

Complément à la démonstration du théorème 1 de la note : tout centre du graphe triangulaire époiné qu'on a choisi d'utiliser est un décomposant de Goldbach de n , mai 2026

Sont expliquées ici les différentes idées qui sont utilisées dans la preuve de la conjecture de Goldbach basée sur le fait qu'un graphe (non vide) connexe (i.e. il existe un chemin de tout point à tout autre) possède toujours au moins un centre. Cela conduit à une simplification mais un théorème important reste à démontrer.

1. Forme des graphes dits "triangulaires époinés"

Les graphes utilisés, dont les centres sont les décomposants de Goldbach de n sont de la forme suivante : on fournit le graphe pour $n = 12$ ainsi que la forme pour n quelconque.

Pour $n = 12$, les abscisses des points appartiennent à l'ensemble $X_{12} = \{0, 3, 5, 7, 12\}$ (les éléments de cet ensemble autres que 0 et n sont les nombres premiers compris entre 3 et $n - 3$) et les ordonnées des points appartiennent à l'ensemble $Y_{12} = n - X_{12} = \{12, 9, 7, 5, 0\} = \{0, 5, 7, 9, 12\}$.

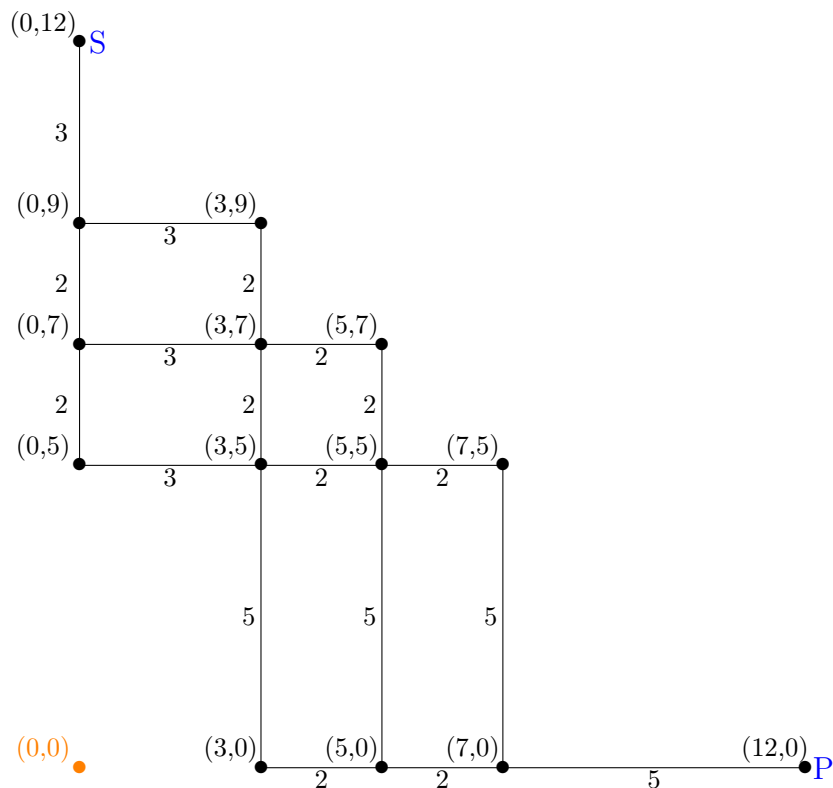


FIGURE 1 : Le graphe pour $n = 12$.

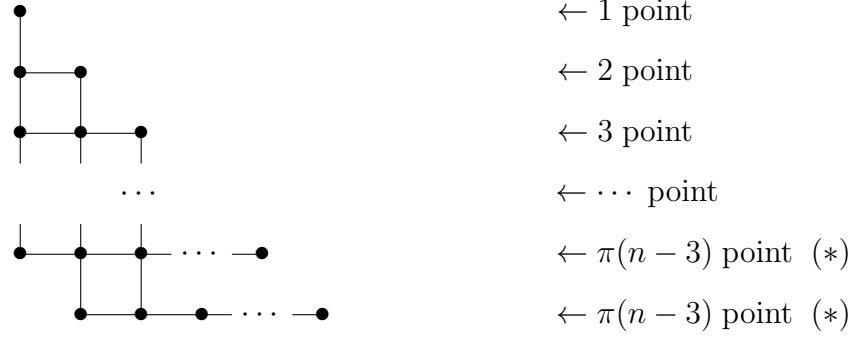


FIGURE 2 : Forme du graphe pour n quelconque.

