Conjecture de Goldbach et centres d'un réseau, Denise Vella-Chemla, avril 2026.

Résumé : La conjecture dite *conjecture paire de Goldbach*, non démontrée à ce jour, énonce que tout nombre pair n supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. Est présentée ci-après une justification de cette conjecture qui est basée sur l'idée de considérer certaines sommes égales à n comme des points de $\mathbb{N}^2$ dont les couples de coordonnées sont de la forme $(p, n-p)$, avec p un nombre premier compris entre 3 et $n-3$ inclus, puis de considérer les points en question comme les sommets d'un graphe, et de voir les décompositions de Goldbach comme les centres de ce graphe, l'existence de tels centres étant assurée.

1. Introduction

La conjecture dite *conjecture paire de Goldbach*, qui date de 1742 ([15]) [1], énonce que tout nombre pair n supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers [2] (voir [22] pour un compte-rendu historique à son sujet). Elle a intéressé de nombreux savants (tels que Cantor [6] qui a vérifié, à l'époque à la main, qu'elle était vraie pour tous les nombres jusqu'à 1000, ou Laisant [13] qui a proposé un procédé expérimental permettant de la vérifier). Est présentée ci-après une justification de la conjecture de Goldbach qui est basée sur l'idée de considérer certaines sommes égales à n comme des points du plan $\mathbb{N}^2$. On place les nombres p_k et $n-p_k$, avec p_k un nombre premier compris entre 3 et $n-3$, l'un, p_k, sur l'axe des abscisses, et l'autre, $n-p_k$, sur l'axe des ordonnées.

2. Représentation des décompositions de n en sommes $p_k + (n-p_k)$, avec p_k un nombre premier, dans le plan $\mathbb{N}^2$

Appelons E_n l'ensemble des nombres premiers impairs compris entre 3 et $n-3$ inclus. On note E'_n l'ensemble des nombres $n-p_k$ avec $p_k \in E_n$.

$$\begin{aligned} E_n &= \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n-3, p_k \text{ est un nombre premier}\} \\ E'_n &= \{n-p_k \mid p_k \in E_n\}. \end{aligned}$$

Par commodité, on représente les points qui sont utiles pour la justification par des points (x, y) dans un carré C de côté de longueur n, carré dont les sommets sont les points $(0,0)$, $(n,0)$, $(0,n)$ et (n,n). Les nombres premiers p_k sont positionnés sur l'axe des abscisses. Les nombres $n-p_k$ sont positionnés sur l'axe des ordonnées.

On trace dans le carré C un réseau de droites :

- chaque droite verticale a pour équation $x = p_k$ pour chaque nombre premier $p_k \in E_n$;
- chaque droite horizontale a pour équation $y = n - p_k$ pour chaque nombre $n - p_k \in E'_n$.

L'ensemble R des points d'intersection du réseau de droites dans le carré C est défini par

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in E_n,\ y \in E'_n\}.$$

1. On trouve aussi la phrase latine "*Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis*", traduisible en "*Mais tout nombre pair est composé d'un, deux ou trois nombres premiers.*" dans un écrit posthume, publié en 1701, de Descartes [1] ; [3].

2. On considérera ici seulement les nombres pairs supérieurs à 4, comme sommes de deux nombres premiers impairs.

Exemple : Donnons pour exemples les ensembles associés aux nombres pairs $n = 16$ et $n = 24$: E_{16}, E'_{16}, E_{24} et E'_{24}. On a

$$\mathrm{E}_{16} = \{3, 5, 7, 11, 13\} \qquad \mathrm{E'}_{16} = \{13, 11, 9, 5, 3\}$$
$$\mathrm{E}_{24} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \qquad \mathrm{E'}_{24} = \{21, 19, 17, 13, 11, 7, 5\}$$

3. Illustration graphique d'un exemple

Pour fixer les idées, voyons le cas $n = 16$ en caractérisant dans la modélisation choisie les décomposants de Goldbach de 16 qui sont 3 et 13 d'une part, et 5 et 11, d'autre part.

