JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. DE POLIGNAC

Nouvelles recherches sur les nombres premiers

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 305-333.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__305_0>

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LES NOMBRES PREMIERS,

PAR M. A. DE POLIGNAC.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I.

DÉFINITION DES SUITES DIATOMIQUES.

Considérons la suite naturelle des nombres

$$(a)\qquad \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, \\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ldots. \end{cases}$$

Si nous rayons tous les nombres de deux en deux à partir de zéro, nous obtiendrons ainsi le tableau (a_1),

$$(a_1)\qquad \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12, \\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ldots. \end{cases}$$

Nous aurons toujours un nombre rayé compris entre deux nombres conservés; donc, après cette première opération, les séquences des termes rayés se succéderont comme les termes de la suite

$$(1)\qquad 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots,$$

que nous appellerons *suite diatomique de* 2, ou *première suite diatomique*.

Dans le tableau (a_1), rayons encore les nombres de trois en trois à

partir de zéro, et nous aurons le nouveau tableau

$$(a_2)\quad \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11, \\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ldots, \end{cases}$$

dans lequel les séquences de termes rayés se succèdent comme les termes de la suite périodique

$$(2)\qquad 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ldots,$$

que nous nommerons *suite diatomique de* 3, ou *deuxième suite diatomique*.

Après l'unité, le premier nombre non rayé dans le tableau (a_2) est le nombre 5; rayons les nombres de ce tableau de cinq en cinq à partir de zéro, nous obtiendrons le tableau (a_3) :

$$(a_3)\quad \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13, \\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27, \\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37,\ldots, \end{cases}$$

et les séquences de termes rayés se suivront comme les termes de la suite périodique

$$(3)\qquad 1,\ 5,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ldots,$$

qui sera la suite diatomique de 5 ou la troisième suite diatomique.

La suite diatomique de 7, ou la quatrième suite diatomique, serait

$$4)\quad \begin{cases} 1,\ 9,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3,\ 1,\ 5,\ 3,\ 5,\ 7, \\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 7,\ 5,\ 3,\ 5,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 5,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3, \\ 1,\ 3,\ 1;\quad 1,\ 9,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 5,\ 3,\ldots. \end{cases}$$

Pour généraliser ce qui précède, remarquons d'abord que les seconds nombres non rayés dans les tableaux successifs (a), (a_1), (a_2), (a_3), etc., sont précisément les nombres premiers rangés dans leur ordre naturel, et désignons par P_n le $n^{ième}$ nombre premier; alors, en rayant les nombres du tableau (a) de deux en deux, puis de trois en trois, de cinq en cinq, et, enfin, de P_n en P_n, nous formerons un tableau (a_n) dans lequel les séquences de termes rayés auront respectivement pour valeurs les termes d'une certaine suite que nous appellerons *suite diatomique de* P_n, ou $n^{ième}$ *suite diatomique*.

§ II.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES SUITES DIATOMIQUES.

THÉORÈME I. — *Toute suite diatomique est périodique, et la période commence avec la suite.*

Admettons que le théorème soit vrai pour la $(n-1)^{ième}$ suite; si celle-ci est périodique, en effaçant dans le tableau (a_{n-1}) les nombres de P_n en P_n pour former le tableau (a_n), on finira nécessairement par trouver deux multiples de P_n déjà effacés et occupant la même place dans le tableau (a_{n-1}).

Nous appelons *place* d'un nombre dans le tableau (a_{n-1}) sa distance au nombre qui commence la période dans laquelle se trouve le nombre considéré; ainsi, par exemple, $5, 11, 17, \ldots, 5+6n$ occupent la sixième place par rapport au tableau (a_2).

Soient kP_n et $k'P_n$ les nombres trouvés qui occupent la même place dans le tableau (a_{n-1}); alors les séquences ou termes du tableau (a_n), trouvés en allant de kP_n vers $k'P_n$, se répéteront après $k'P_n$ indéfiniment et dans le même ordre par raison de symétrie, et, réciproquement, on trouvera ces mêmes termes dans le même ordre en allant de $k'P_n$ vers kP_n, ou de kP_n vers zéro.

Maintenant, on peut supposer que la distance entre $k'P_n$ et kP_n est plus grande qu'entre kP_n et zéro; donc, puisque tous les termes, en allant de kP_n vers zéro, se suivent dans le même ordre qu'en allant de $k'P_n$ vers kP_n, on trouvera entre kP_n et $k'P_n$ un certain multiple de P_n, μP_n, qui occupera, par rapport à la période du tableau (a_{n-1}), la même place que zéro. Donc les termes trouvés en allant de zéro vers μP_n se répéteront indéfiniment et dans le même ordre après μP_n; or la succession de ces termes forme ce que nous appelons la $n^{ième}$ *suite diatomique;* si donc le théorème existe pour la suite $(n-1)$, il existe aussi pour la suite (n). Or le théorème est vrai pour la suite (1); il est donc général.

THÉORÈME II. — *Le premier nombre du tableau* (a_n), *après lequel les séquences de termes rayés se reproduisent périodiquement, nombre*

que nous désignons par (μP_n), *est le produit de tous les nombres premiers jusqu'à* P_n *inclusivement.*

En partant du nombre (μP_n) et effaçant les nombres de deux en deux, puis de trois en trois, de cinq en cinq,..., et enfin de P_n en P_n, on effacerait juste les mêmes nombres qu'en partant de zéro, et en faisant les mêmes opérations.

Donc (μP_n) est égal à $2.3.5... P_n$ ou à un sous-multiple de ce produit; or, ce sous-multiple contenant au moins un nombre premier de moins, on ne serait pas dans les mêmes conditions que si l'on partait de zéro; donc

$$(\mu P_n) = 2.3.5... P_n.$$

THÉORÈME III. — *Dans toute suite diatomique la période a pour premier terme l'unité; et, dans la série de tous les autres, les termes également distants des extrêmes sont égaux.*

D'abord le premier terme sera l'unité; car $(\mu P_n) - 1$ et $(\mu P_n) + 1$ ne sont divisibles par aucun des nombres premiers non supérieurs à P_n : donc, après la $n^{ième}$ opération, $(\mu P_n) - 1$ et $(\mu P_n) + 1$ ne seront rayés ni l'un ni l'autre, et (μP_n) sera seul rayé entre eux.

