Couplage des chemins de p et de $n-p$ dans l'arbre des restes et lien avec la série singulière de Hardy–Littlewood, Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, juillet 2026

1. Résumé

Dans la note précédente sur l'arbre des restes et les valuations p-adiques, la piste "couplage p/q dans l'arbre" avait été laissée de côté. On la développe ici complètement. L'idée centrale, une fois formalisée, est simple : dans l'arbre des restes, le chemin de $q = n-p$ n'est pas indépendant de celui de p - il en est une fonction déterministe, une fois n fixé. Cette dépendance se traduit à chaque niveau k par exactement une ou deux classes de restes interdites, selon que k divise n ou non. On montre que cette structure interdite est elle-même invariante par translation d'un multiple de $(2, \ldots, m)$ (Théorème `invariance-couplage`), ce qui renforce le théorème d'invariance de la note précédente. On montre ensuite que la densité locale associée à cette structure, une fois qu'on la compare à la densité "naïve" de deux nombres impairs indépendants, redonne exactement - sous l'hypothèse d'indépendance usuelle, non démontrée, qui est celle de Hardy et Littlewood - la série singulière classique de la conjecture de Goldbach (Théorème `serie-singuliere`). Enfin on relie cette construction au "gnomon de zéros" des matrices de chip-firing de 2018. On insiste, pour finir, sur ce que cette formalisation ne change pas : l'obstacle local/global déjà identifié reste entier.

2. Position du problème

Dans la théorie de l'arbre des restes (arité variable, niveau k subdivisé en k branches indexées par $R_k = \{0, \ldots, k-1\}$), on avait étudié le chemin d'un seul entier à la fois : celui de $q = n-p$, translaté avec n. On avait montré (invariance par translation) que si $n' = n + jL_m$ avec $L_m = (2, \ldots, m)$, alors $q' = n' - p$ garde le même mot de restes que q jusqu'au niveau m. Mais cette proposition traite p comme une donnée extérieure fixée, et ne dit rien sur la façon dont le chemin de p *lui-même*, dans l'arbre, contraint celui de q. C'est cette relation qu'on formalise maintenant : les deux chemins ne sont pas deux objets indépendants qu'on regarderait côte à côte, ce sont les deux faces d'un seul objet, dès que n est fixé.

3. L'arbre des restes couplé

Définition 1 (Classes interdites)**.** *Soit n pair fixé et $k \geq 3$ un entier. On appelle classe interdite de niveau k pour n l'ensemble*

$$F_k(n) \;=\; \{\,0,\; r_k(n)\,\} \;\subseteq\; /k,$$

où $r_k(n) = n \bmod k$. (On exclut le niveau $k = 2$ car il est automatiquement satisfait : p et $q = n-p$ étant tous deux impairs par construction, $r_2(p) = r_2(q) = 1$ quel que soit le candidat p considéré, et ce niveau ne discrimine donc jamais rien - c'est très exactement le phénomène déjà illustré par le pavage 2×2 obtenu en bordant le carré de Goldbach.)

$$|F_k(n)| = 1 \quad \text{si} \quad k \mid n, \quad \text{et} \quad |F_k(n)| = 2 \quad \text{sinon.}$$

Démonstration. $|F_k(n)| = 1$ ssi les deux éléments 0 et $r_k(n)$ coïncident, c'est-à-dire ssi $r_k(n) = 0$, i.e. $k \mid n$. □

Proposition 2 (Ce que couple $F_k(n)$)**.** *Soit p impair, $q = n - p$. Pour tout $k \geq 3$,*

$$r_k(p) \in F_k(n) \iff \big(k \mid p\big) \text{ ou } \big(k \mid q\big).$$

Démonstration.

$$r_k(p) = 0 \iff k \mid p.$$

Et

$$r_k(p) = r_k(n) \iff r_k(n) - r_k(p) \equiv 0 \pmod{k} \iff k \mid (n - p) = q.$$

Ces deux conditions sont exactement les deux éléments de $F_k(n)$. $\square$

Autrement dit : *un seul* test sur le chemin de p - regarder s'il tombe dans l'ensemble (à un ou deux éléments) $F_k(n)$ - détecte simultanément une obstruction sur p *et* une obstruction sur q. Le chemin de q n'a pas besoin d'être tracé séparément : il est entièrement lisible sur celui de p, à travers $F_k(n)$. C'est là le sens précis de "couplage" : l'arbre des restes de p, une fois qu'on y surligne les classes de $F_k(n)$ à chaque niveau, contient déjà toute l'information sur q.

