Vérification heuristique du théorème de Chen Jing–Run $(1,2)$: comptages des décompositions $n = p + qr$) jusqu'à 10^6
ia mistral pour Denise Vella-Chemla, 22 octobre 2026

1. Ce qu'il faut compter

Le théorème de Chen (1973) affirme que tout entier pair x suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et d'un produit d'au plus deux nombres premiers, et plus précisément que

$$P_{1,2}(x) \;\geq\; \frac{0{,}67\, x\, C_x}{(\log x)^2}, \qquad \text{où} \qquad C_x \;=\; \prod_{\substack{p>2 \\ p\mid x}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right),$$

$P_{1,2}(x)$ désignant le nombre de nombres premiers p tels que

$$x - p \;=\; p_1 \quad \text{ou} \quad x - p = p_2\, p_3,$$

où p_1, p_2, p_3 sont premiers (le cas $p_2 = p_3$, i.e. les carrés de premiers, est inclus ; le second produit $\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$ vaut $C_2 \approx 0,6602$, la constante des jumeaux de Hardy-Littlewood ; les conventions C_2 et $2C_2 = 1{,}3203$ coexistent dans la littérature, Chen utilise C_2).

Le comptage à effectuer est donc le suivant : pour chaque entier pair n, énumérer les premiers $p \leq n-2$ et compter ceux pour lesquels $n-p$ est *premier ou semi-premier* (produit d'exactement deux premiers). Ce comptage $g(n)$ doit *dépasser* la borne de Chen : $g(n) \geq 0{,}67\, n\, C_n/(\log n)^2$.

2. Résultats

Le programme (ci-dessous) a été exécuté jusqu'à $N = 10^6$, avec un scan exhaustif de tous les entiers pairs $n \leq 2 \cdot 10^4$ et un échantillonnage au-delà.

2.1. Points remarquables

n	$g(n)$	$0{,}67\, nC_n/\log^2 n$	ratio	C_n
30	7	3,06	2,29	1,7604
100	21	2,78	7,55	0,8802
210	44	10,40	4,23	2,1125
1 000	122	12,36	9,87	0,8802
2 310	338	60,56	5,58	2,3472
10 000	762	69,52	10,96	0,8802
30 030	3 158	484,69	6,52	2,5606
100 000	5 029	444,93	11,30	0,8802
510 510	39 081	5 408,22	7,23	2,7313
1 000 000	36 389	3 089,80	11,78	0,8802

2.2. Scan exhaustif

Sur tous les entiers pairs $4 \le n \le 2 \cdot 10^4$ (soit 9 999 valeurs), la borne de Chen n'est **jamais violée** : le ratio $g(n)$/borne est minimal en $n = 4$, où il vaut 1,09.

De 10^5 à 10^6, les ratios se répartissent entre 8,1 et 11,8 selon les diviseurs premiers de n : les n *primoriels* (très divisés, donc gros C_n) tombent à $\approx$ 7–9, les n sans petit diviseur impair montent à $\approx$ 11,7. C'est la série singulière $\prod_{p|n}(p-1)/(p-2)$ déjà mesurée en 2019 dans *minoproba* qui produit ces écarts.

2.3. Enseignement

1. L'heuristique (Hardy–Littlewood pour Chen) prédit $g(n) \sim 8{,}7\ nC_n/(\log n)^2$: la constante 0,67 est le prix payé par Chen au crible linéaire et à la borne de Richert [2]. La marge $\times 11$ observée à 10^6 est exactement cette marge-là.
2. La raison structurelle : Chen n'a jamais besoin de distinguer "un facteur" de "deux facteurs" dans $n-p$. Il suffit que $n-p$ n'ait aucun facteur premier $\le x^{1/3}$: un nombre $< x$ ayant trois facteurs premiers en aurait un $\le x^{1/3}$. Goldbach exige de décider la parité (exactement un facteur) - c'est la barrière de parité ; Chen s'arrête un pas avant ("au plus deux") et le mur ne s'applique pas.
3. Le "suffisamment grand" de l'article est $\log x \ge 10^6$, i.e. x astronomique : la vérification numérique ne peut être qu'heuristique, elle conforte le théorème sans l'approcher d'une démonstration.