Considérons maintenant, dans le tableau (a_n), deux multiples consécutifs de (μP_n), par exemple μP_n et $2\mu P_n$; il est évident que les termes de la période de la suite (n), qui seront à égale distance de μP_n et de $2\mu P_n$, seront égaux.

Le nombre des termes étant impair, il y a toujours un terme milieu.

THÉORÈME IV. — *Les multiples de* P_n *occupent toutes les places par rapport à la période du tableau* (a_{n-1}) *et ne les occupent qu'une seule fois dans chaque période du tableau* (a_n).

Le nombre de places dans la période de la $(n-1)^{ième}$ suite est $\frac{(\mu P_n)}{P_n}$, il faut prouver que les μ places occupées par les multiples de P_n, depuis P_n jusqu'à (μP_n), sont toutes différentes par rapport à la période du tableau (a_{n-1}).

Or cela a lieu, sans quoi (μP_n) ne serait pas le premier à partir duquel la période de la $n^{ième}$ suite recommencerait comme à partir de 0.

THÉORÈME V. — *Si nous désignons par* $\Phi(\mu P_n)$ *le nombre des termes de la période de la* $n^{ième}$ *suite diatomique, nous aurons*

$$\Phi(\mu P_n) = (2-1)(3-1)(5-1)\dots(P_{n-1}-1)(P_n-1).$$

Désignons par k le nombre des termes de la $(n-1)^{ième}$ suite, et supposant que le théorème soit vrai pour cette suite, il sera vrai pour la $n^{ième}$; en effet, le tableau (a_n) contient (P_n) fois le tableau (a_{n-1}), en sorte que, si aucune séquence n'avait été réunie à la précédente en rayant le terme qui les sépare, le nombre des termes du tableau (a_n) serait $k.P_n$; mais, d'après le théorème précédent, les multiples de P_n occupent et n'occupent qu'une seule fois toutes les places de la période (a_{n-1}) dans la première période de (a_n); donc, entre autres, les places non rayées seront occupées. Or ces places sont au nombre de k; donc il faudra, pour avoir le nombre des termes de (a_n), retrancher k de kP_n; on arrive ainsi à $k(P_n-1)$.

On vérifie le théorème pour $n=1$; il est général.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème très-connu; en effet, $\Phi(\mu P_n)$ est le nombre des nombres premiers et inférieurs à (μP_n).

On voit que le nombre des termes augmente très-rapidement:

Pour $n=1$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 1,

Pour $n=2$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 2,

Pour $n=3$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 8,

Pour $n=4$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 48,

Pour $n=5$, $\Phi(\mu P_n)$ devient 480.

THÉORÈME VI. — *Si l'on désigne par* S_n *la somme des termes de la période de la* $n^{ième}$ *suite, ou, ce qui revient au même, le nombre des entiers inférieurs à* μP_n *et divisibles par un ou plusieurs facteurs non supérieurs à* P_n, *on aura évidemment, d'après les théorèmes précédents,*

$$S_n(\mu P_n) - \Phi(\mu P_n) = (\mu P_n) - (2-1)(3-1)\dots(P_n-1).$$

§ III.

DE LA SUITE MÉDIANE ET DES SUITES CONSTANTES QUI TENDENT A SE FORMER DANS LES SUITES DIATOMIQUES.

A cause de la symétrie des suites diatomiques, si, au lieu de partir de zéro pour former une période d'une suite diatomique, on part de $\frac{\mu P_n}{2}$, on formera la moitié d'une période en allant jusqu'à μP_n. Désignons par a le nombre $\frac{\mu P_n}{2}$, et considérons la suite des nombres naturels,

$$\ldots, \quad a-6, \quad a-5, \quad a-4, \quad a-3, \quad a-2, \quad a-1,$$
$$a, \quad a+1, \quad a+2, \quad a+3, \quad a+4, \quad a+5, \quad a+6, \ldots,$$

il est clair d'abord que tous les termes de la forme

$$a \pm 2m + 1$$

seront effacés comme nombres pairs, puisque a est impair; maintenant, si l'on efface (en partant de a) de trois en trois, de cinq en cinq, de sept en sept,..., de P_n en P_n, il est clair qu'en prenant n assez grand, on effacera tous les termes de la suite précédente (jusqu'à un terme choisi arbitrairement), excepté les termes de la forme

$$a \pm 2^m.$$

On voit donc qu'il tend à se former, au milieu des suites diatomiques, une suite constante que nous appellerons *suite médiane*, et qui n'est autre que la succession des puissances de 2 diminuées d'une unité. On voit, de plus, que la suite médiane s'étend au delà de toute limite. Les termes milieux des suites diatomiques tendent donc vers un état définitif, les puissances de 2 diminuées d'une unité. Ils présentent le tableau suivant :

..., 255, 127, 63, 31, 15, 7, 3, 1, $\underline{3}$, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255,....

En particulier, on remarquera que le terme milieu est toujours 3.

On peut se proposer, étant donnée une suite diatomique, de déter-

miner le nombre des termes de la suite médiane qui appartiennent à cette suite diatomique. Cette question paraît très-difficile; toutefois on peut aisément avoir une limite inférieure du nombre cherché. En effet, ce nombre sera au moins égal à deux fois le nombre des puissances de 2 inférieures à P_n augmenté d'une unité.

Prenons maintenant $\frac{\mu P_n}{3}$, $\frac{\mu P_n}{5}$, ou, en général, $\frac{\mu P_n}{P_k}$, P_k étant au plus égal à P_n, et voyons quels seront les termes des suites diatomiques correspondants aux nombres situés autour de $\frac{\mu P_n}{3}$, $\frac{\mu P_n}{5}$,..., $\frac{\mu P_n}{P_k}$. Désignons $\frac{\mu P_n}{P_k}$ par a; il y a deux cas particuliers à distinguer :