(*) la fonction $\pi(x)$ dénote le nombre de nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à x .

Dans les paragraphes suivants, il est plus simple de considérer les graphes, comme contenant des sommets qu'on visualise dans le plan euclidien, en effectuant un changement de coordonnées : l'origine est placée en haut à gauche (en le point de coordonnées $(0, n)$ du dessin ci-dessus), et le vecteur de base pour les ordonnées est "à l'envers", ce qui a pour conséquence que les ordonnées et abscisses correspondent directement aux sommants des décompositions, ce qu'on illustre ainsi

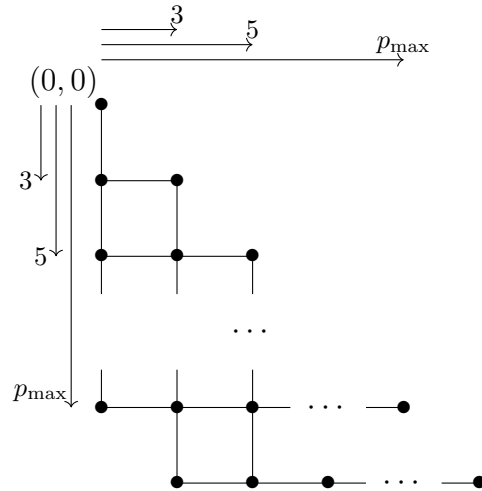


FIGURE 3 : changement de repère par rapport au choix initial de coordonnées.

Les points du plan euclidien qui sont sur l'"hypothénuse du triangle épointé" sont de coordonnées (p_k, p_k) avec p_k un nombre premier compris entre 3 et $n - 3$.

2. Excentricité des sommets du graphe

L'excentricité d'un sommet étant le maximum de l'ensemble des distances qui le séparent de tous les autres sommets du graphe, on comprend aisément que dans le cas qui nous intéresse, pour chaque sommet, on aura essentiellement seulement deux distances à étudier, celle qui sépare le sommet du sommet source S et celle qui sépare le sommet du sommet puits P , qu'on a positionné ci-dessus, en montrant pourquoi ces distances sont les plus grandes possibles à partir d'un sommet et donc

les deux seules distances qu'on aura à comparer.

L'excentricité de chaque sommet est bornée supérieurement par $2n$ qui est l'excentricité des deux points particuliers (celui d'ordonnée maximale, et celui d'abscisse maximale); c'est la distance de Manhattan qui sépare ces deux points.

Si l'on n'avait pas "épointé" le triangle, le sommet à la pointe en bas à gauche du triangle a une excentricité minimale qui est égale à n : il est à distance n des deux points extrêmes du triangle S et P . Cette excentricité minimale fournit une borne inférieure des excentricités des sommets du graphe lorsqu'on enlève ce sommet (en "épointant" le triangle).

Sur le dessin ci-dessous, associés à chaque sommet sont fournis : en noir la décomposition en somme que le sommet représente, en bleu la formule à laquelle est égale son excentricité; les points de chaque sommet sont colorés en violet, (resp. orange ou cyan) selon que la formule pour calculer son excentricité est $2n - p - q$ (qui est alors $> p + q$) (resp. $p + q$ (qui est alors $> 2n - p - q$) ou $p + q$ (qui est alors $= 2n - p - q$).

