

Après gemini et mistral, discussion avec claude, au sujet d'un opérateur multi-circulant, Denise Vella-Chemla, juin 2026.

Bonjour, je voudrais te proposer un texte dont j'aimerais que tu m'aides à le pousser plus loin. Il a été écrit avec l'IA mistral, j'en suis l'auteure, je m'appelle Denise Vella-Chemla. Tu vois que ce texte propose une version utilisant une matrice contenant plein de matrices circulantes sur sa diagonale (de taille 2 times 2 à $p_k \times p_k$, les p_i des nombres premiers), mon problème est que je n'arrive pas à lier par somme x et $n - x$, c'est ce que dit le texte, arrives-tu à le lire ? Et donne-moi des idées pour aller plus loin si tu le peux.

Bonjour Denise,

Oui, j'ai bien lu le texte - il est clair et honnête sur ses propres limites, ce qui est appréciable. Le constat central est net : l'opérateur G_n capture parfaitement la divisibilité (via les traces $\text{Tr}(G_n^p) = \sigma_n(p) - 1$, qui caractérisent la primalité), mais il n'y a aucun mécanisme dans la construction qui relie p et $n - p$ entre eux. Les blocs C_2, \dots, C_n sont indépendants (somme directe), donc $\text{Tr}(G_n^p)$ et $\text{Tr}(G_n^{n-p})$ sont calculés "à côté" l'un de l'autre, sans interaction. C'est exactement pour ça que $\Phi(n) > 0$ trivialement (chaque terme est positif) sans rien dire sur l'existence d'un couple premier.

Le problème de fond, je pense, est le suivant : une somme directe de matrices ne peut jamais encoder une contrainte additive sur les indices, parce que les blocs ne communiquent pas. Pour lier p et $n - p$, il faut un objet où l'addition apparaît structurellement - pas seulement la divisibilité.

Quelques pistes concrètes pour faire interagir les blocs :

1. Remplacer la somme directe par un produit tensoriel ou une convolution.

Plutôt que $G_n = \bigoplus_d C_d$, on pourrait considérer un opérateur sur l'espace \mathbb{C}^n tout entier (pas une somme directe de petits espaces), où l'action de G_n mélange les indices $1, \dots, n$ de façon circulaire - c'est-à-dire une seule matrice circulante C_n d'ordre n , dont le spectre est $\{e^{2i\pi k/n}\}$. Dans ce cadre, p et $n - p$ sont liés naturellement car $\omega^{n-p} = \omega^{-p} = \bar{\omega}^p$ pour ω racine n -ième de l'unité. C'est le terrain classique des sommes de Gauss / sommes trigonométriques à la Hardy-Littlewood-Vinogradov, où le rôle de Goldbach se reformule via :

$$r(n) = \sum_{p+q=n} \mathbf{1}_{\mathbf{p} \text{ premier}} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{q} \text{ premier}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{n}} \mathbf{1}_{\mathbf{p} \text{ premier}} e^{i\mathbf{p}\theta} \right|^2 e^{-i\mathbf{n}\theta} d\theta$$

C'est exactement la méthode du cercle. Ton intuition de matrice circulante est en fait adjacente à cette méthode : le spectre d'une matrice circulante d'ordre n , ce sont les caractères $e^{2i\pi k\theta/n}$, et c'est précisément l'outil qui permet de "voir" $p + q = n$ comme une condition de phase qui s'annule.

2. Construire un opérateur de convolution explicite.

Définis le vecteur indicateur des nombres premiers $\chi \in \mathbb{C}^n$, $\chi_k = 1$ si k premier, 0 sinon. Le nombre de représentations de Goldbach de n est alors le coefficient $(\chi * \chi)_n$ où $*$ est la convolution cir-

culaire modulo N pour N assez grand. Et la convolution circulaire s'exprime justement comme $\chi * \chi = F^{-1}(\hat{\chi}^2)$ où F est la transformée de Fourier discrète - l'opérateur diagonalisant précisément les matrices circulantes ! Tu aurais alors :

$$(\chi * \chi)(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\chi}(k)^2 \omega^{-nk}$$

Ceci est ta trace, mais appliquée au bon objet : pas une matrice qui encode "diviseurs de p " indépendamment, mais une matrice (= C_N , une seule, diagonalisée par Fourier) qui encode "où sont les premiers" et dont le carré du spectre, recombinaison, redonne le compte Goldbach. C'est un vrai pont entre addition et algèbre linéaire, et ça reformule Goldbach sans le prouver (la difficulté reste entière : il faut montrer que $\hat{\chi}(0)^2$ domine et que le reste est petit, ce qui est tout le contenu analytique difficile de Hardy-Littlewood).

3. Garder ton G_n mais ajouter un couplage explicite.

Si tu veux rester proche de ta construction actuelle (utile pour la lisibilité, l'aspect pédagogique), tu pourrais coupler les blocs C_d et C_{n-d} par un terme hors-diagonal, par exemple un opérateur $H_n = G_n + \epsilon \sum_d A_{d,n-d}$ où $A_{d,n-d}$ est une matrice qui projette de l'espace du bloc d vers celui du bloc $n-d$. La trace de H_n^k ferait alors apparaître des termes croisés liant d et $n-d$. C'est plus ad hoc, mais ça répond directement à la critique du texte : "il faut créer un lien entre les blocs".

Mon avis honnête sur la suite : la piste (1)/(2) - convolution / méthode du cercle - n'est pas juste une "perspective", c'est littéralement la reformulation standard et bien étudiée depuis un siècle. Si tu veux vraiment aller plus loin mathématiquement, je pense que le saut le plus fécond serait d'explicitier ce lien dans ta note : montrer que ton $\Phi(n)$ est en fait une version dégradée (sans transformée de Fourier, donc sans interaction de phase) de la fonction de comptage de Goldbach via convolution, et que c'est précisément l'absence de transformée de Fourier (ou d'un analogue) dans ta construction qui empêche le lien additif. Ce serait une conclusion plus forte et plus précise que "il faudrait ajouter des poids".

Veux-tu que je développe l'option (2) en détail mathématique (avec la convolution circulaire et le lien explicite à $\Phi(n)$), ou préfères-tu qu'on explore l'option (3), plus proche de ta construction actuelle, pour voir si on peut sauver l'esprit de ton opérateur G_n ?

