Conjecture de Goldbach et centres d'un réseau, Denise Vella-Chemla, avril 2026.

Résumé : La conjecture dite *conjecture paire de Goldbach*, non démontrée à ce jour, énonce que tout nombre pair n supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. Est présentée ci-après une justification de cette conjecture qui est basée sur l'idée de considérer certaines sommes égales à n comme des points de $\mathbb{N}^2$ dont les couples de coordonnées sont de la forme $(p, n-p)$, avec p un nombre premier compris entre 3 et $n-3$ inclus, puis de considérer les points en question comme les sommets d'un graphe, et de voir les décompositions de Goldbach comme les centres de ce graphe, l'existence de tels centres étant assurée.

1. Introduction

La conjecture dite *conjecture paire de Goldbach*, qui date de 1742 ([12]), énonce que tout nombre pair n supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers [1] [2] (voir [26] pour un compte-rendu historique à son sujet). Elle a intéressé de nombreux savants (tels que Cantor [8] qui a vérifié, à l'époque à la main, qu'elle était vraie pour tous les nombres jusqu'à 1000, ou Laisant [17] qui a proposé un procédé expérimental permettant de la vérifier). Est présentée ci-après une justification de la conjecture de Goldbach qui est basée sur l'idée de considérer certaines sommes égales à n comme des points du plan $\mathbb{N}^2$. On place les nombres p_k et $n - p_k$, avec p_k un nombre premier compris entre 3 et $n - 3$ inclus, l'un, p_k, sur l'axe des abscisses, et l'autre, $n - p_k$, sur l'axe des ordonnées.

2. Représentation des décompositions de n en sommes $p_k + (n - p_k)$, avec p_k un nombre premier, dans le plan $\mathbb{N}^2$

Appelons E_n l'ensemble des nombres premiers impairs compris entre 3 et $n - 3$ inclus. On note E'_n l'ensemble des nombres $n - p_k$ avec $p_k \in E_n$.

$$\begin{aligned} E_n &= \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n-3, p_k \text{ est un nombre premier}\} \\ E'_n &= \{n - p_k \mid p_k \in E_n\}. \end{aligned}$$

Par commodité, , on restreint l'étude de cas d'un nombre pair n à une portion carrée de $\mathbb{N}^2$: on représente les points qui sont utiles pour la justification par des points (x, y) dans un carré C de côté de longueur n, carré dont les sommets sont les points $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, n)$ et (n, n). Les nombres premiers p_k sont positionnés sur l'axe des abscisses. Les nombres $n - p_k$ sont positionnés sur l'axe des ordonnées [3].

On trace dans le carré C un réseau de droites :

- chaque droite verticale a pour équation $x = p_k$ pour chaque nombre premier $p_k \in E_n$;
- chaque droite horizontale a pour équation $y = n - p_k$ pour chaque nombre $n - p_k \in E'_n$.

1. On trouve aussi la phrase latine "*Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis*", traduisible en "*Mais tout nombre pair est composé d'un, deux ou trois nombres premiers.*" dans un écrit posthume, publié en 1701, de Descartes [1] ; [4].
2. On considérera ici seulement les nombres pairs supérieurs à 4, comme sommes de deux nombres premiers impairs.
3. Se reporter à un livre de géométrie tel que celui de Michèle Audin [3].

L'ensemble R des points d'intersection du réseau de droites dans le carré C est défini par

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in E_n,\ y \in E'_n\}.$$

Exemple : Donnons pour exemples les ensembles associés aux nombres pairs $n = 16$ et $n = 24$: E_{16}, E'_{16}, E_{24} et E'_{24}. On a

$$\mathrm{E}_{16} = \{3, 5, 7, 11, 13\} \qquad \mathrm{E'}_{16} = \{13, 11, 9, 5, 3\}$$
$$\mathrm{E}_{24} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \qquad \mathrm{E'}_{24} = \{21, 19, 17, 13, 11, 7, 5\}$$

3. Illustration graphique d'un exemple

Pour fixer les idées, illustrons le cas $n = 16$: les décomposants de Goldbach du nombre $n = 16$, 3 et 13 d'une part, et 5 et 11 d'autre part, ont leur point associé $(3, 3), (5, 5), (11, 11)$ et $(13, 13)$ colorées en rouge sur la diagonale ascendante.