1°. $$a \pm 1 \equiv 0 \pmod{P_k};$$

alors les termes diatomiques situés autour de a présentent les tableaux suivants (pourvu qu'on prenne P_n assez grand) :

$$\ldots, \quad P_k^3 - P_k^2 - 1, \quad P_k^2 - P_k - 1, \quad P_k, \quad P_k - 2,$$

$$P_k^2 - P_k - 1, \quad P_k^3 - P_k^2 - 1, \ldots,$$

pour

$$a - 1 \equiv 0,$$

et

$$\ldots, \quad P_k^3 - P_k^2 - 1, \quad P_k^2 - P_k - 1, \quad P_k - 2, \quad P_k,$$

$$P_k^2 - P_k - 1, \quad P_k^3 - P_k^2 - 1, \ldots$$

pour

$$a + 1 \equiv 0.$$

2°. a n'est congru ni avec $+1$, ni avec -1; alors on a le tableau suivant, qui ne diffère des précédents que par les termes du milieu,

$$\ldots, \quad P_k^3 - P_k^2 - 1, \quad P_k^2 - P_k - 1, \quad P_k - 2, \quad 1, \quad P_k - 2,$$

$$P_k^2 - P_k - 1, \quad P_k^3 - P_k^2 - 1.$$

Dans le cas de

$$\frac{\mu P_n}{3} = a,$$

comme $a-1$ ou $a+1$ est l'un ou l'autre congru avec 3, les deux premières valeurs des suites constantes se présenteront seules; pour $\frac{\mu P_n}{P_k}$, P_k étant supérieur à 3, il pourra se présenter les deux cas signalés plus haut.

Considérons maintenant le nombre $\frac{\mu P_n}{2.3}$: nous trouverons qu'à partir de ce terme, il se forme à droite et à gauche une suite qui n'est pas symétrique et dont le terme milieu est 5. Désignons $\frac{\mu P_n}{2.3}$ par b, et prenons la suite des nombres naturels

$$\ldots,\quad b-3,\quad b-2,\quad b-1,\quad b,\quad b+1,\quad b+2,\quad b+3,\ldots;$$

tous les nombres de la forme

$$b \pm 2m+1$$

seront effacés comme nombres pairs. Maintenant il y a deux hypothèses à faire :

1°. $$b-1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Dans ce cas, en effaçant de trois en trois à partir de $b-1$, puis de cinq en cinq, de sept en sept,..., de P_n en P_n à partir de b, on voit que, dans la portion de droite, tous les nombres seront effacés, excepté ceux de la forme

$$b+2^{2m},$$

ou de la forme

$$b+2^{\alpha}.3^{\beta},$$

et, dans la portion de gauche, il n'y aura de conservés que les nombres de la forme

$$b-2^{2m+1} \quad \text{ou} \quad b-2^{\alpha}.3^{\beta}.$$

En sorte que les termes de la suite considérée sont, pour la partie droite,

$$2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{\alpha'}.3^{\beta'}-1, \quad \text{ou} \quad 2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{2m}-1, \quad \text{ou} \quad 2^{2m}-2^{\alpha}.3^{\beta}-1,$$

et, pour la partie gauche,

$$2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{\alpha'}.3^{\beta'}-1, \quad \text{ou} \quad 2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{2m+1}-1, \quad \text{ou} \quad 2^{2m+1}-2^{\alpha}.3^{\beta}-1.$$

On peut réunir ces différentes formes dans une seule formule, sauf à la discuter dans les deux cas où l'on prendrait la portion de droite ou la portion de gauche de la série; cette formule est

$$2^{\alpha}.3^{\beta}(\pm 2^{\alpha'-\alpha}.3^{\beta'-\beta}\pm 1)-1.$$

Si l'on se donne α et β, α' et β' sont déterminés. Supposons d'abord que β ne soit pas nul; alors, si la valeur de β' n'est pas nulle non plus, le terme trouvé pour la portion de droite se trouvera aussi dans la portion de gauche de la série. Admettons encore que $\beta > 0$; alors, si $\beta' = 0$, la formule pour représenter un terme de droite devra être telle que

$$\alpha' = 2k,$$

et, pour un terme de gauche,

$$\alpha' = 2k' + 1.$$

Enfin si $\beta = 0$, on aura, pour un terme de droite,

$$\alpha = 2k,$$

et, pour un terme de gauche,

$$\alpha = 2k + 1.$$

β et β' ne peuvent être nuls à la fois; quant aux exposants α et α', aucun d'eux ne peut être nul.

2°. $$(b+1) \equiv 0 \pmod 3.$$

Il est aisé de voir, dans ce cas, que la partie gauche devient la partie droite, et *vice versâ;* c'est là le seul changement qui ait lieu.

La suite qui se forme autour de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ ne change pas indéfiniment avec P_n; comme la suite médiane, elle tend vers un état constant, seulement elle peut changer de sens, c'est-à-dire que les termes qui pour une valeur de n se trouvent à gauche de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ peuvent pour une autre valeur se trouver à droite, et *vice versâ;* ainsi la suite est

constante par rapport à la valeur des termes, et elle n'admet que deux états en considérant leur disposition. Dans tous les cas, l'inspection seule de la forme de $\frac{\mu P_n}{2.3}$, par rapport à 3, suffira pour marquer si l'on a un de ces états ou l'autre.

Nous nous sommes un peu étendu sur cet exemple pour donner une idée de ces sortes de considérations.

Ce qu'on a dit pour $\frac{\mu P_n}{2.3}$ peut se répéter pour $\frac{\mu P_n}{P_k P_{k'}}$, et l'on arrive à des conclusions que notre cadre ne nous permet pas de développer; nous reviendrons là-dessus une autre fois et nous examinerons plus généralement ce qui se passe autour d'un nombre $\frac{\mu P_n}{P_k P_{k'} P_{k''} \dots}$, par rapport aux termes diatomiques.

Il nous a suffi d'indiquer l'existence de ces suites constantes qui tendent à se former dans les suites diatomiques et nous permettent de trouver des groupes de termes connus, sans qu'il soit besoin de former les suites diatomiques elles-mêmes.

DEUXIÈME PARTIE.

§ I.

SUR LES FONCTIONS μ.