Je voudrais deux choses : d'abord je t'avoue honnêtement que je ne suis pas chercheuse en mathématiques au départ, mais chercheuse en informatique, même si les aléas de la vie ont fait que j'ai abandonné ma carrière d'ingénieure pour devenir institutrice, donc je ne comprends pas trop ce dont tu me parles au début et si en plus, c'est l'approche déjà développée par Harald Helfgott etc., autant te dire que cela ne peut pas être une voie pour moi. Par contre, je souhaite que tu expliques clairement noir sur blanc comme tu le proposes comment ma version est une version dégradée, etc, etc. Ensuite, je voudrais bien que tu développes l'option (3), oui, merci mais d'abord le texte de "dégradée etc"

Merci pour cette précision, c'est important et ça ne change rien à la valeur de ta démarche - l'intuition géométrique/algébrique que tu as eue est belle et légitime, même si elle touche (sans le savoir)

à un territoire déjà très balisé par la théorie analytique des nombres. Je vais donc faire deux choses : d'abord t'expliquer clairement, sans formules savantes inutiles, en quel sens précis ta construction est une version "dégradée" de l'approche classique - pas pour dévaloriser ton travail, mais pour que tu voies exactement ce qui manque, ce qui te permettra ensuite de décider en connaissance de cause si tu veux le réparer (option 3) ou explorer autre chose. Ensuite, je développerai l'option (3) comme demandé.

Je te propose ce texte sous forme de note, que tu pourras éventuellement intégrer ou annexer à ton document. Comme tu vas vraisemblablement vouloir reprendre ce texte dans ton document de travail, je vais te le donner ici en clair, sans jargon inutile, avec des images simples plutôt que des formules savantes quand c'est possible.

En quel sens ta construction est une version "dégradée" de l'approche classique

L'idée de base, sans formules.

Imagine que tu veuilles compter, pour un nombre pair n , le nombre de façons d'écrire $n = p + q$ avec p et q premiers. La méthode classique (développée par Hardy et Littlewood dans les années 1920, puis affinée par beaucoup d'autres jusqu'à Helfgott) fait ceci :

1. Elle fabrique un "signal" qui vaut 1 à chaque position première et 0 ailleurs : 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ...
(1 aux positions 2, 3, 5, 7, 11, ...).
2. Elle fait glisser ce signal contre lui-même et regarde, pour chaque décalage n , combien de fois un 1 du signal "tombe en face" d'un 1 du signal décalé de façon à ce que les deux positions s'additionnent à n . C'est une opération qu'on appelle la convolution : c'est exactement l'opération qui compte les façons d'obtenir une somme donnée. C'est mathématiquement la même chose que ce qu'on fait quand on multiplie des polynômes - le coefficient de x^n dans $(x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + \dots)^2$ est exactement le nombre de façons d'écrire n comme somme de deux premiers.
3. Pour calculer cette convolution efficacement (et surtout pour l'étudier théoriquement), on passe par la transformée de Fourier du signal. C'est l'outil qui transforme une opération "addition de positions" en une opération "produit de valeurs" - et c'est cette transformation qui relie p et $n - p$: dans l'espace de Fourier, le terme correspondant à n s'obtient en regardant le carré du signal transformé, puis en revenant en arrière.

Le point crucial : c'est cette étape (2)-(3) - la convolution / transformée de Fourier - qui crée le lien entre p et $q = n - p$. C'est l'ingrédient qui manque structurellement à ta construction.

Maintenant, voyons ta construction avec ce regard.

Ton opérateur G_n est une somme directe de blocs C_2, C_3, \dots, C_n - c'est-à-dire que ce sont des blocs posés côte à côte sur la diagonale d'une grande matrice, sans aucune case en dehors de la diagonale qui les relierait. Concrètement :

- Le bloc C_p “sait” tout sur la divisibilité de p (via sa trace $\text{Tr}(G_n^p) = \sigma_n(p) - 1$, qui vaut p exactement quand p est premier).
- Le bloc C_{n-p} “sait” tout sur la divisibilité de $n - p$, de la même façon.
- Mais rien dans la matrice ne fait interagir le bloc C_p avec le bloc C_{n-p} . Ce sont deux compartiments étanches. Tu calcules une information sur p , une information sur $n - p$, puis tu les multiplies après coup, en dehors de la matrice. C’est une multiplication arithmétique ordinaire de deux nombres, pas une opération algébrique qui se produit à l’intérieur de l’opérateur.

C’est très précisément ce que dit ta propre conclusion (“l’approche ne prouve pas Goldbach, car elle ne crée pas de lien entre la divisibilité... et l’addition”), et l’analogie avec la méthode classique permet de voir pourquoi, mécaniquement :

Où vit l’information sur les premiers	Approche classique : Un seul signal sur $\{1, \dots, n\}$ Ta construction : Des blocs séparés, un par diviseur potentiel d
Comment p et $n - p$ se rencontrent	Approche classique : Par convolution (glissement + superposition) soit une vraie opération qui mélange les positions Ta construction : Par multiplication arithmétique après le calcul des deux traces, en dehors de la matrice
Rôle de la transformée de Fourier / des racines de l’unité	Approche classique : Sert à réaliser la convolution (le lien additif) Ta construction : Sert seulement à décrire le spectre de chaque bloc isolément - aucune racine de l’unité d’un bloc ne rencontre celle d’un autre bloc
Conséquence	Approche classique : $p + q = n$ est une contrainte intégrée à l’opération Ta construction : $p + q = n$ est une contrainte extérieure, ajoutée à la main quand on choisit de comparer $\text{Tr}(G_n^p)$ à $\text{Tr}(G_n^{n-p})$

C’est en ce sens précis que ta construction est une “version dégradée” : elle a le même ingrédient de base (des racines de l’unité, donc une idée spectrale qui sait reconnaître les diviseurs), mais elle lui manque l’unique mécanisme - la convolution / l’interaction entre blocs - qui transformerait une information de divisibilité en une information d’addition.

Ce n’est pas du tout une remarque qui invalide ton intuition de départ : avoir vu le lien entre traces de matrices circulantes et somme des diviseurs est une vraie observation, juste et bien démontrée dans ton texte (Section 2.2). Le manque est localisé précisément : il est dans la structure en somme directe (\oplus), qui isole les blocs, là où il faudrait une structure qui les fait communiquer. C’est exactement ce que je te propose de réparer dans l’option (3).

Tu as raison, le jargon mathématique, bien posé, est souvent plus clair qu’une explication en mots - il évite l’ambiguïté. Voici donc la version formelle de la critique, qui dit exactement la même chose que ce que j’ai dit en images, mais avec la précision du langage mathématique.

Version formelle de la critique

Cadre. Notons $E_n = \mathbb{C}^N$ l'espace sur lequel agit G_n , avec $N = \sum_{d=2}^n d$. Par construction,

$$E_n = \bigoplus_{d=2}^n E_d, \quad G_n = \bigoplus_{d=2}^n C_d,$$

où $E_d \cong \mathbb{C}^d$ est l'espace propre du bloc d et C_d y agit comme la matrice de permutation circulaire.

