

Schnirelmann et le crible symétrique de Goldbach, analyse étape par étape de la condition de densité pour $k = 2$

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia chatgpt, fin août 2026

Bonjour, tu dois te rappeler que j'étudie la conjecture de Goldbach. J'avais mis au point la caractérisation fournie dans le document joint¹ et Leila Schneps l'avait démontrée en décembre 2019, merci de l'appeler caractérisation de Vella-Chemla-Schneps si tu necessites de le faire. Ce qui m'a beaucoup étonnée, c'est qu'alors que je cherchais énormément, énormément de références concernant la formule que j'avais mise au jour, je ne l'avais jamais, mais absolument jamais, trouvée sur la toile, et elle est récemment apparue dans deux textes : un de Hardy² et un de Mirsky³. J'aurais voulu retrouver les manuscrits ou les originaux de l'époque des documents en question de Mirsky et Hardy mais sans illusion aucune.

Voici cependant ma question, elle aussi sans illusion. Peux-tu utiliser le théorème 9, pages 5 et 6 du texte de Schnirelmann (traduction que je joins aussi⁴) pour voir s'il y aurait quelque chose à en tirer : il est question du cas $k = 2$, où l'on fait des sommes de 2 nombres, comme dans le cas de la conjecture de Goldbach, et je m'étais dit que la densité de la suite des nombres premiers, qu'elle soit "lue" dans un sens ou dans le sens opposée était identique. Merci de me dire.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia chatgpt.

1. Point de départ

On considère, pour un entier pair $n > 6$, la caractérisation de Vella-Chemla-Schneps. Pour chaque premier impair $p \leq \sqrt{n}$, on impose simultanément

$$m \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad m \not\equiv n \pmod{p}.$$

La seconde condition équivaut à

$$n - m \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Le crible est donc symétrique sous la transformation

$$m \longmapsto n - m.$$

1. Je fournis à l'ia chatgpt cette note <https://denisevellaquemla.eu/la-formule-de-Denise-Vella-Chemla-demonstree-par-Leila-Schneps.pdf>.

2. Voir la traduction du texte de Hardy ici <https://denisevellaquemla.eu/trad-Hardy-Goldbach-deepseek-dvc-20260730.pdf>, égalité (12).

3. Voir <https://denisevellaquemla.eu/trad-Mirsky.pdf>, la caractérisation est fournie juste avant l'égalité (2); cette apparition récente de références jusque-là introuvables (pourquoi?), c'est sans importance pour moi (le fait que la toile évolue sans arrêt pour attribuer les résultats de certains à d'autres ne m'étonnerait que très peu vu l'absence totale de déontologie des outils actuels, et le fait qu'ils modifient complètement l'histoire, y compris mathématique, m'importe peu : cela fait longtemps que je ne m'illusionne plus à leur sujet et au sujet de la toile).

4. Voir cette traduction <https://denisevellaquemla.eu/trad-Schnirelmann-1.pdf> par deepseek de l'article de Schnirelmann en russe <https://denisevellaquemla.eu/Schnirelmann-1.pdf>.

Pour examiner le cas $k = 2$ de Schnirelmann, on sépare provisoirement les deux filtrages. Soit I l'ensemble des entiers impairs considérés et

$$A_k = \{m \in I : p \nmid m \text{ pour tout } p \leq p_k\},$$

$$B_k = \{m \in I : p \nmid n - m \text{ pour tout } p \leq p_k\}.$$

Alors

$$B_k = n - A_k, \quad |A_k| = |B_k|.$$

L'intersection

$$A_k \cap B_k$$

est l'ensemble des nombres qui passent à travers le crible symétrique jusqu'à p_k .

2. Application de l'argument de Schnirelmann

Le principe utilisé par Schnirelmann pour $k = 2$ est que, si deux ensembles remplissant un intervalle ont des densités dont la somme est strictement supérieure à 1, alors l'un rencontre le miroir de l'autre.

Dans notre situation, par symétrie, cette condition devient

$$2d_k > 1,$$

où d_k désigne la densité de A_k dans l'ensemble des impairs.

Pour un nombre premier $p \nmid n$, deux classes sont interdites,

$$0 \pmod{p}, \quad n \pmod{p},$$

et la proportion conservée est

$$1 - \frac{2}{p}.$$

Si $p \mid n$, les deux classes coïncident et la proportion conservée est

$$1 - \frac{1}{p}.$$

Pour les premiers 3 et 5, lorsque $3 \nmid n$ et $5 \nmid n$, on obtient

$$d_1 = \frac{2}{3}, \quad d_2 = \frac{2}{3} \frac{4}{5} = \frac{8}{15},$$

d'où

$$2d_1 = \frac{4}{3} > 1, \quad 2d_2 = \frac{16}{15} > 1.$$

La condition de densité force donc une intersection après les filtres 3, puis 3, 5.