Les fonctions μ, ou plutôt $\mu(x)$, dont nous voulons ici parler, naissent de la considération du produit $2.3.5\dots P_{n-1} P_n$ des nombres premiers successifs de 2 à P_n, que nous avons ci-dessus désigné par (μP_n) ou μP_n : leur caractère essentiel est d'avoir ce produit pour valeur quand la variable x (que nous supposons croître d'une manière continue de 1 à ∞) devient égale à un nombre premier P_n. Quel que soit ce nombre premier, nous voulons qu'on ait

$$\mu(x) = 2.3\dots P_{n-1} P_n \quad \text{pour} \quad x = P_n.$$

Or il y a évidemment une infinité de fonctions jouissant de la propriété indiquée. Ainsi, par exemple, soit $\varpi(P_\theta)_n$ un produit quelconque

de n nombres premiers, et je dis qu'on pourra prendre

$$(1) \qquad \mu(x) = \frac{\varphi(x)\,\Pi\left\{\Pi\,\varphi\left[x^{\frac{1}{\varpi(P_\theta)_{2n}}}\right]\right\}}{\Pi\left\{\Pi\,\varphi\left[x^{\frac{1}{\varpi(P_\theta)_{2n+1}}}\right]\right\}},$$

$\varphi(x)$ étant une fonction égale à l'unité tant que x est < 2, égale à 2 pour $x = 2$, et en général définie par les trois conditions suivantes :

1°. $\varphi(x) = \varphi(x-1)$, tant que x n'est ni premier, ni puissance d'un nombre premier;

2°. $\varphi(x) = x\varphi(x-1)$, si x est premier;

3°. $\varphi(x) = y\varphi(x-1)$, si x est une puissance quelconque d'un nombre premier y (ces deux dernières conditions n'en font à proprement parler qu'une seule, puisque la deuxième est comprise dans la troisième).

Le signe Π est le signe ordinaire de multiplication. On peut du reste écrire autrement la valeur de $\mu(x)$ pour rendre sa forme plus sensible :

$$\mu(x) = \frac{\varphi(x)\,\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right)\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}}\right)\cdots}{\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right)\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''}}}\right)\cdots};$$

$\Pi\,\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right)$ désigne le produit $\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\ldots$ où les dénominateurs des exposants de x sont les nombres premiers 2, 3, 5,.... Dans les autres produits Π les facteurs sont tous de la forme $\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$, mais le dénominateur m est formé par la multiplication de deux, de trois, de quatre nombres premiers, etc., suivant ce qui est indiqué. Observez que pour $x = 1$ tous les facteurs $\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$ se réduisent à l'unité; il en est de même pour $x > 1$ tant que x reste < 2; ainsi $\mu(x) = 1$ pour toutes les valeurs de x depuis $x = 1$ jusqu'à x aussi près de 2 qu'on voudra. Mais pour $x = 2$, on a $\varphi(x) = 2$; les autres facteurs $\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$

sont encore égaux à l'unité : on a donc

$$\mu(2) = 2.$$

En général il n'y a qu'un nombre fini de facteurs φ dont la valeur diffère de 1, car dès que m est assez grand pour que $x^{\frac{1}{m}}$ soit < 2, on a

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = 1.$$

On voit aussi tout d'abord que x croissant, $\mu(x)$ ne peut changer de valeur que quand x atteint un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre. En effet, par hypothèse, $\varphi(x)$ ne varie que dans ce cas, et il en est de même des autres facteurs de l'expression de $\mu(x)$, car, x n'étant pas puissance d'un nombre premier, $x^{\frac{1}{P_k}}$, $x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}$, $x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''}}}$, etc., ne pourront être ni premiers, ni puissances d'un nombre premier. Mais il y a plus : $\mu(x)$ ne change que quand x atteint un nombre premier simple.

Examinons, en effet, ce qui arrive quand x devient une puissance d'un nombre premier y, et pour cela comparons $\mu(x)$ à $\mu(x-1)$; il y a deux cas à distinguer suivant que l'indice de la puissance est un nombre quelconque, ou bien le produit de nombres premiers à la première puissance.

Traitons d'abord le deuxième cas.

Soit, pour fixer les idées,

$$x = y^{2.3.5.7};$$

nous allons voir qu'en passant de $\mu(x-1)$ à $\mu(x)$, nous introduisons le facteur y avec un exposant égal au numérateur et au dénominateur, en sorte que la valeur de $\mu(x)$ reste égale à celle de $\mu(x-1)$.

On sait d'abord que

$$\varphi(x) = y\,\varphi(x-1);$$

ainsi le premier facteur du numérateur est multiplié par y dans le passage de $\mu(x-1)$ à $\mu(x)$: les deux facteurs suivants $\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right)$

et $\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}}\right)$ introduisent à leur tour y avec les exposants 6 et 1. On a

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right) = \varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.7}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3.7}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.11}}\right)\ldots,$$

et, puisque $x = y^{2.3.5.7}$, les valeurs de φ qui ont ici changé sont

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.3}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.5}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{3.5}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{3.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{3.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{5.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{5.7}}\right].$$

Donc

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right) = y^6\,\Pi\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right].$$

De même, pour $y = x^{2.3.5.7}$, on a

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.5.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.3.5.7}}\right],$$

conséquemment

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}}\right) = y\,\Pi\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}}\right].$$

Les autres facteurs du numérateur gardent la même valeur pour $\mu(x)$ et $\mu(x-1)$.

Au dénominateur, les deux premiers facteurs Π changent seuls. D'abord

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right) = \varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{7}}\right)\ldots :$$

or, pour $x = y^{2.3.5.7}$, on a

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{5}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right];$$

il s'ensuit

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right) = y^4\,\Pi\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{P_k}}\right].$$

Semblablement, comme

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{3.5.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.5.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.7}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.3.7}}\right],$$

$$\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.5}}\right) = y\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{2.3.5}}\right],$$

on trouve

$$\Pi\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''}}}\right) = y^4\,\Pi\varphi\left[(x-1)^{\frac{1}{P_k P_{k'} P_{k''}}}\right].$$

On voit donc, finalement, que y s'introduit au numérateur avec l'exposant $1+6+1=8$, et au dénominateur avec l'exposant $4+4=8$; donc l'expression ne change pas, et $\mu(x) = \mu(x-1)$.

En général, si x est égal à un nombre premier y élevé à une puissance marquée par le produit de m nombres premiers différents, y s'introduira au numérateur avec l'exposant

$$1 + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \ldots,$$

et au dénominateur avec l'exposant

$$m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} + \ldots ;$$

or, ces quantités sont égales.

Si x était une puissance d'un nombre premier dans l'indice de laquelle des nombres premiers figureraient plusieurs fois comme facteurs, on ferait une démonstration tout à fait analogue à celle que nous venons de donner, et l'on trouverait que la fonction ne change pas non plus dans ce cas. Pour abréger, nous omettons cette démonstration; le lecteur y suppléera aisément.

