Quelques comètes : indicatrice d'Euler, somme des diviseurs, nombre de décompositions de Goldbach...

Denise Vella-Chemla

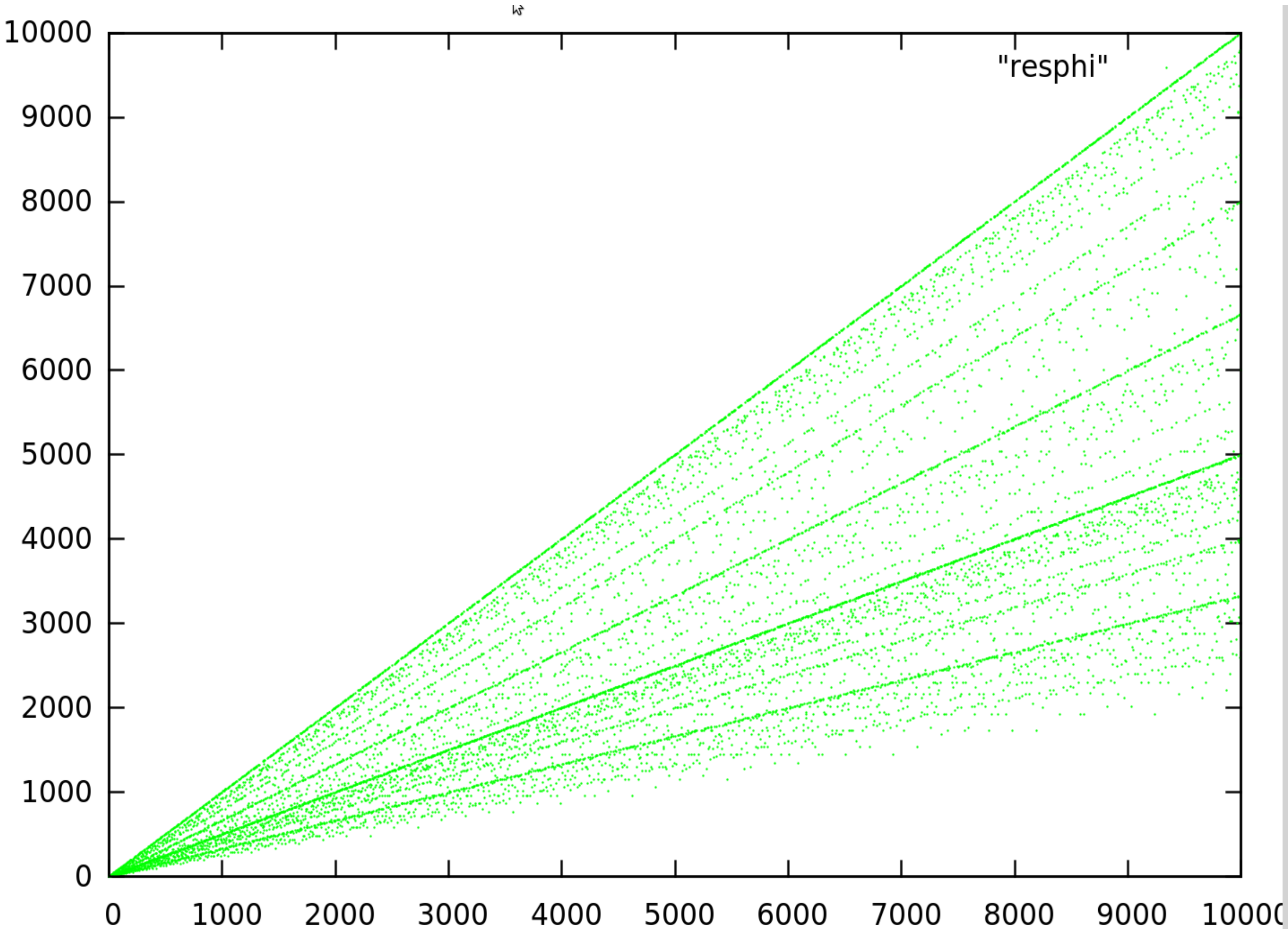
25 décembre 2010

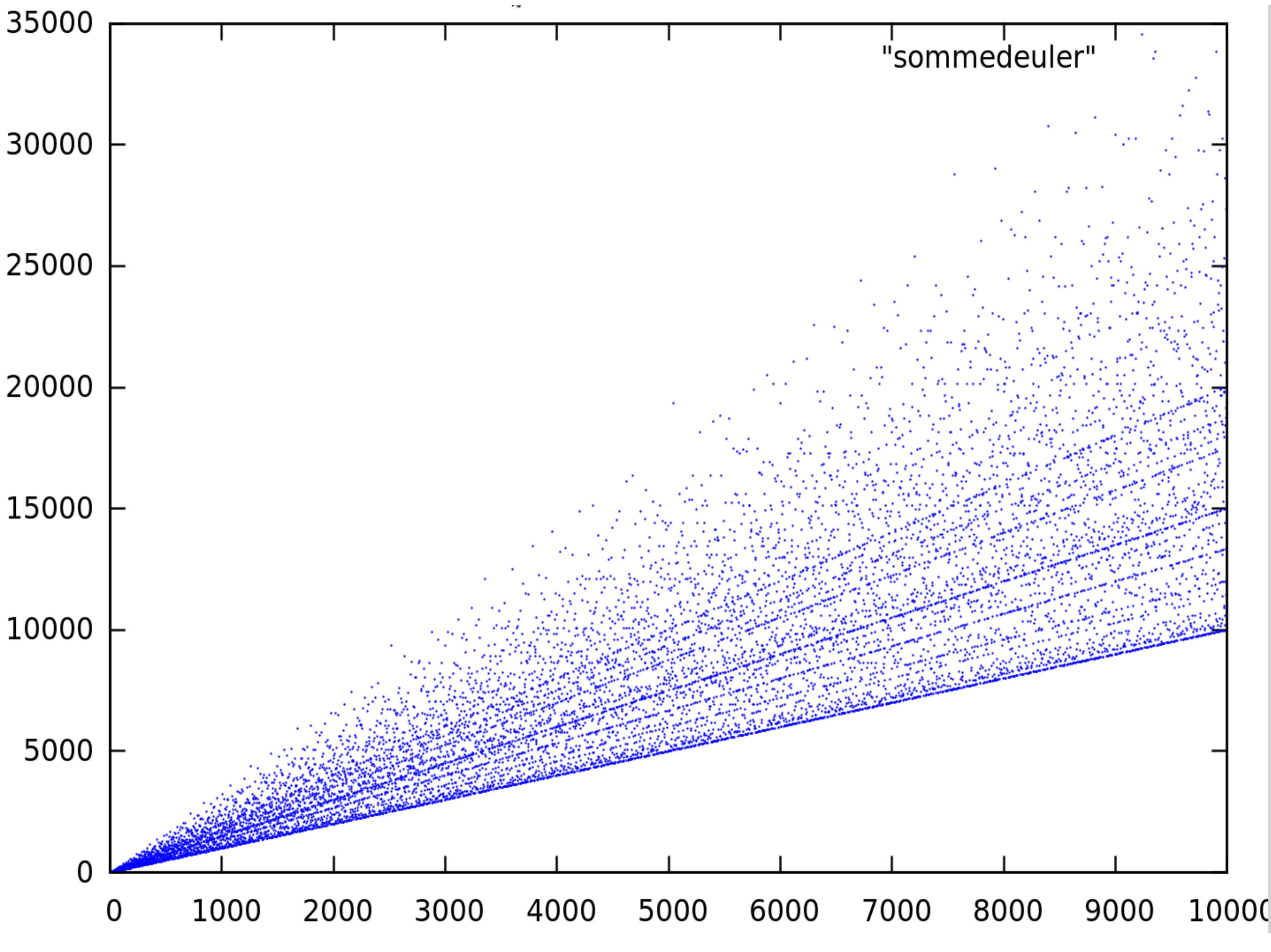
1 Cinq comètes

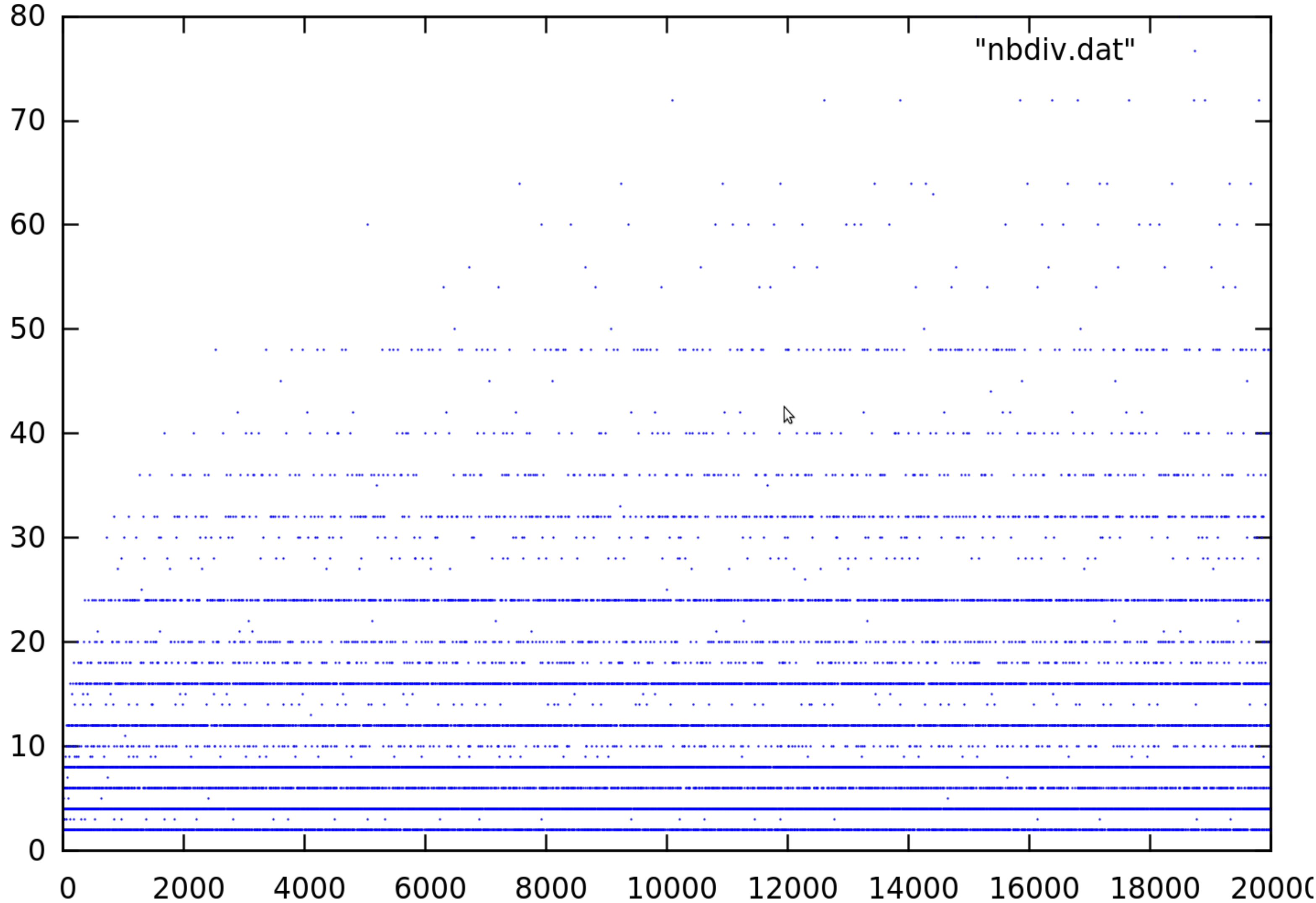
Les cinq graphiques ci-dessous, obtenus avec gnuplot, présentent les fonctions :

