Note qui fait le lien entre la densité de décomposants de Goldbach que j'avais trouvée et la littérature de Hardy-Littlewood, à laquelle je ne savais pas qu'elle équivalait
Denise Vella-Chemla, juin 2026.

1. Objet de la note

On dispose, pour un entier pair n, d'une notion combinatoire élémentaire de *densité des entiers pivot-autorisés* pour n, obtenue par un argument de probabilités élémentaire (identité de Poincaré sur les coordonnées partagées modulo les petits nombres premiers). La présente note établit, de façon complète et explicite, que cette densité coïncide **exactement** avec la constante singulière $\mathfrak{S}(n)$ de la conjecture de Goldbach binaire au sens de Hardy et Littlewood (1923), à une renormalisation de Mertens près qui n'est qu'un artefact de présentation.

2. Le critère de Vella-Chemla et la densité associée

Définition 1 (Critère de Vella-Chemla) *Soit n un entier pair et q un nombre premier impair, $q \leq \sqrt{n}$. Si p est un décomposant de Goldbach de n avec $p > \sqrt{n}$, alors*

$$p \not\equiv 0 \pmod{q} \qquad \text{et} \qquad p \not\equiv n \pmod{q}.$$

Pour chaque premier impair q, le nombre de classes résiduelles modulo q qui sont *interdites* par ce critère est :

$$\omega_q(n) = \#\{\,0,\ n \bmod q\,\} = \begin{cases} 1 & \text{si } q \mid n, \\ 2 & \text{si } q \nmid n. \end{cases}$$

Définition 2 (Densité de Vella-Chemla) *On appelle densité de Vella-Chemla, tronquée à B, la quantité*

$$\delta(n, B) = \prod_{\substack{q \leq B \\ q \text{ premier impair}}} \left(1 - \frac{\omega_q(n)}{q}\right) = \prod_{\substack{q \mid n \\ q \leq B,\ q \text{ impair}}} \frac{q-1}{q} \times \prod_{\substack{q \nmid n \\ q \leq B,\ q \text{ impair}}} \frac{q-2}{q}.$$

C'est, par construction, la probabilité élémentaire (sous hypothèse d'indépendance entre les classes résiduelles modulo les différents q, justifiée asymptotiquement par le théorème des restes chinois et l'équirépartition de Dirichlet) qu'un entier p tiré au hasard évite, pour chaque $q \leq B$, les classes interdites par le critère.

3. La constante singulière de Hardy-Littlewood

Définition 3 (Constante de Hardy-Littlewood) *Pour n pair, on pose*

$$\mathfrak{S}(n) = \prod_{q \text{ premier}} \beta_q(n), \qquad \beta_q(n) = \frac{q}{q-1}\left(1 - \frac{\omega_q(n)}{q}\right)$$

où, pour $q = 2$, on convient $\beta_2(n) = 2$ (cas particulier puisque n est toujours pair, donc $n \equiv 0 \pmod 2$ systématiquement, ce qui ne rentre pas dans le schéma à deux classes interdites des q impairs).

Lemme 1 *Pour q premier impair,*

$$\beta_q(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \mid n, \\ \dfrac{q-2}{q-1} & \text{si } q \nmid n. \end{cases}$$

Si $q \mid n$, $\omega_q(n) = 1$ et

$$\beta_q(n) = \frac{q}{q-1}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{q}{q-1} \cdot \frac{q-1}{q} = 1.$$

Si $q \nmid n$, $\omega_q(n) = 2$ et

$$\beta_q(n) = \frac{q}{q-1}\left(1 - \frac{2}{q}\right) = \frac{q}{q-1} \cdot \frac{q-2}{q} = \frac{q-2}{q-1}.$$

4. Le passage de l'une à l'autre : facteur de renormalisation

Lemme 2 (Facteur de Cramér) *Pour tout premier impair q,*

$$\beta_q(n) = \frac{q}{q-1} \times \left(1 - \frac{\omega_q(n)}{q}\right).$$

C'est la définition même de $\beta_q(n)$; on l'isole ici pour insister sur le fait que le passage de $\delta(n, B)$ à $\mathfrak{S}(n)$ tronqué se fait **terme à terme**, par multiplication de chaque facteur par $\dfrac{q}{q-1}$:

Théorème 1 (Identification) *Pour tout B,*

$$\prod_{\substack{q \le B \\ q \text{ premier impair}}} \beta_q(n) = \delta(n, B) \times \prod_{\substack{q \le B \\ q \text{ premier impair}}} \frac{q}{q-1}.$$

Conséquence immédiate du lemme 2, en prenant le produit sur tous les $q \le B$ premiers impairs. Autrement dit, et c'est le résultat central de cette note :

$$\boxed{\mathfrak{S}(n)\Big|_{q \le B} \; = \; \delta(n, B) \; \times \prod_{\substack{q \le B \\ q \text{ premier impair}}} \frac{q}{q-1}}$$