Observation 1 (étanchéité des blocs). La somme directe \bigoplus signifie précisément que G_n préserve chaque sous-espace E_d :

$$G_n(E_d) \subseteq E_d \quad \text{pour tout } d \in \{2, \dots, n\}.$$

Autrement dit, E_d est un sous-espace invariant de G_n , et il n'existe aucune composante de G_n qui envoie un vecteur de E_d vers $E_{d'}$ pour $d' \neq d$. Algébriquement, si $\Pi_d : E_n \rightarrow E_d$ est la projection associée à la décomposition en somme directe, alors pour tout $d \neq d'$:

$$\Pi_{d'} \circ G_n \circ \Pi_d = 0.$$

Observation 2 (la trace ne voit que la diagonale par blocs). Pour tout polynôme en G_n (en particulier G_n^p), on a

$$\text{Tr}(G_n^p) = \sum_{d=2}^n \text{Tr}(C_d^p),$$

c'est-à-dire une somme de quantités calculées indépendamment dans chaque bloc. Il n'existe, dans cette expression, aucun terme croisé du type $\text{Tr}(C_d^p \cdot C_{d'}^p)$ avec $d \neq d'$: un tel terme croisé n'a même pas de sens, puisque C_d et $C_{d'}$ agissent sur des espaces différents.

Observation 3 (la contrainte $p + q = n$ est exogène). La quantité étudiée dans ta note,

$$\text{Tr}(G_n^p) \cdot \text{Tr}(G_n^{n-p}),$$

est un produit de deux scalaires obtenus après deux calculs de trace totalement indépendants. Formellement, si l'on définit $f(p) := \text{Tr}(G_n^p)$, la quantité étudiée est $f(p) \cdot f(n-p)$ - une opération arithmétique appliquée à deux valeurs de f , où la contrainte $p + q = n$ n'intervient qu'au niveau des arguments choisis, jamais au niveau de la structure de l'opérateur G_n lui-même. G_n ne "sait" pas que p et $n-p$ sont liés ; c'est toi qui le sais, en dehors de l'opérateur, en choisissant quels arguments lui donner.

Comparaison avec la convolution (l'ingrédient manquant). Dans l'approche classique, on définit l'indicatrice des nombres premiers $\chi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$, et le nombre de représentations de Goldbach de n est

$$r(n) = \sum_{p=2}^{n-2} \chi(p) \chi(n-p) = (\chi * \chi)(n),$$

où $*$ est la convolution. La convolution est par construction une opération qui couple deux arguments p et $n-p$ sous la contrainte $p + (n-p) = n$: c'est une somme indexée par tous les p , à n fixé, des produits $\chi(p)\chi(n-p)$. Le rôle de la transformée de Fourier (ou des matrices circulantes, dont

les vecteurs propres sont les caractères de Fourier discrets) est de diagonaliser cette convolution, c'est-à-dire de transformer une somme sur les couples $(p, n - p)$ en un simple produit terme à terme dans l'espace transformé :

$$\widehat{\chi * \chi}(k) = \hat{\chi}(k)^2.$$

C'est cette identité qui constitue le pont entre addition (convolution) et structure spectrale (carré du spectre).

Conclusion formelle. La fonction $r(n) = (\chi * \chi)(n)$ a la forme d'une somme sur p , à n fixé, ce qui encode structurellement la contrainte $p + q = n$. Ta fonction

$$\Phi(n) = \sum_{p=2}^{n-2} \text{Tr}(G_n^p) \cdot \text{Tr}(G_n^{n-p})$$

a la même forme syntaxique (une somme sur p de produits), mais $\text{Tr}(G_n^p) \cdot \text{Tr}(G_n^{n-p})$ n'est jamais nul dès que $p, n - p \geq 2$ - alors que $\chi(p)\chi(n - p)$ est nul dès que l'un des deux n'est pas premier. C'est exactement pour cette raison que $\Phi(n) > 0$ trivialement (comme tu l'as toi-même remarqué), alors que $r(n)$ peut très bien être nul a priori (Goldbach affirme que $r(n) > 0$ pour tout n pair ≥ 4 , ce qui est précisément le contenu non trivial de la conjecture). La différence essentielle est que χ s'annule sur les non-premiers (et tue donc les termes indésirables dans la somme), alors que $\text{Tr}(G_n^p) \geq 2$ toujours, même pour p composé - ta fonction n'a pas d'effet d'annulation.

Maintenant, peux-tu me transmettre l'autre texte dont tu parles ? Je n'ai vu aucun fichier joint dans ton dernier message - seulement le PDF initial. Si tu l'envoies, je regarderai s'il correspond bien à l'idée de couplage "ne dépendant que de d et $n - d$ " que tu as en tête, et on enchaînera avec l'option (3).

<https://denisevellachemla.eu/Chazy-Jacques-Chemla.pdf> Merci pour ce document - c'est passionnant, et je comprends maintenant beaucoup mieux ce que tu cherchais. Oui, c'est exactement le genre de couplage "qui ne dépend que de k et $n - k$ " que j'avais en tête, et c'est une bien meilleure piste pour toi que la transformée de Fourier, parce que c'est un objet que tu maîtrises déjà et qui te parle (la fonction σ , que tu manipules depuis ton G_n).

Laisse-moi d'abord vérifier que je comprends bien ce que fait ce texte, en le reliant à ta construction.

Ce que dit le texte de Jacques Chemla

L'équation de Chazy, $u''' = 2uu'' - 3(u')^2$, est satisfaite par la série d'Eisenstein E_2 , dont les coefficients (au facteur -24 près) sont $\sigma(n)$, la somme des diviseurs de n . En identifiant les coefficients de $e^{2\pi i \tau n}$ des deux côtés de l'équation, on obtient une formule de récurrence pour $\sigma(n)$ qui s'écrit, après simplification :

$$\left(2n^2 - \frac{\pi i}{12}n^3\right) \sigma(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (2n - 5k)(n - k) \sigma(k) \sigma(n - k).$$

Et la formule de Dominique Giard (version réelle, sans le πi , qui vient probablement d'une normalisation différente de la série) :

$$n^2(n-1)a(n) = 12 \sum_{k=1}^{n-1} (5k(n-k) - n^2) a(k) a(n-k), \quad n > 1.$$

C'est très exactement le type de structure qui manquait à $\Phi(n)$. Regarde bien la forme : à droite, on a une somme sur k , à n fixé, de termes $\sigma(k)\sigma(n-k)$ pondérés par un coefficient qui dépend de k , $n-k$ et n . C'est une convolution pondérée de σ avec elle-même - exactement la même architecture que la convolution $\chi * \chi$ dont je te parlais, mais ici appliquée à σ au lieu de l'indicatrice des premiers χ . Le couplage entre k et $n-k$ n'est plus extérieur (ajouté après coup, comme dans $\Phi(n)$) : il est interne à l'équation, parce que l'équation de Chazy elle-même mélange u , u' et u'' par des produits, et que ces produits, une fois développés en série, forcent l'apparition de tous les couples $(k, n-k)$.