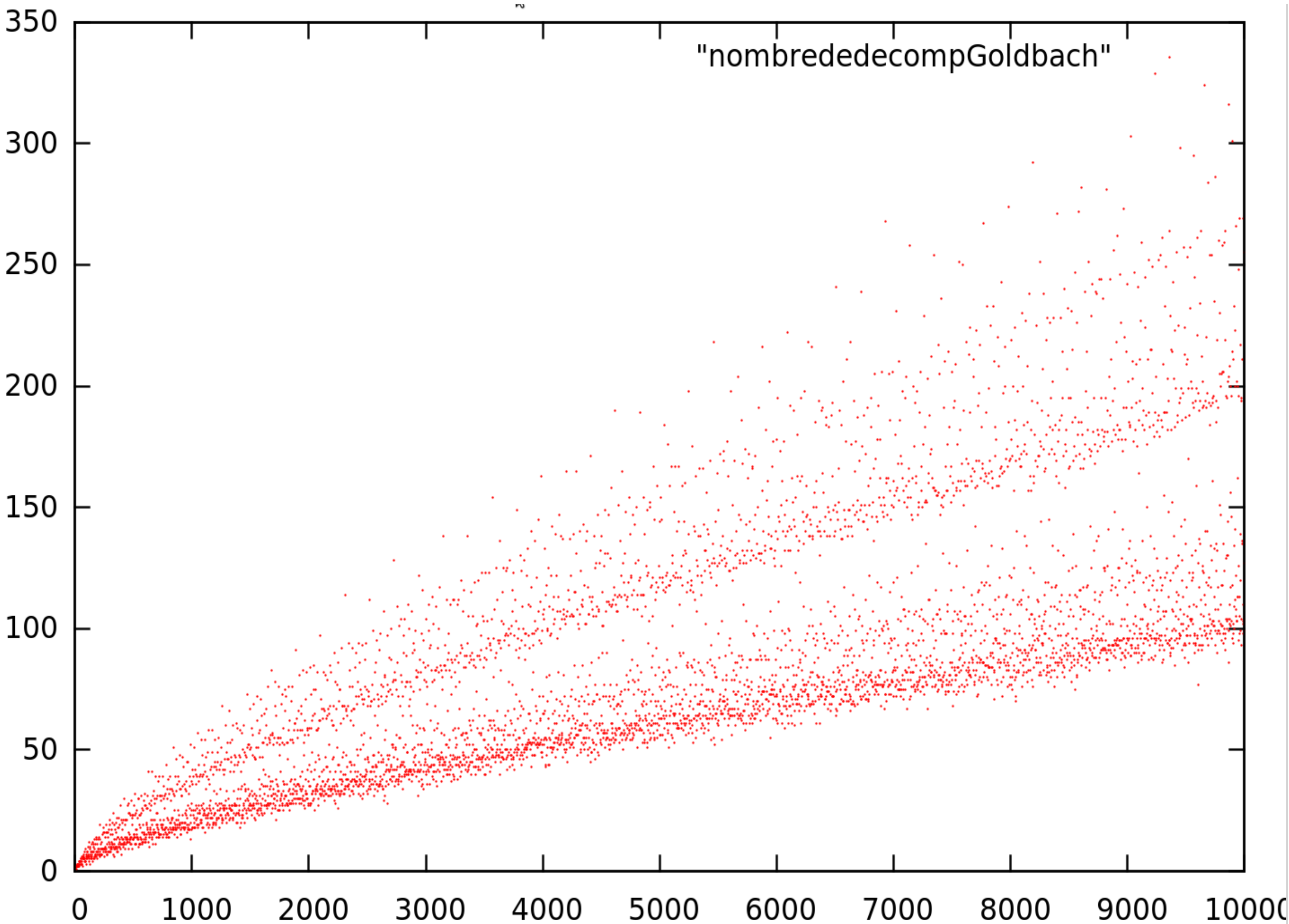
- indicatrice d'Euler (φ),
- somme des diviseurs d'Euler (σ). Une formule de calcul par récurrence de cette somme est fournie dans l'article "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs". Nous avons utilisé pour la calculer une autre formule de récurrence, fournie par Dominique Giard sur la toile dans la séquence A000203 de l'Encyclopédie en ligne des séquences d'entiers (OEIS),
- nombre de diviseurs,
- plus petit décomposant de Goldbach, i.e. associe à $2n$ le plus petit nombre premier tel que $2n = p + q$ avec p et q premiers,
- plus grand décomposant de Goldbach, i.e. associe à $2n$ le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n tel que $2n = p + q$ avec p et q premiers,
- et enfin, nombre de décompositions de Goldbach, i.e. nombre de façons différentes d'écrire un nombre pair $2n$ comme somme de deux nombres premiers.

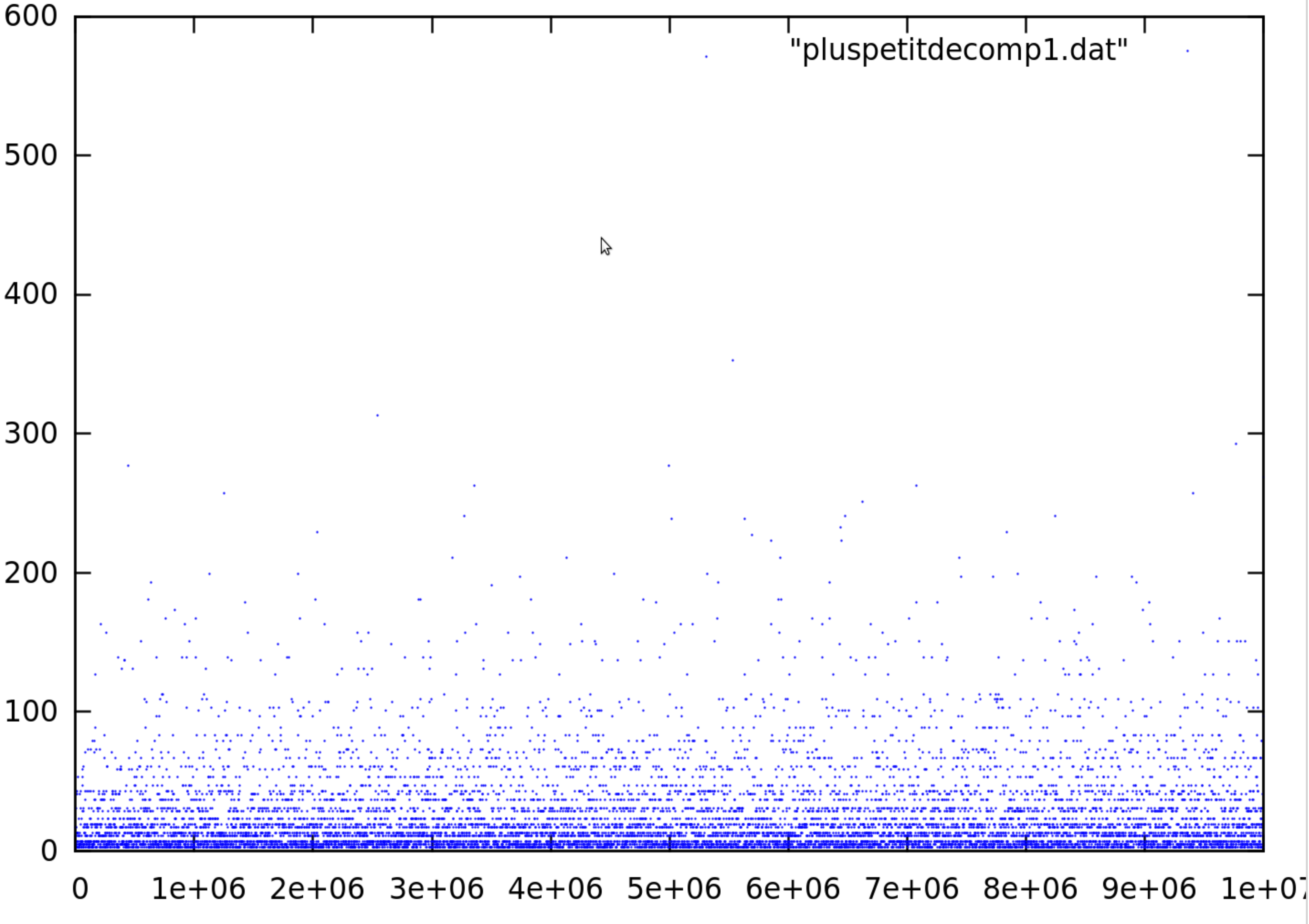
Toutes ces visualisations ont pu être réalisées grâce à des outils spécifiques fournis par Daniel Diaz, concepteur de Gnu-Prolog, que l'on remercie vivement.

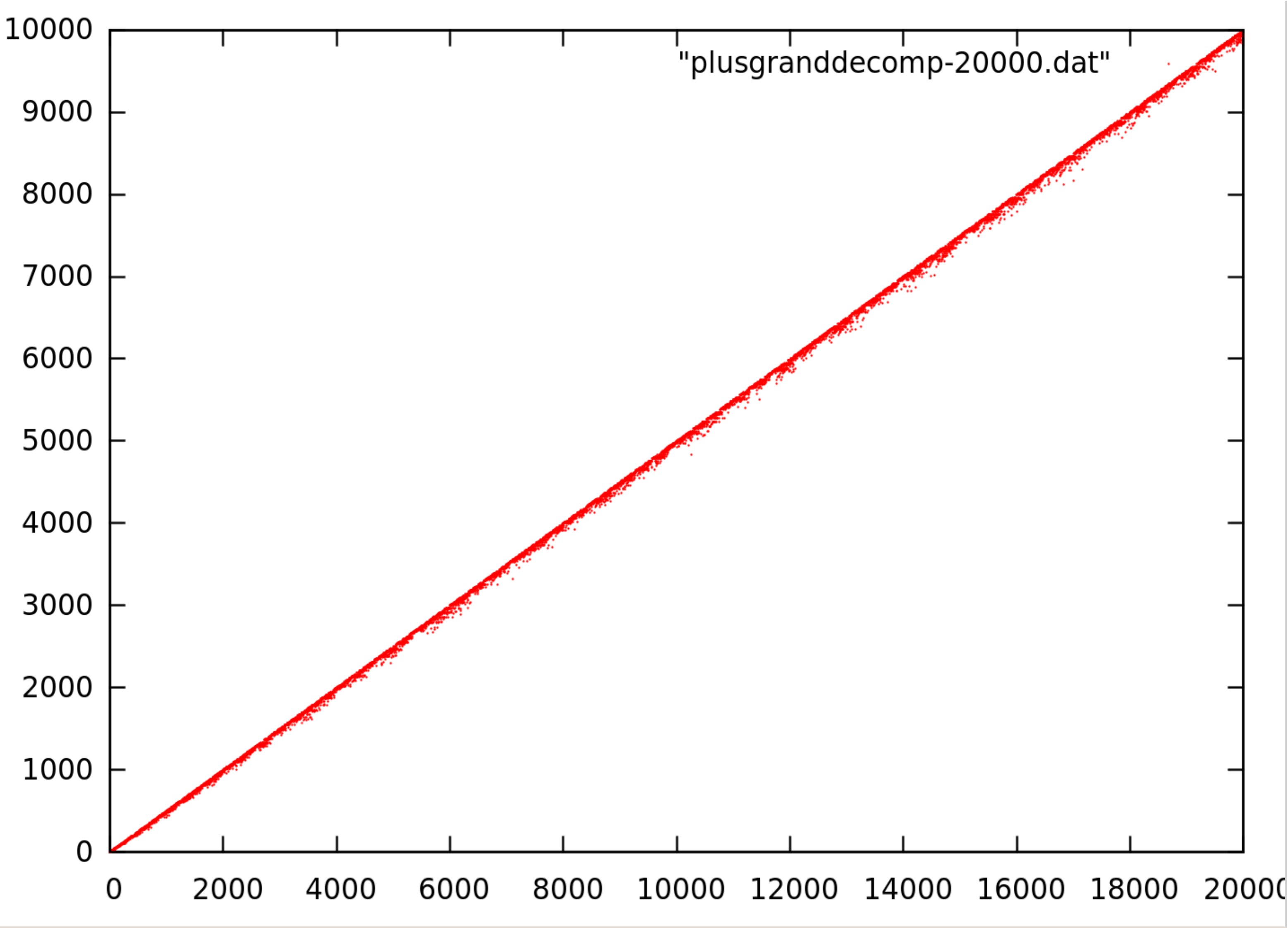

"resphi"
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000


"sommedeuler"
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000


"nbdiv.dat"
0
10
20
30
40
50
60
70
80
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

