Cribles de Grothendieck pour Goldbach

Denise Vella-Chemla

On reprend notre exemple fétiche de la recherche des décomposants de Goldbach de l'entier pair $n = 98$.

$$\begin{cases} 98 \equiv 0 \pmod 2 \\ 98 \equiv 2 \pmod 3 \\ 98 \equiv 3 \pmod 5 \\ 98 \equiv 0 \pmod 7 \end{cases}$$

Appelons d un décomposant de Goldbach potentiel de $n = 98$. d peut être congru, hormis 0, à tout ce à quoi $n = 98$ n'est pas congru. Le signe $\vee$ dans le système ci-dessous est à lire comme un ou exclusif, son emploi étendu est à comprendre comme le fait de vérifier autant de systèmes de congruences que la combinatoire le permet.

$$\begin{cases} d \equiv 1 \pmod 2 \\ d \equiv 1 \pmod 3 \\ d \equiv 1 \vee 2 \vee 4 \pmod 5 \\ d \equiv 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \pmod 7 \end{cases}$$

Remarque : on notera que le fait de respecter le système de systèmes de congruences ci-dessus est une condition suffisante mais non nécessaire pour être un décomposant de Goldbach de n. On trouvera la preuve de cette caractérisation des décomposants de Goldbach d'un nombre pair n qui sont supérieurs à la racine carrée de n en [1].

Chaque classe de congruence, par exemple les $3x+1$, les $7x+3$ est un crible au sens de Grothendieck ([4], [5], [6], [7]). Ce crible "envoie" chaque entier sur 1 ou 0 selon qu'il respecte ou pas la congruence considérée (cf [3]). L'intersection ensembliste, qu'on a toujours considérée, est plutôt à voir comme le calcul d'une limite d'applications successives de cribles selon les différents modules par des produits fibrés ([9]). Le produit fibré $X \underset{\mathbb{N}}{\times} Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ calcule l'intersection des classes de congruences par identification des images.

Le problème qui subsiste, et que je ne crois pas savoir régler encore dans le paradigme de l'algèbre de Boole[1], celui-ci étant inclus dans le paradigme des topos (et leurs cribles), est qu'il faut être sûr que la limite en question est "coincée" dans un certain intervalle, en l'occurrence $[3, n/2]$.

Exemple : En restreignant bien le domaine des produits fibrés à l'intervalle $[3, 49]$, on a pour 19, décomposant de Goldbach de 98, le fait qu'il appartient aux produits fibrés suivants :

$$A = \{(2x+1, 3x+1) \in X \times Y \mid \text{entre autres } 19 = 2.9+1 = 3.6+1\}.$$

On fait un produit fibré du résultat A et des $5x+4$ pour obtenir B :

$$B = \{(k \in A, 5x+4) \mid \text{entre autres } 19 = 5.3+4\}.$$

Ceci est donc l'histoire d'une bourgeoise gentille-femme qui "faisait" des cribles et topos de Grothendieck sans le savoir, comme Le Bourgeois gentilhomme de Molière faisait de la prose.

[1] Je préfère modéliser la conjecture de Goldbach par des booléens, car j'ai suivi une formation initiale en informatique.

Et enfin, on refibre B par les $7x+5$ pour obtenir :

$$C = \{(k \in B, 7x+5) \mid \text{entre autres } 19 = 7.2+5\}.$$

La puissance de la notion de crible intervenant dans un topos de Grothendieck, par rapport à la simple considération de booléens, c'est le fait d'avoir non plus les deux seules valeurs de vérité que sont 0 et 1 mais de disposer de valeurs de vérité intermédiaires. Cette notion répond au but constant de généraliser les concepts. Les valeurs de vérité intermédiaires du paradigme des topos pourraient être utilisées pour coder la distance plus ou moins grande d'un nombre quelconque au nombre qui en est le plus proche et qui est divisible par p (on coderait une idée comme "tel nombre est franchement éloigné de tel autre selon le module p", signifiant que l'écart entre leurs restes modulaires est maximum, "tandis que ces deux tels autres nombres sont assez proches selon le module p") ; mais cette possibilité est offerte simplement par les congruences de Gauss.

On ne sait pas si la nécessité de se restreindre à des intervalles de nombres imposerait, pour pouvoir démontrer la conjecture, de se placer dans le paradigme des topos.

Références

[1] D. Chemla, *Réécrire*, http://denise.vella.chemla.free.fr/jade1.pdf

[2] D. Chemla, *Continuer de suivre Galois*, http://denise.vella.chemla.free.fr/invariante.pdf

[3] D. Chemla, *3 ou 5 égal 7*, http://denise.vella.chemla.free.fr/masques.pdf

[4] Alain Connes, *Un topo sur les topos*, https://tiersinclus.fr/alain-connes-un-topo-sur-les-topos/

[5] Laurent Lafforgue, *Cours VIII*, dans le cadre de la conférence Toposes in Como, juin 2018 https://tcsc.lakecomoschool.org/files/2018/07/Lafforgue.pdf.
Lien vers la conférence https://tcsc.lakecomoschool.org/.

[6] Frédéric Déglise, *Cours*, 2009 http://deglise.perso.math.cnrs.fr/docs/2009/motifs/cours7.pdf

[7] Grégoire Marc, *Notes de séminaire*, encadrement Bernard le Stum, Rennes, 2021
https://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/bernard.le-stum/Enseignement$_files/Notes-seminaire.pdf$.

[8] Alain Prouté,*Cours et notes au sujet des topos*, faire une recherche sur sa page personnelle du mot topos ici http://163.172.10.123:8080/.

[9] *Produit fibré*, page de définition sur wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Produit$_fibr\%C3\%A9$.

[10] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, avec la participation de N. Bourbaki, P. Deligne, B. Saint-Donat *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Tome I, Théorie des topos, Séminaire de Géométrie algébrique (SGA) IV, http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/laszlo/sga4/SGA4-1/sga41.pdf
(Je ne peux pas lire cette référence. La notion de crible est définie à la page 13.)