La figure 1 montre le carré représentant les décompositions de Goldbach du nombre $n = 16$ en rouge sur la diagonale ascendante (il s'agit des nombres 3, 5, 11 et 13).

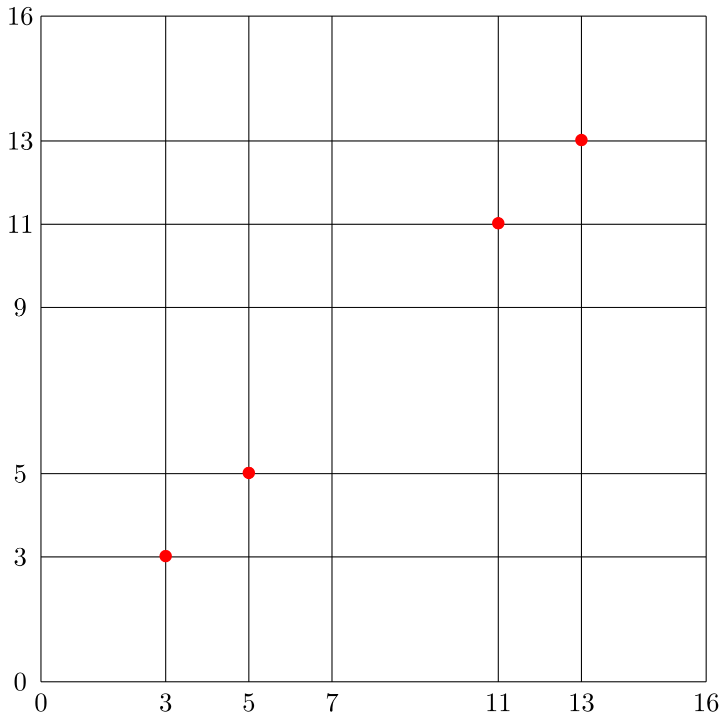

Figure 1 : L'exemple du carré pour $n = 16$. Les décomposants de Goldbach de 16, appartenant à $\{3, 5, 11, 13\}$, sont colorés en rouge sur la diagonale ascendante.

4. Graphe, excentricité, centres

Adoptons maintenant un autre regard sur les points de notre réseau de points : voyons-les comme les sommets d'un graphe, liés par des arêtes. En théorie des graphes (voir [7],[16], [2]), un graphe est noté $G = (S, A)$ avec S un ensemble de sommets (fini) et A un ensemble (fini également) d'arêtes. La théorie des graphes a pour origine les travaux d'Euler sur les circuits traversant les pont de Königsberg une fois et une seule, elle a été étudiée en France à la fin du XIXe siècle et au début du XXe siècle (voir les travaux de Jordan [11], de Polignac [18], [19] ou Sainte-Laguë [21] [3]). Les graphes

3. Cette référence est à lier à celle au livre de Sainte-Laguë de l'article [8].

et les réseaux nous sont devenus très familiers du fait de l'utilisation massive que nous faisons d'internet et des systèmes de navigation basés sur les systèmes de positionnement par satellites (GPS). Les réseaux étiquetés qui modélisent notre problème sont d'une forme particulière, toute arête est le bord d'une case d'échiquier (voir [14]) ; cela a pour conséquence qu'un chemin existe entre deux sommets quelconques [4]. Cette propriété s'énonce en disant que le graphe est fortement connexe.

Les étiquettes sur les arêtes du graphe prennent les valeurs suivantes :

- le nombre premier 3 étiquette les arêtes de la première ligne et de la première colonne ;
- les écarts entre les nombres premiers successifs étiquettes les arêtes des lignes et colonnes suivantes sauf la dernière ligne et la dernière colonne ;
- les arêtes de la dernière ligne et celles de la dernière colonne ont pour étiquette l'écart séparant le plus grand nombre premier inférieur ou égal à $n-3$ et n.

