

1. Portée : ce correctif ferme la voie zigzag

Ce correctif conclut aussi, explicitement, l'exploration des zigzags menée dans la note d'octobre. Le constat est le suivant : toutes les variantes de recherche *locale* d'un décomposant (descente de pas -2 , zigzag symétrique $\pm 2k$, échelle à paliers, équilibreur de 2005) réussissent expérimentalement jusqu'à 10^6 sans un seul échec, mais aucune ne peut être prouvée complète : démontrer l'arrêt de l'une d'elles est mot pour mot la conjecture de Goldbach. La raison est structurelle et non accidentelle : un mouvement local explore l'intervalle $[3, n/2]$, tandis que toute garantie déterministe du crible vit modulo sa période $m' \approx e^{\sqrt{n}}$ - un rapport d'échelle que n'importe quel balayage local est incapable de voir. L'échelle à paliers (théorème 8) est le seul membre de la famille qui acquiert quelque chose pour toujours, et sa garantie s'arrête à $p \approx \log n$. La réserve, c'est-à-dire garder toutes les classes permises plutôt qu'une seule par palier, transforme ce mur en la fonction de Jacobsthal $G_n(y)$ du présent correctif ; c'est pourquoi la question zigzag n'est pas perdue mais *déposée* ici, sous sa forme la plus resserrée : le comportement de $\sup_n G_n(y)/y^2$. La voie zigzag est donc close en l'état ; la seule question vivante qu'elle laisse est finie, programmable, et exposée en section 3, point 4.

2. Ce qui est corrigé

La section 7 de la note d'octobre mesurait l'écart maximal $G_n(y)$ sur *six placements choisis* de n , et annonçait une constante $\approx 0,47$, “juste sous la barre” de $\frac{1}{2}$. Le présent correctif remplace ces six placements par le *pire placement* : le supremum sur *toutes* les configurations possibles de n modulo les premiers criblés. Résultat : aux petites tailles, le pire cas *dépasse* $\frac{1}{2}$ (jusqu'à 0,72 pour $y = 5$), et la conclusion “constante juste sous la barre” doit être retirée. La bonne lecture, plus honnête, est donnée en section 3.

3. Comment les pires cas ont été calculés

3.1. Ce dont le crible dépend : uniquement le placement de n

Pour y fixé, notons $p_1 = 3 < p_2 = 5 < \dots < p_k \leq y$ les premiers impairs criblés, $M = p_1 p_2 \dots p_k$ et $m' = 2M$. Pour un x impair, la qualité de x modulo p_i (x bon, ou mauvais) ne dépend que de la classe $c_i = n \bmod p_i \in \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$:

$$x \text{ est mauvais modulo } p_i \iff x \equiv 0 \text{ ou } c_i \pmod{p_i}.$$

Donc tout ce que n injecte dans le crible, c'est le vecteur

$$(c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{Z}/p_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k,$$

que nous appelons un *placement*. Il y a exactement $P = p_1 \dots p_k$ placements.

Remarque [tous les placements sont légitimes] : par le théorème des restes chinois, chaque placement correspond à une et une seule classe de n modulo M ; et comme la parité de n n'entre pas dans les résidus modulo les premiers impairs, chaque placement est réalisé par une infinité de n pairs. Le pire cas pour les n pairs est donc exactement le pire cas sur tous les placements.

