Conjecture de Goldbach, en hommage à Kepler et à sa symétrie des flocons de neige
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia mistral, 3 novembre 2026

1. Motivation

Strena seu de nive sexangula (Kepler, 1611) : pourquoi les flocons de neige ont-ils une symétrie d'ordre 6 ? La réponse est dans la molécule d'eau, H_2O. Par analogie, on demande ici à la plus petite "molécule" arithmétique de Goldbach, le module 6, de décrire la structure des décompositions.

Tout nombre premier impair autre que 3 est congru à 1 ou 5 modulo 6 : on note $(+1)$ la classe $6x+1$ et (-1) la classe $6x-1$.

Le nombre premier 3, seul premier de la classe 3 mod 6, forme une classe à part, notée (3). L'addition modulo 6 des deux classes donne :

$$(+1)+(+1) \equiv 2 \pmod 6,$$

$$(+1)+(-1) \equiv 0 \pmod 6,$$

$$(-1)+(-1) \equiv 4 \pmod 6.$$

On en tire immédiatement les décompositions de Goldbach (n pair écrit comme somme de deux premiers, le premier des deux à gauche étant le plus petit) :

- $n \equiv 0 \pmod 6$ (les $6x$) : décompositions uniquement mixtes $(+1)+(-1)$;
- $n \equiv 2 \pmod 6$ (les $6x+2$) : uniquement $(+1)+(+1)$;
- $n \equiv 4 \pmod 6$ (les $6x+4$) : uniquement $(-1)+(-1)$;
- entorses : les décompositions $3+p$, une pour chaque premier impair p.

2. Vérification exhaustive de 6 à 1000

Le programme du listing (section **??**) calcule, pour chaque nombre pair n de 6 à 1000, toutes ses décompositions de Goldbach $n = m + (n-m)$ avec $3 \le m \le n/2$, et classe chaque décomposition selon le type $(++), (--), (+-)$ ou *avec 3*.

Résultats pour les 498 nombres pairs de 6 à 1000 (8054 décompositions sans le 3, plus 167 avec) :

Genre	$(+1)+(+1)$	$(-1)+(-1)$	$(+1)+(-1)$	avec 3	total
$6x$ (166 nombres)	0	0	3988	1	3989
$6x+2$ (166 nombres)	1885	0	0	86	1971
$6x+4$ (166 nombres)	0	2181	0	80	2261
Ensemble (498 nombres)	1885	2181	3988	167	8221

Comptage des décompositions de Goldbach par type, pour $6 \le n \le 1000$.

3. Trois observations

3.1. Lest trois classes peuvent être distinguées

Les nombres pairs de la forme $6x$ ont des décompositions de Goldbach mixtes (faisant intervenir comme sommants les trois sortes de nombres premiers).

Les nombres pairs de la forme $6x+2$ n'ont que des décompositions de Goldbach de la forme $(++)$ ou $(3-)$.

Les nombres pairs de la forme $6x+4$ n'ont que des décompositions de Goldbach de la forme $(--)$ ou $3+$.

La "symétrie 6" n'est pas une régularité statistique mais une contrainte exacte : c'est l'addition modulo 6 (des nombres premiers).

3.2. Les défauts de classe $3 \bmod 6$ sont en bijection avec les premiers

Une décomposition avec 3 s'écrit $n = 3 + p$ avec p premier impair ; réciproquement chaque premier impair p fournit le nombre pair $n = p+3$. Le nombre de décompositions avec 3 pour $n \leq N$ est donc exactement $\pi(N-3) - 1$ (le -1 excluant le premier 2). Vérifié : $\pi(997) = 168$, d'où $168 - 1 = 167$. Chaque défaut du réseau "est" un nombre premier : le défaut est en bijection avec les atomes.

3.3. L'asymétrie 2181 contre 1885 : la course de Chebyshev

Les $(-1)+(-1)$ (2181) devancent les $(+1)+(+1)$ (1885) d'environ 16 %. C'est la *course des nombres premiers* de Chebyshev : les premiers congrus à 5 modulo 6 (non-résidus modulo 3) devancent durablement les premiers congrus à 1 modulo 6. Rubinstein et Sarnak (1994) montrent que ce biais, de l'ordre de $\sqrt{\log x}/\log x$ terme à terme, donne à la classe (-1) une avance relative de l'ordre de $\log\log x$, tout en restant asymptotiquement négligeable : les deux comptages s'équilibrent à la limite, mais le biais persiste très loin. On retrouvera cette asymétrie dans la série singulière $\sigma(n)$ de Hardy-Littlewood et dans la constante des jumeaux C_2.

4. Rapport avec le crible

Modulo 3, le candidat m (voir https://denisevellachemla.eu/jade1.pdf) doit éviter $m \equiv 0$ et $m \equiv n \pmod 3$:

- si $n \equiv 0 \pmod 3$, les deux classes ± 1 survivent : décompositions mixtes ;
- si $n \equiv 2 \pmod 3$, seule la classe $+1$ survit : décompositions $(++)$;
- si $n \equiv 1 \pmod 3$, seule la classe -1 survit : décompositions $(--)$.

La symétrie hexagonale est le premier étage du crible : le facteur $(3-2)/(3-1)$ du produit de Mertens, et la valeur $4C_2/3$ de $\sigma(10^k)$. Pour les $6x+2$ et $6x+4$, l'involution $m \mapsto n-m$ préserve la classe ; pour les $6x$, elle l'échange : la classe d'un décomposant et celle de son miroir sont jumelles dans le premier cas, opposées dans le second.

5. Programme

```
def est_premier(n):
    if n < 2:
        return False
    d = 2
    while d * d <= n:
        if n % d == 0:
            return False
        d += 1
    return True

def etiquette(p):
    # 3, seul premier de classe 3 mod 6, forme une classe a part
    if p == 3:
        return "(3)"
    return "(+1)" if p % 6 == 1 else "(-1)"

# Listing detaille pour 6 <= n <= 100
for n in range(6, 101, 2):
    genre = {0: "6x", 2: "6x+2", 4: "6x+4"}[n % 6]
    decs = []
    for m in range(3, n // 2 + 1, 2):
        if est_premier(m) and est_premier(n - m):
            decs.append("%d%s + %d%s" % (m, etiquette(m), n - m, etiquette(n - m)))
    print("%d [%s] : %s" % (n, genre, "  ;  ".join(decs)))

# Comptages par type pour 6 <= n <= 1000
comptages = {"++": 0, "--": 0, "+-": 0, "avec3": 0}
for n in range(6, 1001, 2):
    for m in range(3, n // 2 + 1, 2):
        if not (est_premier(m) and est_premier(n - m)):
            continue
        if m == 3:
            type_ = "avec3"
        elif m % 6 == 1 and (n - m) % 6 == 1:
            type_ = "++"
        elif m % 6 == 5 and (n - m) % 6 == 5:
            type_ = "--"
        else:
            type_ = "+-"
        comptages[type_] += 1
print(comptages)   # {'++': 1885, '--': 2181, '+-': 3988, 'avec3': 167}
```

Enseignement

La symétrie d'ordre 6 des décompositions de Goldbach est, comme celle du flocon, une conséquence exacte de la "molécule" de base - ici l'addition modulo 6 - et non une régularité approximative. Les seules entorses sont les décompositions $3+p$, en bijection avec les premiers ; l'unique asymétrie résiduelle entre les classes $(+1)$ et (-1) est la course de Chebyshev, bruit de fond de l'arithmétique des progressions modulo 3.