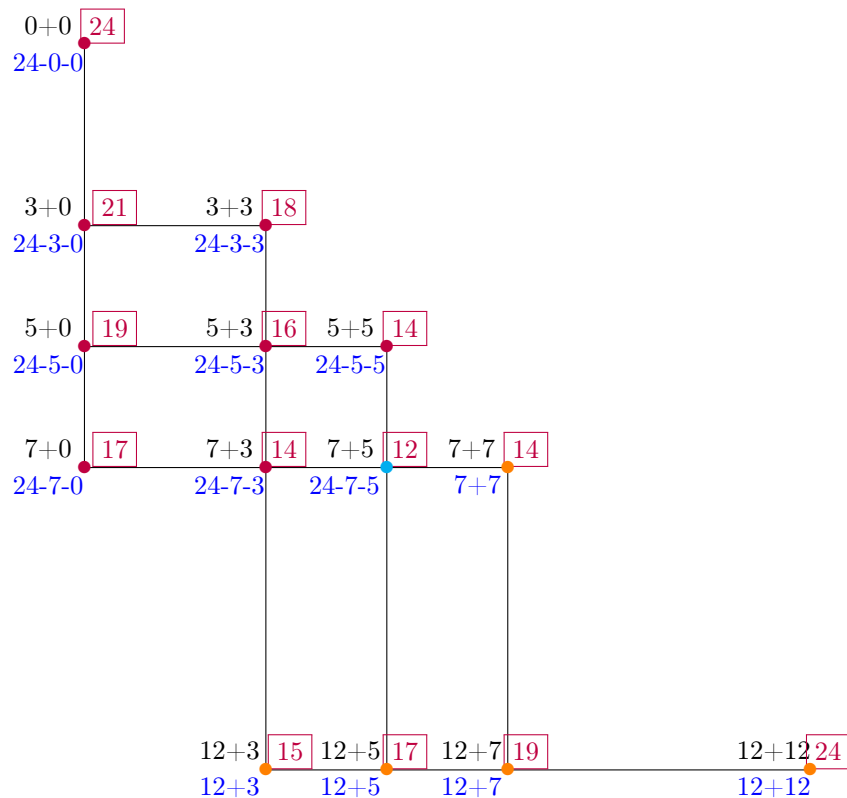


FIGURE 3 : Les excentricités pour $n = 12$.

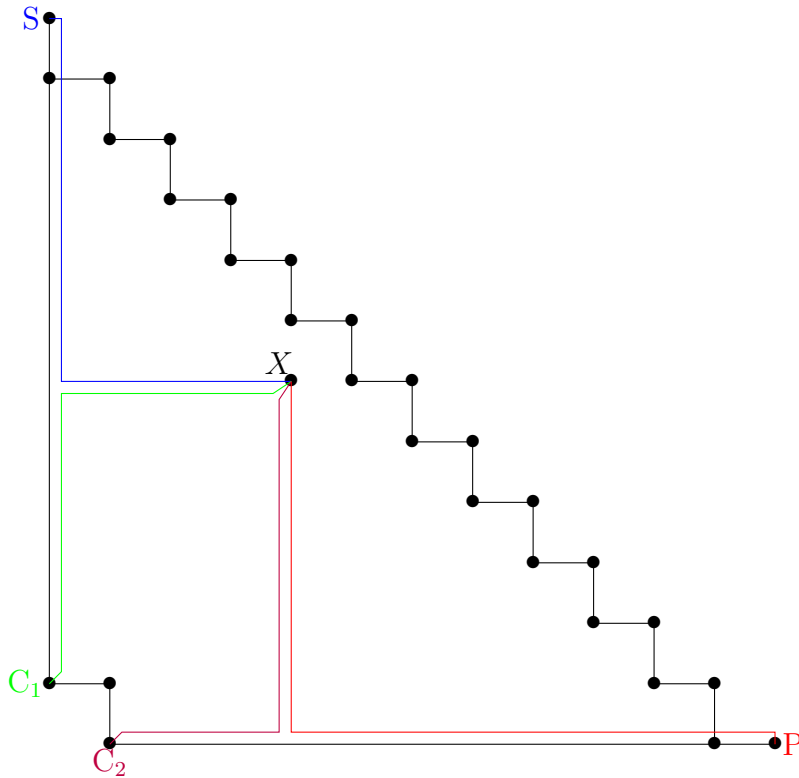
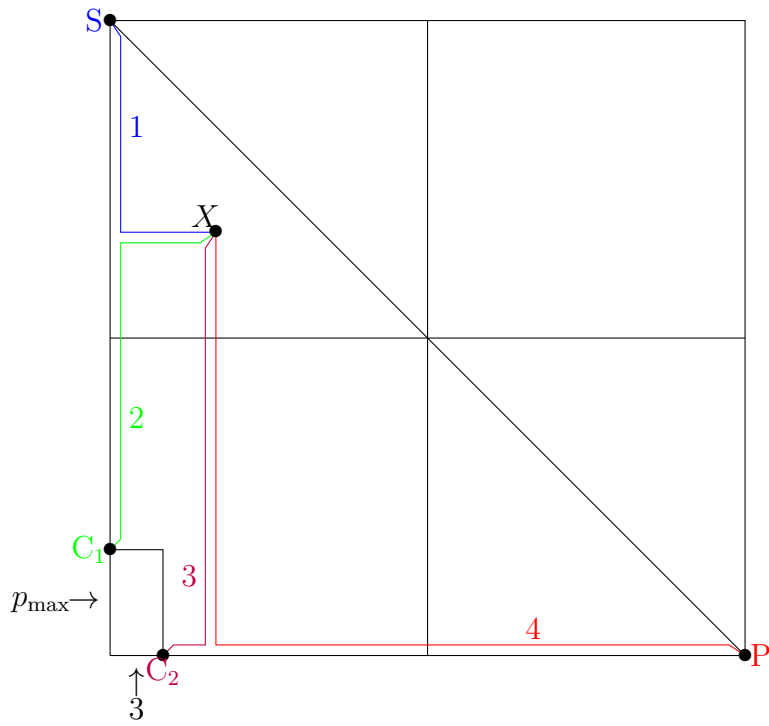