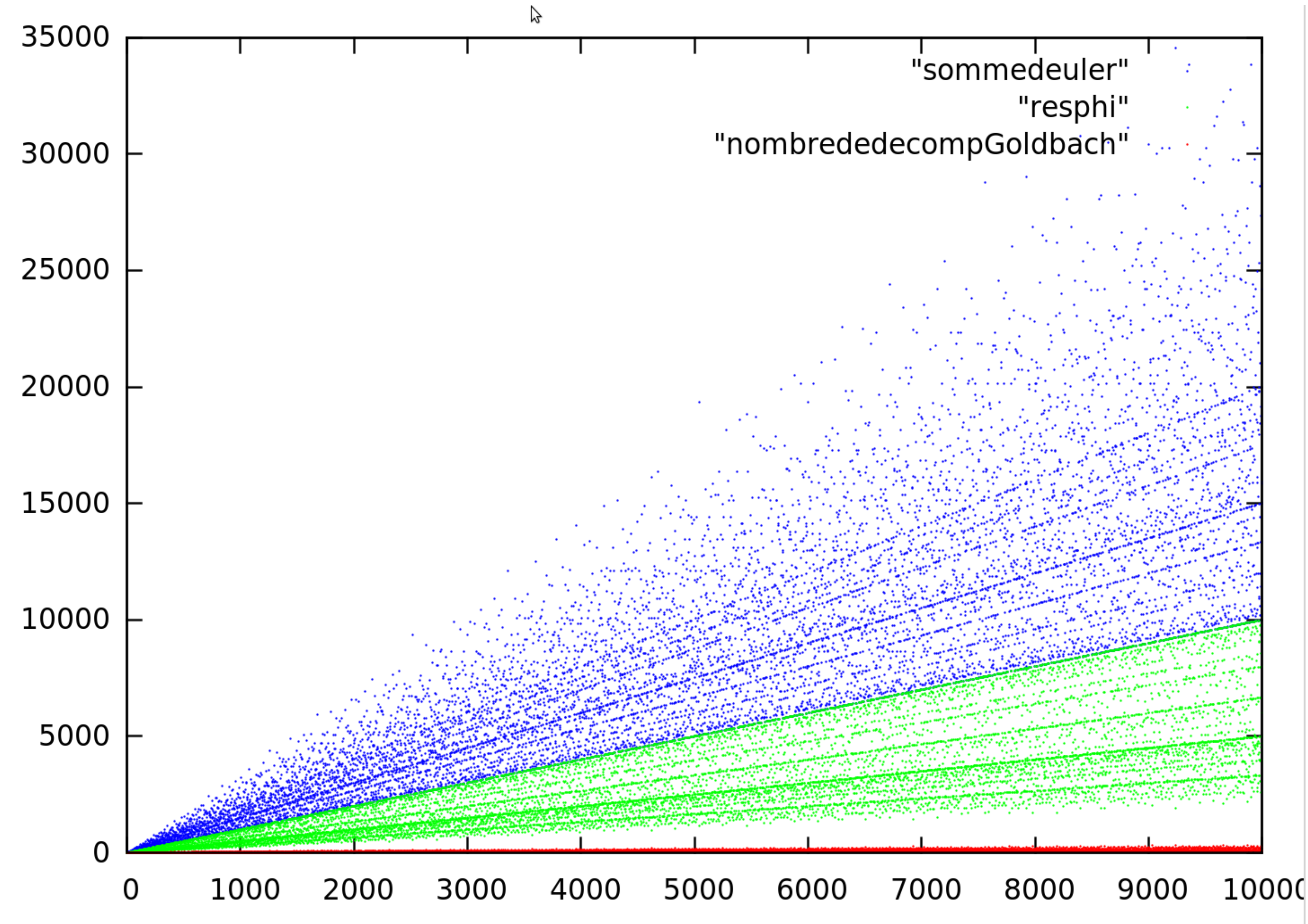

"nombrededecompGoldbach"
0
50
100
150
200
250
300
350
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000


"pluspetitdecomp1.dat"
600
500
400
300
200
100
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07


"plusgranddecomp-20000.dat"
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

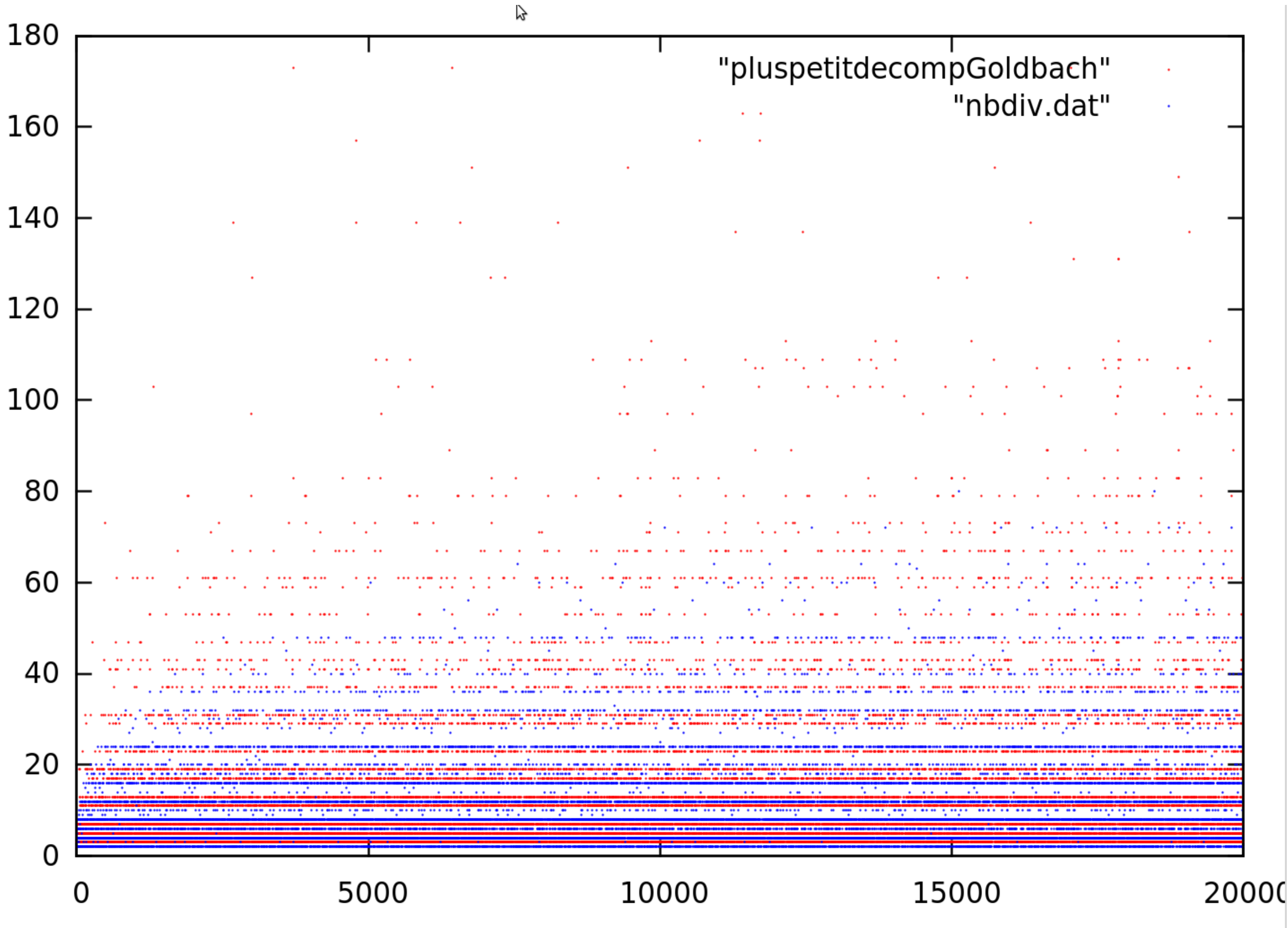
On constate que la comète de la fonction φ semble comme inversée par rapport aux comètes de σ ou $Nombre\_de\_décompositions\_de\_Goldbach$, des bandes de points plus concentrés apparaissant “à l'intérieur” de la comète, la “première” d'entre elles se trouvant “tout en haut” de la comète.

Les deux comètes de σ et $Nombre\_de\_décompositions\_de\_Goldbach$ semblent présenter une structure similaire, même si l'apparence de celle de la somme des diviseurs est plus linéaire que celle du nombre des décompositions de Goldbach. Si on ramène les trois premières comètes sur un même graphique, la comète des nombres de décompositions de Goldbach se retrouve tout en bas, comme écrasée, car ses valeurs sont bien moindres que celles des deux autres comètes.



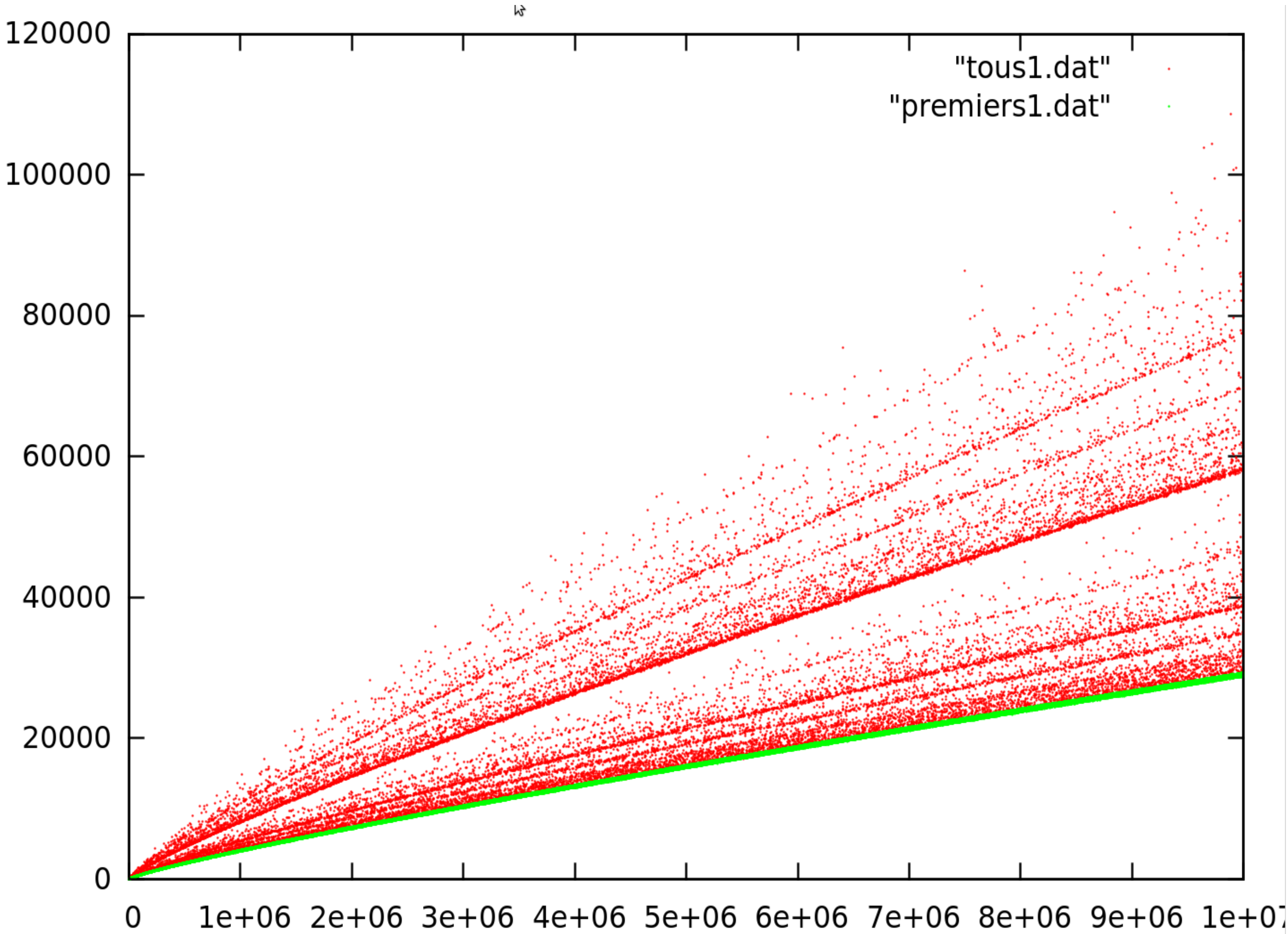
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000
"sommedeuler"
"resphi"
"nombrededecompGoldbach"

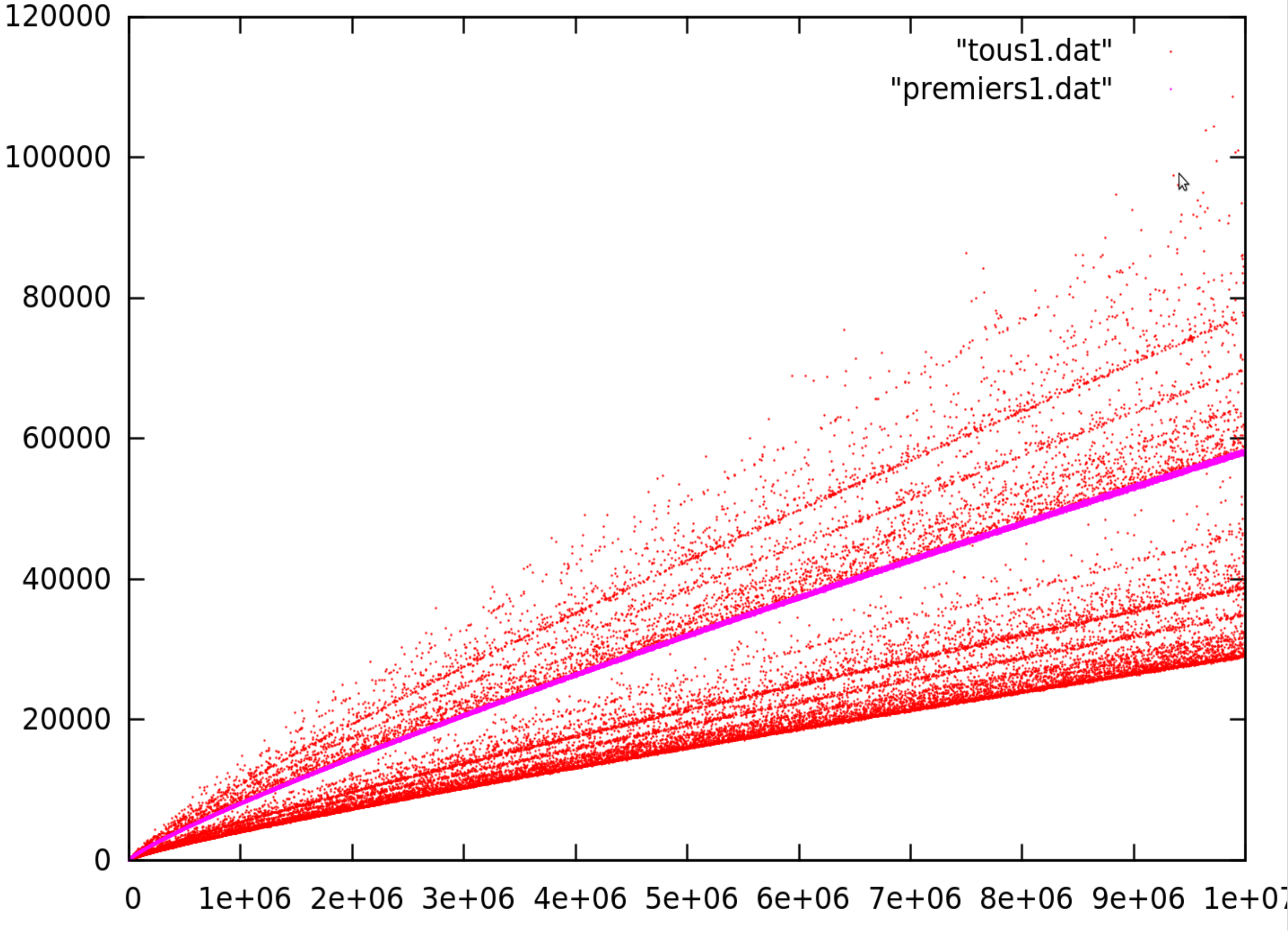
On constate que les comètes associées au nombre de diviseurs et au plus petit décomposant de Goldbach se "ressemblent". Visualisons-les sur un même graphique ci-dessous :