L'étiquetage des arêtes est une fonction de A dans $\mathbb{N}^+$ (voir figure **??**).

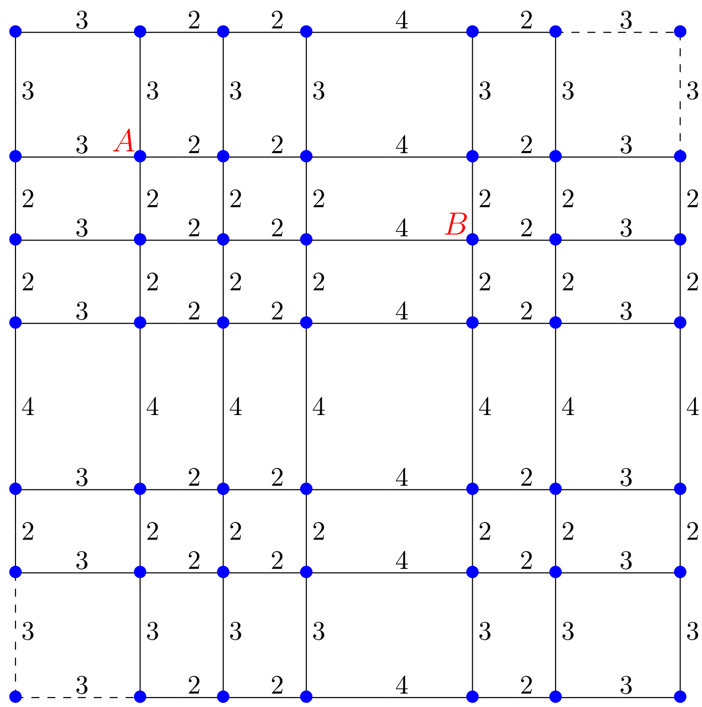

FIGURE 2 : Étiquetage des arêtes pour $n = 16$.

La distance entre deux sommets s_1 et s_2 du graphe est le minimum des longueurs des chemins menant de s_1 à s_2. La distance est une fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^+$. La distance qui sépare le sommet A du sommet B qu'on a notés dans le graphe est égale à 10.

Introduisons maintenant la notion d'excentricité : l'excentricité d'un sommet dans un graphe est le maximum des distances qui le séparent de chacun des autres sommets du graphe [5].

$$e(s) = \max\{d(s, s')\}.$$

4. Voir [21], bas de la page 15 et la notion de circuit complet.

5. Cette notion est importante d'un point de vue applicatif : prenons pour exemple le positionnement d'un centre de soins d'urgence : on souhaite qu'il soit positionné de la façon la plus centrée possible.

L'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes étant deux ensembles finis, le maximum existe et est bien défini sur l'ensemble des chemins partant d'un sommet vers chacun des autres.

À nouveau pour fixer les idées, calculons l'excentricité des sommets du graphe exemple associé à $n = 16$ (notons les arêtes en pointillés en haut à droite et en bas à gauche du dessin, que nous justifierons ci-dessous) et notons-la sur la figure 3.