Mais si x est purement un nombre premier, le premier facteur du numérateur est multiplié par x quand on passe de $x-1$ à x; aucun autre terme ne change. On a donc alors

$$\mu(x) = x\,\mu(x-1).$$

Ainsi, partant de $\mu(1) = 1$, on trouvera successivement

$$\mu(2) = 2, \quad \mu(3) = 2.3,$$

et, en général,

$$\mu(x) = 2.3.., P_{n-1} P_n \quad \text{pour} \quad x = P_n,$$

P_n étant un nombre premier quelconque; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Reste à choisir $\varphi(x)$ de manière à remplir les trois conditions prescrites.

Or il suffira pour cela d'écrire

$$\varphi(x) = \frac{F(x)\,\Pi\left\{\Pi F\left[\frac{x}{\varpi(P_k)_{2n}}\right]\right\}}{\Pi\left\{\Pi F\left[\frac{x}{\varpi(P_k)_{2n+1}}\right]\right\}}, \tag{2}$$

dans laquelle $F(x)$ désigne, en général, le produit de tous les nombres consécutifs depuis 1 jusqu'au plus grand entier x contenu dans x, en supposant toutefois $F(x) = 1$ si $x = 0$: on voit que $F(x) = \Gamma(x+1)$ suivant la notation de Legendre, en sorte que si x est un entier, $F(x) = \Gamma(x+1)$.

Pour démontrer la formule (2) nous développerons le second membre; nous écrirons

$$\varphi(x) = \frac{F(x).\Pi F\left(\frac{x}{P_k P_{k'}}\right).\Pi F\left(\frac{x}{P_k P_{k'} P_{k''} P_{k'''}}\right)\cdots}{\Pi F\left(\frac{x}{P_k}\right).\Pi F\left(\frac{x}{P_k P_{k'} P_{k''}}\right)\cdots}.$$

Le nombre des facteurs F dont la valeur diffère de l'unité est toujours limité quelle que soit la valeur de x : pour $x = 1$ et tant que x est < 2, tous les facteurs sont égaux à 1, et comme alors aussi $\varphi(x) = 1$, notre égalité est vérifiée : pour $x = 2$, elle fournit encore la valeur exacte $\varphi(2) = 2$. Voyons ce qui arrive quand x grandit indéfiniment.

Lorsque x est une puissance d'un nombre premier, alors, en passant de $x - 1$ à x, on multiplie le premier membre par la racine de x.

Il faut démontrer qu'il en sera de même pour le second membre, que je désignerai, pour abréger, par $\psi(x)$; or au numérateur rien ne change, sauf le premier facteur, qui dans $\psi(x-1)$ était $F(x-1)$, et qui dans $\psi(x)$ devient

$$F(x) = xF(x-1).$$

Au dénominateur, le seul terme altéré, c'est $F\left(\frac{x-1}{y}\right)$, en désignant par y le nombre premier racine de x; il vient

$$F\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} F\left(\frac{x-1}{y}\right);$$

par suite,

$$\psi(x) = y.\psi(x-1).$$

Donc, si l'égalité (2) avait lieu pour $x - 1$, elle subsiste pour x.

Le cas de x nombre premier est compris dans le précédent; alors $y = x$, et les deux membres se trouvent à la fois multipliés par x. Mais si x a une autre valeur quelconque, alors on démontre d'une manière tout à fait semblable à ce que nous avons donné à propos de la fonction $\mu(x)$, que le second membre ne change pas quand on passe de $x - 1$ à x; donc le second membre reste encore, dans ce cas, égal au premier s'il l'était d'abord; l'égalité (2) déjà vérifiée de $x = 1$ à $x = 2$ est par suite établie généralement.

Puisque $F(x) = \Gamma(x+1)$, on voit que $\mu(x)$ s'exprime complétement avec des fonctions eulériennes.

Nous pouvons maintenant nous proposer la question inverse : exprimer $F(x)$ avec des fonctions φ, et φ avec des fonctions μ.

Cela est très-facile; en effet, prenons de part et d'autre les logarithmes dans la formule (1), nous aurons

$$\log\mu(x) = \log\varphi(x) - \sum \log\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k}}\right) + \sum \log\varphi\left(x^{\frac{1}{P_k P_{k'}}}\right) + \ldots.$$

De même,

$$\log\mu\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \sum \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2P_k}}\right) + \sum \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2P_k P_{k'}}}\right) - \ldots,$$

$$\log\mu\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \sum \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3P_k}}\right) + \ldots,$$

$$\log\mu\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ etc.}$$

En ajoutant ces égalités, nous aurons

$$\sum \log\mu\left(x^{\frac{1}{g}}\right) = \log\varphi(x),$$

où g reçoit toutes les valeurs 1, 2, 3, etc., jusqu'à une certaine limite, car les logarithmes deviennent nuls quand la valeur de la fonction μ se réduit à l'unité; de là on tire

$$\Pi\mu\left(x^{\frac{1}{g}}\right) = \varphi(x). \tag{3}$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire voir qu'un terme quelconque $\log\varphi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$, autre que le premier $\log\varphi(x)$, entre, dans les seconds membres des égalités qu'on ajoute, autant de fois avec le signe + qu'avec le signe —; et, en effet, il est aisé de s'assurer que le coefficient de ce terme autre que $\log\varphi(x)$ sera, au signe près, de la forme

$$1 - n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} - \ldots = (1-1)^n = 0.$$

On opérerait d'une manière tout à fait analogue pour trouver F en fonction de φ, et l'on obtiendrait

$$F(x) = \Pi\varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right), \tag{4}$$

ou, en développant,

$$F(x) = \varphi(x)\,\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\cdots\varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right)\cdots;$$

γ reçoit toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'au nombre qui rend $\frac{x}{\gamma} < 2$, car à partir de là tous les facteurs $\varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right)$ sont égaux à l'unité.

Au reste, dans toutes les formules que nous avons données, il suffit de prendre la partie entière de l'indice; car, par exemple,

$$\varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right) = \varphi(a)$$

si nous appelons a l'entier contenu dans $\frac{x}{\gamma}$; et

$$\mu\left(x^{\frac{1}{g}}\right) = \mu(a')$$

si nous désignons par a' la partie entière de la racine $g^{ième}$ de x.

La formule (4) a été aussi donnée par M. Tchebichef qui la démontre directement, chose très-simple à faire [*]. Les formules fondamentales (1) et (2) et la formule dérivée (3) sont entièrement nouvelles.