"pluspetitdecompGoldbach"
"nbdiv.dat"
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
0
5000
10000
15000
20000

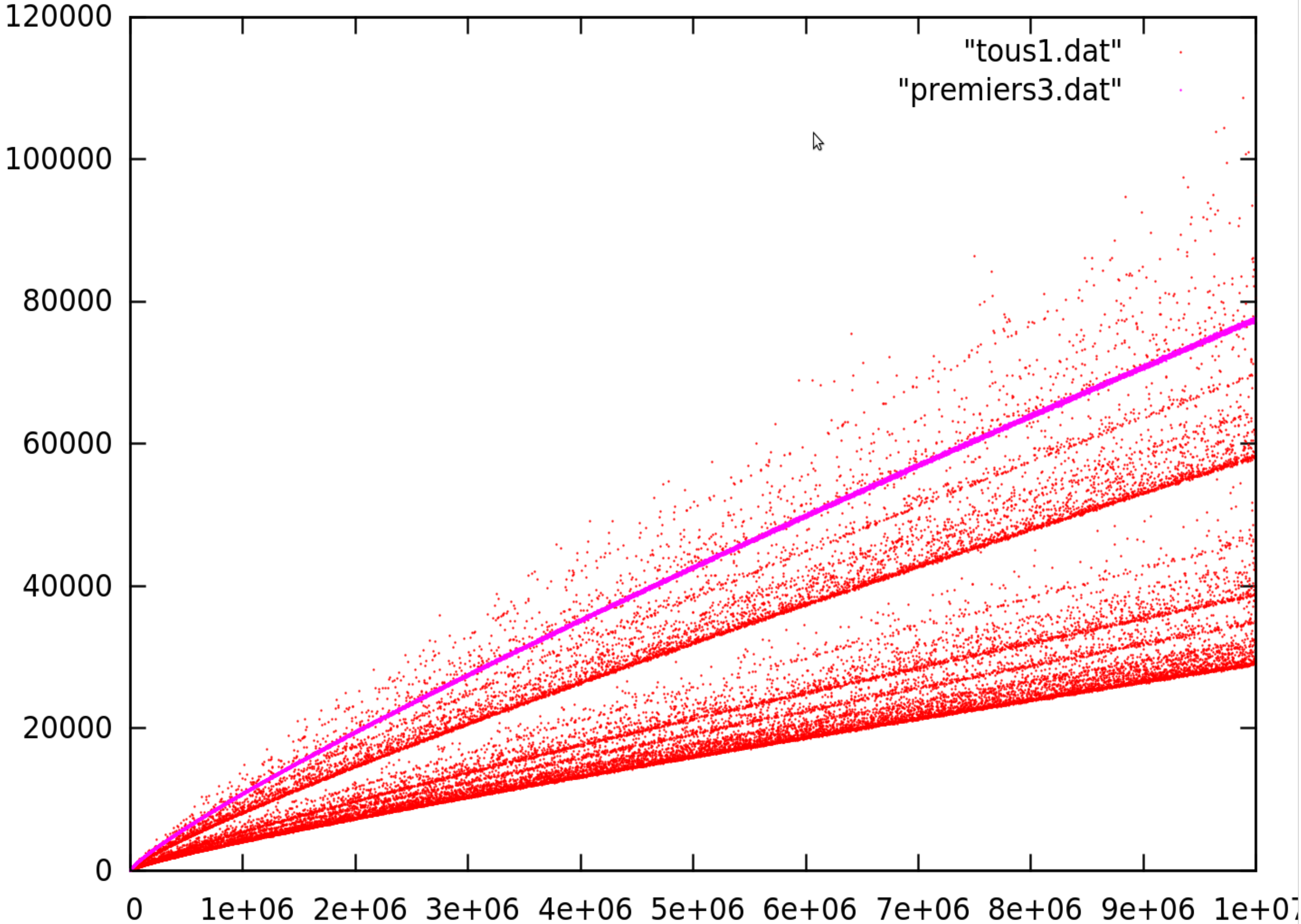
2 Mathématiques expérimentales

Dans la comète de Goldbach, on réussit à isoler les lignes de concentration des points qui correspondent aux nombres de décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier.


120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07
"tous1.dat"
"premiers1.dat"

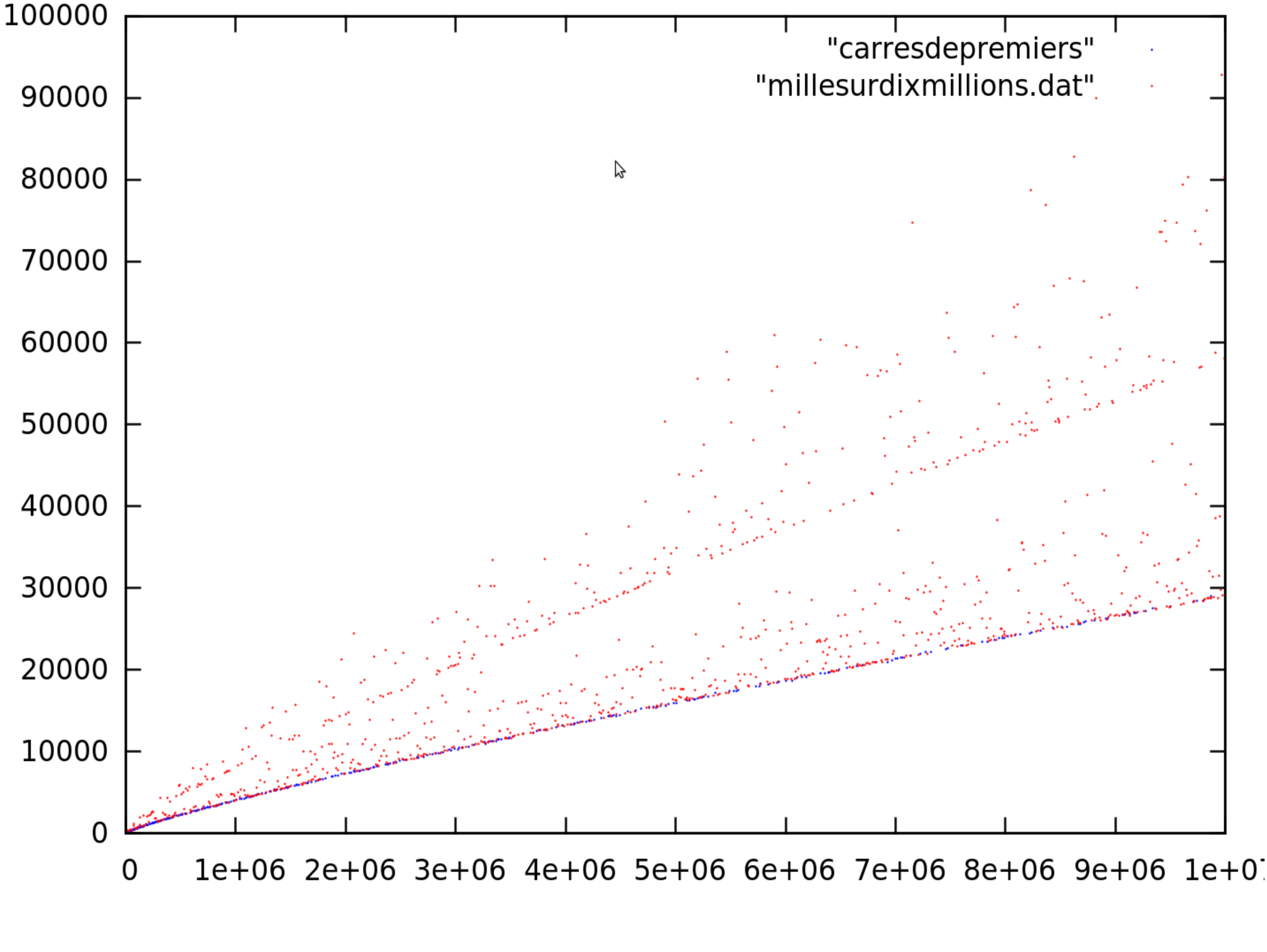


"tous1.dat"
"premiers1.dat"
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07



"tous1.dat"
"premiers3.dat"
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07

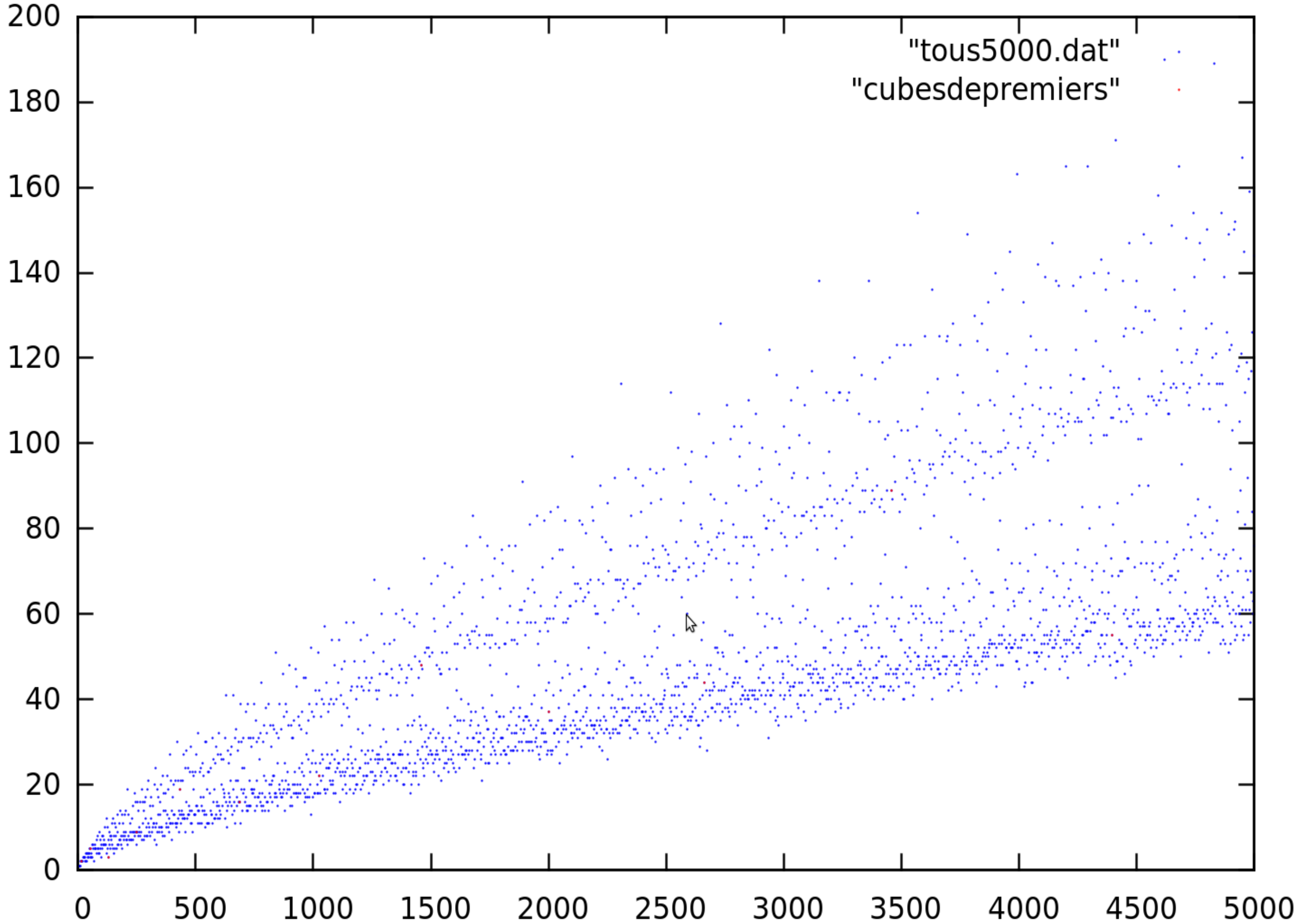
On pense qu'on obtiendra également certaines concentrations de points par l'élévation à la puissance des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation ci-après : les décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la tige basse de la gerbe.