Proposition 3 (Critère couplé de primalité)**.** *Soit $n \geq 6$ pair, $M = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Soit p impair avec $M < p \leq n/2$, et $q = n - p$. Alors*

$$p \text{ et } q \text{ sont tous deux premiers} \iff \forall k \in \{3, \ldots, M\},\ r_k(p) \notin F_k(n).$$

Démonstration. Comme $p \leq n/2 < n$, on a $\sqrt{p} < \sqrt{n}$, donc $\lfloor \sqrt{p} \rfloor \leq M$; de même $q = n - p < n$ donne $\lfloor \sqrt{q} \rfloor \leq M$. Par le critère de primalité arborescent (note précédente), p est premier ssi $r_k(p) \neq 0$ pour tout $k \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor$, et il suffit donc de le vérifier pour $k \leq M$ (le test est seulement rendu *plus prudent*, pas faussé, tant que $M < p$; c'est exactement l'hypothèse $M < p$ de l'énoncé, qui garantit qu'on ne teste jamais $k = p$ lui-même, ce qui donnerait $r_p(p) = 0$ et invaliderait à tort le critère). De même pour q. La Proposition `couplage-residus` traduit alors la conjonction "$k \nmid p$ et $k \nmid q$" en $r_k(p) \notin F_k(n)$. $\square$

Remarque : l'hypothèse $M < p$ n'exclut qu'un nombre fini et négligeable de petits candidats ($p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, soit $O(\sqrt{n})$ valeurs sur les $\sim n/4$ candidats impairs possibles), qu'on peut toujours vérifier un par un directement. Elle est nécessaire : sans elle, un petit candidat premier $p \leq M$ serait testé au niveau $k = p$, où $r_p(p) = 0 \in F_p(n)$ le ferait apparaître à tort comme "obstrué". C'est un point de rigueur qui n'était pas visible tant qu'on ne formalisait pas le couplage, et qui montre que le critère couplé doit être manié avec un peu plus de précaution que le critère à une seule variable.

4. Invariance par translation de la structure couplée

Théorème 4 (Invariance du couplage)**.** *Soit n pair, $m \geq 3$, $L_m = (2, \ldots, m)$. Pour tout $j \in$ et tout $k \in \{3, \ldots, m\}$,*

$$F_k(n + jL_m) = F_k(n).$$

Démonstration. Comme $L_m \equiv 0 \pmod{k}$ pour $k \leq m$, on a $r_k(n + jL_m) = r_k(n)$, donc

$$F_k(n + jL_m) = \{0, r_k(n + jL_m)\} = \{0, r_k(n)\} = F_k(n).$$

$\square$

Ce théorème renforce celui de la note précédente sur deux points. D'abord, il porte sur la structure interdite *elle-même*, pas sur le mot de restes d'un q associé à un p particulier : il vaut donc *simultanément pour tous les candidats p à la fois*, et pas seulement pour un p fixé à l'avance. Ensuite, en combinant avec le Lemme `taille-Fk`, il dit quelque chose de plus précis que "les résidus sont préservés" : il dit que *le nombre de branches interdites à chaque niveau* - donc la difficulté combinatoire du crible couplé - est complètement figé le long de la progression $n, n + L_m, n + 2L_m, \ldots,$ jusqu'au niveau m.

Corollaire 5 (Version couplée de l'obstacle local/global). *Conservons les notations ci-dessus.*

Soit $n' = n + jL_m$, $M' = \lfloor \sqrt{n'} \rfloor$.

1. *Si $M' \leq m$, la structure $(F_k(n'))_{3 \leq k \leq M'}$ est entièrement déterminée par $(F_k(n))_{3 \leq k \leq m}$ via le Théorème* `invariance-couplage` *: le critère couplé de la Proposition* `critere-couple` *est donc lui aussi entièrement déterminé.*
2. *Comme $n' \to \infty$ avec j alors que m est fixé, $M' \to \infty$ également, si bien que (i) cesse de s'appliquer à partir d'un certain rang j : les niveaux $k = m+1, \ldots, M'$ échappent au contrôle du Théorème* `invariance-couplage`*, et ce sont pourtant eux, et eux seuls, qui décident en dernier ressort si n' possède, via ce p, un couple de décomposants premiers.*

C'est le même mur que dans la note précédente, mais énoncé cette fois pour la structure couplée complète (celle qui regarde p et q ensemble) plutôt que pour q seul : formaliser le couplage précise *ce qui* est transmis d'une génération de nombres pairs à l'autre (toute la structure des classes interdites, pas seulement le mot de restes d'un complément particulier), mais ne change rien à la nature de l'obstacle, qui reste un désaccord de profondeur entre un contrôle local figé (m) et un test global qui croît ($M' \sim \sqrt{n'}$).

