De l'équation de chazy au nombre 1728, petite note explicative au sujet des séries d'Eisenstein, la somme des diviseurs et les invariants modulaires
gemini pour Denise Vella-Chemla, 10 novembre 2026

J'ai fourni à gemini cette note
https://denisevellachemla.eu/explic-interet-Chazy.pdf
et, sous prétexte que j'avais vu dans la formalisation en Lean par Kevin Buzzard et al. de la démonstration du dernier théorème de Fermat certains nombres premiers spécifiques apparaître, cela a amené gemini vers le nombre 1728 qui apparaît dans le Cours d'arithmétique de Jean-Pierre Serre.

Résumé

Cette note établit le pont mathématique entre l'équation différentielle de Chazy, la formule des nombres pentagonaux d'Euler, la formule de récurrence quadratique pour la somme des diviseurs $\sigma(n)$, et l'apparition de la constante $1728 = 12^3$ dans le *Cours d'arithmétique* de Jean-Pierre Serre.

1. Introduction et contexte

L'étude de la fonction somme des diviseurs $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ occupe une place centrale en théorie analytique des nombres, notamment par son rôle dans la caractérisation des nombres premiers ($\sigma(p) = p + 1$).

Leonhard Euler a découvert une remarquable récurrence linéaire pour $\sigma(n)$ fondée sur la formule des nombres pentagonaux. De manière surprenante, il existe également une relation de récurrence quadratique bilinéaire :

$$\sigma(n) = \frac{12}{n^3 - n} \sum_{k=1}^{n-1} k(3n - 5k)\, \sigma(k)\, \sigma(n - k) \tag{1}$$

Cette identité remarquable trouve sa source dans la théorie des formes modulaires et l'équation différentielle de Chazy.

2. La série d'Eisenstein E_2 et l'équation de Chazy

Soit $\tau \in \mathbb{H}$ (demi-plan supérieur) et $q = e^{2\pi i \tau}$. La série d'Eisenstein quasi-modulaire de poids 2 est définie par :

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) q^n \tag{2}$$

Si l'on pose $y(\tau) = \pi i E_2(\tau)$, cette fonction vérifie l'équation différentielle de Chazy (1910) :

$$y''' - 2y\, y'' + 3(y')^2 = 0 \tag{3}$$

2.1. Origine du facteur 12

Le lien entre E_2 et la fonction η de Dedekind s'écrit :

$$E_2(\tau) = \frac{12}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\ln\eta(\tau) \quad \text{où} \quad \eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \tag{4}$$

La dérivée logarithmique du produit infini d'Euler transforme la formule des nombres pentagonaux en une série d'involutions gouvernée par $\sigma(n)$. Le facteur 12 provient directement du fait que la forme discriminant $\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24}$ est de poids modulaire 12.

3. Les séries E_4, E_6 et le nombre 1728 chez Serre

Dans le Chapitre VII du *Cours d'arithmétique* de Jean-Pierre Serre, les formes modulaires de poids 4 et 6 sont introduites via les séries d'Eisenstein normalisées :

$$E_4(\tau) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n \tag{5}$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n \tag{6}$$

3.1. La combinaison de Ramanujan et la naissance de 1728

En élevant E_4 au cube et E_6 au carré, on constate l'annulation de leurs termes constants :

$$E_4(\tau)^3 = 1 + 720q + 179280q^2 + \dots \tag{7}$$

$$E_6(\tau)^2 = 1 - 1008q + 220752q^2 - \dots \tag{8}$$

La différence s'écrit alors :

$$E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2 = (720 - (-1008))q + \cdots = 1728q + \dots \tag{9}$$

Le facteur $1728 = 12^3 = 2^6 \times 3^3$ est le coefficient exact qui permet de normaliser le discriminant modulaire $\Delta(\tau)$ afin que son développement de Fourier commence par q avec un coefficient 1 :

$$\Delta(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728} = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \tag{10}$$

De même, l'invariant modulaire $j(\tau)$ est défini par :

$$j(\tau) = \frac{1728E_4(\tau)^3}{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2} = \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \dots \tag{11}$$