100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07
"carresdepremiers"
"millesurdixmillions.dat"

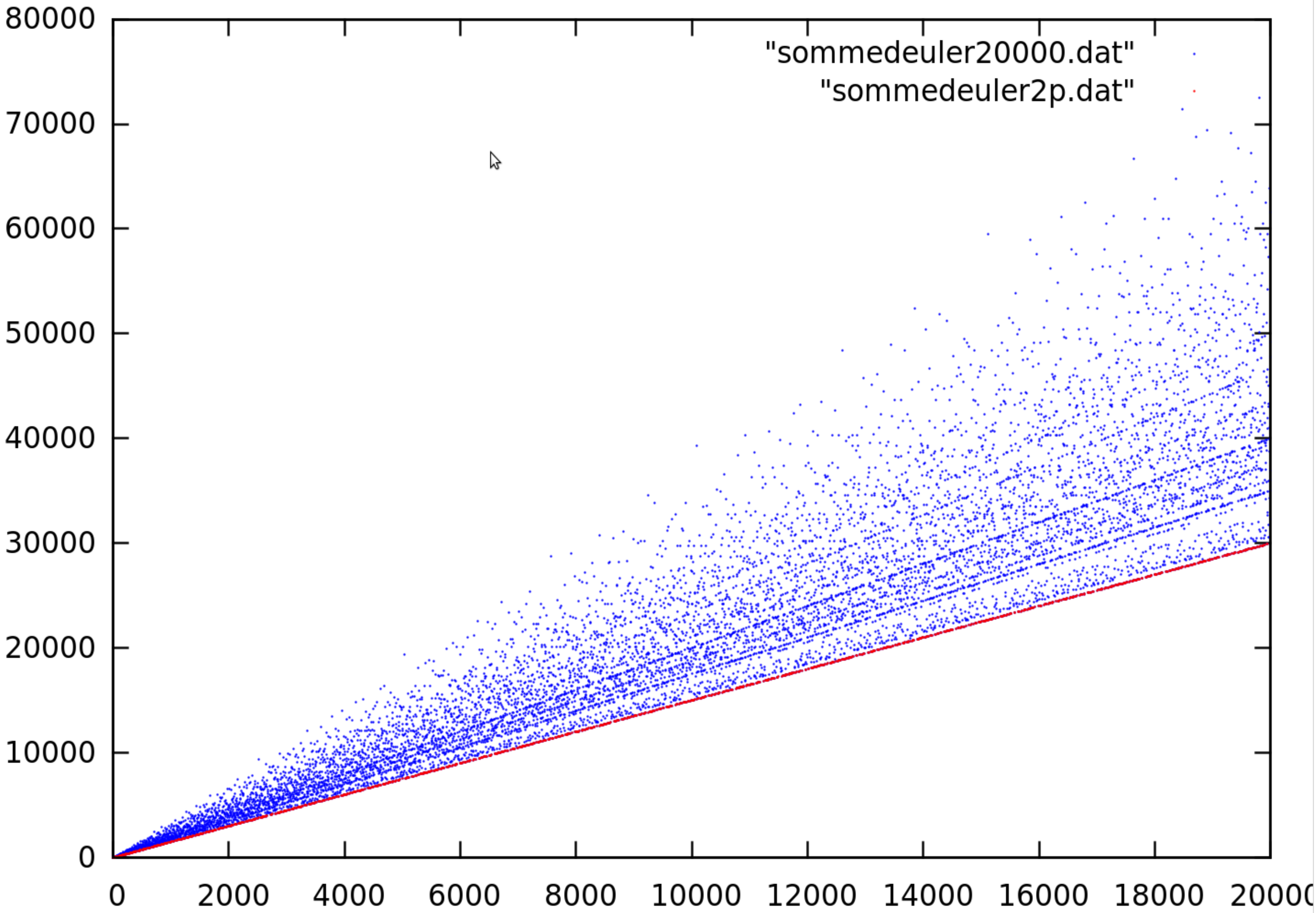
Quant aux décompositions de Goldbach des nombres de la forme $2p^3$ avec p premier par exemple, ils semblent se trouver sur les mêmes tiges que les nombres de la forme $2p$ ou $6p$ mais il faudrait le confirmer. Sur le graphique suivant, on voit les douze points rouges correspondant aux nombres de décompositions des doubles de cubes[1].

[1]Il n'y a que 12 petits points rouges à retrouver sur la tige des $2p$ et sur celle des $6p$ en s'arrachant un peu les yeux mais les zooms-écrans permettent de les retrouver aisément.

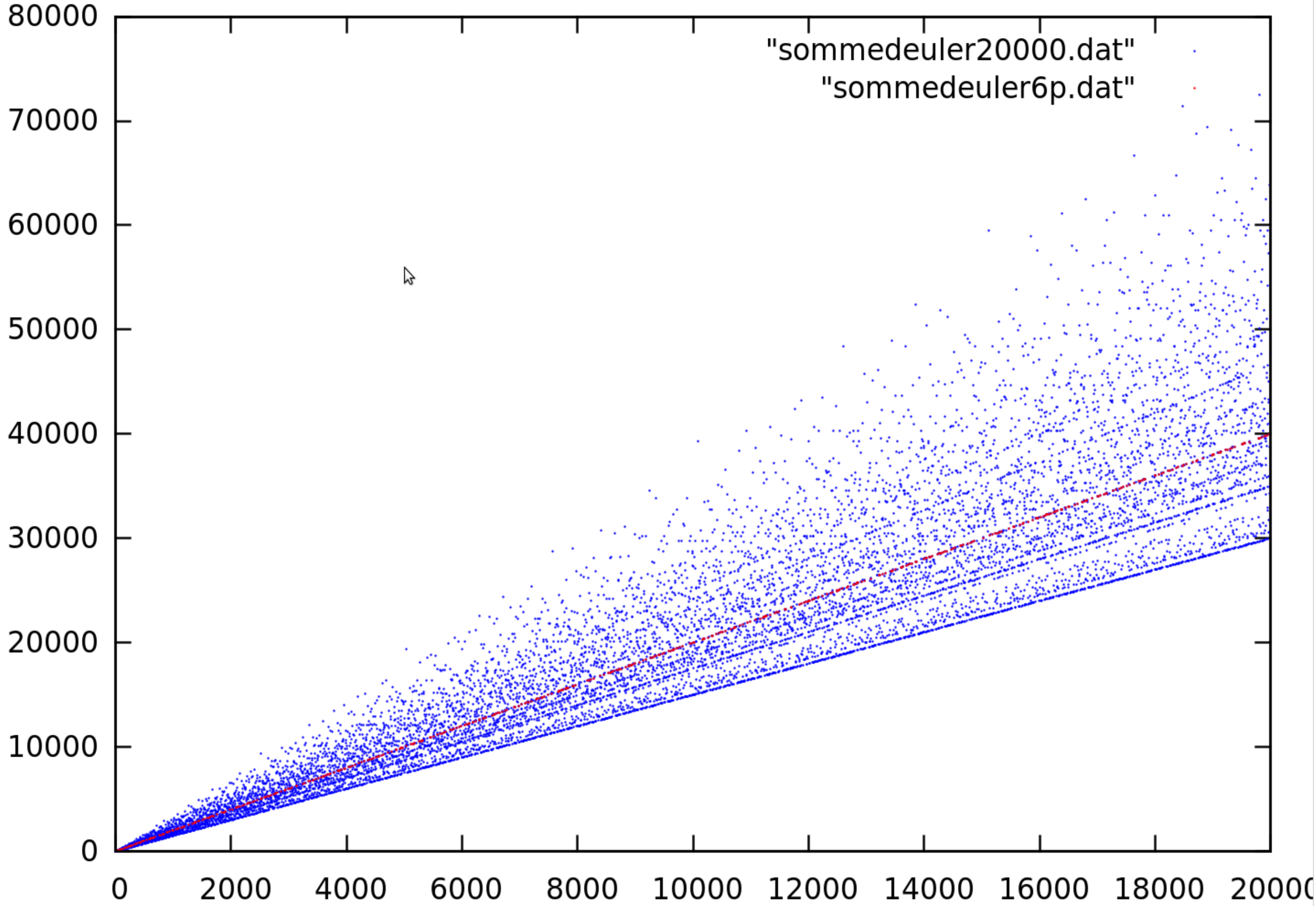


"tous5000.dat"
"cubesdepremiers"
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000

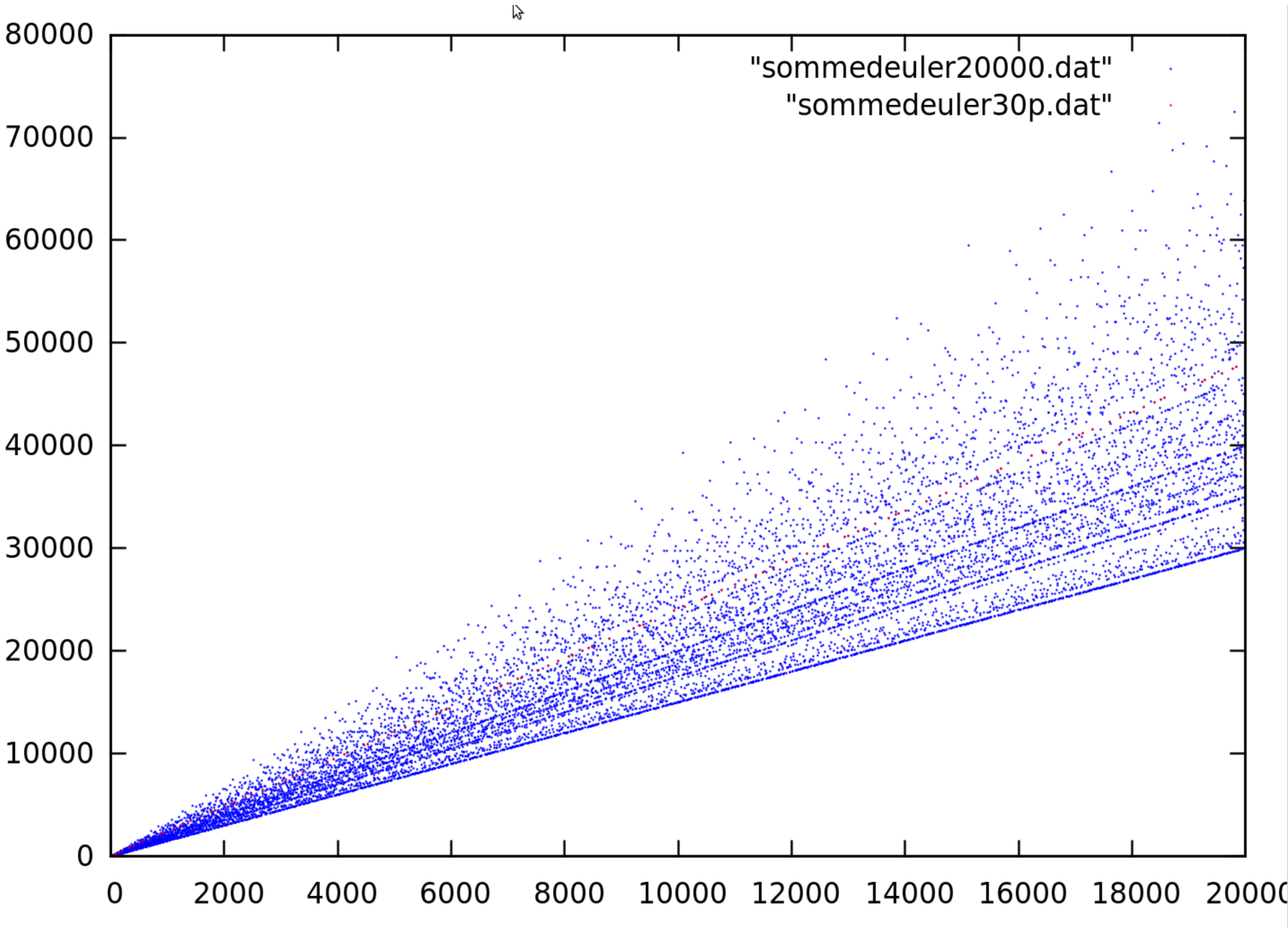
Dans la comète de la somme des diviseurs d'Euler, on réussit à reproduire les mêmes concentrations de points qui correspondent aux sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier.