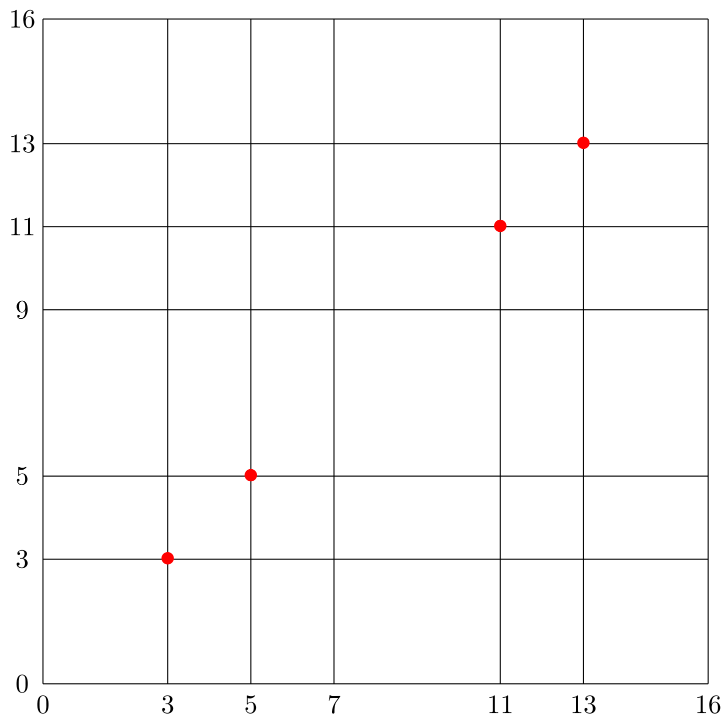

FIGURE 1 : L'exemple du carré pour $n = 16$. Les décomposants de Goldbach de 16, appartenant à $\{3, 5, 11, 13\}$, sont colorés en rouge sur la diagonale ascendante.

4. Graphe, excentricité, centres

Adoptons maintenant un autre regard sur les points de notre réseau de points : voyons-les comme les sommets d'un graphe, liés par des arêtes. En théorie des graphes (voir [9],[20], [6]), un graphe est noté $G = (S, A)$ avec S un ensemble de sommets (fini) et A un ensemble (fini également) d'arêtes entre certains sommets. La théorie des graphes a pour origine les travaux d'Euler sur les circuits traversant les pont de Königsberg une fois et une seule, elle a été étudiée en France à la fin du XIXe siècle et au début du XXe siècle (voir les travaux de Jordan [15], de Polignac [21], [22] ou

Sainte-Laguë [24] [4]). Les graphes et les réseaux nous sont devenus très familiers du fait de l'utilisation massive que nous faisons d'internet et des systèmes de navigation basés sur les systèmes de positionnement par satellites (GPS).

Les réseaux étiquetés qui modélisent notre problème sont d'une forme particulière, toute arête est le bord d'une case d'échiquier [5] ; cela a pour conséquence qu'un chemin existe entre deux sommets quelconques [6]. Cette propriété s'énonce en disant que le graphe est fortement connexe.

Les étiquettes sur les arêtes du graphe prennent les valeurs suivantes :

- le nombre premier 3 étiquette les arêtes de la première ligne et de la première colonne ;
- les écarts entre nombres premiers successifs étiquettent les arêtes des lignes et colonnes suivantes sauf les arétes de la dernière ligne et celles de la dernière colonne ;
- les arêtes de la dernière ligne et celles de la dernière colonne ont pour étiquette l'écart séparant le plus grand nombre premier inférieur ou égal à $n-3$ et n.

L'étiquetage des arêtes est une fonction de A dans $\mathbb{N}^+$ (voir figure 2).