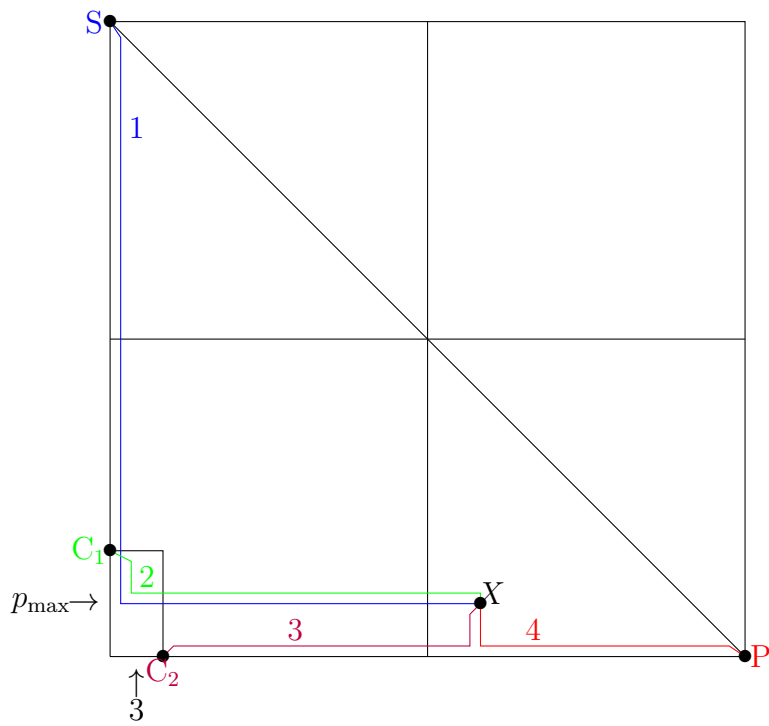
FIGURE 4 : $e(X) = \max(d(X, S), d(X, P), d(X, C_1), d(X, C_2))$.

3. On peut oublier les chemins menant aux points C_1 et C_2 .

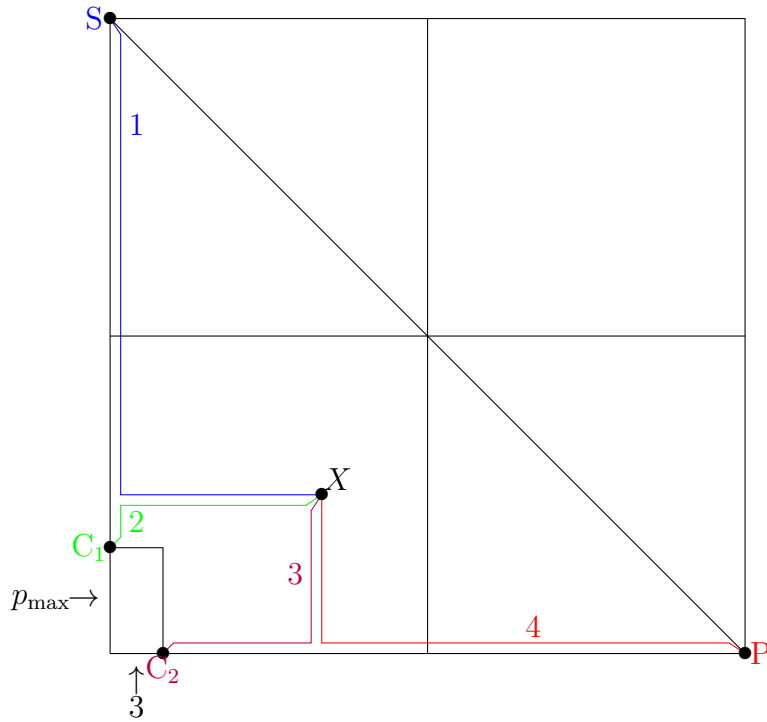
Preuves sans mots du fait qu'on peut ne tenir compte que des seules longueurs des chemins d'un point X vers S et de ce point X vers P pour calculer son excentricité (on a dessiné au mieux les chemins dont les longueurs sont des distances de Manhattan dans le plan euclidien, les chemins partent des points et aboutissent aux points, les petits détours en diagonale sont utiles pour écarter un peu les chemins des bords pour qu'ils soient plus visibles ; la notation $\ell(k)$ désigne la longueur du chemin k , les numéros des chemins étant indiqués en couleur) :