80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000
"sommedeuler20000.dat"
"sommedeuler2p.dat"

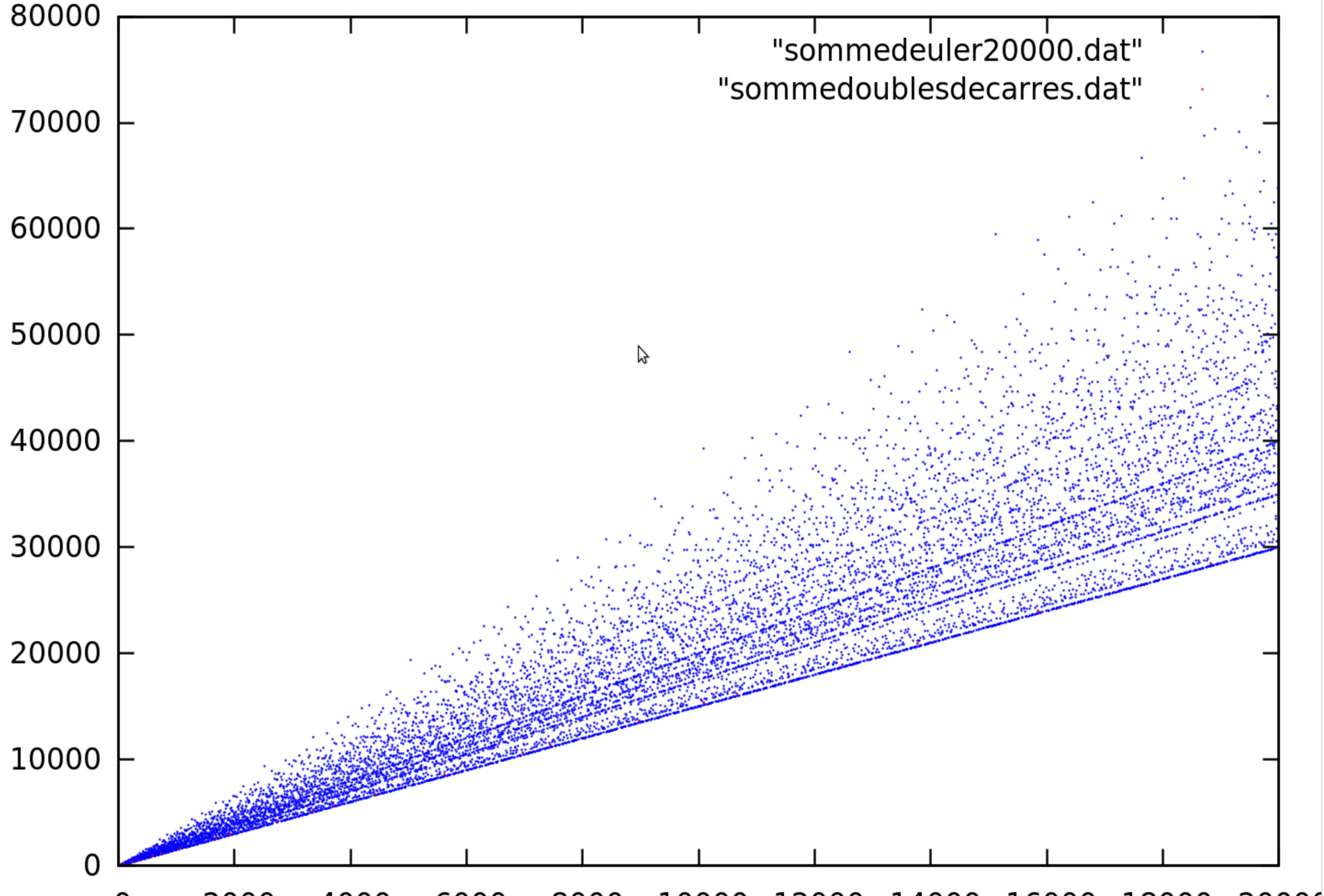


"sommedeuler20000.dat"
"sommedeuler6p.dat"
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000


"sommedeuler20000.dat"
"sommedeuler30p.dat"
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

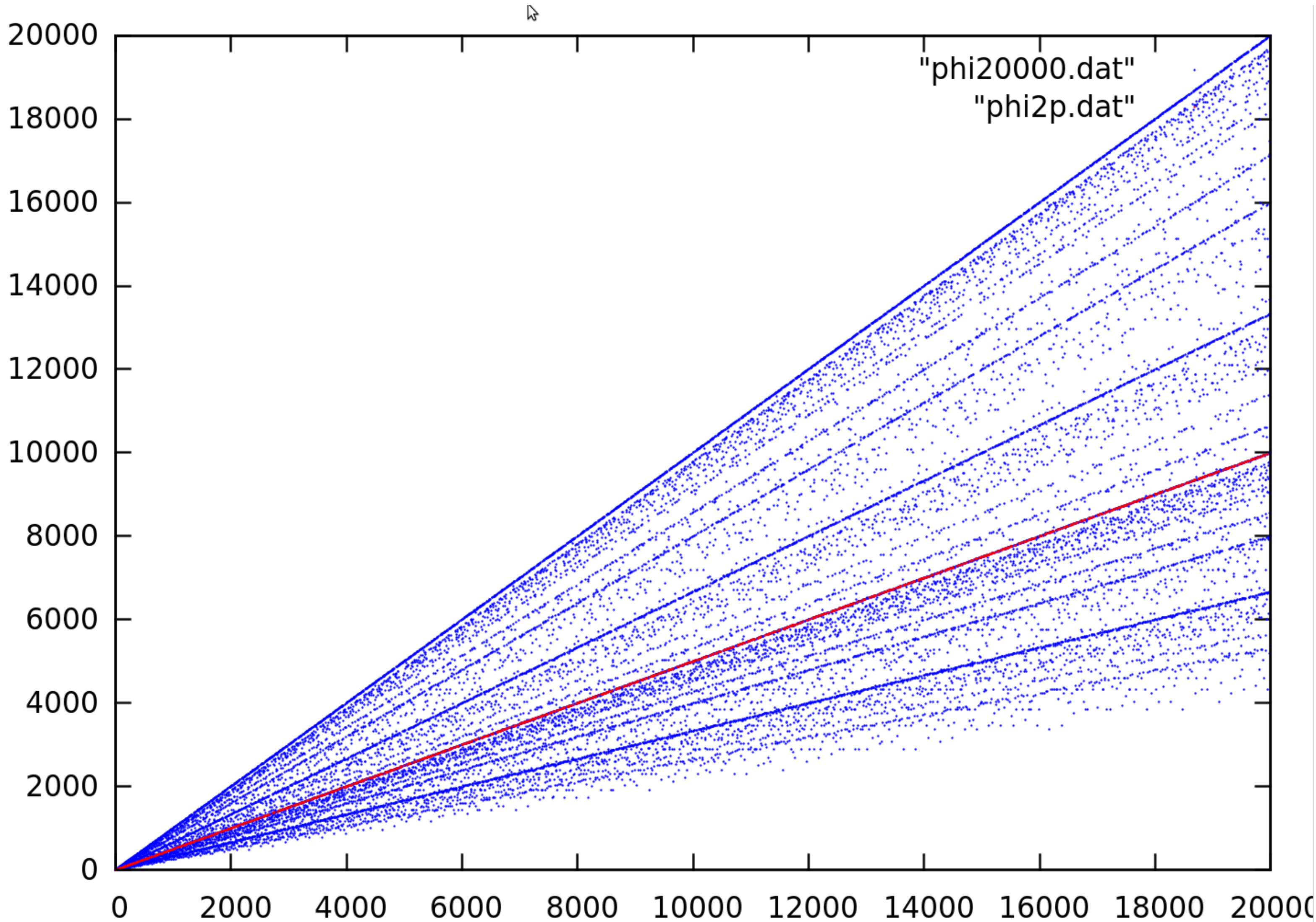
On reproduit également la concentration de points par l'élévation au carré des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation ci-après : les sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la tige basse de la gerbe[2].

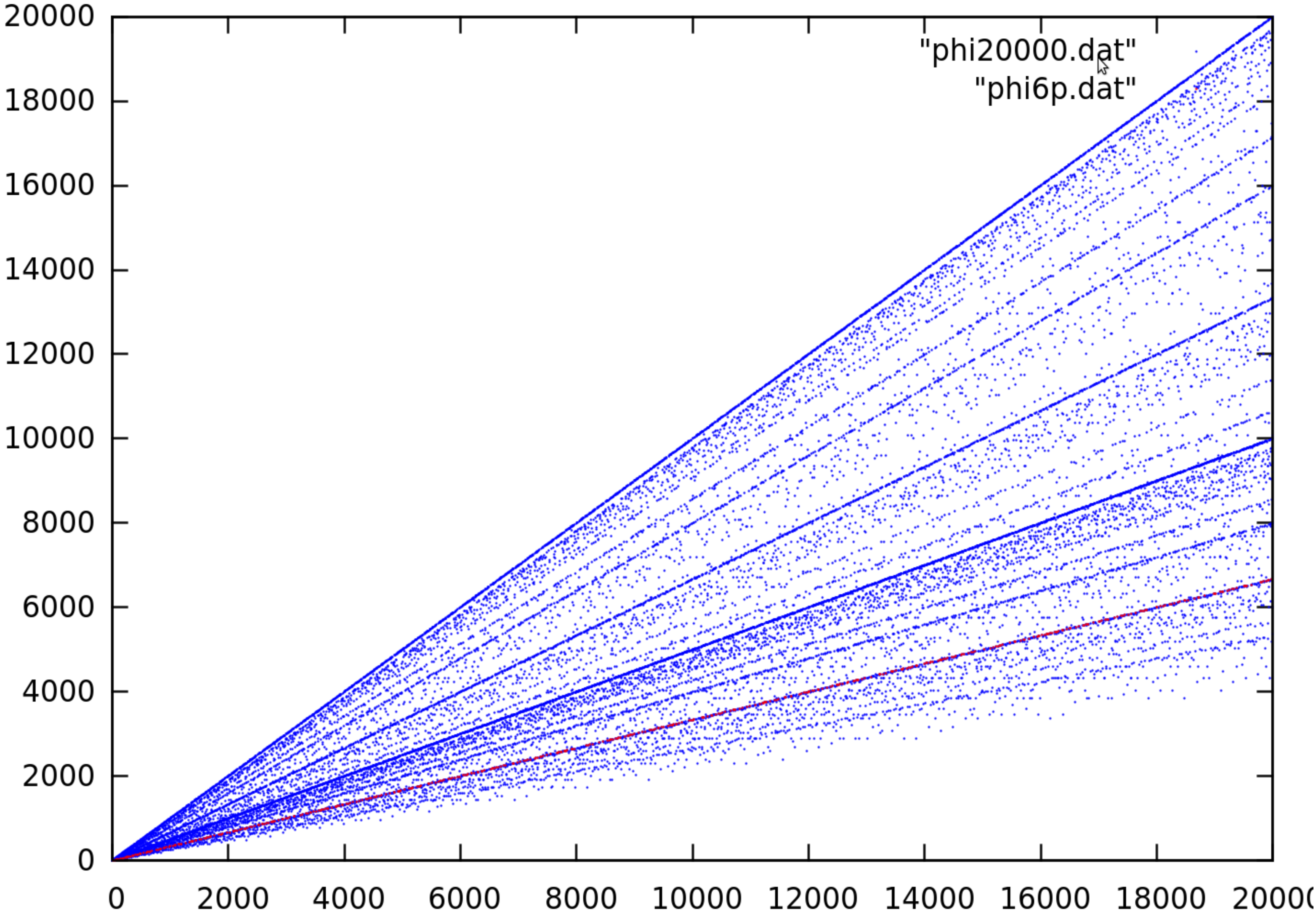
[2]Il n'y a que 25 petits points rouges à retrouver sur la tige basse ; à nouveau, les zoom-écrans ne laissent pas de place au doute...