3.2. Le calcul d'un écart maximal, pour un placement donné

Pour un placement (c_i) fixé :

1. *marquage*. Dans une grille booléenne de taille m' (période du crible, $2M$), on marque, pour chaque p_i : toute case $x \equiv 0 \pmod{p_i}$, et toute case $x \equiv c_i \pmod{p_i}$ (si $c_i = 0$, une seule famille, car les deux classes interdites coïncident : c'est le cas $p_i \mid n$). Coût total : $\sum_i 2m'/p_i$ opérations, c'est-à-dire bien en dessous de $2m'$.
2. *nombres qui traversent tous les filtres*. On ne considère que les x impairs de $[1, m']$ non marqués : ce sont les *admissibles* (bons pour x et pour $n - x$ modulo tous les $p_i \leq y$).
3. *écart maximal, avec recouvrement*. On mesure les distances entières entre admissibles consécutifs, y compris l'écart bouclant la période : du dernier admissible de la période au premier de la période suivante, en ajoutant m' . Cette précaution est indispensable : l'admissibilité est périodique de période m' , et une fenêtre d'observation peut chevaucher deux périodes. On note G le maximum de ces écarts.

Remarque [vérification interne] : pour tout placement sans classe nulle ($c_i \neq 0$ pour tout i), le nombre d'admissibles trouvés vaut exactement $\prod_i (p_i - 2)$: c'est le lemme 10 de la note (multiplicativité exacte), et il a été vérifié à l'unité près sur tous nos calculs.

3.3. Le pire cas : énumération exhaustive ou échantillonnage

- *énumération exhaustive* des P placements pour $y \leq 11$: $P = 15$ ($y = 5$), 105 ($y = 7$), 1155 ($y = 11$). Les valeurs du tableau pour $y = 5, 7, 11$ sont donc de vrais *supremums exacts*.
- *échantillonnage aléatoire* pour $y = 13, 17, 19$ ($P = 15\,015$, 255 255, 4 849 845 placements : l'épuisement devient lourd) : 120 tirages pour $y = 13$, 60 pour $y = 17$, 8 pour $y = 19$. Les valeurs correspondantes du tableau sont donc des *minorants* du supremum, pas des supremums.

4. Table corrigée : le supremum sur les placements

Colonnes : y (borne des modules), $m' = 2 \prod_{p \leq y} p$ (période), pire écart G trouvé, rapport G/y^2 , et le placement le plus défavorable $(c_1, \dots, c_k)$, c'est-à-dire les classes de n modulo $(3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$ tronquées à y .

y	m'	pire G	G/y^2	pire placement $n \pmod{p}$
5	30	18	0,72	(1, 1)
7	210	30	0,61	(1, 1, 1)
11	2 310	66	0,55	(1, 2, 2, 5)
13	30 030	108	0,64	(2, 2, 2, 3, 4) ^a
17	510 510	132	0,46	(2, 3, 1, 9, 12, 12) ^a
19	9 699 690	180	0,50	(1, 3, 3, 6, 12, 15, 10) ^a

^a minorant (échantillonnage), pas un supremum exact.

5. Lecture honnête

1. La constante $\approx 0,47$ de la note était un artefact des six placements choisis ; le supremum exact aux petites tailles *dépasse* $\frac{1}{2}$ (0,72 à $y = 5$, 0,61 à $y = 7$). L'affirmation "constante juste sous la barre" est retirée.
2. Le rapport G/y^2 des pires cas reste néanmoins dans l'intervalle $[0,46 ; 0,72]$ sur toute la plage mesurée : rien n'indique une dérive, mais rien ne garantit non plus une limite < 1 , et encore moins $< \frac{1}{2}$.
3. Les pires placements ont une signature modulaire précise (colonne 5) : les caractériser, c'est caractériser les cas défavorables des grilles d'août 2026. Exemple : pour $y = 11$, le pire cas est $n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \equiv 2 \pmod{5}$, $n \equiv 2 \pmod{7}$, $n \equiv 5 \pmod{11}$.
4. Reformulation correcte de la proposition 14 : Goldbach équivaut à $\sup_n G_n(\sqrt{n}) \leq n/2$, et la quantité critique est le comportement asymptotique du rapport $\sup_n G_n(y)/y^2$ - qui n'est pas encore calculé au-delà de $y = 11$ en exhaustif. Toute marge qu'on espérait sous $\frac{1}{2}$ doit être gagnée dans cette zone, pas supposée.