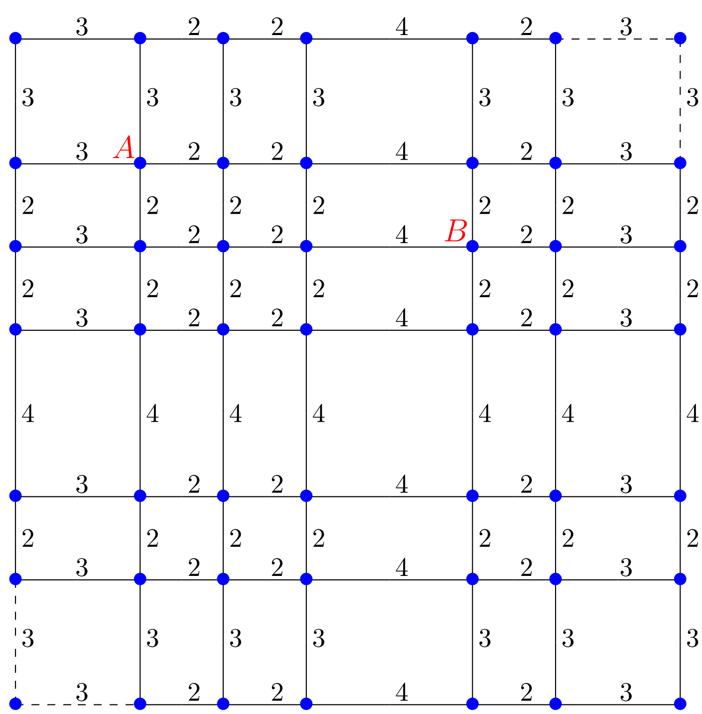

FIGURE 2 : Étiquetage des arêtes pour $n = 16$.

La distance entre deux sommets s et s' du graphe est le minimum des longueurs des chemins menant de s à s'. La distance est une fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^+$. La distance qui sépare le sommet A du sommet B qu'on a notés dans le graphe est égale à 10.

4. Cette référence est à lier à celle au livre de Sainte-Laguë de l'article [10].
5. voir [18].
6. Voir [24], bas de la page 15 et la notion de circuit complet.

Introduisons maintenant la notion d'excentricité : l'excentricité d'un sommet dans un graphe est le maximum des distances qui le séparent de chacun des autres sommets du graphe [7].

$$e(s) = \max\{d(s, s')\}.$$

L'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes étant deux ensembles finis, le maximum existe et est bien défini sur l'ensemble des chemins partant d'un sommet vers chacun des autres.

À nouveau pour fixer les idées, calculons l'excentricité des sommets du graphe exemple associé à $n = 16$ (on note en pointillé les arêtes tout en haut à droite et tout en bas à gauche du dessin, et cette suppression de 4 arêtes sera justifiée plus loin) et notons-la sur la figure 3.

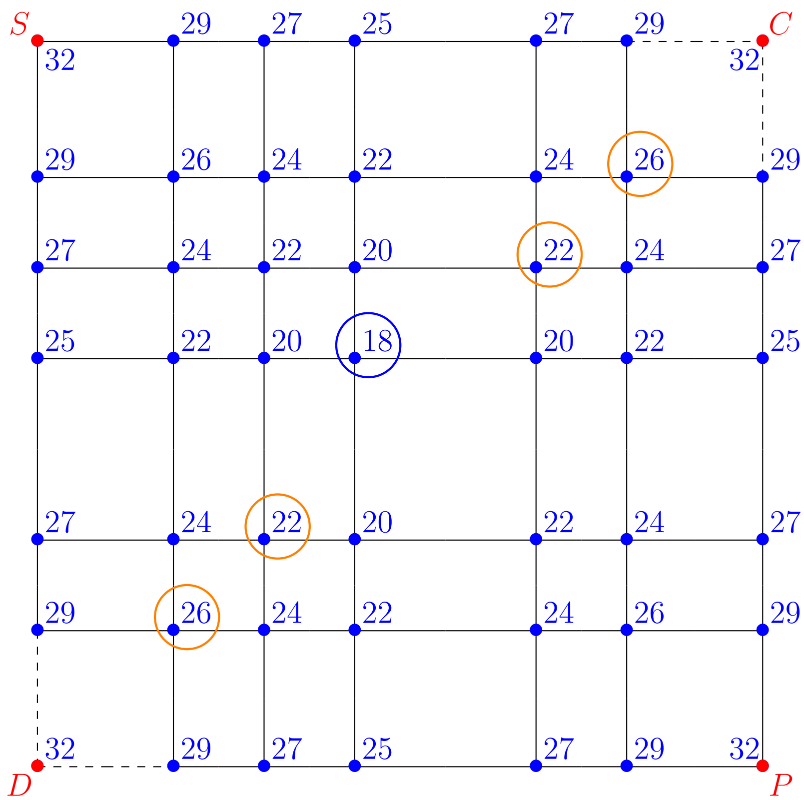

FIGURE 3 : excentricités des sommets.