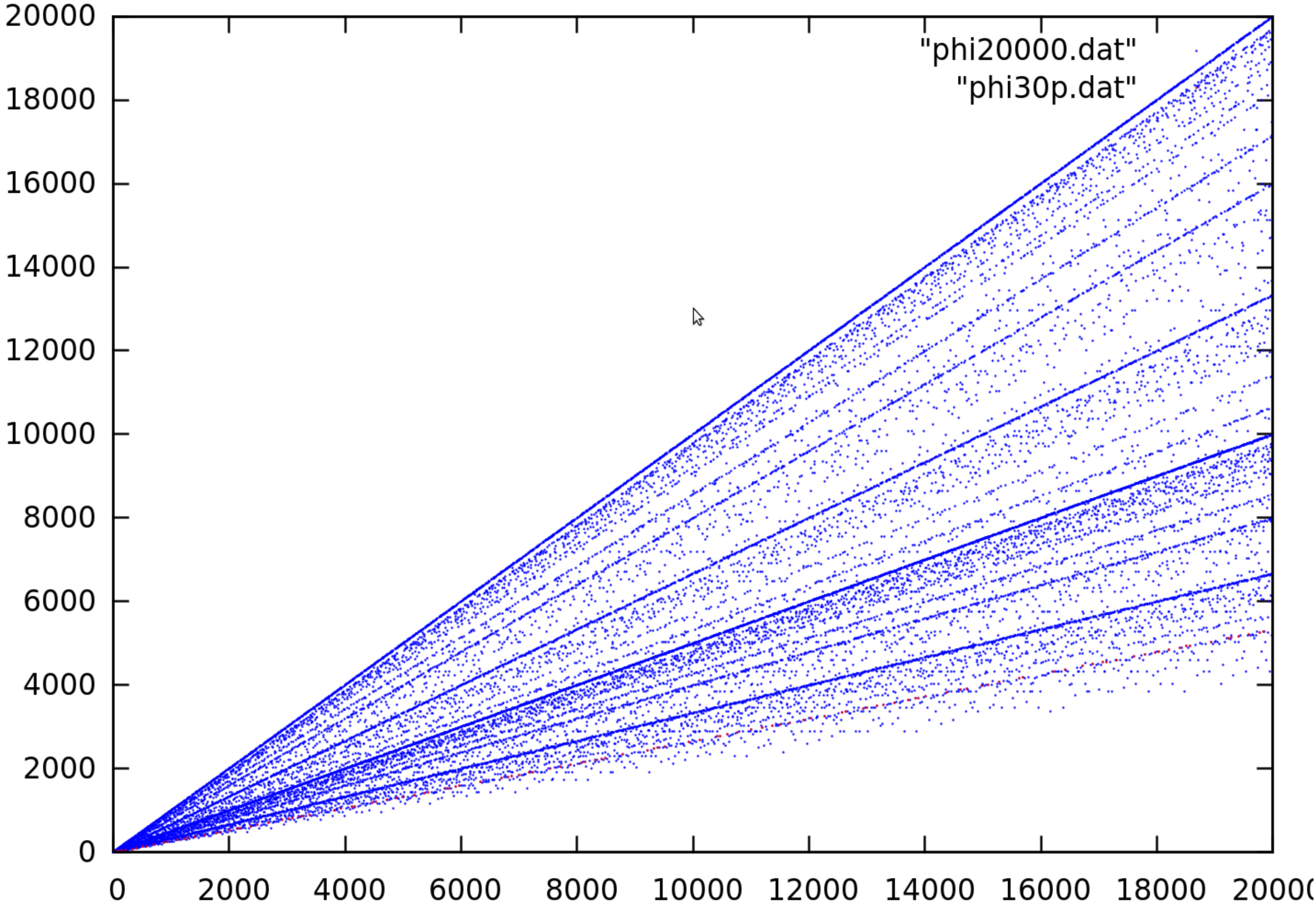
"sommedeuler20000.dat"
"sommedoublesdecarres.dat"
80000
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

Dans la comète de l'indicatrice d'Euler, on réussit à produire des concentrations de points qui correspondent aux sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p$, $6p$, $30p$, soit plus globalement $2kp$ avec p premier (les $2p$ sont à peu près au milieu de la comète, les $6p$ plus bas et les $30p$ encore plus bas).

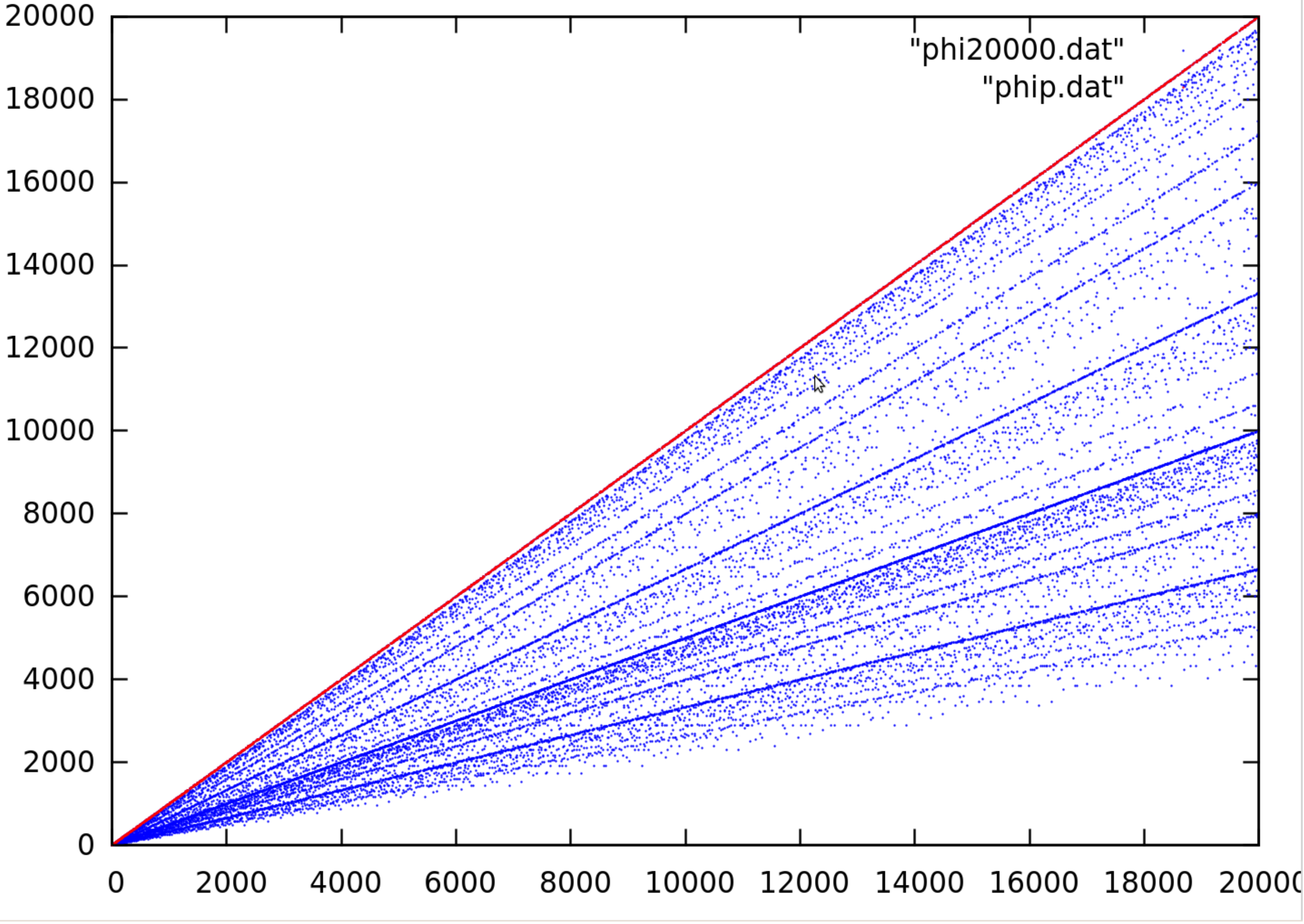

"phi20000.dat"
"phi2p.dat"
20000
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000



"phi20000.dat"
"phi6p.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

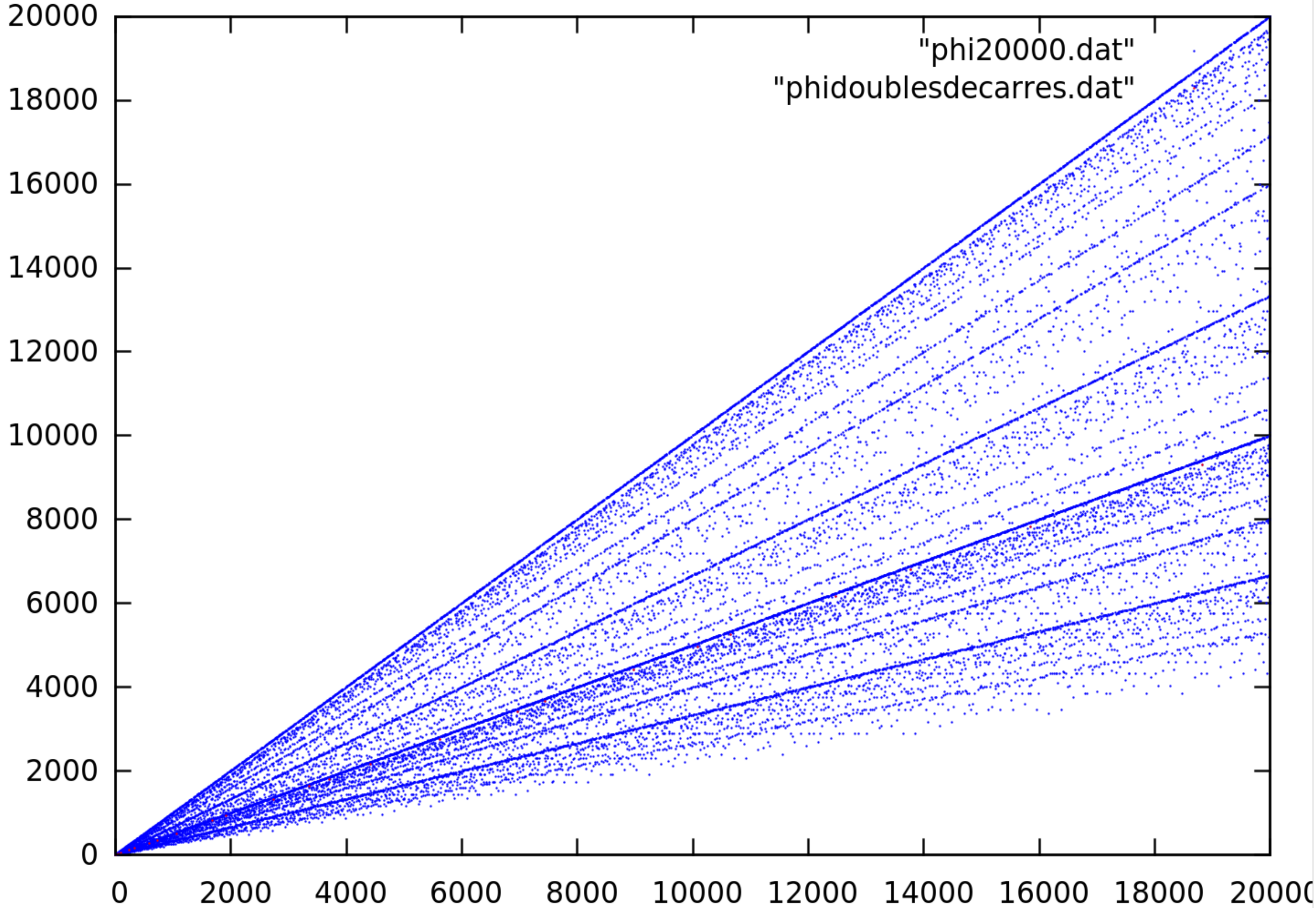

"phi20000.dat"
"phi30p.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

Ce sont les points d'abscisse p qui semblent fournir la limite haute de la comète de φ.

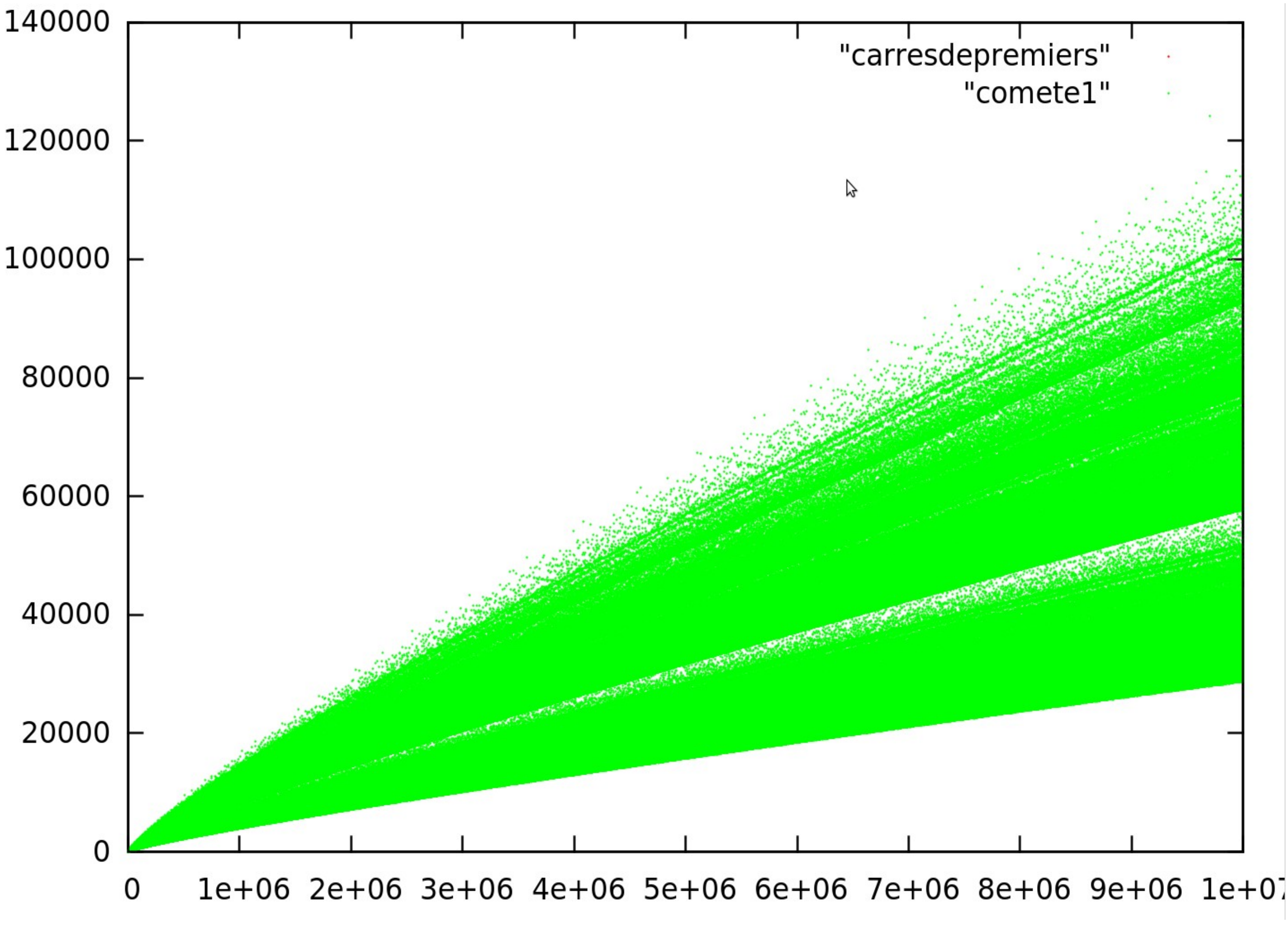

"phi20000.dat"
"phip.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

On reproduit enfin la concentration de points par l'élévation au carré des nombres premiers. C'est ce que l'on constate sur la visualisation ci-après : les sommes des diviseurs des nombres de la forme $2p^2$ avec p premier par exemple, se trouvent également dans la même tige de la gerbe que les $2p^3$.