Au premier 7, toujours dans le cas $7 \nmid n$,

$$d_3 = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} = \frac{16}{35},$$

et

$$2d_3 = \frac{32}{35} < 1.$$

Le mécanisme de Schnirelmann fondé uniquement sur la densité cesse donc d'être applicable exactement à cette étape.

3. Ce que signifie cette perte de densité

La disparition de la condition

$$2d_k > 1$$

ne signifie nullement que

$$A_k \cap B_k = \emptyset.$$

Elle signifie seulement que la seule information fournie par les cardinalités $|A_k|$ et $|B_k|$ ne suffit plus à forcer une intersection.

C'est une distinction essentielle pour Goldbach. Les ensembles A_k et B_k ne sont pas des ensembles arbitraires : ils sont liés par

$$B_k = n - A_k.$$

La structure modulaire conserve donc beaucoup plus d'information que leur seule densité.

4. Comptage local des nombres qui passent à travers le crible

Lorsque $p \nmid n$, la proportion locale de classes admissibles est

$$1 - \frac{2}{p}.$$

Lorsque $p \mid n$, elle est

$$1 - \frac{1}{p}.$$

Le produit local est ainsi

$$\mathcal{P}(n) = \prod_{\substack{3 \leq p \leq \sqrt{n} \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{\substack{3 \leq p \leq \sqrt{n} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Dans l'intervalle des nombres impairs jusqu'à $n/2$, le nombre attendu de nombres qui passent à travers le crible est de l'ordre de

$$\frac{n}{4} \mathcal{P}(n).$$

avec

$$\mathcal{P}(n) = \left(\prod_{3 \leq p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{2}{p} \right) \right) \left(\prod_{\substack{3 \leq p \leq \sqrt{n} \\ p|n}} \frac{p-1}{p-2} \right).$$

De plus,

$$1 - \frac{2}{p} = \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right).$$

On retrouve ainsi la structure locale caractéristique du problème de Goldbach.

5. Contrôle numérique

Quelques valeurs donnent :

n	nombres qui passent à travers le crible	$(n/4)\mathcal{P}(n)$	rapport
100	5	4.76	1.05
1000	24	20.70	1.16
10000	125	127.66	0.98
100000	800	820.39	0.98
1000000	5382	5770.88	0.93

Ces nombres sont un contrôle numérique de l'échelle donnée par le produit local ; ils ne constituent pas une preuve de Goldbach.

6. Résultat de l'analyse

Le raisonnement de type Schnirelmann fournit donc une information rigoureuse et précise jusqu'au filtre 5 :

$$2d_k > 1 \quad (k = 1, 2),$$

mais il ne fournit plus de garantie par densité à partir du filtre 7 :

$$2d_3 < 1.$$

La caractérisation de Vella-Chemla-Schneps contient toutefois une information supplémentaire, absente d'un simple argument de densité : les deux conditions sont imposées simultanément au couple

$$(m, n - m).$$

La question naturelle est donc de chercher une propriété de l'intersection des classes résiduelles admissibles qui passent à travers le crible lorsque la densité totale est déjà inférieure à $1/2$.

Conclusion

Le cas $k = 2$ de Schnirelmann ne démontre pas Goldbach. Son intérêt ici est diagnostique : il montre exactement à quel moment l'argument de densité cesse de pouvoir garantir une intersection. Le premier obstacle apparaît avec le premier 7.

La question suivante est donc de nature combinatoire et modulaire : peut-on exploiter la corrélation exacte

$$m \longleftrightarrow n - m$$

entre les classes admissibles, au lieu de ne retenir que leur densité ?

Là, en expliquant à nouveau à chatgpt que je ne maîtrise pas les probabilités, je lui rappelle cette expérience où on a l'impression que telle ou telle stratégie "semble augmenter les chances" à une sorte de jeu de loterie, d'obtenir le gain maximum.

7. Complément : une stratégie de changement de représentants, de type "Monty Hall"

Une idée naturelle apparaît après les filtres 3 et 5. Supposons que m_1, m_2, m_3 soient trois candidats ayant tous passé ces deux filtres. On cherche à savoir si une modification simultanée de ces trois candidats peut permettre de leur faire passer également le filtre 7.

