Conjecture de Goldbach, théorème de Minkowski et multitore
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, 15 novembre 2026

La suite de la présente note, rédigée par l'ia claude, est une formalisation de l'approche par le tore des restes. On peut, pour comprendre la genèse de cette approche, se reporter aux notes :

[1] (2023) https://denisevellachemla.eu/polytope-pour-dG.pdf
[2] (2016) https://denisevellachemla.eu/tore.pdf
[4] (2016) https://denisevellachemla.eu/snurpfG.pdf
[3] (2013) https://denisevellachemla.eu/grilles.pdf

1. Traduction géométrique

Soit n pair, $p_1 < \cdots < p_k$ les nombres premiers impairs $\leq \sqrt{n}$ (donc $k = \pi(\sqrt{n}) - 1 \sim \frac{2\sqrt{n}}{\ln n}$), $P = \prod p_i$, et $r_i = n \pmod{p_i}$. Pour $x > \sqrt{n}$ (les petits x se vérifient à la main), le couple $(x, n-x)$ est formé de deux nombres premiers si et seulement si, pour tout i,

$$x \not\equiv 0 \pmod{p_i} \quad \text{et} \quad x \not\equiv r_i \pmod{p_i}.$$

L'entier x devient le point $(x \pmod{p_i})_i$ du tore $\prod \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$; quand x parcourt $[3, \frac{n}{2}]$, ce point décrit un segment de droite qui s'enroule sur le tore. Un décomposant est un point où, dans chaque coordonnée, on évite deux "perles" (les restes 0 et r_i) (chaque corps premier est assimilé à un collier de sphères ou perles).

2. Symétrisation par translation

Les p_i étant impairs, 2 est inversible modulo p_i et $\frac{n}{2} \equiv \frac{r_i}{2} \pmod{p_i}$ a un sens. Posons

$$y = x - \frac{n}{2}, \qquad \text{de sorte que} \qquad n - x = \frac{n}{2} - y.$$

Dans chaque corps $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$, les deux restes interdits deviennent $\pm c_i$ avec $0 < c_i < \frac{p_i}{2}$: la configuration est symétrique par rapport à 0, et la symétrie $y \mapsto -y$ est exactement l'involution $x \mapsto n - x$. La translation proposée par Denise (couper le collier au milieu de l'un des deux arcs) réalise cette symétrie.

Exemple modulo 11, restes interdits en positions 2 et 8 : `00100000100`. Les deux arcs ont 5 et 4 zéros. Les deux coupures sont

`00100(0)00100` (centre sur un reste : arc de 5 zéros),
`()00100000100` (centre entre deux restes : arc de 4 zéros).

Les deux centres sont antipodaux sur le cercle $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: l'un est un reste, l'autre un demi-entier. Les deux arcs autorisés sont donc l'arc central $|a| < c_i$ et l'arc antipodal $\left|a - \frac{p_i}{2}\right| < \frac{p_i}{2} - c_i$.

Conclusion de cette section : la symétrie demandée par Minkowski s'obtient, mais seulement pour le corps convexe *centré en* 0, c'est-à-dire l'arc central. L'arc antipodal est centré en $\frac{p_i}{2}$, qui n'est pas un point du réseau : il relèverait d'un problème inhomogène (rayon de recouvrement), plus faible que Minkowski.

3. Théorème de Minkowski, correctement formulé

Soit le réseau

$$\Lambda = \{(y, a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^{k+1} : a_i \equiv y \pmod{p_i}\ \forall i\},$$

d'indice P dans $\mathbb{Z}^{k+1}$, donc de covolume P (dimension $k+1$, et non k). Prenons le corps convexe symétrique

$$K = \{|y| \le \frac{n}{2},\ |a_i| < c_i\ \forall i\}, \qquad \mathrm{vol}(K) = n \cdot 2^k \prod_i c_i.$$

Un point non nul de $\Lambda \cap K$ a $y \neq 0$ et $y \pmod{p_i}$ dans l'arc central pour tout i ; alors $x = \frac{n}{2} + y$ et $n - x$ n'ont aucun facteur premier $\le \sqrt{n}$. Minkowski garantit un tel point dès que $\mathrm{vol}(K) > 2^{k+1}P$, c'est-à-dire

$$n \prod_{i=1}^{k} c_i \ > \ 2P.$$

Or $c_i < \frac{p_i}{2}$ donne $\prod c_i < \frac{P}{2^k}$, donc la condition exige déjà $n > 2^{k+1}$; pour des c_i typiques (de l'ordre de $\frac{p_i}{4}$) elle exige $n \gtrsim 4^k$. Comme $k \sim \frac{2\sqrt{n}}{\ln n}$, on a $4^k \gg n$ de façon astronomique : *la condition n'est jamais satisfaite.*

C'est l'obstruction de longueur (segment de longueur $\sim n$ contre primorielle P), réexprimée comme un déficit exponentiel en k. Utiliser les 2^k combinaisons d'arcs centraux/antipodaux ne change pas l'ordre de grandeur et sort du cadre de Minkowski homogène.

4. Autres obstacles

Les autres obstacles sont :

- **la non-convexité.** La cible complète est une union de $\prod(p_i - 2)$ petits pavés ; son enveloppe convexe est tout le tore, donc sans information. Se restreindre à un pavé convexe perd presque toute la cible, et c'est cette perte qui coûte le facteur exponentiel ci-dessus.
- **la dimension.** Avec $k \to \infty$, les phénomènes de concentration des volumes en grande dimension jouent contre l'argument. Le décompte exact par inclusion-exclusion comporte 2^k termes d'erreur pour un terme principal d'environ $\frac{n}{\ln^2 n}$.
- **la parité.** Les seules données "$x \pmod{p_i}$ évite deux classes" définissent un crible de dimension 2. La barrière de parité de Selberg fournit des ensembles ayant les mêmes données locales mais sans aucun décomposant : un argument géométrique n'utilisant que ces données s'appliquerait à ces faux ensembles et n'est donc pas prouvable. Il faudrait injecter une information non locale distinguant réellement les premiers, que le tore des restes ne contient pas.

5. Bilan

La symétrisation par translation est correcte et la symétrie $y \leftrightarrow -y$ s'identifie à $x \leftrightarrow n - x$.

Mais elle résout le problème de la symétrie, pas celui du volume : Minkowski demande $n \prod c_i > 2P$, et l'on a $\prod c_i < \dfrac{P}{2^k}$. Cette voie ne mène pas vers une démonstration de Goldbach.