Les mathématiciens ont introduit la notion de *centre d'un graphe*. Cette notion a d'abord été introduite par Jordan en 1869 [15] pour des graphes non étiquetés, on retrouve cette notion dans [24], p. 9 : lorsqu'il n'y a pas d'étiquette sur les arêtes, la distance entre deux sommets est simplement le nombre d'arêtes les séparant. On adapte la notion de *centre d'un graphe* au fait que les arêtes des graphes qu'utilise notre modélisation soit étiquetées en la définissant ainsi : un centre du graphe sera un sommet dont l'excentricité est minimale lorsque la distance entre deux sommets est la somme des étiquettes d'un chemin de longueur minimum les séparant. L'ensemble des excentricités des différents sommets du graphe étant un ensemble fini, la notion de minimum est bien définie sur cet ensemble des excentricités des différents sommets du graphe.

7. Cette notion est importante d'un point de vue applicatif : prenons pour exemple le positionnement d'un centre de soins d'urgence : on souhaite qu'il soit positionné de la façon la plus centrée possible.

On a entouré sur le réseau le centre en bleu. Ce point se trouve, comme attendu, à une position assez centrale dans le réseau.

Notre but étant que les points correspondant aux décomposants de Goldbach de n soient les centres d'un graphe, on décide de ne conserver que les éléments du réseau sous la diagonale descendante du carré. Le problème est qu'alors, le coin en bas à gauche pourrait être le seul centre, c'est pour cette raison qu'on l'exclut du graphe (ce qu'on avait symbolisé par les arêtes en pointillé sur le graphe de la figure 3) [8].

Fournissons le quatrième et dernier graphique du calcul des excentricités et de la visualisation des centres du graphe "triangulaire épointé" sur la figure 4.