[3] Il y a quelques petits points rouges à retrouver sur la tige des $2p$; à nouveau, les zoom-écrans ne laissent pas de place au doute...


"phi20000.dat"
"phidoublesdecarres.dat"
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
14000
16000
18000
20000

Pour que ces visualisations soient lisibles, on doit comprendre que les outils permettent de n'afficher qu'un certain nombre de points pris au hasard dans un fichier de données. Si l'on choisit d'afficher tous les nombres de décompositions, on obtient le graphique ci-dessous, ininterprétable.



140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07
"carresdepremiers"
"comete1"

Fournissons quelques valeurs du nombre de décompositions de Goldbach des doubles de premiers (qui fournissent les valeurs minimales, en bas de la comète).

n	$NbDecompG(n)$	$Log(n)$
$9999998 \sim 10^7$	28983	7
$19999982 \sim 2.10^7$	53364	7.3
$29999962 \sim 3.10^7$	75777	7.47
$39999998 \sim 4.10^7$	97514	7.6
$49999966 \sim 5.10^7$	118760	7.69
$59999998 \sim 6.10^7$	139046	7.77
$69999938 \sim 7.10^7$	159569	7.84
$79999966 \sim 8.10^7$	179764	7.9
$89999942 \sim 9.10^7$	199455	7.95
$99999982 \sim 10^8$	218411	8

On constate que le rapport $\frac{218411}{28983} = 7.53$ semble proche du logarithme[4].

Il semblerait également, au vu de ces seules valeurs, que la fonction $NbDecompG$ est additive mais non pas au sens habituel utilisé en théorie des nombres qui veut que $f(a.b) = f(a)+f(b)$ mais plutôt au sens général qui fait que $f(a+b) = f(a)+f(b)$. On constate non seulement que $f(a+b) \sim f(a)+f(b)$ mais également que $f(\lambda a) \sim \lambda f(a)$.

Testons si la fonction NbDecompG est multiplicative. Pour cela, fournissons-en quelques valeurs :

n	$NbDecompG(n)$
$2026 = 2.1013$	32
$4054 = 2.2027$	55
$4106702 = 2.1013.2027$	13561
$8213404 = 2.1013.2.2027$	24549
$2053352 = 1013.2027 + 1$	9187

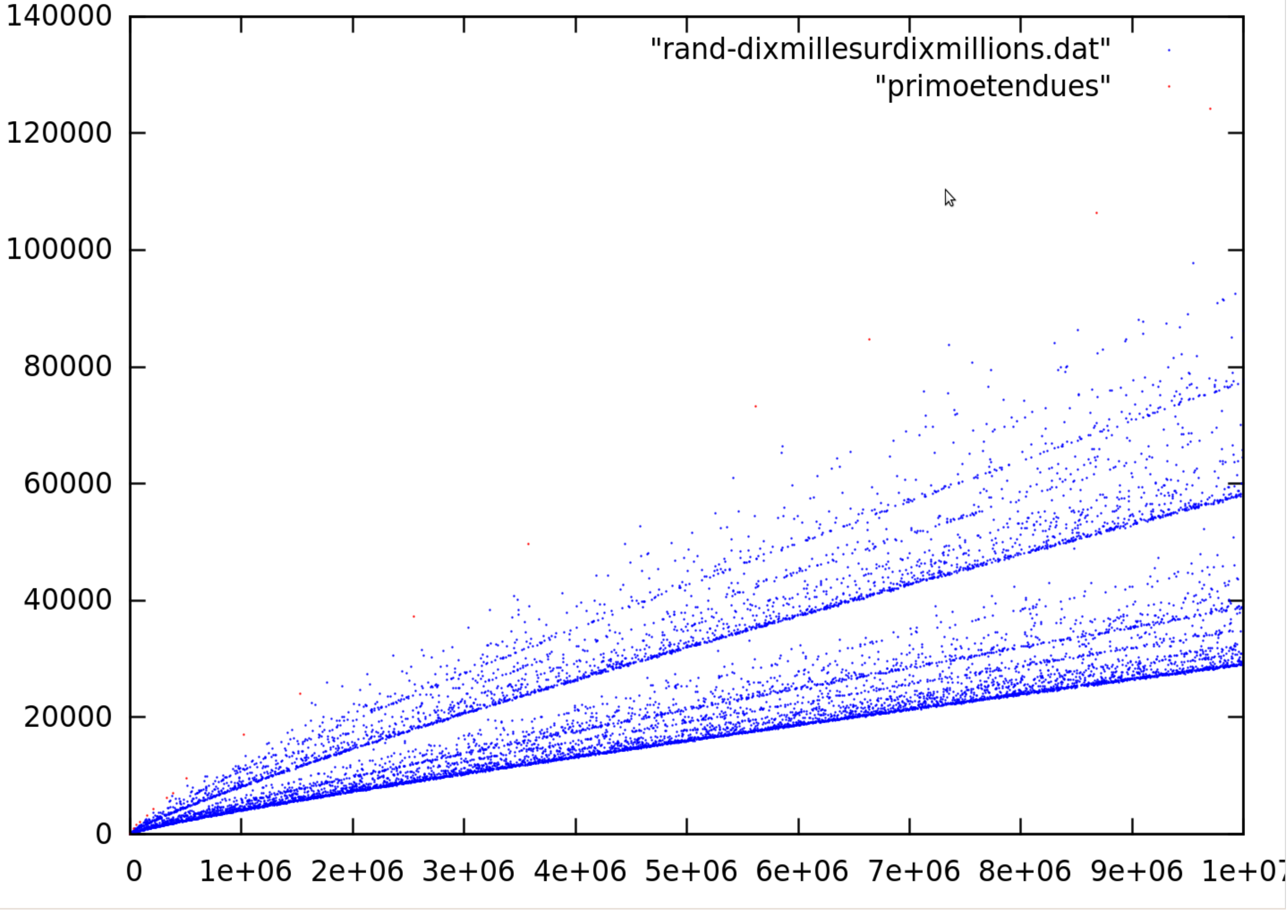
$NbDecompG(a.b)$ a une valeur différente de $NbDecompG(a).NbDecompG(b)$.

Enfin, fournissons les valeurs et la visualisation des nombres de décompositions de Goldbach de certains multiples des primorielles équitablement répartis jusqu'à 10 millions.

[4]A noter : les nombres premiers 4 999 999, 19 999 999 et 29 999 999 sont particulièrement rigolos. On peut tester la primalité des nombres en utilisant le logiciel de factorisation par la méthode des courbes elliptiques à l'adresse http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM

n	$NbDecompG(n)$
6	1
30	3
210	19
2310	114
30030	905
60060	1564
90090	2135
150150	3215
210210	4273
330330	6181
390390	7094
510510	9493
1021020	17075
1531530	24044
2552550	37302
3573570	49655
5615610	73205
6636630	84638
8678670	106360
9699690	124180

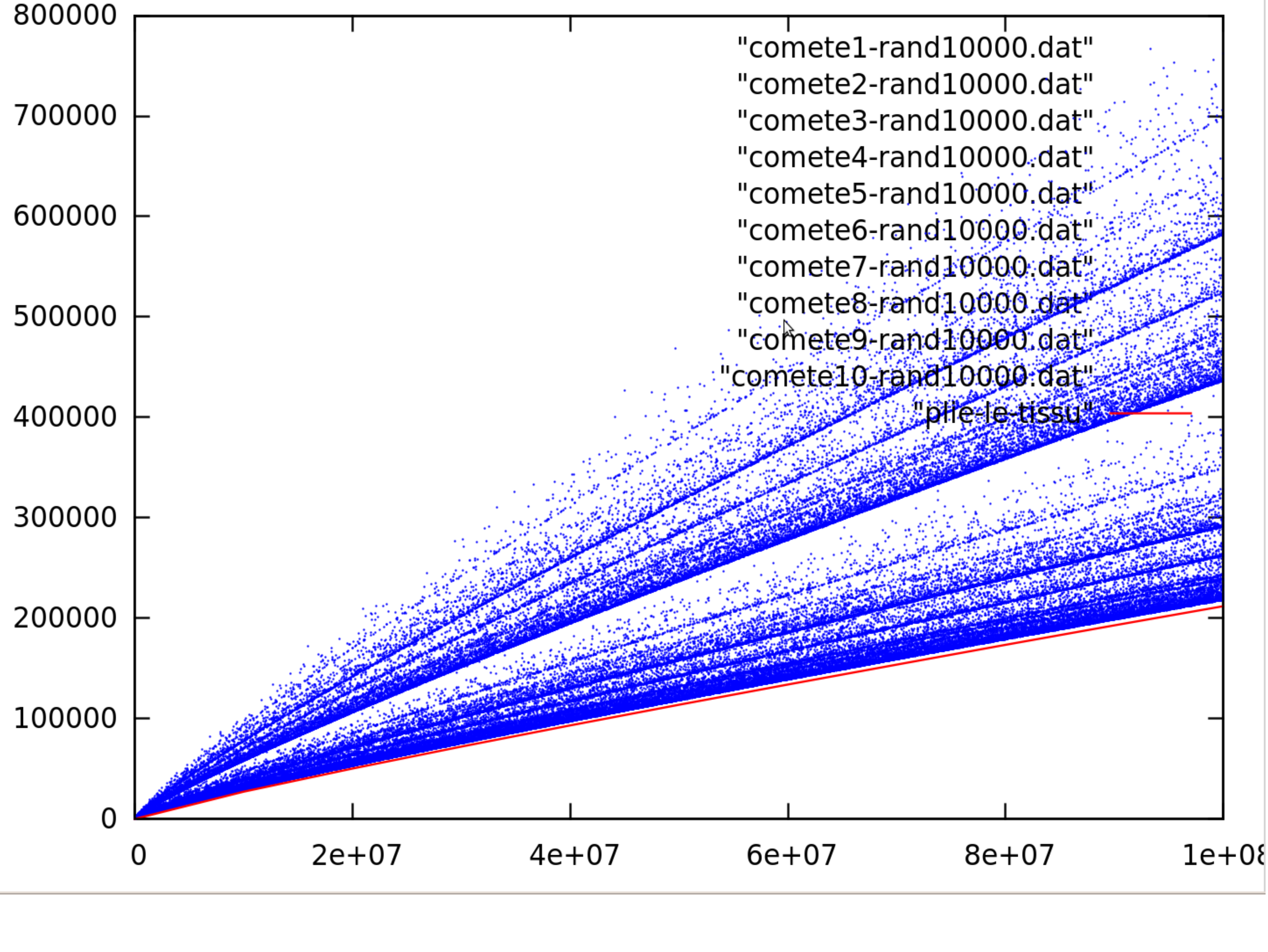
Comme on peut le constater, ces nombres semblent fournir les valeurs limites hautes de la comète...


140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
8e+06
9e+06
1e+07
"rand-dixmillesurdixmillions.dat"
"primoetendues"

Les outils permettent enfin, et cela n'est pas la moindre des choses, de voir si une fonction définie par l'utilisateur minore ou pas le nombre de décompositions de Goldbach (combien de fois, pour qui, etc).

J'ai choisi la fonction de minoration suivante, découlant de la méthode dite par "pliage du tissu" dans laquelle le produit s'effectue sur les nombres p premiers impairs inférieurs ou égaux à $2\sqrt{x}+1$:

$$MinoreGoldbach(x) = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \prod_{p} \left(1 - \frac{2}{p}\right)$$



800000
700000
600000
500000
400000
300000
200000
100000
0
0
2e+07
4e+07
6e+07
8e+07
1e+08
"comete1-rand10000.dat"
"comete2-rand10000.dat"
"comete3-rand10000.dat"
"comete4-rand10000.dat"
"comete5-rand10000.dat"
"comete6-rand10000.dat"
"comete7-rand10000.dat"
"comete8-rand10000.dat"
"comete9-rand10000.dat"
"comete10-rand10000.dat"
"pile-le-tissu"