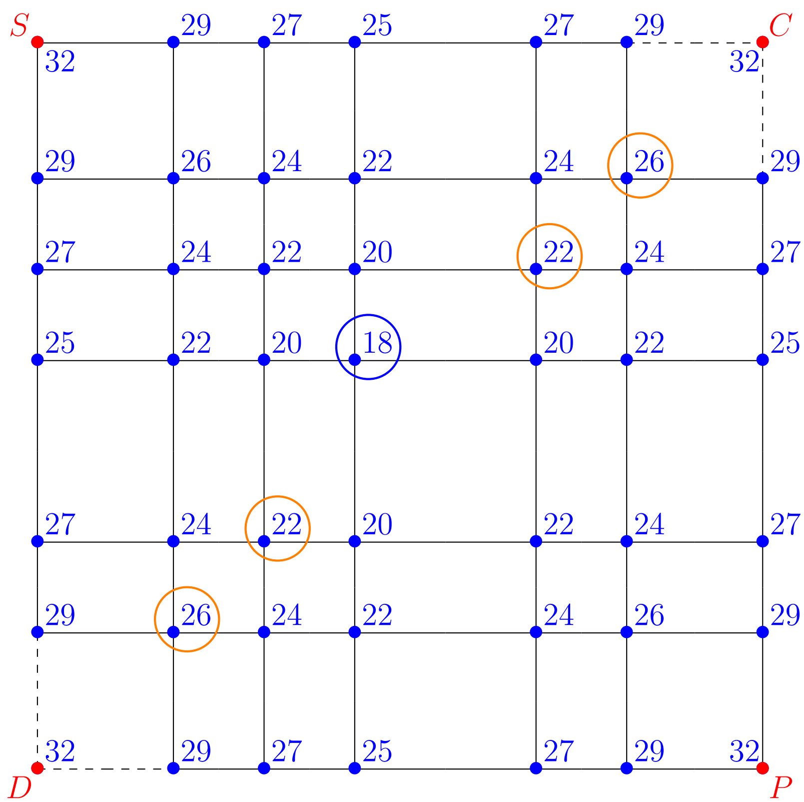

FIGURE 3 : excentricités des sommets.

Les mathématiciens ont introduit la notion de centre d'un graphe. Cette notion a d'abord été introduite par Jordan en 1869 ([11]) pour des graphes non étiquetés, on retrouve cette notion dans [21], p. 9. On adapte cette notion au fait que les arêtes du graphe soit étiquetées en la définissant ainsi : un centre du graphe sera un sommet dont l'excentricité est minimale. L'ensemble des excentricités des différents sommets du graphe étant un ensemble fini, la notion de minimum est bien définie sur cet ensemble des excentricités des sommets du graphe.

On a entouré sur le réseau le centre en bleu. Ce point se trouve, comme attendu, à une position assez centrale dans le réseau.

Il y a dans le réseau deux points particuliers : le coin C en haut à droite du réseau et le coin D en bas à gauche du réseau. Ces deux points sont à une distance égale à $n = 16$ des points S et P situés aux coins opposés du réseau. On les a isolés du réseau en coupant les arêtes qui permettent d'atteindre ces deux points C et D : c'est ce qu'on a représenté en notant les arêtes en question en pointillé.

On a entouré sur le réseau les points sur la diagonale qui sont, comme les deux points C et D, à une distance égale à n de S et P ; ces points correspondant aux nombres premiers décomposants de Goldbach de n. Pour que ces points soient centres d'un graphe, il nous faut couper le graphe en deux, et utiliser le programme généré par l'IA gemini de calcul des centres du nouveau graphe (ce changement de procédé explique la différence de graphisme).