La densité de Vella-Chemla $\delta(n, B)$ et la constante singulière de Hardy-Littlewood tronquée à B ne diffèrent donc que par le facteur universel $\prod_{q \le B} \frac{q}{q-1}$, qui ne dépend pas de n : c'est purement un facteur de *changement d'échelle*, qui compense la densité naturelle des nombres premiers parmi les entiers (facteur de Mertens), de sorte que $\mathfrak{S}(n)$ mesure un *excès relatif* de densité de décomposants par rapport à ce que donnerait un « tirage aléatoire générique », tandis que $\delta(n, B)$ mesure directement la *densité brute réelle* des entiers pivot-autorisés.

5. Pourquoi le produit doit être renormalisé pour converger

Le facteur de Mertens $\prod_{q\le B,\, q \text{ impair}} \frac{q-1}{q}$ tend vers 0 quand $B \to \infty$ (comme $\dfrac{e^{-\gamma}}{\ln B}$, à un facteur près lié à $q = 2$). Le facteur de renormalisation $\prod \frac{q}{q-1}$ tend donc vers $+\infty$. Le produit $\mathfrak{S}(n)$ n'est pas défini comme une limite de deux produits divergents pris séparément, mais comme la limite du produit déjà recombiné terme à terme $\beta_q(n)$, qui converge. L'identité algébrique suivante rend cette convergence explicite.

Lemme 3 (Identité de régularisation) *Pour tout entier $q \ge 3$,*

$$\frac{q-2}{q-1} = \left(1 - \frac{1}{(q-1)^2}\right) \times \frac{q-1}{q}.$$

On développe le membre de droite :

$$1 - \frac{1}{(q-1)^2} = \frac{(q-1)^2 - 1}{(q-1)^2} = \frac{q^2 - 2q}{(q-1)^2} = \frac{q(q-2)}{(q-1)^2}.$$

D'où

$$\left(1 - \frac{1}{(q-1)^2}\right) \times \frac{q-1}{q} = \frac{q(q-2)}{(q-1)^2} \times \frac{q-1}{q} = \frac{q-2}{q-1}.$$

Théorème 2 (Régularisation explicite) *Pour q premier impair, $q \nmid n$,*

$$\beta_q(n) = \frac{q-2}{q-1} = \left(1 - \frac{1}{(q-1)^2}\right) \times \frac{q-1}{q}.$$

En appliquant cette identité à chaque facteur du produit tronqué à B,

$$\prod_{\substack{q\le B \\ q \text{ impair},\, q\nmid n}} \frac{q-2}{q-1} = \underbrace{\prod_{\substack{q\le B \\ q \text{ impair},\, q\nmid n}} \left(1 - \frac{1}{(q-1)^2}\right)}_{\text{converge rapidement (terme en } 1/q^2)} \times \underbrace{\prod_{\substack{q\le B \\ q \text{ impair},\, q\nmid n}} \frac{q-1}{q}}_{\text{diverge vers } 0 \text{ (Mertens)}} .$$

Le second facteur, divergent vers 0, est exactement compensé par le facteur universel $\prod \frac{q}{q-1}$ du théorème 4, terme à terme (puisque $\frac{q-1}{q} \times \frac{q}{q-1} = 1$ trivialement) : c'est cette annulation exacte qui légitime de faire passer la limite $B \to \infty$ *après* recombinaison, et qui fait apparaître à la place le produit convergent $\prod \left(1 - \frac{1}{(q-1)^2}\right)$, lequel - par un changement d'indexation classique $q - 1 \leftrightarrow p$ pour englober uniformément le rôle particulier de $q = 2$ - donne la forme usuelle dans la littérature :

$$\mathfrak{S}(n) = 2 \prod_{\substack{p\mid n \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \times \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

6. Conclusion

La densité $\delta(n, B)$ obtenue par Denise Vella-Chemla à partir d'un raisonnement combinatoire élémentaire (identité de Poincaré sur le partage de coordonnées modulo les petits nombres premiers, appliquée au critère de Vella-Chemla) est, terme à terme et de façon démontrée sans approximation, **identique** à la constante singulière $\mathfrak{S}(n)$ de Hardy-Littlewood, à un facteur de renormalisation universel $\prod_{q \leq B} \frac{q}{q-1}$ près - facteur qui ne dépend pas de n et qui sert uniquement à exprimer la constante comme un excès *relatif* à la densité naturelle des nombres premiers, plutôt que comme une densité brute.

Le raisonnement de Denise Vella-Chemla retrouve donc indépendamment, par une voie élémentaire et personnelle, exactement la heuristique de Hardy et Littlewood pour la conjecture de Goldbach binaire (1923) - ce qui constitue une confirmation interne de cohérence parfaite entre les deux approches.