Lorsqu'on veut calculer $\varphi(x)$ au moyen de la première formule fondamentale, on se trouve arrêté parce qu'on ne connaît pas tous les nombres premiers inférieurs à un nombre donné, et qu'on ne peut les exprimer en fonction de ce nombre; c'est, en effet, ce qu'on devrait savoir faire pour trouver les limites des $\sum$ qui figurent dans la formule

$$\log\varphi(x) = \log F(x) - \sum \log F\left(\frac{x}{P_k}\right) + \sum \log F\left(\frac{x}{P_k P_{k'}}\right) - \cdots, \tag{I}$$

[*] Le Mémoire où M. Tchebichef démontre ce théorème est postérieur à ma première communication à l'Institut, qui a été faite en octobre 1849. Cependant, le savant russe n'ayant pu avoir connaissance de nos méthodes, il est juste de dire que son travail lui appartient en propre.

puisque l'on doit prendre les $\sum$ jusqu'à ce que l'on cesse d'avoir

$$\frac{x}{P_k} \geq 2, \quad \frac{x}{P_k P_{k'}} \geq 2, \quad \frac{x}{P_k P_{k'} P_{k''}} \geq 2, \ldots.$$

Nous substituerons des inégalités à la place de l'égalité (I) et nous commencerons par nous demander si l'expression

$$\text{(II)} \qquad \log F(x) - \sum{}^{n} \log F\left(\frac{x}{P_k}\right) + \sum{}^{n} \log F\left(\frac{x}{P_k P_{k'}}\right) - \ldots,$$

est plus grande ou plus petite que $\log \varphi(x)$.

L'indice n que nous donnons aux $\sum$ indique qu'il ne faut prendre les valeurs de (k), (k, k'), (k, k', k''), etc., que depuis 1 jusqu'à n; par exemple,

$$\log F(x) - \sum{}^{2} \log F\left(\frac{x}{P_k}\right) + \sum{}^{2} \log F\left(\frac{x}{P_k P_{k'}}\right)$$
$$= \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right).$$

Il est clair que nous supposons n plus petit que le rang du plus grand nombre premier satisfaisant à la condition

$$\frac{x}{P_k} > 2.$$

Dans le cas contraire, l'expression (II) serait exactement égale à $\log \varphi(x)$.

On voit aisément que le nombre des termes de cette expression est toujours 2^n.

Maintenant écrivons

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \log \varphi(x) &= \log F(x) - \varepsilon \\ &= \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \varepsilon' \\ &= \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) - \varepsilon'' \\ &= \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) - \log F\left(\frac{x}{5}\right) \\ &\qquad + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.5}\right) + \log F\left(\frac{x}{3.5}\right) \\ &\qquad - \log F\left(\frac{x}{2.3.5}\right) - \varepsilon''' \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \sum\sum \log F - \varepsilon^{(n)}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons faire voir que

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon' > 0, \quad \varepsilon'' > 0, \quad \varepsilon''' > 0, \ldots, \quad \varepsilon^{(n)} > 0;$$

il s'ensuivra que toujours

$$\log \varphi(x) < \sum\sum^{n} \log \mathrm{F}.$$

En se reportant à la formule dérivée (4), on trouve pour $\varphi(x)$ les valeurs suivantes :

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\cdots},$$

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\varphi\left(\frac{x}{6}\right)\cdots\right]\left[\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\cdots\right]} = \frac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}\left(\frac{x}{2}\right)\left[\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\cdots\right]},$$

de même

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}\left(\frac{x}{2.3}\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{F}\left(\frac{x}{3}\right)\left[\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\cdots\right]},$$

et ainsi de suite. Or de là, en prenant les logarithmes, on tire aisément

$$(a') \quad \begin{cases} \varepsilon = \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_0 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\right], \\ \varepsilon' = \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_1 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\varphi\left(\frac{x}{9}\right)\cdots\right], \\ \varepsilon'' = \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_2 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\varphi\left(\frac{x}{11}\right)\varphi\left(\frac{x}{13}\right)\cdots\right], \\ \varepsilon''' = \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_3 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\varphi\left(\frac{x}{11}\right)\varphi\left(\frac{1}{13}\right)\varphi\left(\frac{x}{17}\right)\cdots\right], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon^{(n)} = \left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_n = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{\mathrm{P}_{n+1}}\right)\varphi\left(\frac{x}{u_2}\right)\varphi\left(\frac{x}{u_3}\right)\varphi\left(\frac{x}{u_4}\right)\cdots\right]. \end{cases}$$

Dans l'expression $\left(\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right)_n$ les différentes valeurs u_1, u_2, u_3, etc., que reçoit u, ne sont autres que les termes d'une suite dont les premières différences sont les termes correspondants de la $n^{ième}$ suite diatomique augmentés chacun d'une unité; u_1 est toujours égal à P_{n+1}.

Les facteurs sous les signes logarithmiques étant > 1, leurs logarithmes sont positifs. On a donc bien $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, etc., et

$$(a'')\quad \begin{cases} \log\varphi(x) < \log F(x) \\ \qquad < \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) \\ \qquad < \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) \\ \qquad < \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) - \log F\left(\frac{x}{5}\right) \\ \qquad\qquad + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.5}\right) + \log F\left(\frac{x}{3.5}\right) \\ \qquad\qquad - \log F\left(\frac{x}{2.3.5}\right) \\ \qquad < \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad < \Sigma\Sigma^{n} \log F. \end{cases}$$

A mesure qu'on prend n plus grand, la complication des seconds membres augmente; mais l'approximation croît en même temps; car, en valeur absolue,

$$\varepsilon > \varepsilon' > \varepsilon'' > \varepsilon'''\dots > \varepsilon^{(n)}.$$

On sait qu'en prenant n assez grand, $\varepsilon^{(n)} = 0$.

