La méthode Cristal, le recentrage à la Gauss, le réseau d'Eisenstein et les systèmes de recouvrement d'Erdős : un bilan critique de ce qui peut, et ne peut pas, être prouvé
discussion critique d'une note de gemini, Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, juillet 2026

Résumé : Cette note reprend et prolonge une discussion critique portant sur la méthode *Cristal* (élimination graphique, dans un réseau planaire, des multiples de p_k et des entiers $\equiv n \pmod{p_k}$, pour cribler les décomposants de Goldbach de n). On y examine successivement trois tentatives de rendre cette méthode rigoureuse : (1) une application directe du théorème de Minkowski, (2) un recentrage des résidus à la Gauss combiné à un passage au réseau triangulaire d'Eisenstein, (3) un rattachement à la théorie des systèmes de recouvrement (*systèmes de congruences couvrantes*) d'Erdős. On montre que chacune de ces pistes échoue pour une raison structurelle précise et démontrable, et on isole l'obstacle réel, qui relève de la théorie analytique des cribles (disproportion entre le module du crible et la longueur de l'intervalle cible).

Je fournis à claude cette note https://denisevellachemla.eu/Cristal-Eisenstein-Minkowski-dvc et mon dessin du cristal pour $n = 400$ https://denisevellachemla.eu/cristal400.pdf comme références à analyser.

1. Position du problème

Soit n un entier pair, $n = p + q$ la décomposition de Goldbach recherchée, p, q premiers $> \sqrt{n}$. La méthode Cristal (D. Vella-Chemla, notes de références fournies ci-dessus, reprises et discutées avec l'ia gemini) place les entiers $x \in \{1, \ldots, n\}$ sur les nœuds d'un réseau planaire et élimine, pour chaque nombre premier $p_k \leq \sqrt{n}$, les deux familles de droites

$$\mathcal{D}_0(p_k) : x \equiv 0 \pmod{p_k},$$
$$\mathcal{D}_n(p_k) : x \equiv n \pmod{p_k}.$$

Les points survivants sont les candidats x tels que $x \not\equiv 0, n \pmod{p_k}$ pour tout $p_k \leq \sqrt{n}$: c'est exactement le crible de Legendre-Ératosthène appliqué simultanément à x et $n - x$. Le fait, mis en évidence par Denise Vella-Chemla, que $\mathcal{D}_0(p_k)$ et $\mathcal{D}_n(p_k)$ fusionnent lorsque $p_k \mid n$ a déjà été établi rigoureusement par ailleurs : la densité $\delta(n, B)$ qui en résulte coïncide, à un facteur de renormalisation de Mertens près, avec la constante singulière $\mathfrak{S}(n)$ de Hardy-Littlewood.

La question posée est : peut-on transformer cette construction géométrique en une *preuve d'existence* d'au moins un point survivant, via un argument de géométrie des nombres (Minkowski) ou de combinatoire des congruences (Erdős) ?

2. Échec de l'application directe du théorème de Minkowski

Théorème [Minkowski, 1889] Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ un réseau de covolume $\mathrm{covol}(\Lambda)$, et $K \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble convexe, symétrique par rapport à l'origine ($x \in K \Rightarrow -x \in K$), d'aire $\mathrm{aire}(K) > 4\,\mathrm{covol}(\Lambda)$. Alors K contient un point non nul de Λ.

L'ensemble des survivants du crible Cristal, noté S_n, ne satisfait *aucune* des deux hypothèses structurelles requises :

Proposition 1 : S_n n'est en général ni convexe, ni un sous-réseau de $\mathbb{Z}$ (ou de l'anneau d'Eisenstein $\mathbb{Z}[\omega]$).

Preuve : S_n est un complémentaire d'union de progressions arithmétiques dans $\{1, \ldots, n\}$: c'est, par construction, un ensemble discret fragmenté, sans raison géométrique d'être convexe.

Pour la structure de groupe : pour $p_k \geq 5$ premier, les classes de résidus non nulles retirées mod p_k forment un sous-ensemble de $\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ qui n'est stable ni par addition ni par soustraction, sauf dans les cas dégénérés $p_k = 2, 3$ (seuls diviseurs premiers possibles d'un module composite ayant des sous-groupes propres non triviaux compatibles avec le retrait d'exactement une ou deux classes). Comme $\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ est un corps pour p_k premier, ses seuls sous-groupes sont $\{0\}$ et lui-même : retirer une classe non nulle ne laisse jamais un sous-groupe pour $p_k \geq 5$.

