Une conjecture englobante pour la décomposition additive des entiers

$$N \in \mathbb{N} \implies \exists p_1, p_2, k, N = p_1 + 2^k p_2$$

avec p_1 et p_2 deux nombres premiers et $k \in \mathbb{N}$

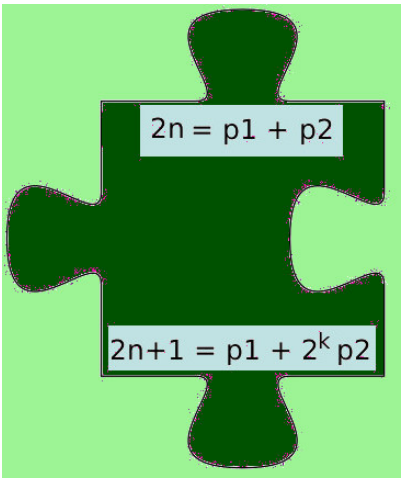
Denise Vella-Chemla, juillet 2026

1. Résumé

Ce document rassemble une conjecture formulée en juin 2019 par l'auteure, lors de recherches menées en freelance sur la conjecture de Goldbach, ainsi que l'étude de cette conjecture par l'ia claude en juillet 2026, notamment le programme ayant servi à la tester numériquement, les résultats obtenus, ainsi qu'une discussion sur sa difficulté relative par rapport à la conjecture de Goldbach et à la conjecture de de Polignac.

2. La pièce de puzzle

La conjecture de Denise Vella-Chemla est illustrée par la juxtaposition, sur une pièce de puzzle (parce que "it's puzzling"), des deux égalités suivantes :



3. Énoncé de la conjecture

Conjecture [Décomposition englobante] : *pour tout entier $N \geq 7$, il existe des nombres premiers p_1, p_2 et un entier $k \geq 0$ tels que*

$$N = p_1 + 2^k p_2.$$

Cette conjecture englobe deux cas :

- $N = 2n$ **pair,** $k = 0$: $N = 2n = p_1 + p_2$, qui est exactement la conjecture de Goldbach.

- $N = 2n + 1$ **impair,** $k \geq 1 : N = 2n + 1 = p_1 + 2^k p_2$, qui est la conjecture à voir en regard de la conjecture de Goldbach, du côté des nombres impairs, et qui fait l'objet de la présente note.

Le cas impair n'est pas la version qui décompose un nombre impair en somme de trois nombres premiers ($N = p_1 + p_2 + p_3$), qui a été prouvée par Harald Helfgott en 2013, mais une version qui décompose un nombre impair en la somme d'un nombre premier et du produit d'un nombre premier par une puissance de 2.

4. Programme de vérification

Le programme suivant recherche, pour chaque nombre impair N, un couple (p_1, p_2) et un exposant $k \geq 1$ satisfaisant $N = p_1 + 2^k p_2$

```
from sympy import isprime, primerange

def find_decomp(n, primes_list):
    # cherche n = p1 + 2^k * p2, k >= 1, p1 et p2 premiers
    k = 1
    while 2**k < n:
        base = 2**k
        for p2 in primes_list:
            val = base * p2
            if val >= n:
                break
            p1 = n - val
            if isprime(p1):
                return (p1, base, p2, k)
        k += 1
    return None

maxN = 10_000_000
primes_list = list(primerange(2, maxN))
fails = []
for N in range(3, maxN, 2):
    if find_decomp(N, primes_list) is None:
        fails.append(N)

print("impairs testes :", (maxN-3)//2 + 1)
print("echecs :", fails)
```

5. Résultats

Le programme a été exécuté sur l'ensemble des entiers impairs jusqu'à 10 000 000.

- Impairs testés : 4 999 999.
- Échecs trouvés : $n = 3$ et $n = 5$ uniquement.

Ces deux échecs sont triviaux et ne remettent pas en cause la conjecture de Vella-Chemla pour $n \geq 7$: la plus petite valeur possible de $2^k p_2$ avec $k \geq 1$ et p_2 premier est $2 \times 2 = 4$, ce qui rend toute décomposition impossible pour $n < 7$ par simple contrainte de taille. Aucun contre-exemple n'a été trouvé au-delà.

6. Difficulté relative par rapport à la conjecture de Goldbach

La conjecture englobante de Vella-Chemla contient la conjecture de Goldbach comme cas particulier ($k = 0$ sur les pairs). Elle ne peut donc en aucun cas être plus facile que la conjecture de Goldbach : la démontrer intégralement exigerait de toute façon de résoudre Goldbach pour la partie paire.

En revanche, la partie *nouvelle*, portant sur les impairs, présente une structure heuristiquement bien plus favorable que la conjecture de Goldbach lui-même. Dans la conjecture de Goldbach, un seul degré de liberté existe : le choix de p_1 détermine entièrement $p_2 = N - p_1$, qui doit alors s'avérer premier. Dans la partie impaire de la conjecture englobante, deux degrés de liberté sont disponibles : le choix de k (environ $\log_2 N$ valeurs possibles) et le choix de p_2 parmi les nombres premiers. Pour chaque valeur de k, on obtient un sous-problème de type Goldbach décalé ($N - 2^k p_2 = p_1$), et il suffit qu'un seul de ces $\sim \log N$ sous-problèmes aboutisse. Cette union de tentatives quasi-indépendantes fait chuter très rapidement la probabilité heuristique d'échec total.

Cette construction généralise la **conjecture de de Polignac** (1849) : "tout impair > 3 est somme d'un nombre premier et d'une puissance de 2" ($N = p + 2^k$, soit p_2 fixé à 1). Cette conjecture-là est fausse en général : il existe une progression arithmétique infinie de contre-exemples, construite via un système de congruences couvrantes. La version englobante, en laissant p_2 varier lui aussi parmi les nombres premiers plutôt que de le fixer à 1, est strictement plus souple et échappe au piège des systèmes couvrants qui bloquent la vérification de la conjecture de de Polignac, grâce au degré de liberté supplémentaire sur p_2.

En résumé, la partie impaire de la conjecture englobante de Vella-Chemla apparaît heuristiquement plus robuste, et donc plus vraisemblable, que la conjecture de Goldbach elle-même, et plus robuste que celle de de Polignac dont elle est une généralisation - même si, comme pour Goldbach, une preuve rigoureuse reste hors de portée à ce jour.