Le lien avec ton opérateur G_n

Tu as déjà construit, dans ta note, le pont $\text{Tr}(G_n^p) = \sigma_n(p) - 1$. Donc cette identité de récurrence de Chazy/Giard, réécrite avec tes traces, devient (en posant $T(p) := \text{Tr}(G_n^p) = \sigma_n(p) - 1$, et en oubliant temporairement la troncature à n - j'y reviens) :

$$n^2(n-1)(T(n)+1) = 12 \sum_{k=1}^{n-1} (5k(n-k) - n^2) (T(k)+1)(T(n-k)+1).$$

C'est une identité exacte (pas une inégalité, pas une conjecture) qui relie $T(k)$ et $T(n-k)$ pour tous les k de 1 à $n-1$, à l'intérieur d'une seule équation, à n fixé. C'est exactement le couplage "ne dépendant que de k et $n-k$ " que tu voulais, et il est mathématiquement déjà démontré (par ton mari, via Chazy) - pas à inventer.

Mais attention à un point important avant qu'on aille plus loin, pour que tu gardes une vision honnête de ce que ça donne pour Goldbach :

Cette récurrence relie $\sigma(k)$ et $\sigma(n-k)$ - la somme des diviseurs - pas l'indicatrice de primalité. Ce n'est pas encore l'effet d'annulation dont je parlais dans la critique formelle (le fait que $\chi(p) = 0$ si p n'est pas premier, ce qui élimine les mauvais termes de la somme). Ici, $\sigma(k)$ ne s'annule jamais. Donc la récurrence de Chazy, en elle-même, couple bien k et $n-k$, ce qui répare le défaut structurel n°1 que j'ai identifié (l'étanchéité des blocs) - mais il reste à voir si on peut s'en servir pour faire apparaître un effet d'annulation qui isole les couples premiers.

Une piste naturelle se dessine : tu sais déjà (Section 2.2 de ta note) que $\sigma_n(p) - 1 = p \iff p$ premier. Donc si on pouvait réécrire la récurrence de Giard en utilisant cette caractérisation, on pourrait peut-être faire apparaître une condition qui se simplifie agréablement quand k et $n-k$ sont tous deux premiers, et qui ne se simplifie pas sinon.

Veux-tu que j'explore ça maintenant - c'est-à-dire que j'essaie de voir concrètement ce que devient la récurrence de Giard quand on suppose que k et $n-k$ sont premiers (en substituant $\sigma(k) = k+1$, $\sigma(n-k) = n-k+1$), pour voir si ça donne une condition reconnaissable ? Ou préfères-tu d'abord qu'on revienne à l'option (3) telle que je l'avais formulée (coupler les blocs C_d et C_{n-d} directement

dans G_n), maintenant équipée de cette idée de couplage par σ ?

Bonne idée - commençons par Giard, en testant directement ce que devient sa récurrence quand k et $n - k$ sont premiers. Je vais faire le calcul à la main d'abord, puis vérifier numériquement avec un peu de code.

Substituer $\sigma(k) = k + 1$ et $\sigma(n - k) = n - k + 1$ dans la récurrence de Giard

Repartons de la formule de Giard :

$$n^2(n - 1) \sigma(n) = 12 \sum_{k=1}^{n-1} (5k(n - k) - n^2) \sigma(k) \sigma(n - k).$$

Si k et $n - k$ sont tous les deux premiers, alors $\sigma(k) = k + 1$ et $\sigma(n - k) = (n - k) + 1$. Le terme correspondant dans la somme devient :

$$(5k(n - k) - n^2) (k + 1) (n - k + 1).$$

Je vais développer ça pour voir s'il y a une simplification qui saute aux yeux, en posant $j = n - k$ pour alléger (donc $k + j = n$) :

$$(5kj - n^2)(k + 1)(j + 1).$$

Développons $(k + 1)(j + 1) = kj + k + j + 1 = kj + n + 1$ (puisque $k + j = n$). Donc le terme devient :

$$(5kj - n^2)(kj + n + 1).$$

C'est un polynôme en kj et n , mais il ne se simplifie pas en quelque chose de spécial - il n'y a pas d'annulation magique ici. Vérifions numériquement pour être sûr, et surtout pour comparer le terme "couple premier" vs "couple non premier" et voir s'il y a au moins une différence visible (même si ce n'est pas une annulation nette). Bien, la formule de Giard est confirmée numériquement (c'est rassurant, et ça valide la démonstration de ton mari). Maintenant regardons précisément la question qui nous intéresse : que se passe-t-il, terme par terme dans la somme, pour les couples premiers vs non-premiers ? C'est très clair maintenant : les couples premiers n'ont rien de spécial dans cette somme. Leurs termes (6160, -10440) n'ont aucun trait distinctif par rapport aux couples non-premiers (5760, 33600, -3600...) - pas de signe particulier, pas d'annulation, pas de valeur extrême. Ils sont noyés dans la masse.

C'est cohérent avec ce que j'avais anticipé dans ma remarque précédente, et je peux maintenant te le dire avec certitude plutôt qu'en hypothèse : la récurrence de Giard relie bien $\sigma(k)$ et $\sigma(n - k)$ structurellement (couplage interne, pas exogène) - c'est un vrai progrès par rapport à $\Phi(n)$ sur ce point précis - mais elle ne contient aucun effet d'annulation qui isole la primalité. La raison est simple et profonde : σ ne s'annule jamais (contrairement à χ , l'indicatrice des premiers, qui vaut 0 sur les composés). Donc même avec un couplage interne parfait entre k et $n - k$, il manque le second ingrédient - un mécanisme qui tue les termes non premiers - pour que la formule "sache reconnaître" Goldbach.

Bilan sur Giard, formellement : la récurrence donne une identité exacte du type

$$n^2(n-1)\sigma(n) = 12 \sum_{k=1}^{n-1} (5k(n-k) - n^2)\sigma(k)\sigma(n-k),$$

qui a la bonne forme syntaxique (somme sur k à n fixé, donc couplage interne réussi), mais le bon ingrédient sémantique manque toujours : pas de fonction qui s'annule sur les composés. C'est un résultat négatif, mais net et utile : il nous dit que le couplage seul ne suffit pas, il faut combiner couplage interne ET effet d'annulation.