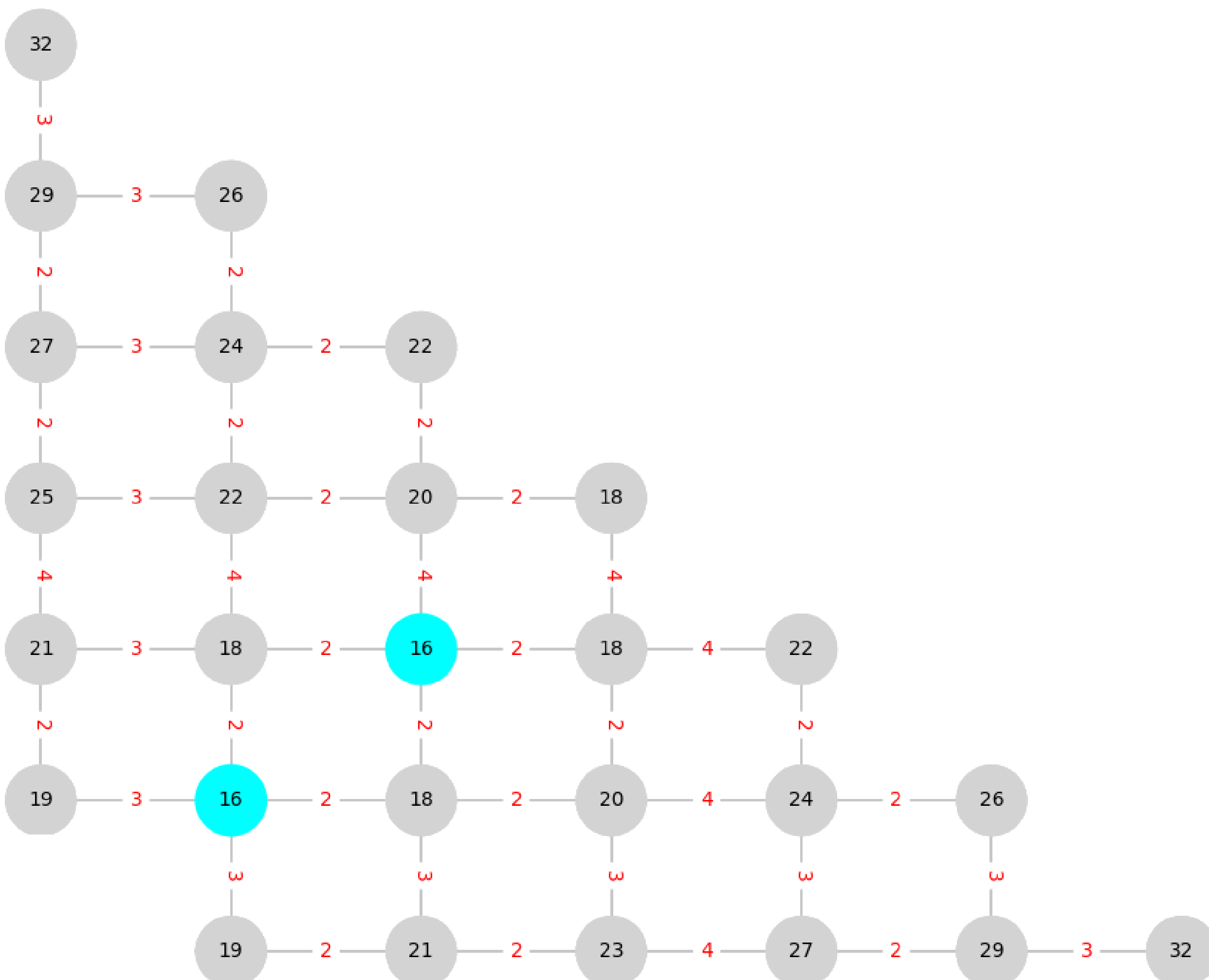

FIGURE 4 : Excentricités des sommets.

La lectrice et le lecteur désireux d'approfondir leur connaissance en théorie des graphes pourront étudier les références [10], [9], [12], [5], [4] (dont la page 109 traite de la notion de centre d'un graphe) et [20].