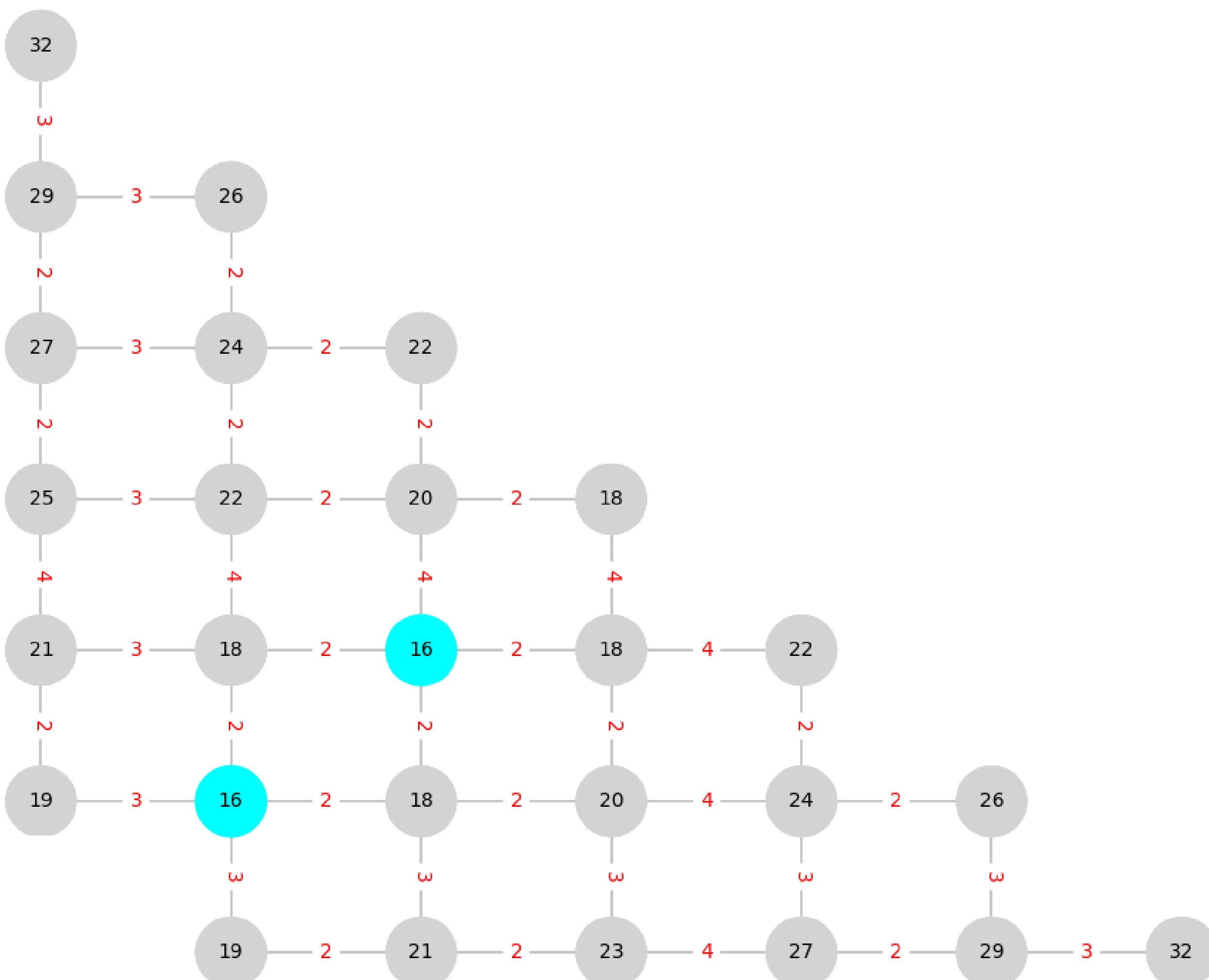

Figure 4 : Excentricités des sommets du nouveau graphe.

Chaque centre du graphe associé à n correspond à une décomposition de Goldbach $p+q$ du nombre n avec p et q deux nombres premiers. L'un des deux nombres premiers p ou q est simplement la

8. Du fait de la disposition des valeurs des arêtes à l'intérieur du graphe, d'un point de vue topologique, notre triangle épointé correspond, à étiquetage des arêtes près, à une bande de Möbius.

somme des étiquettes des arêtes verticales qui amènent au centre tandis que l'autre nombre premier est simplement la somme des étiquettes des arêtes horizontales. Par construction, les sommes en question sont des nombres premiers : si on place l'origine en haut à gauche plutôt qu'en bas à gauche (en raisonnant dans le plan cartésien), les nombres successifs sur les arêtes orientées de haut en bas ou de gauche à droite sont étiquetées par le premier nombre premier impair 3 puis par les écarts entre nombres premiers successifs, la somme de telles étiquettes successives est nécessairement un nombre premier. On comprend que les centres sont à distance minimale des points extrêmes situés en haut à gauche et en bas à droite du graphique (tout chemin vers un point autre que ces 2 points peut voir sa longueur augmentée en se dirigeant plus encore vers les deux points en question). On a d'autre part l'habitude, en étudiant la conjecture de Goldbach, de distinguer les nombres pairs qui vérifient trivialement la conjecture : ce sont les nombres pairs doubles d'un nombre premier. Dans la modélisation proposée ici, la décomposition triviale de Goldbach $2p = p + p$ avec p un nombre premier correspond à un centre du graphe. Contrairement à ce à quoi on aurait pu s'attendre, un tel centre n'est pas au centre "euclidien" du carré initial : il est au centre en termes de nombre d'arêtes du graphe triangulaire épointé, c'est-à-dire qu'il est toujours situé sur l'hypothénuse du triangle rectangle isocèle sous-tendant le graphe ; le chemin qui mène à ce centre du graphe est lui-aussi un triangle rectangle isocèle.

Les triangles épointés visualisant les centres et donc les décompositions de Goldbach des nombres n compris entre 8 et 102 peuvent être téléchargés à cette adresse. Le programme calculant ces centres a été fourni par Gemini, suivant les instructions de l'auteure pour étiqueter correctement les arêtes, les sommets, pour calculer les excentricités, d'abord dans les carrés et ensuite dans les triangles épointés (on peut le télécharger à cette adresse).

La lectrice et le lecteur désireux d'approfondir leur connaissance en théorie des graphes pourront étudier les références [14], [11], [16], [7], [5] (dont la page 109 traite de la notion de centre d'un graphe) et [23] ainsi que le livre de Jean-Pierre Serre [25].

