

1. Introduction

La conjecture dite *conjecture paire de Goldbach*, qui date de 1742 ([8])¹, énonce que tout nombre pair n supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers² (voir [11] pour un compte-rendu historique à son sujet). Elle a intéressé de nombreux savants (tels que Cantor [3] qui a vérifié, à l'époque à la main, qu'elle était vraie pour tous les nombres jusqu'à 1000, ou Laisant [9] qui a proposé un procédé expérimental permettant de la vérifier). Est proposée ci-après une modélisation de la conjecture de Goldbach qui est basée sur l'idée de considérer certaines sommes égales à n comme des points du plan $\mathbb{N}^2$. On place les nombres p_k et $n - p_k$, avec p_k un nombre premier compris entre 3 et $n - 3$, l'un, p_k , sur l'axe des abscisses, et l'autre, $n - p_k$, sur l'axe des ordonnées. La modélisation utilise la notion de parcours³ eulérien et un théorème concernant la bisection de collier.

2. Représentation des décompositions de n en sommes $p_k + (n - p_k)$, avec p_k un nombre premier, dans le plan $\mathbb{N}^2$

Appelons E_n l'ensemble des nombres premiers impairs compris entre 3 et $n - 3$ inclus.

On note E'_n l'ensemble des nombres $n - p_k$ avec $p_k \in E_n$.

E_n et E'_n ont même cardinal.

$$E_n = \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n - 3, p_k \text{ est un nombre premier}\}$$

$$E'_n = \{n - p_k \mid p_k \in E_n\}.$$

Par commodité, on représente les points qui sont utiles pour la justification par des points (x, y) dans un carré C de côté de longueur n , carré dont les sommets sont les points $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, n)$ et (n, n) . Les nombres premiers p_k sont positionnés sur l'axe des abscisses. Les nombres $n - p_k$ sont positionnés sur l'axe des ordonnées.

On trace dans le carré C un réseau de droites :

- chaque droite verticale a pour équation $x = p_k$ pour chaque nombre premier $p_k \in E_n$;
- chaque droite horizontale a pour équation $y = n - p_k$ pour chaque nombre $n - p_k \in E'_n$.

L'ensemble U_n des points d'intersection du réseau de droites dans le carré C est défini par

$$U_n = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in E_n, y \in E'_n\}.$$

1. On trouve aussi la phrase latine “*Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis*”, traduisible en “*Mais tout nombre pair est composé d'un, deux ou trois nombres premiers.*” dans un écrit posthume, publié en 1701, de Descartes (cf. [1] et [2]).

2. On considérera ici seulement les nombres pairs supérieurs à 4, comme sommes de deux nombres premiers impairs.

3. On dit aussi *chemin* (*path* en anglais, un joli mot, mais *parcours* est chouette à cause de “Pars! Cours!”).

L'ensemble U_n est de cardinal⁴ $\#(E_n \times E'_n) = (\#E_n)^2$.

Exemples : Donnons pour exemples les ensembles E_{16} , E'_{16} , E_{24} et E'_{24} . On a

$$\begin{array}{l|l|l} E_{16} = \{3, 5, 7, 11, 13\} & \#E_{16} = 5 \quad (\#E_{16} \text{ est impair}). & E'_{16} = \{13, 11, 9, 5, 3\} \\ E_{24} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} & \#E_{24} = 7 \quad (\#E_{24} \text{ est impair}). & E'_{24} = \{21, 19, 17, 13, 11, 7, 5\} \end{array}$$

Remarque : Un nombre pair qui est le double d'un nombre premier p_k (comme $38 = 2 \times 19$, ou $94 = 2 \times 47$) vérifie trivialement la conjecture de Goldbach, car ce nombre étant de la forme $2p_k$, il a une décomposition en somme de la forme $n = 2p_k = p_k + p_k$ quel que soit p_k un nombre premier ; un tel nombre est la somme de deux nombres premiers confondus (identiques). Leur graphique (voir ci-dessous) associé présente un point rouge au centre du carré, à l'intersection de la droite verticale (d'équation $x = p_k$), et de la droite horizontale (d'équation $y = p_k$) (et donc à l'intersection des deux diagonales du carré).

3. Illustration graphique d'un exemple

Pour illustrer la modélisation, on va traiter le cas $n = 16$ en caractérisant les décomposants de Goldbach de 16 qui sont 3 et 13 d'une part, et 5 et 11, d'autre part.

La figure 1 montre le carré représentant les décompositions de Goldbach du nombre $n = 16$ en rouge sur la diagonale ascendante (il s'agit des points $(3, 3)$, $(5, 5)$, $(11, 11)$ et $(13, 13)$).