Corollaire 1 : le théorème de Minkowski ne s'applique pas à S_n, quel que soit le réseau ambiant choisi (carré, triangulaire/Eisenstein, ou autre) : l'obstacle n'est pas le choix du réseau, il est dans la nature même de l'ensemble criblé.

3. Le recentrage à la Gauss : ce qu'il apporte réellement

Je propose à l'ia claude, qui m'explique que le fait que le réseau ne soit pas centré est un obstacle à l'application du théorème de Minkowski, d'utiliser les résidus modulaires tels que les entendait Gauss, et qui étaient positifs ou négatifs.

3.1. Symétrisation effective

Posons $x' = x - n/2$ (n pair). Pour $p_k \nmid n$,

$$\begin{aligned} x \equiv 0 \pmod{p_k} &\iff x' \equiv -n/2 \pmod{p_k}, \\ x \equiv n \pmod{p_k} &\iff x' \equiv n/2 \pmod{p_k}. \end{aligned}$$

Les deux classes exclues sont donc opposées l'une de l'autre modulo p_k. Ceci étant vrai pour tout p_k, l'ensemble S_n recentré est invariant par $x' \mapsto -x'$: le crible devient globalement symétrique par rapport à l'origine.

Proposition 2 : Une classe $r \pmod{p_k}$ (p_k premier impair) vérifie $r \equiv -r$ si et seulement si $r \equiv 0$, c'est-à-dire si et seulement si $p_k \mid n$.

Ainsi, la fusion des deux droites observée empiriquement par Denise Vella-Chemla pour $p_k \mid n$ correspond exactement au cas où la paire symétrique de classes retirées dégénère en un point fixe de la symétrie $x' \mapsto -x'$. C'est une reformulation géométrique du retrait d'une seule classe au lieu de 2 déjà vue lorsque le module considéré divise n.

3.2. Pourquoi cela ne suffit pas

Minkowski exige *simultanément* symétrie centrale *et* convexité. Le recentrage donne la première, jamais la seconde : le complémentaire d'un ensemble symétrique est lui-même symétrique, mais cette propriété globale ne dit rien sur la forme locale de l'ensemble (connexité, convexité). L'obstacle de la Proposition 1 subsiste intégralement après recentrage.

4. Le réseau d'Eisenstein : un vrai gain, mais hors sujet

Le réseau triangulaire $\Lambda_E = \mathbb{Z}[\omega]$, $\omega = e^{i\pi/3}$, est le réseau plan de covolume donné qui réalise l'empilement de cercles le plus dense possible ($\pi/(2\sqrt{3})$), et c'est également, pour les corps convexes ronds, le réseau critique optimal au sens de Minkowski : il minimise la constante nécessaire pour garantir qu'un disque contient un point du réseau.

Proposition 3. Ce gain de densité concerne le réseau ambiant Λ_E tout entier. Il ne concerne pas S_n, qui n'est pas un sous-réseau de Λ_E pour $p_k \geq 5$ (même argument que la Proposition 1, valable dans $\mathbb{Z}[\omega]/p_k\mathbb{Z}[\omega]$).

De plus, seules les directions de crible associées à $p_k = 2$ et $p_k = 3$ s'alignent naturellement sur les trois axes à 60° du réseau d'Eisenstein (symétrie d'ordre 6 native). Pour $p_k = 5, 7, 11, \ldots$, la pente de $\mathcal{D}_0(p_k)$ dans la base d'Eisenstein reste générique, exactement comme dans la grille carrée de largeur $6k$ déjà utilisée. Le passage à Eisenstein rend donc plus élégantes les deux directions déjà mises en évidence (celles de 2 et 3), sans en fusionner davantage.

5. Systèmes de recouvrement d'Erdős : une piste séduisante mais orthogonale

5.1. Définitions

- Un *système de congruences couvrantes* (Erdős, 1950) est une famille finie de congruences

$$a_i \pmod{m_i}, 1 < m_1 \leq \cdots \leq m_k,$$

  telle que

$$\bigcup_i \{x \equiv a_i \pmod{m_i}\} = \mathbb{Z}.$$

- Le *problème du module minimum* d'Erdős demandait si le plus petit module d'un système de congruences couvrantes à modules *distincts* peut être arbitrairement grand. Résolu par Hough (2015) par la négative : le module minimal est borné (borne originelle 10^{16}, ensuite réduite à 616 000 par Balister, Bollobás, Morris, Sahasrabudhe et Tiba en 2022, puis à 118 pour les modules distincts sans facteur carré par Cummings, Filaseta et Trifonov).
- Hough et Nielsen (2019) ont établi que tout système de congruences couvrantes à modules distincts possède un module divisible par 2 ou par 3.

