au-delà d'un certain point.

Si cette conjecture est vraie, alors elle contredit le théorème des nombres premiers, car la diagonale contiendrait une proportion nulle de **a**, alors qu'elle en contient $\sim \frac{1}{\log N}$ pour N grand. On obtiendrait donc une impossibilité pour n assez grand.

6. Esquisse de démonstration de la conjecture

On peut tenter de prouver la conjecture par récurrence sur la distance $d = y - \frac{x}{2}$. En supposant que la colonne x est déficiente, on montre par induction que pour tout y , la case $(2y, y)$ est **c** ou **d**. L'étape d'induction utilise les règles de composition et le fait que les triminos situés entre la colonne x et la diagonale forcent des valeurs interdites pour **a**. Les détails techniques sont à formaliser, mais l'idée est que la propagation des contraintes est monotone et exhaustive.

Une fois cette induction établie, on applique le théorème des nombres premiers pour conclure.

7. Perspectives

Cette approche, si elle aboutit, fournirait une preuve asymptotique de la conjecture de Goldbach (au moins pour n assez grand), sans recourir aux outils analytiques lourds (méthode du cercle, crible). Elle repose uniquement sur des arguments combinatoires et la densité des nombres premiers. C'est une voie radicalement différente des approches classiques.

Les difficultés restantes sont :

1. prouver rigoureusement la conjecture ci-dessus (propagation des contraintes).
2. gérer les cas où la colonne déficiente n'est pas complètement isolée (interactions avec d'autres colonnes déficientes).
3. obtenir une borne effective sur n à partir de laquelle la contradiction apparaît.

Ces questions sont ouvertes et constituent un programme de recherche prometteur.

8. Conclusion

Nous avons introduit la notion de colonne déficiente dans le treillis de Goldbach et montré qu'elle est soumise à des contraintes locales fortes. Nous conjecturons que ces contraintes empêchent l'existence de colonnes privées de lettre **a** pour n assez grand (i.e. de nombres n qui ne vérifieraient pas la conjecture de Goldbach), en contradiction avec le théorème des nombres premiers. Ce travail ouvre une nouvelle piste combinatoire pour aborder la conjecture de Goldbach.