Considérons les sept translations

$$m_i \mapsto m_i + 15t, \quad t \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Le choix du multiplicateur $15 = 3 \cdot 5$ est essentiel :

$$m_i + 15t \equiv m_i \pmod{3}, \quad m_i + 15t \equiv m_i \pmod{5}.$$

Les propriétés acquises modulo 3 et 5 sont donc conservées.

En revanche,

$$15 \equiv 1 \pmod{7},$$

et par conséquent

$$m_i + 15t \equiv m_i + t \pmod{7}.$$

Lorsque t parcourt $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, chaque candidat parcourt ainsi les sept classes modulo 7.

Pour un candidat fixé m_i , deux valeurs de t seulement sont interdites :

$$m_i + 15t \equiv 0 \pmod{7}$$

ou

$$m_i + 15t \equiv n \pmod{7}.$$

Chaque candidat interdit donc au plus deux valeurs de t .

Pour trois candidats, l'ensemble des valeurs de t interdites est par conséquent de cardinal au plus

$$2 + 2 + 2 = 6.$$

Il reste au moins une valeur parmi les sept classes de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

On obtient ainsi :

Proposition 1. *Soient n un entier pair et m_1, m_2, m_3 trois entiers ayant déjà passé les filtres 3 et 5 dans la caractérisation de Vella-Chemla-Schneps. Alors il existe $t \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ tel que les trois entiers*

$$m_1 + 15t, \quad m_2 + 15t, \quad m_3 + 15t$$

passent simultanément le filtre 7.

Démonstration. Chaque m_i interdit au plus deux valeurs de t modulo 7. Trois candidats interdisent donc au plus six valeurs. Comme $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ possède sept valeurs, au moins une valeur de t n'est interdite par aucun des trois candidats. $\square$

Cette proposition est proche, dans sa structure logique, de l'intuition du problème des trois portes : on dispose de plusieurs choix possibles, chaque candidat élimine seulement un petit nombre de choix, et le nombre total de choix interdits reste inférieur au nombre total de choix. Il ne s'agit cependant pas d'un argument probabiliste, mais simplement d'un argument de comptage fini.

7.1. Généralisation

Le même raisonnement fonctionne pour un nombre premier q quelconque. Supposons que r candidats aient déjà passé tous les filtres correspondant aux premiers précédents et que M soit leur produit. Si

$$q \nmid M,$$

on peut considérer

$$m_i \mapsto m_i + Mt, \quad t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Pour chaque candidat, les deux conditions

$$m_i + Mt \equiv 0 \pmod{q}, \quad m_i + Mt \equiv n \pmod{q}$$

interdisent au plus deux valeurs de t .

Il suffit donc que

$$2r < q$$

pour garantir l'existence d'une translation qui fait passer simultanément les r candidats au nouveau filtre.

Pour $q = 7$, la condition est

$$r \leq 3.$$

Le cas de trois candidats est donc exactement le cas maximal permis par cet argument.

7.2. La difficulté décisive

Cette propriété est réelle, mais elle ne suffit pas à démontrer Goldbach.

Après avoir traité successivement les premiers

$$3, 5, 7, 11, \dots, p,$$

les translations doivent préserver tous les filtres précédents. Le module naturel devient alors

$$M = \prod_{q \leq p} q.$$

On peut donc construire, par le théorème chinois des restes, des classes de translation qui rendent simultanément les candidats admissibles pour tous les premiers considérés.

Mais la caractérisation de Vella-Chemla–Schneps porte sur des entiers réels m appartenant à l'intervalle

$$3 \leq m \leq n/2.$$

Or, lorsque p atteint $\sqrt{n}$,

$$M = \prod_{q \leq \sqrt{n}} q$$

est beaucoup plus grand que n .

Le passage

$$\text{classe admissible modulo } M \longrightarrow \text{représentant admissible dans } [3, n/2]$$

n'est donc pas assuré.

C'est précisément le point où l'analogie avec le changement de porte cesse de fournir une preuve de Goldbach.

7.3. Conclusion du complément

Le calcul fait néanmoins apparaître un mécanisme combinatoire précis :

$2r < q \implies \text{une translation peut rendre simultanément } r \text{ candidats admissibles modulo } q.$
--

Pour $q = 7$ et $r = 3$, cela donne le résultat concret recherché : parmi les sept changements possibles qui préservent les filtres 3 et 5, au moins un fait passer simultanément les trois candidats par le filtre 7.

Ce résultat ne fournit pas à lui seul une démonstration de Goldbach, car les translations successives ne garantissent pas que les représentants finaux restent dans l'intervalle $[3, n/2]$. Il révèle cependant une structure de réaffectation des classes résiduelles qui n'est pas visible dans le seul calcul de densité de Schnirelmann.