5.2. Pourquoi le crible Cristal n'est structurellement jamais un système de congruences couvrantes

Proposition 4 : pour tout n, la densité des survivants de la méthode Cristal restreinte aux nombres premiers $p_k \leq \sqrt{n}$ est strictement positive :

$$\delta(n) \;=\; \prod_{\substack{p_k \leq \sqrt{n} \\ p_k \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \prod_{\substack{p_k \leq \sqrt{n} \\ p_k \nmid n}} \left(1 - \frac{2}{p_k}\right) \;\sim\; \frac{C}{(\ln n)^2} \;>\; 0$$

(théorème de Mertens ; C constante dépendant des facteurs premiers de n ; c'est la même quantité que $\delta(n, B) = \mathfrak{S}(n)/M$, M facteur de renormalisation de Mertens, déjà établie).

Corollaire 2 : la méthode Cristal, restreinte aux $p_k \leq \sqrt{n}$ avec au plus deux classes retirées par module, ne peut *jamais* constituer un système de congruences couvrantes : une classe de résidu modulo $P = \prod_{p_k \leq \sqrt{n}} p_k$ survit toujours. La question "existe-t-il un trou ?" a donc une réponse positive immédiate, indépendante de toute la théorie des systèmes de congruences couvrantes.

5.3. L'obstacle réel

Proposition 5 : $P = \prod_{p_k \leq \sqrt{n}} p_k = e^{\theta(\sqrt{n})} \sim e^{\sqrt{n}}$ (théorème des nombres premiers, fonction de Tchebychev θ).

Ainsi P croît beaucoup plus vite que n lui-même. Le Corollaire 1 garantit qu'une classe de résidu modulo P survit au crible, mais rien ne garantit qu'un représentant de cette classe se trouve dans la fenêtre cible $[\sqrt{n},\, n - \sqrt{n}]$, de longueur $\sim n \ll P$: la classe survivante pourrait très bien n'avoir *aucun* représentant dans cette fenêtre.

C'est exactement le problème du *niveau de distribution* de la théorie analytique des cribles : un argument de densité pure (Legendre) ne peut jamais, à lui seul, garantir un représentant dans un intervalle donné, à cause de l'explosion du module. C'est cette disproportion, plus fine et plus fondamentale que la simple non-convexité de S_n, qui borne structurellement ce que la méthode Cristal peut établir.

6. Bilan

Piste	**Ce qu'elle apporte**	**Pourquoi elle échoue**
Minkowski direct	-	S_n non convexe, non sous-réseau
Recentrage de Gauss	Symétrie centrale réelle	Convexité toujours absente
Réseau d'Eisenstein	Densité maximale du réseau *ambiant*	S_n n'hérite pas de cette structure
Systèmes de congruences couvrantes d'Erdős	Cadre conceptuel élégant	S_n n'est jamais un système de congruences couvrantes (densité > 0 prouvée)

L'obstacle réel, dans les quatre cas, se ramène à la même chose : la méthode Cristal, en tant que reformulation géométrique du crible de Legendre, hérite de la faiblesse structurelle de ce crible - l'explosion du terme d'erreur combinatoire face au module $p_k \sim e^{\sqrt{n}}$ - ainsi que, plus profondément, de l'obstruction de parité de Selberg qui limite toute méthode de crible pure (aucun crible, aussi raffiné soit-il, ne peut à lui seul distinguer un nombre premier d'un produit de deux nombres premiers ; c'est ce qui borne les résultats de type Chen (1973), $n = premier + pseudo\text{-}premier$).

La valeur de la méthode Cristal reste réelle, mais elle est **illustrative** et non **démonstrative** : elle offre une visualisation fidèle et pédagogiquement précieuse de résultats déjà établis rigoureusement par ailleurs, en particulier du rôle privilégié des petits facteurs premiers 2 et 3. Toute tentative de la faire porter la charge d'une preuve d'existence bute sur des obstacles structurels indépendants du choix du réseau ou du cadre combinatoire choisi pour l'habiller.

Références

[1] Note de l'ia gemini au sujet de l'approche dite "du cristal" de Denise Vella-Chemla : https://denisevellachemla.eu/Cristal-Eisenstein-Minkowski-dvc.pdf .

[2] Cristal $n = 400$ https://denisevellachemla.eu/cristal400.pdf .