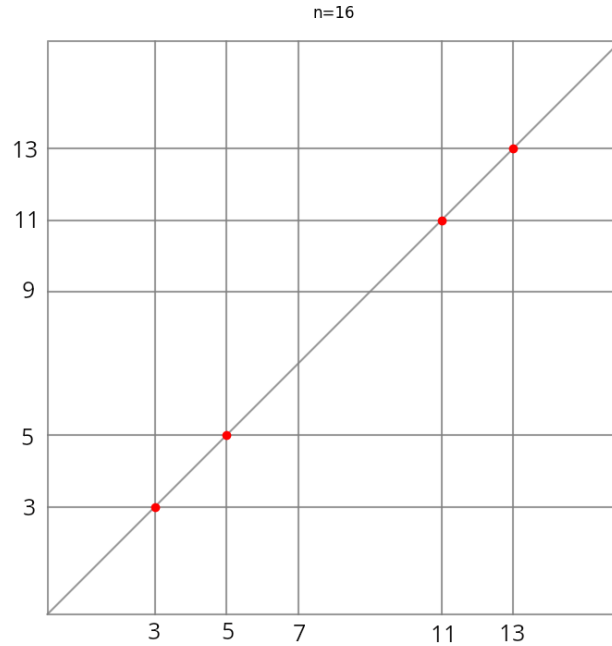


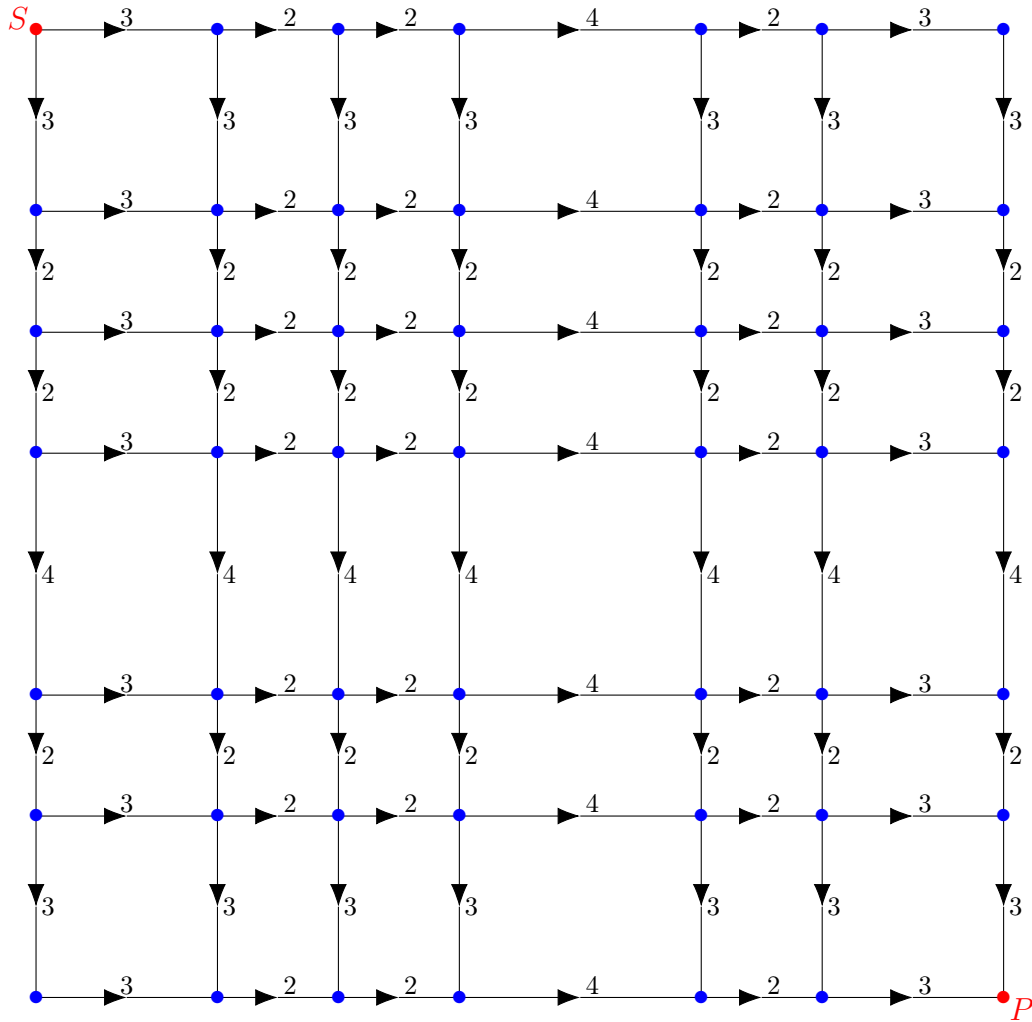
FIG. 1 : L'exemple du carré pour $n = 16$.