5. Densité locale et série singulière de Hardy-Littlewood

On peut maintenant se demander ce que "pèse", en moyenne, le fait d'éviter $F_k(n)$ à chaque niveau. Cette section a un statut différent des précédentes : elle contient une identité algébrique exacte (Lemme `facteur-local`), mais son usage pour estimer un nombre de décompositions repose sur une hypothèse d'indépendance entre niveaux qui n'est *pas* démontrée ici - c'est très exactement l'hypothèse heuristique de Hardy et Littlewood, connue pour être plausible et confortée numériquement, mais non prouvée. On le signale sans détour : ce qui suit *explique pourquoi* la série singulière a la forme qu'elle a, mais ne *prouve* rien de nouveau sur Goldbach.

Définition 6 (Densité locale couplée). *Pour $m \geq 3$, on pose*

$$\rho_m(n) = \prod_{\substack{3 \leq \ell \leq m \\ \ell \text{ premier}}} \frac{\ell - |F_\ell(n)|}{\ell}.$$

C'est, sous hypothèse d'équirépartition des restes aux niveaux premiers $\ell \leq m$, la proportion des candidats p qui échappent à toute obstruction couplée jusqu'au niveau m.

Pour comparer cette densité couplée à ce que donnerait une indépendance totale entre p et q (comme si on tirait deux nombres impairs au hasard, sans lien via n), on introduit la densité "naïve" $\delta_m = \prod_{3\leq\ell\leq m,\,\ell \text{ premier}} \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^2$ (probabilité qu'aucun des deux, pris indépendamment, ne soit divisible par ℓ).

Lemme 7 (Facteur local)**.** *Pour tout ℓ premier impair,*

$$\frac{(\ell-|F_\ell(n)|)/\ell}{\big((\ell-1)/\ell\big)^2} = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{(\ell-1)^2} & \text{si } \ell \nmid n, \\ \left(1-\dfrac{1}{(\ell-1)^2}\right)\cdot\dfrac{\ell-1}{\ell-2} & \text{si } \ell \mid n. \end{cases}$$

Démonstration. Si $\ell \nmid n$, $|F_\ell(n)| = 2$ (Lemme `taille-Fk`) et $\dfrac{(\ell-2)/\ell}{(\ell-1)^2/\ell^2} = \dfrac{\ell(\ell-2)}{(\ell-1)^2} = 1-\dfrac{1}{(\ell-1)^2}$. Si $\ell \mid n$, $|F_\ell(n)| = 1$ et $\dfrac{(\ell-1)/\ell}{(\ell-1)^2/\ell^2} = \dfrac{\ell}{\ell-1}$, et l'on vérifie $\dfrac{\ell}{\ell-1} = \left(1-\dfrac{1}{(\ell-1)^2}\right)\cdot\dfrac{\ell-1}{\ell-2}$ par un calcul direct (les deux membres, réduits au même dénominateur $(\ell-1)^2(\ell-2)$, valent $\ell(\ell-1)(\ell-2)$). ☐

Théorème 8 (Convergence vers la série singulière)**.** *En prenant le produit du Lemme* `facteur-local` *sur tous les nombres premiers impairs $\ell \leq m$ et en faisant $m \to \infty$,*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\rho_m(n)}{\delta_m} = C_2 \prod_{\substack{p\mid n \\ p \text{ premier impair}}} \frac{p-1}{p-2} = \frac{\mathfrak{S}(n)}{2},$$

où $C_2 = \prod_{p\geq 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 0{,}6601618$ est la constante des nombres premiers jumeaux et $\mathfrak{S}(n) = 2C_2\prod_{p\mid n,\, p \text{ impair}} \frac{p-1}{p-2}$ est la série singulière de Hardy–Littlewood pour la conjecture de Goldbach.

Démonstration. Le produit infini $\prod_{p\geq 3}(1-1/(p-1)^2)$ converge (terme général en $O(1/p^2)$) vers C_2 par définition de la constante des nombres premiers jumeaux. Le produit fini $\prod_{p\mid n}(p-1)/(p-2)$ ne porte que sur les diviseurs premiers impairs de n (en nombre fini), donc n'a pas besoin d'un passage à la limite. Le facteur $\frac{1}{2}$ entre notre limite et $\mathfrak{S}(n)$ vient de ce qu'on a, dès le départ, conditionné p et q à être impairs (on a retiré le niveau $k = 2$ de l'analyse) : $\mathfrak{S}(n)$, dans sa normalisation usuelle, compare la densité des couples (p, q) premiers à la densité de deux entiers quelconques (pairs ou impairs), et inclut de ce fait un facteur d'Euler en $\ell = 2$ valant 2 ; en travaillant d'emblée dans les impairs, on a already consommé la moitié de ce gain, d'où le rapport 1/2. ☐