On trouverait identiquement par les mêmes raisonnements :

$$(b)\quad \begin{cases} \log\mu(x) = \log\varphi(x) - \eta \\ \qquad = \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \eta' \\ \qquad = \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) - \eta'' \\ \qquad = \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) \\ \qquad\qquad + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5}}\right) \\ \qquad\qquad - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.5}}\right) - \eta''' \\ \qquad = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad = \Sigma\Sigma^{n} \log\varphi - \eta^{(n)}, \end{cases}$$

et

$$(b')\quad \begin{cases} \eta = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\dots\right] \\ \eta' = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{7}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{9}}\right)\dots\right] \\ \eta'' = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{5}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{7}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{11}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{13}}\right)\dots\right] \\ \eta''' = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{7}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{11}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{13}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{17}}\right)\dots\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta^{(n)} = \log\left[\mu\left(x^{\frac{1}{P_{n+1}}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{u_2}}\right)\mu\left(x^{\frac{1}{u_3}}\right)\dots\right], \end{cases}$$

d'où

$$(b'')\quad \begin{cases} \log\mu(x) < \log\varphi(x) \\ \qquad < \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \\ \qquad < \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) \\ \qquad < \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) \\ \qquad\qquad + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.5}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3.5}}\right) \\ \qquad\qquad - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3.5}}\right) \\ \qquad < \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad < \sum\sum^{n} \log\varphi. \end{cases}$$

Il semble qu'il soit plus difficile d'obtenir des inégalités en sens contraire de celles que nous avons données jusqu'ici : du moins, nous ne sommes pas parvenus jusqu'à présent à en former qui soient aussi simples et aussi générales que les précédentes ; cependant on peut en trouver quelques-unes. Nous allons en donner des exemples ; cela est essentiel pour l'établissement de nos théorèmes sur les limites des nombres premiers.

Prenons la $(k+1)^{ième}$ égalité du tableau (a), le reste sera $\varepsilon^{(k)}$.

Si nous pouvons trouver une fonction connue G_k, variable avec k, et telle que

$$G_k > \varepsilon^{(k)},$$

il est évident que nous aurons

$$\log \varphi(x) > \sum\sum^{k} \log F - G_k.$$

Prenons d'abord la seconde égalité, et cherchons à déterminer une fonction G_1, telle que

$$\log \varphi(x) > \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - G_1.$$

Prenons

$$G_1 = \log F\left(\frac{x}{2}\right) = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{4}\right)\varphi\left(\frac{x}{6}\right)\cdots\right],$$

il est clair que ce produit sera plus grand que le suivant:

$$\varepsilon' = \left[\varphi\left(\frac{x}{u}\right)\right]_1 = \log\left[\varphi\left(\frac{x}{3}\right)\varphi\left(\frac{x}{5}\right)\varphi\left(\frac{x}{7}\right)\cdots\right],$$

puisque chacun des produits élémentaires du premier est supérieur à ceux du second. Donc

$$\log \varphi(x) > \log F(x) - 2 \log F\left(\frac{x}{2}\right).$$

Examinons de même la troisième égalité du tableau (a), et cherchons G_2, tel que

$$\log \varphi(x) > \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right) - G_2.$$

En faisant

$$G_2 = \log F\left(\frac{x}{3}\right),$$

nous aurons évidemment

$$G_2 > \varepsilon'',$$

car chacun des facteurs de G_2 (sous le signe log) est supérieur au fac-

teur correspondant de ε'' ; j'en conclus que

$$\log\varphi(x) > \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - 2\log F\left(\frac{x}{2}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right).$$

Le choix d'une valeur simple qu'on pourrait attribuer à G_3 offre déjà plus de difficultés. Cela tient à la complication très-rapidement croissante des termes diatomiques u_1, u_2, u_3, etc., qui figurent dans les restes successifs ε, ε', ε'', ε''',..., $\varepsilon^{(n)}$, et dont il faudrait suivre les irrégularités avec les multiples d'un nombre aussi petit que possible de nombres choisis à l'avance.

Dans le cas de G_1 et G_2, on a vu que ce nombre se réduit à 1 ; en effet, dans G_1 il a suffi de faire figurer les multiples de 3, et dans G_2 ceux de 5.

Nous reviendrons une autre fois avec plus de détail sur ce sujet qui tient essentiellement à l'étude des suites diatomiques.

§ II.

THÉORÈMES SUR LES LIMITES DES NOMBRES PREMIERS.

Nous allons maintenant appliquer nos méthodes à plusieurs théorèmes sur les nombres premiers. Donnons d'abord, comme exemple de ces recherches, une proposition relative aux fonctions φ. On a toujours

$$\varphi(x^2) > \varphi(x)^2.$$

En effet, si nous désignons, pour abréger, $\dfrac{F(x)}{F\left(\frac{x}{2}\right)}$ par $f_1(x)$ et $\dfrac{F(x)}{F\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ par $f_2(x)$, nous aurons, d'après les théorèmes précédents,

$$f_1(x) > \varphi(x) > f_2(x).$$

Il suffit donc de démontrer que

$$f_2(x^2) > f_1(x)^2,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\mathrm{F}(x^2)}{\mathrm{F}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} > \frac{\mathrm{F}(x)^2}{\mathrm{F}\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Soit d'abord x un entier pair. En substituant aux signes F leurs expressions, il sera facile de vérifier cette inégalité. En effet, on a bien

$$\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\left(\frac{x^2}{2}+2\right)\ldots x^2$$
$$> 1.2.3\ldots\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}+2\right)\ldots x\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}+2\right)\ldots x.$$

Pour rendre la chose plus sensible, on peut écrire cette inégalité de la façon suivante :

$$\left\{\left(\frac{x^2}{2}+1\right)\left(\frac{x^2}{2}+2\right)\cdots\frac{x(x+1)}{2}\right\}$$
$$\times\left\{\left[\frac{x(x+1)}{2}+1\right]\cdots\frac{x(x+2)}{2}\left[\frac{x(x+2)}{2}+1\right]\cdots\left[\frac{x(x+x-1)}{2}\right]\right\}$$
$$\times\left\{\left[\frac{x(2x-1)}{2}+1\right]\cdots\frac{x(x+x)}{2}\right\}$$
$$>\left\{\left[1\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)\right]\cdot\left[2\cdot\left(\frac{x}{2}+2\right)\right]\cdot\left[3\cdot\left(\frac{x}{2}+3\right)\right]\cdots\left[\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\right]\right\}$$
$$\times\left\{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdots\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{(x+1)(x+2)\cdots\frac{x.x}{2}\right\}.$$

Chacune des trois accolades du premier membre contient un nombre de facteurs égal à celui de l'accolade correspondante du second, et chacun des facteurs dans le premier membre est égal ou supérieur au facteur correspondant dans le second.