4. On utilise le symbole $\#E$ pour désigner le cardinal de l'ensemble E .

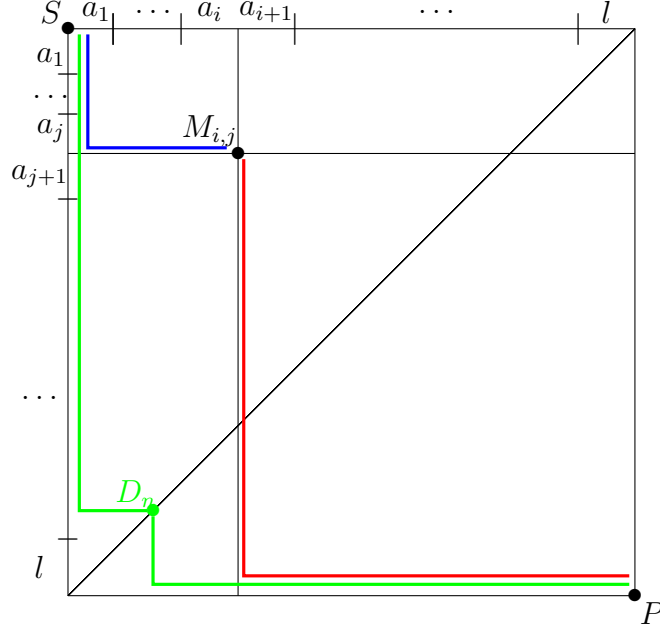
Pour $n = 16$, on a vu que $\#E_{16} = 5$ est impair. Le réseau U_n contient $\#E_{16} = 25$ points.

4. Matrice, plus court chemin, algèbre min-plus

Voyons notre carré autrement : considérons-le comme un graphe-grille, dont les arêtes sont orientées, soit de gauche à droite, soit de haut en bas ([4]).



Voyons la recherche d'un point sur la diagonale ascendante comme la recherche d'un point à égale distance de la source S du graphe, qu'on choisit comme étant le point en haut à gauche du carré et le puits P du graphe, qu'on choisit comme étant le point en bas à droite du carré. L'illustration ci-dessous sera plus explicite.



Pour trouver ce point à égale distance de S et P , on utilisera l'algorithme classique de Dijkstra ([6])⁵ de calcul de plus court chemin dans un graphe, qu'on appliquera deux fois. Une première fois pour calculer les plus courts chemins de la source S à tous les points du graphe et une seconde fois pour calculer les plus courts chemins de tous les points du graphe au puits P . Le(s) décomposant(s) de Goldbach seront tels que leurs distances à la source et au puits sont égales :

$$K \text{ correspond à un décomposant de Goldbach de } n \iff d(S, K) = d(K, P).$$

Il s'agira alors d'étudier ce qui, dans la matrice d'adjacence, garantit l'existence obligatoire d'un tel point à égale distance de la source et du puits du graphe (ou sur la diagonale ascendante du carré tel qu'on le regardait initialement).

L'algorithme de Dijkstra travaille sur une matrice 2×2 . Les chemins de longueur k peuvent s'obtenir en calculant la $k^{\text{ième}}$ puissance de la matrice d'adjacence, mais en effectuant une multiplication matricielle un peu particulière, qui consiste à remplacer l'addition par le minimum et la multiplication par l'addition, ce qui correspond au fait de "travailler dans l'algèbre **min-plus**". La recherche de plus court chemin est la résolution d'un système d'équations linéaires dans le semi-anneau **min-plus** $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \oplus, \otimes)$ avec $x \oplus y = \min(x, y)$ et $x \otimes y = x + y$. Le neutre pour $\oplus$ est $+\infty$, le neutre pour $\otimes$ est 0.

Modifions notre modélisation pour qu'elle corresponde à cette nouvelle façon de voir la conjecture de Goldbach.

On a maintenant un ensemble de nombres qui contient les nombres premiers compris entre 3 et $n - 3$ inclus, ainsi que les nombres 0 et n . Pour l'exemple $n = 16$,

$$P_n = [0, 3, 5, 7, 11, 13, 16].$$

⁵. Voir également un cours de l'Université de Lyon 1 ici ou, concernant la terminaison, la correction et la complexité de l'algorithme de Dijkstra, voir là .