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(4) \\ \ell(3) &\leq \ell(4) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(1) \\ \ell(3) &\leq \ell(1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ell(2) &\leq \ell(1) \\ \ell(3) &\leq \ell(4) \end{aligned}$$

3. Centre(s) du graphe

Un sommet de S est un centre du graphe $G = (S, A)$ si son excentricité est égale au minimum des excentricités de tous les sommets du graphe. Du fait de ce qu'on a vu ci-dessus, son excentricité est donc

$$\min \{ \max (2n - (p + q), p + q), p \in X_n \}$$

4. Bicoloration du graphe selon $\max(2n - p - q, p + q)$

Le graphe voit ses sommets séparés en deux groupes : ceux pour lesquels $2n - p - q > p + q$, ceux pour lesquels $2n - p - q < p + q$, ceux pour lesquels $2n - p - q = p + q$ (les centres).

5. Un centre est un décomposant de Goldbach.

L'excentricité de tout sommet du graphe est $\leq 2n$ et c'est aussi la distance qui sépare la source S du puits P et donc l'excentricité de S est $2n$ et l'excentricité de P est $2n$.

L'excentricité de tout sommet du graphe est $\geq n$. Cette excentricité serait celle du sommet qu'on époincte car il est à égale distance n de S et de P mais on ne sait pas encore démontrer que les centres du graphe triangulaire époincte sont eux-aussi d'excentricité égale à n , i.e. on ne sait pas démontrer que l'excentricité minimale pour le triangle époincte est n .

Pour montrer que tout centre du graphe triangulaire époincte est un décomposant de Goldbach de n , il faut montrer qu'il existe dans le graphe triangulaire époincte un point d'excentricité n . Revenons au graphe triangulaire non époincte : on sait que le point situé à l'angle droit du triangle

rectangle isocèle (en bas à gauche) est un centre du graphe triangulaire non épointé et on sait que ce point est d'excentricité égale à n : il est à distance n de S et à distance n de P . Les autres centres du graphe triangulaire non épointé sont donc forcément eux aussi d'excentricité n , car le minimum d'un ensemble a une valeur unique et de plus, le calcul de leur excentricité ne dépend pas de l'appartenance ou pas de cette "pointe" au graphe, puisque l'excentricité en question est calculée comme étant la longueur maximum d'un centre à S et de ce même centre à P , et puisque ces chemins ne passent pas par la "pointe". Les centres sont donc forcément d'excentricité égale à n .

La distance entre 2 sommets quelconques du graphe est donc comprise entre n et $2n$.

Il suffit pour calculer l'excentricité d'un sommet de considérer les longueurs des 4 chemins colorés du dessin ci-dessus : en effet, tout autre chemin d'un point X à un point quelconque du graphe est de longueur inférieure à celle de l'un des 4 chemins en question.