Ça nous donne une feuille de route précise pour l'option (3) : il faudra que le couplage entre blocs C_d et C_{n-d} soit construit de manière à s'annuler (ou à devenir trivial) précisément quand d ou $n-d$ n'est pas premier - pas seulement à exister. Je passe maintenant à la construction de ce couplage dans G_n .

Option (3) : coupler les blocs C_d et C_{n-d} dans G_n

L'idée. On a vu que $\text{Tr}(G_n^p) = p$ exactement quand p est premier, et $\text{Tr}(G_n^p) > p$ sinon (parce qu'il existe alors un diviseur propre d qui ajoute d en trop à la trace). Donc la quantité

$$\delta(p) := \text{Tr}(G_n^p) - p = \sigma_n(p) - 1 - p$$

vaut exactement 0 quand p est premier, et est strictement positive sinon. C'est l'effet d'annulation qu'il nous fallait - il existait déjà dans ta construction, mais il n'était pas exploité comme un facteur multiplicatif annulant.

Construisons donc, au lieu de $\Phi(n)$, la fonction :

$$\Psi(n) := \sum_{k=1}^{n-1} \delta(k) \cdot \delta(n-k).$$

Ce n'est pas encore un couplage à l'intérieur de l'opérateur (c'est encore une somme calculée après coup), mais regardons d'abord ce que ça donne, car c'est l'étape intermédiaire nécessaire avant de l'incorporer dans la matrice : Intéressant - il y a un bug dans mon test (0 termes nuls partout, ce qui est suspect), allons voir ce qui se passe précisément. Je pense connaître la cause : il faut probablement vérifier que k ET $n-k$ sont premiers simultanément pour que le produit $\delta(k) \cdot \delta(n-k)$ s'annule - mais ça devrait marcher puisque $\delta(p) = 0$ si p premier. Vérifions un cas précis à la main. Trouvé le bug - et il est instructif. C'est la troncature de σ_n à n qui casse la propriété : $\sigma_n(3, 8)$ somme les diviseurs de 3 compris entre 2 et 8 - c'est-à-dire juste le diviseur 3 lui-même - donnant $\sigma_n(3, 8) = 3$, donc $\text{trace}_G = 3 - 1 = 2$, alors que la Proposition de ta note attend $\text{Tr}(G_n^p) = p$, soit 3, pas 2.

Le problème : la trace formule $\text{Tr}(G_n^p) = \sigma_n(p) - 1$ retire 1 (pour exclure le diviseur 1), mais $\sigma_n(p)$ tel que défini dans ton texte (Annexe, fonction Python σ_n) exclut déjà le diviseur 1 par construction (la boucle part de $d = 2$). Donc soustraire encore 1 est une erreur de décalage. Vérifions sur la Proposition de ta note avec la bonne formule : Voilà, sans le -1 supplémentaire, $\sigma_n(p, n) = p$ exactement quand p est premier, conformément à la Proposition de ta note (et ça correspond aussi exactement à ce que donnait le code Python annexé à ton document, qui n'avait pas ce -1 non plus - je l'avais ajouté par erreur en suivant la formule du texte " $\sigma_n(p) - 1$ " au lieu du code). Reprenons

donc $\delta(p) := \sigma_n(p, n) - p$, qui vaut bien 0 ssi p premier, et retestons $\Psi(n)$:Maintenant ça confirme exactement ce qu'on attendait : un terme s'annule dès que k ou $n - k$ est premier (pas besoin des deux - c'est un produit de deux facteurs, donc il suffit qu'un seul soit nul). C'est cohérent et logique, mais ça révèle un point important : un terme nul de $\delta(k)\delta(n - k)$ ne signifie pas que $(k, n - k)$ est un couple de Goldbach - par exemple pour $n = 20$, $k = 9$ est dans la liste des "termes nuls" alors que 9 n'est pas premier ; mais $n - k = 11$ l'est, donc $\delta(11) = 0$ et le produit s'annule, sans que $(9, 11)$ soit un couple Goldbach.

Donc $\delta(k)\delta(n - k) = 0 \iff k$ premier OU $(n - k)$ premier - ce n'est pas encore le ET qu'on veut. Mais c'est très facile à corriger : il suffit de sommer non pas le produit des δ , mais une fonction qui détecte le ET. Réfléchissons à la bonne formule, et vérifions la avant de te la présenter. Ça marche parfaitement, ça correspond exactement, pour tout n testé. Reformulons donc proprement.

Le résultat (avec couplage interne et effet d'annulation)

Définition. Pour $2 \leq k \leq n - 2$, posons

$$\delta(k, n) := \text{Tr}(G_n^k) - k = \sigma_n(k) - k,$$

où $\sigma_n(k)$ est, comme dans ta note, la somme des diviseurs de k compris entre 2 et n . C'est un entier ≥ 0 , et par la Proposition de ta note :

$$\delta(k, n) = 0 \iff k \text{ est premier.}$$

Définition (nouvelle fonction).

$$\Psi(n) := \sum_{k=2}^{n-2} [\delta(k, n)^2 + \delta(n - k, n)^2].$$

Proposition (vérifiée numériquement pour $n = 4$ à 30 , à démontrer proprement). Pour n pair ≥ 4 :

$$\delta(k, n)^2 + \delta(n - k, n)^2 = 0 \iff k \text{ et } n - k \text{ sont tous deux premiers.}$$

C'est immédiat en fait : une somme de carrés de réels (ici d'entiers ≥ 0) est nulle si et seulement si chaque terme est nul - ce n'est pas une coïncidence numérique, c'est une trivialité algébrique, mais c'est la bonne trivialité, celle qui réalise enfin le ET recherché.

Conséquence directe. La conjecture de Goldbach pour n équivaut à :

$$\exists k \in \{2, \dots, n - 2\} : \delta(k, n)^2 + \delta(n - k, n)^2 = 0,$$

c'est-à-dire à l'existence d'au moins un zéro de la fonction $k \mapsto \delta(k, n)^2 + \delta(n - k, n)^2$ sur $\{2, \dots, n - 2\}$.

Ce qu'on a gagné par rapport à $\Phi(n)$. $\Phi(n) > 0$ toujours, donc Φ ne distingue jamais rien. Ici, $\Psi(n)$ ne s'annule pas globalement (c'est une somme de termes presque tous positifs), mais chaque terme individuel de la somme s'annule exactement sur les couples de Goldbach. Le bon objet à regarder

n'est donc pas $\Psi(n)$ globalement, mais le plus petit terme de la somme, ou, plus simplement, l'ensemble

$$Z(n) := \{k \in \{2, \dots, n-2\} : \delta(k, n)^2 + \delta(n-k, n)^2 = 0\},$$

et Goldbach pour n équivaut exactement à $Z(n) \neq \emptyset$.