Une méthode analogue établira pour x quelconque cette même inégalité

$$\frac{\mathrm{F}(x^2)}{\mathrm{F}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} > \frac{\mathrm{F}(x)^2}{\mathrm{F}\left(\frac{x}{2}\right)^2};$$

on a donc bien

$$\varphi(x^2) > \varphi(x)^2.$$

Démontrons maintenant qu'entre un nombre et son carré il y a toujours au moins un nombre premier; il suffira, pour cela, d'établir que

$$\mu(x^2) > \mu(x).$$

Nous avons démontré ci-dessus que

$$\log\varphi(x) > \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - 2\log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right).$$

On a vu aussi que

$$\log\varphi(x) < \log F(x) - \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \log F\left(\frac{x}{3}\right) + \log F\left(\frac{x}{2.3}\right).$$

Par des raisonnements identiques, on ferait voir que

$$\log\mu(x) > \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - 2\log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right),$$

et

$$\log\mu(x) < \log\varphi(x) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \log\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \log\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right),$$

ou bien

$$\mu(x) > \frac{\varphi(x)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)}{\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2},$$

$$\mu(x) < \frac{\varphi(x)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)}{\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Posons

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)}{\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)},$$

et

$$f_2(x) = \frac{\varphi(x)\varphi\left(x^{\frac{1}{2.3}}\right)}{\varphi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2};$$

alors on voit par ce qui précède que

$$f_1(x) > \mu(x) > f_2(x).$$

Et, pour démontrer que

$$\mu(x^2) > \mu(x),$$

il suffira de prouver que

$$f_2(x^2) > f_1(x),$$

c'est-à-dire (en prenant $x = z^6$) que

$$\frac{\varphi(z^{12})\,\varphi(z^2)}{\varphi(z^6)\,\varphi(z^4)^2} > \frac{\varphi(z^6)\,\varphi(z)}{\varphi(z^3)\,\varphi(z^2)},$$

ce qui devient

$$\varphi(z^{12})\,\varphi(z^3)\,\varphi(z^2)^2 > \varphi(z^6)^2\,\varphi(z^4)^2\,\varphi(z).$$

Diminuons les produits élémentaires du premier membre; augmentons les produits élémentaires du deuxième membre; si cette nouvelle inégalité est vraie, la première le sera *à fortiori*. Or

$$\varphi(z^6)^2 < \frac{\mathrm{F}(z^6)^2}{\mathrm{F}\left(\frac{z^6}{2}\right)^2},$$

$$\varphi(z^4)^2 < \frac{\mathrm{F}(z^4)^2}{\mathrm{F}\left(\frac{z^4}{2}\right)^2},$$

$$\varphi(z) < \frac{\mathrm{F}(z)}{\mathrm{F}\left(\frac{z}{2}\right)},$$

et

$$\varphi(z^{12}) > \frac{\mathrm{F}(z^{12})}{\mathrm{F}\left(\frac{z^{12}}{2}\right)^2},$$

$$\varphi(z^3) > \frac{\mathrm{F}(z^3)}{\mathrm{F}\left(\frac{z^3}{2}\right)^2},$$

$$\varphi(z^2)^2 > \frac{\mathrm{F}(z^2)^2}{\mathrm{F}\left(\frac{z^2}{2}\right)^4}.$$

On pourra donc substituer à l'inégalité primitive la suivante

$$\frac{F(z^{12})}{F\left(\frac{z^{12}}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z^3)}{F\left(\frac{z^3}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z^2)^2}{F\left(\frac{z^2}{2}\right)^4} > \frac{F(z^6)^2}{F\left(\frac{z^6}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z^4)^2}{F\left(\frac{z^4}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z)}{F\left(\frac{z}{2}\right)},$$

ou bien, enfin, en remarquant que

$$\frac{F(z^3)}{F\left(\frac{z^3}{2}\right)^2} > 1, \quad \frac{F(z^2)^2}{F\left(\frac{z^2}{2}\right)^4} > 1,$$

il suffira de vérifier l'inégalité plus simple

$$\frac{F(z^{12})}{F\left(\frac{z^{12}}{2}\right)^2} > \frac{F(z^6)^2}{F\left(\frac{z^6}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z^4)^2}{F\left(\frac{z^4}{2}\right)^2}\cdot\frac{F(z)}{F\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Supposons d'abord la valeur de z égale à un entier pair En remplaçant les fonctions F par leurs valeurs, il viendra, dans ce cas,

$$\left[\left(\frac{z^{12}}{2}+1\right)\cdots z^{12}\right] > \left[\left(\frac{z^6}{2}+1\right)\cdots z^6\right]^2\left[\left(\frac{z^4}{2}+1\right)\cdots z^4\right]^2\cdots$$
$$\times\left[\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots z\right]\left(1.2.3\ldots\frac{z^{12}}{2}\right).$$

Mais on peut écrire $\left(1.2.3\ldots\frac{z^{12}}{2}\right)$ de la façon suivante :

$$\left[\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}\right)\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}-1\right)\right]$$
$$\times\left[\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}+1\right)\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}-2\right)\right]\cdots$$
$$\times\left[\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}+2\right)\left(\frac{z^6+z^4+z}{2}-3\right)\right]\cdots$$
$$\times(z^6+z^4+z)(z^6+z^4+z+1)\cdots\frac{z^{12}}{2}.$$

En substituant cette valeur dans l'inégalité, on reconnaît que le nombre des facteurs dans chacun des membres est le même, et que, de plus, chacun des facteurs du premier membre (en les choisissant convenablement) est plus grand qu'un des facteurs du deuxième membre. La proposition est démontrée.

Nous laissons au lecteur à chercher une démonstration analogue pour le cas de z quelconque.

Dans le compte rendu que nous avons eu l'honneur de lire à l'Académie en 1849, le théorème précédent se trouve énoncé sous une forme différente; on y distingue les cas où le nombre serait premier, puissance de 2 ou quelconque.

Cette distinction se présente, en effet, lorsqu'on emploie pour arriver au théorème une démonstration presque aussi simple que la précédente, mais que nous omettons pour abréger.

Les méthodes exposées dans ce Mémoire conduisent à un grand nombre de conséquences intéressantes sur la théorie si obscure des nombres premiers. Nous nous proposons d'en faire le sujet de recherches ultérieures.