Remarque : on insiste : ce théorème est une identité entre deux limites de produits, purement algébrique et rigoureuse une fois qu'on l'énonce ainsi. Ce qui n'est pas démontré - ni ici, ni ailleurs à ce jour dans le cas général - c'est que $\rho_m(n)$ (ou une variante convenablement normalisée) donne effectivement, pour m voisin de $\sqrt{n}$, une estimation fiable de la vraie proportion de décomposants de Goldbach de n parmi les candidats $p \leq n/2$. C'est exactement l'hypothèse d'indépendance/équirépartition de Hardy et Littlewood, qui est au cœur de la conjecture asymptotique $G(n) \sim \mathfrak{S}(n)\, n/(2\ln^2 n)$, et qui reste, à ce jour, hors de portée des méthodes élémentaires de crible comme celle-ci. L'arbre des restes couplé explique *d'où vient la forme* de $\mathfrak{S}(n)$ (le rôle des diviseurs premiers de n, le facteur $(p-1)/(p-2)$), mais ne fournit aucune borne inférieure rigoureuse sur $G(n)$.

6. Lien avec le gnomon de zéros des matrices de chip-firing

Le document *Conjecture de Goldbach et chip-firing games* (2018) construisait, pour chaque n, une matrice 2×2 $\big(f_{aa}, f_{ab}; f_{ba}, f_{bb}\big)(n)$ comptant les candidats p selon la primalité conjointe de p, de $q = n - p$, et - précision importante - d'un troisième nombre $(n+2) - p$, complément de p dans le *prochain* nombre pair $n + 2$. Le couplage qu'on vient de formaliser (celui de p et $n - p$ via $F_k(n)$) est exactement le mécanisme sous-jacent à la colonne "q premier / composé" de cette matrice ; la ligne correspondant à $(n + 2) - p$ est, elle, un couplage du même type mais pour $n + 2 = n + L_2$ - le cas particulier $m = 2$, $j = 1$ de notre Théorème `invariance-couplage` (trivial à ce niveau puisque $L_2 = 2$ et que le niveau 2 ne discrimine jamais rien, comme on l'a rappelé). Le "gnomon de zéros" qu'il s'agissait d'exclure - une configuration où toutes les cases d'un coin de la matrice 4×4 seraient nulles - est la traduction matricielle exacte de l'énoncé "pour tout candidat p, au moins un niveau k obstrue le couple (p, q)", c'est-à-dire l'absence de p échappant à $F_k(n)$ à tous les niveaux testés : c'est le même événement, sous deux habillages (matriciel en 2018, arborescent ici).

7. Conclusion

Le couplage p/q dans l'arbre des restes, une fois formalisé, tient en une idée simple : "tester p contre les deux classes $\{0, r_k(n)\}$" remplace "tester p puis tester q séparément". Cette simplification a trois conséquences qu'on a établies rigoureusement : un critère de primalité conjointe correctement borné (Proposition `critere-couple`, en prenant garde à l'exception des petits candidats), une invariance par translation qui porte sur la structure interdite tout entière et non plus sur un seul chemin (Théorème `invariance-couplage`), et une dérivation propre de la forme de la série singulière de Hardy-Littlewood à partir du seul comptage des classes interdites (Théorème `serie-singuliere`). Ce que cette formalisation ne fait pas, et il faut le redire clairement : elle ne rapproche pas d'un pas la démonstration de la conjecture de Goldbach. L'obstacle reste, sous sa forme couplée, identique à ce qu'il était sous sa forme simple - un désaccord entre une invariance locale à profondeur fixe et un critère de primalité à profondeur croissante - et le passage de la densité locale $\rho_m(n)$ à un énoncé d'existence pour $G(n) > 0$ exige un ingrédient (l'équirépartition sur l'ensemble des niveaux premiers jusqu'à $\sqrt{n}$) qu'aucune construction purement combinatoire, aussi bien couplée soit-elle, ne peut à elle seule fournir.

Références

[1] https://denisevellachemla.eu/arbre-chip.pdf.

[2] https://denisevellachemla.eu/chip-firing-gb.pdf.

[3] https://denisevellachemla.eu/formalisation-arbres-de-restes-valuations-p-adiques-synthese-claude-dvc.pdf.

[4] https://denisevellachemla.eu/formalisation-arbres-restes-gemini-dvc.pdf.

[5] https://denisevellachemla.eu/padic-retour.pdf.

[6] https://denisevellachemla.eu/reprise-valpadic.pdf.