On étiquettera les arêtes par les écarts entre nombres premiers successifs, ou par le nombre premier 3, ou par l'écart entre le plus grand nombre premier inférieur à $n - 1$ et n . Cet ensemble des écarts dans le cas $n = 16$ est

$$\Delta_n = [3, 2, 2, 4, 2, 3].$$

Pour alléger l'écriture, ne notons plus les indices indiquant le paramètre n dorénavant.

Un sommet du graphe est un couple de $S = P \times P$ et une arête du graphe est un couple de sommets $A = S \times S$. L'arête est orientée et étiquetée par un écart entre deux nombres premiers successifs $e_k \in \Delta$. Le graphe étant un graphe-grille, il ne contient que des arêtes horizontales et verticales. Les arêtes horizontales sont de la forme $((P[i], P[j]), (P[i+1], P[j]))$ tandis que les arêtes verticales sont de la forme $((P[i], P[j]), (P[i], P[j+1]))$.

L'algorithme de Dijkstra travaille sur une matrice d'adjacence entre sommets qui est de taille 2×2 alors qu'on a ici une matrice 4×4 , chaque sommet ayant 2 coordonnées. On rappelle que $\pi(n)$ désigne le nombre de nombres premiers (dont le nombre premier 2) inférieurs ou égaux à n . Ici, on ne considère jamais le nombre premier 2 : comme on cherche une décomposition de Goldbach d'un nombre pair $n > 4$, 2 ne permet jamais d'obtenir une décomposition de Goldbach de n , son complémentaire à n étant un nombre pair, donc composé.

Pour pouvoir appliquer l'algorithme de Dijkstra à une matrice 2×2 , on fixe une numérotation des $\pi(n) + 1)^2$ sommets ligne par ligne, ce qui permet d'obtenir facilement les coordonnées d'un sommet comme quotient et reste de la division entière de son ordinal dans la numérotation (comme dividende) par le cardinal de l'ensemble de départ (égal en l'occurrence à $\pi(n)+1$) (comme diviseur).

La matrice d'adjacence 2×2 est très creuse : chaque sommet du graphe n'a que 2 sommets adjacents (voire un seul pour tous les sommets situés aux bords droit ou inférieur du carré initial) et la matrice ne contient donc que 2 éléments non nuls par ligne. Quand il n'y a pas d'arêtes entre 2 sommets, on étiquettera cette arête par $+\infty$. L'élévation de la matrice à la puissance k s'effectuera presque comme d'habitude :

$$(M^n)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{k=n} (M^{n-1})_{ik} \otimes M_{kj}.$$

Références

- [1] C. Adam, P. Tannery, *Œuvres de Descartes - Physico-mathematica, Compendium Musicae, Regulae ad directionem ingenii - Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance*, chap. vol. X, Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes. III : Numeri polygoni, édit. Amsterdam, 1701, p. 1-4. Copie MS. : Leyde, Bibliothèque de l'Université, Hug. 29 ex Hug. 27, 1908.
- [2] G. Belgioioso, *René Descartes : Opere Posthume 1650-2009*, Bompiani – il pensiero occidentale, 2009.
- [3] Georg Cantor, *Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach*, 1894, Assoc. franç. Caen, XXIII, 117-134.
- [4] Olivier Cogis, Claudine Schwartz, *Théorie des graphes*, Cassini, Collection L, 2018.
- [5] Alain Connes, *Symétries* (Symmetries, Newsletter de l'European Mathematical Society, n° 54, p. 11, décembre 2004), Magazine Pour la Science, n°292, février 2001.
- [6] E. W. Dijkstra, *A note on two problems in connexion with graphs*, Numerische Mathematik, 1, 1959, p. 269-271.

- [7] Leonhard Euler, *Solutio problematis quæstis ad Geometriam situs pertinentis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Vol. 8, 1736, 128–140.
- [8] Christian Goldbach, *Lettre de Christian Goldbach à Leonhard Euler (XLIII, 00765)*, *Correspondances mathématiques et physiques de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle* (lettre à Euler en allemand), Académie Impériale des Sciences, Saint-Petersbourg, 1988, P. H. Fuss éd., 125–129, <http://eulerarchive.MAA.org>.
- [9] Charles-Ange Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, *Bulletin de la Société Mathématique de France : Vie de la Société*, n° 25, 1897, 208-211.
- [10] André Sainte-Laguë, *Avec des nombres et des lignes, récréations mathématiques*, Vuibert, 1937.
- [11] Robert-Charles Vaughan, *Goldbach's conjectures : a historical perspective*, *Open problems in Mathematics*, Springer International Publishing 2016, 479-520.