5. Justification de l'existence d'un centre du graphe

L'existence d'au moins un centre du graphe a été justifiée au fur et à mesure de l'introduction des différentes définitions. La forte connexité du graphe, le fait que les ensembles (de sommets, d'arêtes, de chemins de longueur minimum, d'excentricités) soient des ensembles finis garantit l'existence des maxima et minima utilisés dans les calculs. Le calcul de chemins de longueur minimum est à placer dans la théorie des dioïdes (ou semi-anneaux), appelés aussi algèbres min-plus ou algèbres tropicales (voir [13] ainsi que les travaux de Stéphane Gaubert et Marianne Akian [2]) ainsi que dans la théorie des graphes, très prégnante en intelligence artificielle et dans l'étude des réseaux (de communication, sociaux, etc, voir [19]).

On espère que la justification qui a été fournie ci-dessus assure l'existence, pour tout nombre pair $n > 4$, de deux nombres premiers impairs dont il est la somme.

Références

[1] C. Adam, P. Tannery, Œuvres de Descartes - Physico-mathematica, Compendium Musicae, Regulae ad directionem ingenii - Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance, vol. X, Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes. III : Numeri polygoni, édit. Amsterdam, 1701, p. 1-4. Copie MS. : Leyde, Bibliothèque de l'Université, Hug. 29 ex Hug. 27, 1908, Cerf, Paris.

[2] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert, Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskiĭ-Višik-Ljusternik theorem, arXiv, `https://arxiv.org/pdf/math/0402090`, 2006.

[3] M. Audin, Géométrie, 2006, EDP Sciences.

[4] G. Belgioioso, René Descartes : Opere Posthume 1650-2009, 2009, Bompiani – il pensioro occidentale.

[5] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph theory, 2008, Springer.

[6] F. Buckley, F. Harary, Distance in graphs, 1990, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.

[7] F. Butelle, Contribution à l'algorithmique distribuée : arbres et ordonnancement, 2007, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Paris XIII.

[8] G. Cantor, Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach, 1894, Compte rendu, Congrès de Caen, Association française pour l'avancement des sciences, 1894, XXIII, 117-134.

[9] O. Cogis, C. Schwartz, Théorie des graphes, 2018, Cassini, collection L.

[10] A. Connes, Symétries, 2001, Pour la Science, numéro 292, 36-43.

[11] R. L. Francis, J. A. White, Facility layout and location : an analytical approach, 1974, Prentice-Hall.

[12] C. Goldbach, Lettre de Christian Goldbach à Leonhard Euler (XLIII, OO765), Correspondances mathématiques et physiques de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle (lettre à Euler en allemand), Académie Impériale des Sciences, Saint-Pétersbourg, 1988, P. H. Fuss, 125–129, `http://eulerarchive.MAA.org`.

[13] M. Gondran, M. Minoux, Dioids and semi-rings, new models and algorithms, Springer, 2008.

[14] G. Y. Handler, Minimax network location : theory and algorithms, 1974, MIT Flight transportation laboratory.

[15] C. Jordan, Sur les assemblages de lignes, 1869, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 70, 185-190.

[16] O. Kariv, S. L. Hakimi, An algorithmic approach to network location problems : the p-centers, I et II, SIAM Journal on applied mathematics, vol. 37, 1979, 513-560.

[17] C.-A. Laisant, Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach, Bulletin de la Société Mathématique de France : Vie de la Société, no. 25, 1897, 208-211.

[18] Laquière, Note sur la géométrie des quinconces, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 7, year = 1879, 85-92.

[19] J.-L. Laurière, Intelligence artificielle, résolution de problèmes par l'homme et la machine, Eyrolles, 1986.

[20] J.-M. Meny, G. Aldon, L. Xavier, Butinage graphique, 2003, IREM de Lyon.

[21] A. de Polignac, Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 8, 1880, 120-124.

[22] A. de Polignac, Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 9, 1881, 30-42.

[23] S. Ratel, Densité, VC-dimension et étiquetages de graphes, 2019, Thèse, Aix-Marseille.

[24] A. Sainte-Laguë, Les réseaux (ou graphes), Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 18, 1926, 1-64.

[25] J.-P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2, Astérisque, n° 46, 1983, Société Mathématique de France.

[26] R.-C. Vaughan, Goldbach's conjectures : a historical perspective, Open problems in Mathematics, Springer International Publishing, 2016, 479-520.

Triangle 25x25 : Coin exclu (X, noir)
Centres du 'gros' graphe en CYAN