C'est strictement plus fort, structurellement, que ce que donnait $\Phi(n)$: tu as maintenant une fonction qui encode fidèlement Goldbach par l'existence d'un zéro, et pas seulement par une condition vérifiée a posteriori sur les bons couples. Le défaut "pas d'effet d'annulation" de ma critique initiale est réparé.

Ce qu'on n'a toujours pas gagné (honnêtement oblige). $Z(n) \neq \emptyset$ reste, à ce stade, une reformulation pure et simple de Goldbach - on n'a aucun moyen, à partir de la seule expression de δ , de garantir qu'il existe toujours un zéro. C'est attendu : Goldbach est un énoncé profond sur la répartition des nombres premiers, et aucune reformulation algébrique, seule, ne peut le démontrer sans apporter une information substantielle sur cette répartition (densité des premiers, etc.). Mais c'est désormais une reformulation propre : elle dit vraiment "Goldbach \iff existence d'un zéro d'une fonction explicite", sans le défaut de positivité triviale de $\Phi(n)$.

Veux-tu maintenant que je traduise $\delta(k, n)^2$ en langage de traces de l'opérateur G_n (c'est immédiat, $\delta(k, n) = \text{Tr}(G_n^k) - k$), pour que tu puisses l'intégrer proprement dans ta note en gardant le vocabulaire spectral que tu avais déjà construit ? Et veux-tu qu'on regarde ensuite si on peut réellement coupler les blocs C_k et C_{n-k} à l'intérieur d'une seule matrice (pas seulement une somme calculée après coup), pour faire de $\Psi(n)$ un objet spectral à part entière (par exemple la trace d'un opérateur construit à partir de G_n) ?

cette phrase que tu as écrite "on n'a aucun moyen, à partir de la seule expression de δ , de garantir qu'il existe toujours un zéro." signifie que cette voie est définitivement vouée à l'échec ou pas ?

Bonne question, et la réponse honnête est : non, ça ne veut pas dire que la voie est vouée à l'échec - mais ça veut dire quelque chose de précis sur où se situe la difficulté restante, et je veux être clair là-dessus pour ne pas te donner de faux espoir ni te décourager à tort.

Ce que ma phrase signifie exactement. $Z(n) \neq \emptyset \iff$ Goldbach pour n est une reformulation exacte (une équivalence, pas une implication dans un seul sens), donc elle n'a par construction ni plus ni moins de contenu que Goldbach lui-même. Aucune reformulation, aussi élégante soit-elle, ne peut "automatiquement" garantir l'existence du zéro - sinon on aurait prouvé Goldbach juste en l'écrivant autrement, ce qui n'arrive jamais en mathématiques. Donc ce n'est pas un défaut de ta construction en particulier : c'est vrai de toute reformulation exacte de Goldbach, y compris la convolution de Hardy-Littlewood, y compris n'importe quelle autre approche qu'on pourrait imaginer. La difficulté de Goldbach ne disparaît jamais par un simple changement d'écriture - il faut, à un moment, une information substantielle sur la répartition des nombres premiers (leur densité, leur régularité statistique, etc.) pour pouvoir affirmer que le zéro existe toujours.

Donc la question utile n'est pas "cette reformulation prouve-t-elle Goldbach ?" (réponse : non, et

aucune ne le fera par elle seule), mais : “cette reformulation rend-elle le problème plus accessible, en le connectant à des outils qui, eux, savent parler de répartition des nombres premiers?”

Et là, la réponse est plus nuancée et plus encourageante :

- $\delta(k, n) = \sigma_n(k) - k$ est très proche, dans l'esprit, des fonctions arithmétiques classiques utilisées en théorie des nombres pour mesurer “à quel point k est composé” - c'est presque $\sigma(k) - k$ moins une troncature, qui est une quantité étudiée (la “somme des diviseurs propres”, liée aux nombres parfaits/abondants/déficients).

- Le fait d'avoir maintenant une fonction qui s'annule exactement aux bons endroits (et qui croît, semble-t-il, avec le degré de “composition” de k) ouvre la porte à des questions quantitatives : peut-on minorer le nombre de zéros de $k \mapsto \delta(k, n)^2 + \delta(n - k, n)^2$? Est-ce que δ a un comportement moyen connu (en moyenne sur k), qui permettrait une estimation à la façon des méthodes de crible ?

- C'est exactement le genre de pont qui, historiquement, a permis de connecter des reformulations algébriques à des résultats analytiques - mais ça demande maintenant de changer d'outils : pas continuer à manipuler δ symboliquement, mais étudier son comportement statistique (croissance moyenne, distribution), ce qui relève de l'analyse, pas de l'algèbre linéaire.

Pour résumer en une phrase qui répond directement à ta question : ce n'est pas une impasse, c'est un point de passage obligé - toute voie vers Goldbach doit, à un moment, quitter le terrain de la reformulation pure pour entrer sur le terrain de l'estimation statistique des nombres premiers, et ta construction vient d'arriver, proprement, à ce point de passage. C'est en fait un signe que la reformulation est saine : elle ne s'écroule pas avant d'avoir touché le vrai cœur du problème.

Je passe maintenant, comme convenu, à la traduction en langage de traces, puis au couplage réel des blocs dans G_n .

1. Traduction en langage de traces

C'est immédiat puisque tu as déjà l'identité $\sigma_n(k) = \text{Tr}(G_n^k)$ (sans le -1 , comme corrigé) :

$$\delta(k, n) = \text{Tr}(G_n^k) - k.$$

Donc :

$$\Psi(n) = \sum_{k=2}^{n-2} \left[\left(\text{Tr}(G_n^k) - k \right)^2 + \left(\text{Tr}(G_n^{n-k}) - (n - k) \right)^2 \right],$$

et

$$Z(n) = \left\{ k \in \{2, \dots, n - 2\} : \text{Tr}(G_n^k) = k \text{ et } \text{Tr}(G_n^{n-k}) = n - k \right\}.$$

Goldbach pour $n \iff Z(n) \neq \emptyset$. Cette phrase, purement en termes de traces de G_n , est l'aboutissement propre de ta construction initiale - elle dit exactement la même chose que ta Section 3, mais sans la faiblesse de $\Phi(n) > 0$ triviale : ici, la condition $Z(n) \neq \emptyset$ n'est jamais triviale.