6. Idées

Plutôt que de considérer les deux sommants d'une décomposition de Goldbach de la forme $n = p+q$, comme l'illustre le dessin de Charles-Ange Laisant,

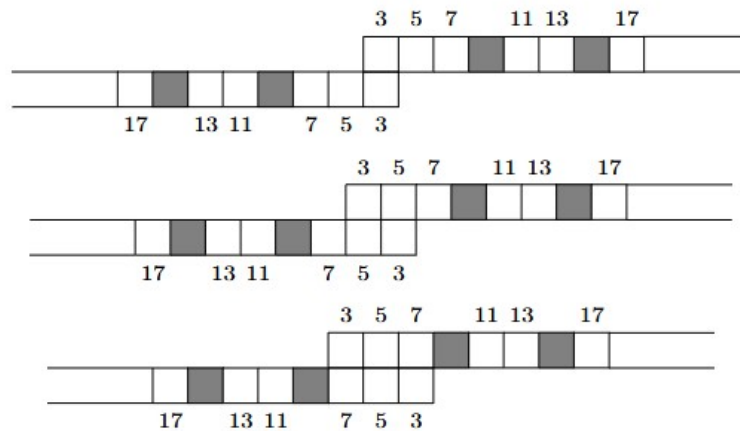


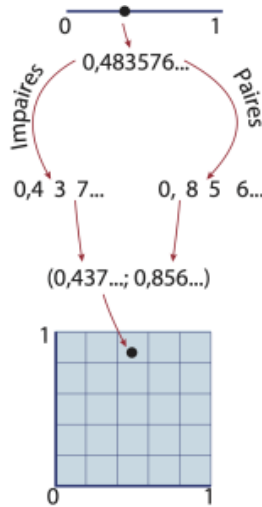
FIGURE 5 : les tirettes de l'article de Charles-Ange Laisant "*Sur un procédé expérimental de vérification de la conjecture de Goldbach*", Bulletin de la SMF, n° 25, 1897.

Cette vision linéaire de la conjecture de Goldbach rappelle comment Gauss mit les nombres en quinconce pour calculer rapidement la somme des 100 premiers entiers :

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & \dots & & 100 \\
 + & 100 & + & 99 & + & 98 & \dots & + & 1 \\
 \hline
 & 101 & & 101 & & 101 & \dots & & 101
 \end{array}$$

Le choix effectué dans la présente note consiste à considérer les deux sommants dans le plan, chacun étant associé à un axe de coordonnées différent. Cela peut faire penser à la démonstration de Cantor qu'il y a autant de points dans le carré que dans son côté¹ :

1. Ce dessin est emprunté à cette page <https://accromath.uqam.ca/2025/02/vers-linfini-et-plus-loin-encore/> du



Il se trouve que Cantor avait dénombré les décompositions de Goldbach des entiers pairs jusqu'à 1000.

Une autre idée consiste à inverser le sens de parcours de l'axe des ordonnées, lorsqu'on effectue le changement d'origine.

L'idée suivante consiste à transposer le problème de la théorie des nombres (arithmétique ou analytique) dans un autre domaine, ici la théorie des graphes mais on comprend que les seules notions importantes qui interviennent dans celles d'excentricité et de centre sont les notions d'existence d'un minimum, et d'un maximum d'un ensemble non vide muni d'un ordre total. C'est le fait d'avoir séparé les deux sommants qui permet d'avoir un ordre total "sommant par sommant" : si on a $x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2$, on ne peut rien dire de la relation d'ordre entre $x_1 + y_1$? $x_2 + y_2$, à part à considérer les écarts qui sépare chaque couple d'abscisses d'une part et d'ordonnées d'autre part. Coordonnée par coordonnée, i.e. dans les graphes (vus dans le plan euclidien) ligne par ligne ou colonne par colonne, la comparaison est possible.

La théorie des graphes présente l'avantage que ces représentations sont visuelles, et que la vision aide le raisonnement (elle peut même être, pour certains, totalement nécessaire au raisonnement, mais le sens de la vue peut également être trompeur). Cependant, tous les raisonnements présentés ici peuvent être transposés dans le domaine de l'algèbre linéaire : les sommets et arcs peuvent être représentés par des matrices d'adjacence et des matrices contenant les poids sur les arêtes. Le calcul de plus court chemin (de Dijkstra par exemple) correspond alors au calcul de la puissance d'une matrice, etc. On se reportera pour cette correspondance entre la théorie des graphes et l'algèbre dite algèbre *min - plus* qui a été utilisée ici aux articles de Minoux [2], [3], ou à l'article d'Alain Connes [1] (paragraphe 4.2, *Le monde de la caractéristique 1*). Le livre [4] est également une référence du domaine et traite des cheminements dans les graphes à la page 115.

magazine canadien Accromaths. On pourra également consulter l'article La puissance du continu du Kangourou des mathématiques <https://www.mathkang.org/pdf/puisscontin.pdf>.