5. Justification de l'existence d'un centre du graphe

L'existence d'un centre du graphe-grille initial a été justifiée au fur et à mesure de l'introduction des différentes définitions. La forte connexité du graphe, le fait que les ensembles (de sommets, d'arêtes, de chemins de longueur minimum, d'excentricités) soient des ensembles finis garantit l'existence des maxima et minima utilisés dans les définitions. Un petit point est à préciser : on n'a pas orienté les arêtes (i.e. on n'a pas mis de flèches sur les arêtes qui rendrait l'arête (x, y) avec x et y deux sommets du graphe différente de l'arête (y, x). Notre graphe comporte des cycles, des suites d'arêtes sur lesquelles on pourrait imaginer boucler indéfiniment, rendant les chemins infinis, et les ensembles infinis. Mais comme on ne considère que les chemins de longueur minimum, seuls ceux pour lesquels on aurait éventuellement fait le tour d'un carré une fois sont ainsi considérés ; de plus, ces chemins qui feraient ne serait-ce qu'un seul tour de carré ne sont pas considérés non plus car, à la recherche de l'excentricité qui est un maximum, on utilisera toujours les arêtes en les faisant se diriger vers le but à atteindre, qui est en l'occurrence l'un des 4 points S, P, C et D. La transformation du graphe-grille symétrique initial en son "graphe-moitié" triangulaire, ainsi que l'exclusion du "sommet-coin" permet de trouver les décomposants de Goldbach de n comme centres du graphe triangulaire. Leur existence est assuré par l'existence d'un centre (d'un sommet d'excentricité minimum, i.e. d'un sommet dont le maximum des distances à tous les autres sommets du graphe est minimum).

Références

[1] C. Adam AND P. Tannery, Œuvres de Descartes - Physico-mathematica, Compendium Musicae, Regulae ad directionem ingenii - Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance, vol. X, Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes. III : Numeri polygoni, édit. Amsterdam, 1701, p. 1-4. Copie MS. : Leyde, Bibliothèque de l'Université, Hug. 29 ex Hug. 27, 1908, Cerf, Paris.

[2] F. Buckley AND F. Harary, Distance in graphs, 1990, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.

[3] G. Belgioioso, René Descartes : Opere Posthume 1650-2009, 2009, Bompiani − il pensioro occidentale.

[4] J. A. Bondy AND U. S. R. Murty, Graph theory, 2008, Springer.

[5] F. Butelle, Contribution à l'algorithmique distribuée : arbres et ordonnancement, 2007, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Paris XIII.

[6] G. Cantor, Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach, 1894, Compte rendu, Congrès de Caen, Association française pour l'avancement des sciences, 1894, XXIII, 117-134.

[7] O. Cogis AND C. Schwartz, Théorie des graphes, 2018, Cassini, collection L.

[8] A. Connes, Symétries, 2001, Pour la Science, numéro 292, 36-43.

[9] R. L. Francis AND J. A. White, Facility layout and location : an analytical approach, 1974, Prentice-Hall.

[10] G. Y. Handler, Minimax network location : theory and algorithms, 1974, MIT Flight transportation laboratory.

[11] C. Jordan, Sur les assemblages de lignes, 1869, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 70, 185-190.

[12] O. Kariv AND S. L. Hakimi, An algorithmic approach to network location problems : the p-centers, I et II, SIAM Journal on applied mathematics, vol. 37, 1979, 513-560.

[13] C.-A. Laisant, Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach, Bulletin de la Société Mathématique de France : Vie de la Société, no. 25, 1897, 208-211.

[14] Laquière, Note sur la géométrie des quinconces, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 7, year = 1879, 85-92.

[15] C. Goldbach, Lettre de Christian Goldbach à Leonhard Euler (XLIII, OO765), Correspondances mathématiques et physiques de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle (lettre à Euler en allemand), Académie Impériale des Sciences, Saint-Pétersbourg, 1988, P. H. Fuss, 125–129, `http://eulerarchive.MAA.org`.

[16] J.-M. Meny AND G. Aldon AND L. Xavier, Butinage graphique, 2003, IREM de Lyon.

[17] M. Audin, Géométrie, 2006, EDP Sciences.

[18] A. de Polignac, Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 8, 1880, 120-124.

[19] A. de Polignac, Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 9, 1881, 30-42.

[20] S. Ratel, Densité, VC-dimension et étiquetages de graphes, 2019, Thèse, Aix-Marseille.

[21] A. Sainte-Laguë, Les réseaux (ou graphes), Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 18, 1926, 1-64.

[22] R.-C. Vaughan, Goldbach's conjectures : a historical perspective, Open problems in Mathematics, Springer International Publishing, 2016, 479-520.