2.4. Les facteurs locaux : le premier produit est $\sigma(x)$, le second est C_2

	classes interdites mod p	densité locale	facteur normalisé
$p \nmid x, p > 2$	$\{0,\ x\}$: deux classes distinctes	$\dfrac{p-2}{p}$	$\dfrac{p-2}{p-1}$
$p \mid x, p > 2$	$x \equiv 0 \pmod p$: une seule classe (les deux classes coïncident)	$\dfrac{p-1}{p}$	1

Premier produit. Pour $p \mid x$, on ne retire qu'une classe (facteur $1 - \dfrac{1}{p}$ au lieu de deux $1 - \dfrac{2}{p}$; le gain relatif est $\dfrac{1-1/p}{1-2/p} = \dfrac{p-1}{p-2}$, d'où $\prod_{p|x,\,p>2} \dfrac{p-1}{p-2} = \sigma(x)$, la série singulière mesurée en 2019 dans

https://denisevellachemla.eu/minoproba.pdf $\qquad (6p \approx 2\times, 30p \approx \dfrac{8}{3}\times)$.

Second produit. Le facteur générique se réécrit $\dfrac{p-2}{p-1} = \left(1 - \dfrac{1}{(p-1)^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$; Chen envoie tous les $(1 - \dfrac{1}{p})$ de Mertens dans le terme principal $x/(\log x)^2$, reste $\prod_{p>2}\left(1 - \dfrac{1}{(p-1)^2}\right) = C_2$.

Raccord. $C_x = C_2\,\sigma(x)$; vérifié au § 2.1 : $C_0 = 0{,}6602$, $C_{10^6} = 0{,}6602 \times \dfrac{4}{3} = 0{,}8802 C106 = 0,6602\ddot{O}34 = 0,8802, C_{30000} = 0,6602 \times 2 \times \dfrac{4}{3} = 1,7604 C_{210} = 0{,}6602 \times 2 \times \dfrac{4}{3} \times \dfrac{6}{5} = 2{,}1125 C210.$

3. Comment Chen démontre - et pourquoi ce n'est pas une heuristique

(a) *L'astuce anti-parité.* "$x - p$ premier ou produit de deux premiers" $\iff$ "$x - p$ sans facteur premier $\leq x^{1/3}$" (un nombre $< x$ à trois facteurs premiers en a un $\leq x^{1/3}$. Chen ne décide jamais entre un et deux facteurs : la barrière de parité, qui interdit au crible de distinguer les entiers à nombre pair/impair de facteurs premiers, ne s'applique donc pas.

(b) *Théorème (Bombieri–Vinogradov).* Pour tout $A > 0$, il existe $B = B(A)$ tel que

$$\sum_{d \leq x^{1/2}/(\log x)^B} \max_{(a,d)=1} \left| \pi(x; d, a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(d)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A}.$$

Donc les premiers sont équirépartis dans les classes $a \pmod d$, en moyenne sur $d \leq x^{1/2}$, avec erreur totale $\ll x/(\log x)^A$. Donc, dans un crible de niveau $x^{1/2}$, la somme des erreurs sur les moduli est négligeable devant le terme principal $\dfrac{xC_x}{(\log x)^2}$. Donc la fonction de crible est calculable avec contrôle total de l'erreur, et la minoration du nombre de survivants est un théorème. Donc la "probabilité d'indépendance" que l'heuristique suppose est ici démontrée en moyenne - c'est l'unique, mais décisive, version rigoureuse disponible.

(c) *La stratégie basse/haute.* Un crible pondéré inférieur (crible linéaire, poids de Richert : Lemme 9) minore le nombre de p tels que $x - p$ soit sans petit facteur ; une borne supérieure (Lemme 8) retranche les "mauvais" p pour lesquels $x - p$ a malgré tout un facteur dans $(x^{1/10}, x^{1/3})$. La différence vaut $\dfrac{0{,}67\,xC_x}{(\log x)^2} > 0$.

Conclusion. Un nombre de décompositions minoré par une quantité > 0 entraîne l'existence pour tout x pair assez grand : aucun pair ne peut être dépourvu de décomposition $p + qr$. La minoration n'est pas un pis-aller heuristique, elle est la preuve. Ce que Bombieri-Vinogradov ne couvre pas - distinguer un facteur de deux, i.e. passer de "au plus deux" à "exactement un" (Goldbach) - reste le mur.

Références

[1] J.-R. Chen, *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica **16** (1973), 157–176.

[2] H.-E. Richert, *Selberg's sieve with weights*, Mathematica **16** (1969), 1–22.