Références

- [1] Alain Connes, *An essay on the Riemann hypothesis*, <https://arxiv.org/pdf/1509.05576>.
- [2] Michel Minoux, *Structures algébriques généralisées des problèmes de cheminement dans les graphes*, Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle (RAIRO), Recherche opérationnelle, tome 10, n° V2, 1976, p. 33-62.
- [3] Michel Minoux, *Algèbre linéaire dans les semi-anneaux et les dioïdes*. [Rapport de recherche] lip6.1998.052, LIP6. 1998.
- [4] Michel Gondran, Michel Minoux, *Graphs, dioids and semirings, new models and algorithms*, Springer, 2008, coll. Operations research, computer science interfaces.

Annexe 1 : étiquetage des arêtes, excentricités des points du graphe triangulaire épointé et centres pour $n = 32$

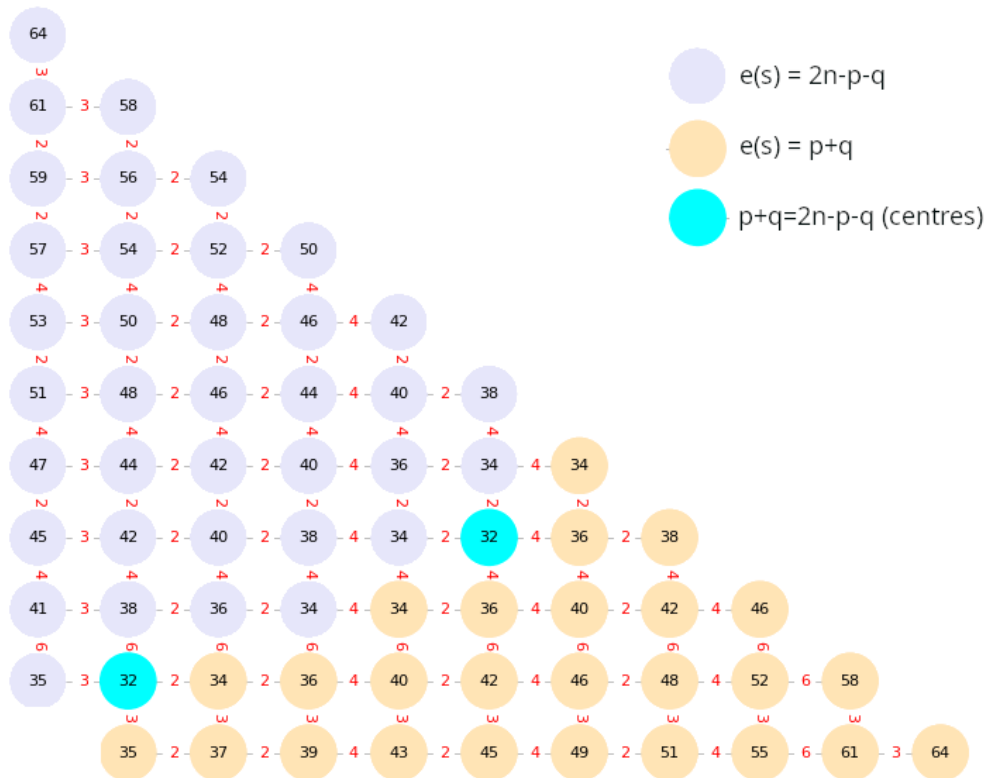


FIGURE A : graphe triangulaire épointé pour le cas $n = 32$.

Annexe 2 : programme de calcul des décomposants de Goldbach par minimax

```

1 def premier(atester):
2     k = 2
3     if atester in [0, 1]: return False
4     if atester in [2, 3, 5, 7]: return True
5     while True:
6         if k * k > atester: return True
7         else:
8             if atester % k == 0: return False
9             else: k = k + 1
10
11 for n in range(6,104,2):
12     L = []
13     for p in range(3,n-1,2):
14         if premier(p):
15             L.append(p)
16     print('L = ',L)
17     minimum = 2*n+2
18     for p in L:
19         for q in L:
20             if q <= p:
21                 lesd=[]
22                 if max(p+q,2*n-p-q) == n:
23                     print('( ',p, ', ',q, ') ')

```