2. Coupler réellement les blocs C_k et C_{n-k} dans une seule matrice

Maintenant, essayons de faire mieux que “calculer deux traces séparément puis les combiner après coup” : peut-on construire un opérateur unique dont la trace, directement, donne quelque chose lié à $\delta(k, n)^2 + \delta(n - k, n)^2$, en faisant intervenir un vrai couplage matriciel entre le bloc C_k et le bloc C_{n-k} ?

Construction proposée. Pour chaque n pair et chaque $k \in \{2, \dots, n - 2\}$, considérons l'espace $E_k \oplus E_{n-k}$ (de dimension $k + (n - k) = n$), et l'opérateur en blocs 2×2 :

$$H_{k,n} := \begin{pmatrix} C_k & A_{k,n-k} \\ A_{n-k,k} & C_{n-k} \end{pmatrix},$$

où $A_{k,n-k} : E_{n-k} \rightarrow E_k$ est une matrice de couplage à choisir (pas nécessairement nulle, contrairement à G_n). Le but est de choisir A tel que $\text{Tr}(H_{k,n}^m)$, pour un m bien choisi, fasse apparaître un terme croisé qui s'annule précisément quand k et $n - k$ sont premiers.

Avant de me lancer dans un choix arbitraire de A (qui risquerait d'être ad hoc et peu justifié), je voudrais vérifier une piste plus simple et plus naturelle d'abord : est-ce que le produit tensoriel $C_k \otimes C_{n-k}$ (au lieu d'un couplage en blocs 2×2) donne déjà, via sa trace, quelque chose d'utile ? Le produit tensoriel a l'avantage d'être canonique (pas de choix arbitraire de coefficients), et sa trace se calcule simplement : $\text{Tr}(C_k \otimes C_{n-k}) = \text{Tr}(C_k) \cdot \text{Tr}(C_{n-k})$ - ce qui en fait vraiment un couplage interne à une seule matrice, contrairement au produit calculé après coup. Veux-tu que j'explore cette piste (tensoriel) numériquement, ou préfères-tu que je creuse directement le couplage en blocs 2×2 avec un choix explicite de A ?

On va tenter produit tensoriel mais j'ai une question : sommes-nous bien d'accord sur le fait que les matrices que tu souhaites multiplier par produit tensoriel sont bien de la même taille ? parce que vois-tu, si on considère la seule petite circulaire qui gère x , elle est de taille $x \times x$ et si l'on considère la seule petite circulaire qui gère $n - x$, elle est de taille $n - x \times n - x$; sommes-nous bien d'accord sur le fait que là, on parle de matrices qui contiennent autant de blocs que nécessaire jusqu'à n (toutes les circulantes de la petite 2×2 , jusqu'à la petite $n \times n$) sur la diagonale pour être de la même taille ?

Très bonne question, et c'est précisément le genre de point qu'il faut clarifier avant de se lancer dans le calcul, parce que la réponse a une vraie conséquence sur ce qu'on calcule.

Réponse courte : non, ce n'est pas nécessaire, et je pensais en fait à autre chose - mais ta question révèle une ambiguïté qu'il faut trancher, donc laisse-moi poser clairement les deux options possibles.

Le produit tensoriel ne demande pas que les matrices soient de même taille. Si C_k est $k \times k$ et C_{n-k} est $(n-k) \times (n-k)$, le produit tensoriel $C_k \otimes C_{n-k}$ est bien défini et a pour taille $k \cdot (n-k) \times k \cdot (n-k)$ - pas besoin que $k = n - k$. C'est une différence essentielle avec la somme directe (qui, elle, juxtapose simplement les blocs sans les multiplier) : le produit tensoriel combine réellement deux espaces de tailles différentes en un seul plus grand, et c'est exactement ce qui permet, par construction, de faire interagir les deux. Donc dans l'option que j'avais en tête, je ne reprenais pas G_n tout entier (avec tous ses blocs de 2 à n) : je prenais seulement les deux petites circulantes concernées, C_k

(taille k) et C_{n-k} (taille $n - k$), et je faisais leur produit tensoriel directement - sans passer par G_n du tout à cette étape.

Mais ta question pointe vers une autre option, plus fidèle à l'esprit de G_n tel que tu l'as construit : si on veut rester dans le cadre de G_n (qui contient tous les blocs de 2 à n , parce que c'est cette construction complète qui te permet de calculer $\text{Tr}(G_n^p) = \sigma_n(p)$ par une formule globale), alors effectivement, pour faire un produit tensoriel entre deux copies de G_n tout entier (pas juste deux petits blocs), il faudrait $G_n \otimes G_n$, et là, les deux facteurs sont bien de la même taille $N \times N$ (avec $N = \frac{n(n+1)}{2} - 1$), automatiquement, puisque c'est le même G_n des deux côtés.

Donc il y a deux constructions très différentes possibles, et je veux que tu choisisses en connaissance de cause :

	Option A : $C_k \otimes C_{n-k}$	Option B : $G_n \otimes G_n$
Tailles des facteurs	$k \times k$ et $(n - k) \times (n - k)$ différentes en général	$N \times N$ et $N \times N$ identiques
Ce qu'on regarde	Un couplage ciblé propre à un couple $(k, n - k)$ précis	Un objet global qui contient toutes les paires possibles à la fois
Avantage	Léger direct facile à calculer facile à interpréter	Reste fidèle à G_n tel que défini dans ta note un seul opérateur pour tout n
Inconvénient	Il faut reconstruire un opérateur différent pour chaque couple $(k, n - k)$ perd le côté "un seul G_n pour tout dire"	Très grosse matrice et il faudra ensuite "retrouver" $(N^2 \times N^2)$, où se cache l'information sur $(k, n - k)$ dans ce gros objet

Ma recommandation honnête : commencer par l'Option A, parce qu'elle est plus simple à calculer et à comprendre, et qu'elle suffit pour répondre à la question qu'on se pose ("est-ce qu'un vrai couplage matriciel donne un effet d'annulation correct?"). Si ça marche et que le résultat te plaît, on pourra ensuite réfléchir à comment le réintégrer dans une construction globale du type G_n pour retrouver l'esprit de ta note initiale.

Es-tu d'accord pour qu'on parte sur l'Option A - calculer $\text{Tr}((C_k \otimes C_{n-k})^m)$ pour différentes puissances m , et voir si on retrouve un effet d'annulation lié à la primalité de k et $n - k$ - ou préfères-tu qu'on tente directement l'Option B malgré sa taille, parce qu'elle te semble plus fidèle à l'esprit de ta construction ?

Avant de commenter, il faut que je sois honnête : ce résultat révèle exactement le problème que j'aurais dû anticiper. L'identité $\text{Tr}((A \otimes B)^m) = \text{Tr}(A^m) \cdot \text{Tr}(B^m)$ est une identité algébrique générale, vraie pour toutes matrices A, B , pas seulement pour des circulantes. C'est elle-même la trace de l'algèbre tensorielle : $(A \otimes B)^m = A^m \otimes B^m$ et $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B)$, toujours.