FIGURE 1 : Graphe de la fonction j

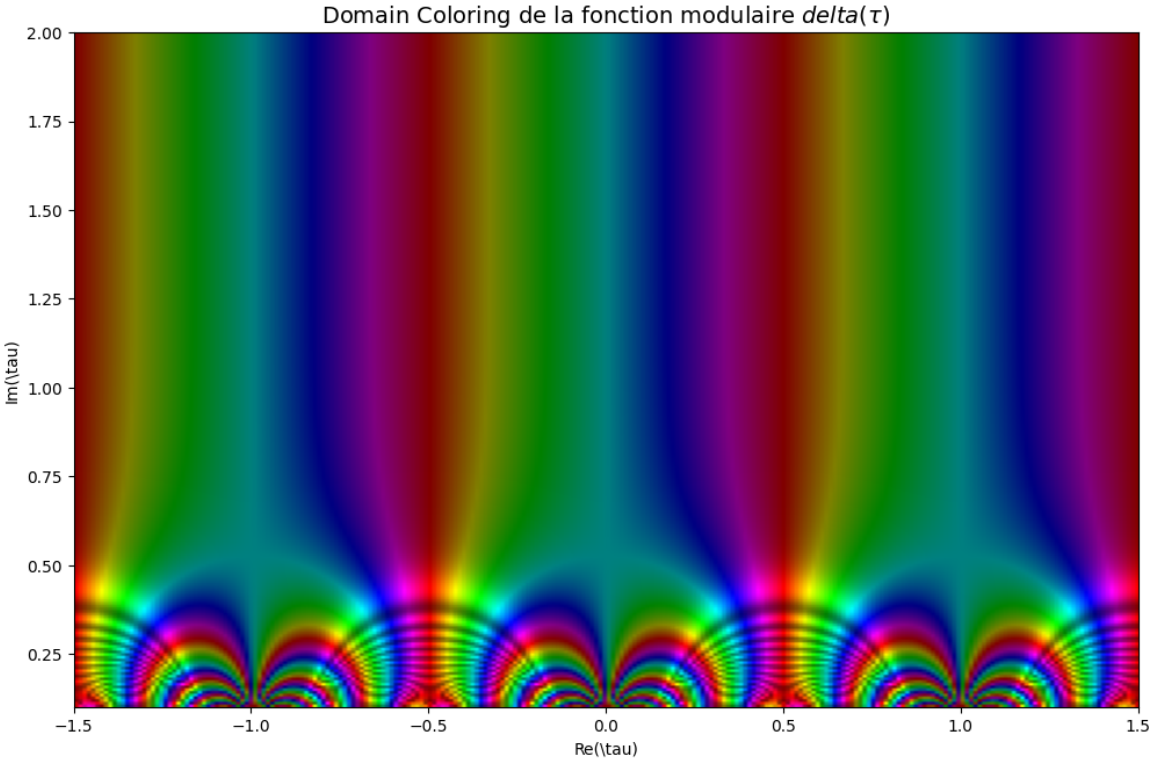


FIGURE 2 : Graphe de la fonction delta

4. Tableau récapitulatif

Objet	Formule	Rôle du facteur 12 ou 1728
Équation de Chazy	$y''' - 2yy'' + 3(y')^2 = 0$	Relie la dérivée de E_2 à sa structure q-série.
Formule de récurrence pour $\sigma(n)$	$\frac{12}{n^3 - n} \sum k(3n - 5k)\sigma(k)\sigma(n - k)$	Issu du terme $24 = 2 \times 12$ dans E_2.
Discriminant Δ	$1728\Delta = E_4^3 - E_6^2$	$1728 = 12^3$ ajuste le terme d'ordre q^1.
Invariant j	$j(\tau) = 1728E_4^3/(E_4^3 - E_6^2)$	Normalise le pole en $1/q$ avec coefficient 1.

Synthèse de la présence récurrente du facteur 12 et de son cube 1728.

5. Conclusion

Le 12 présent dans la récurrence quadratique pour la somme des diviseurs $\sigma(n)$ et le $1728 = 12^3$ du cours de Jean-Pierre Serre sont indissociables : ils traduisent la structure arithmétique sous-jacente du groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et la géométrie des courbes elliptiques.