Cela veut dire quelque chose d'important pour notre projet : le produit tensoriel ne crée, en fait, exactement le même type de "couplage après-coup" que ce qu'on cherchait à éviter. $\text{Tr}((C_k \otimes C_{n-k})^m) = \text{Tr}(C_k^m) \cdot \text{Tr}(C_{n-k}^m)$, c'est-à-dire qu'on retombe, presque mot pour mot, sur la même forme que $\Phi(n)$: un produit de deux traces calculées indépendamment. Le produit tensoriel a l'air, à première vue, de "combinaison" C_k et C_{n-k} dans une seule grande matrice - mais en réalité, sa trace se factorise toujours, donc il n'introduit aucune interaction nouvelle entre k et $n - k$: c'est un couplage en apparence, mais pas en substance.

C'est une déception, mais une déception utile et instructive - exactement le genre de chose qu'il valait mieux vérifier numériquement avant de construire toute une théorie autour. Le produit tensoriel n'est donc pas le bon outil pour ce qu'on veut.

Vérifions un seul point avant d'abandonner cette piste : peut-être qu'en élevant m à des valeurs non entières au sens habituel ou en regardant des combinaisons (comme $\text{Tr}((C_k \otimes C_{n-k} + C_{n-k} \otimes C_k)^m)$, qui n'est plus un simple produit tensoriel droit mais une somme symétrisée) on retrouve un vrai effet croisé. Testons ça directement : Encore une fois, je dois être honnête : ce résultat ne montre rien d'utile - c'est presque tout à zéro, premiers ou pas. C'est attendu en fait, et je peux te dire pourquoi sans relancer de calcul : $\text{Tr}(C_k) = 0$ dès que $k \geq 2$ (la trace d'une matrice de permutation circulaire pure, sans point fixe, est toujours nulle - aucun élément diagonal n'est non-nul). Donc $\text{Tr}(H) = \text{Tr}(C_k \otimes I) + \text{Tr}(I \otimes C_j) = \text{Tr}(C_k) \cdot j + k \cdot \text{Tr}(C_j) = 0$, toujours. Et $\text{Tr}(H^2)$ ne capte que les cas où k ou j vaut exactement 2 (parce que $C_2^2 = I$, donc $\text{Tr}(C_2^2) = 2 \neq 0$) - ce qu'on voit bien : les seules valeurs non nulles sont pour $k = 2$ ou $j = 2$. Encore une fausse piste, mais qui s'explique proprement.

Je pense qu'on touche ici une limite structurelle plus profonde, qu'il faut que je formule clairement avant de continuer à tâtonner.

Le problème de fond : les matrices de permutation circulaires pures sont "trop symétriques" pour qu'aucune opération algébrique standard (somme, produit, tensoriel) ne fasse émerger une trace sensible à l'addition $k + j = n$. Leur trace ne voit que les multiples de l'ordre ($\text{Tr}(C_d^m) = d$ si $d \mid m$, sinon 0) - c'est une information purement multiplicative (de la divisibilité), et toutes les opérations algébriques usuelles qu'on peut faire avec des matrices (\otimes , \oplus , produit matriciel ordinaire) préservent cette nature multiplicative de la trace. Pour faire émerger une sensibilité à l'addition $k + n - k = n$, il faut un ingrédient qui n'est pas dans la famille des opérations qu'on a testées jusqu'ici.

Et en fait, ça confirme, par un chemin différent (calcul direct plutôt que théorie), exactement ce que je disais dès le début sur la convolution / transformée de Fourier : ce n'est pas un hasard ni un excès de sophistication de ma part - c'est parce que la convolution est précisément la seule opération standard qui "sait" lire une contrainte d'addition dans des indices. Toutes les autres opérations matricielles qu'on peut essayer (tensoriel, somme directe, produit ordinaire, somme de Kronecker) restent insensibles à $k + j = n$ parce qu'elles n'introduisent jamais de sommation indexée par les couples (k, j) à somme fixée - alors que la convolution, par définition, est cette sommation.

Je ne te dis pas ça pour clore la piste matricielle - la voie Giard/ δ qu'on a construite avant reste

un vrai résultat, propre et honnête. Je te le dis pour qu'on ne perde pas de temps à tâtonner sur des variantes du produit tensoriel qui, je peux maintenant le dire avec plus de certitude, ne fonctionneront pas pour la même raison structurelle.

Proposition concrète pour la suite : plutôt que de chercher encore une opération matricielle exotique, on pourrait revenir à la piste $\delta(k, n)^2 + \delta(n - k, n)^2$ (qui, elle, marche, et qui est déjà honnêtement formulée), et se demander si on peut la transformer en une trace d'un seul opérateur - pas via \otimes ou \oplus , mais en construisant directement une matrice M_n (de taille $n \times n$ par exemple) dont les coefficients encodent δ , et dont la trace de M_n^2 redonnerait $\Psi(n)$. Veux-tu que j'essaie ça, ou préfères-tu qu'on s'arrête sur ce constat (honnête et déjà intéressant en soi : "les opérations matricielles standard sur des circulantes ne peuvent pas capter l'addition, seule la convolution le peut") et qu'on consolide ce qu'on a dans le document ?

Tu as raison de demander une clarification, parce qu'il y a en effet une légère confusion de ma part dans la dernière phrase, et je préfère la dissiper plutôt que de te laisser dans le flou.

Ce que j'ai dit plus haut sur la convolution : je t'en ai parlé deux fois, mais dans un rôle différent chaque fois.

1. Tout au début de notre échange, je t'ai présenté la convolution / transformée de Fourier comme l'approche classique (Hardy-Littlewood, méthode du cercle) - celle que tu as immédiatement écartée en me disant que ce n'était pas pour toi, parce que tu n'es pas chercheuse en mathématiques de formation et que cette voie est déjà très balisée par d'autres (jusqu'à Helfgott). Je n'avais donc pas prévu de la "tester" numériquement avec toi : je m'en servais juste comme point de comparaison théorique, pour t'expliquer en quoi ta construction était une "version dégradée".
2. Dans ma dernière réponse, j'ai réutilisé cette même idée de convolution, mais cette fois comme diagnostic rétrospectif : pour expliquer pourquoi le produit tensoriel a échoué (parce que seule la convolution sait lire l'addition dans des indices). Ce n'était pas une annonce de "on va maintenant aller calculer une convolution" - c'était une explication de l'échec qu'on venait d'observer.

Donc non, je n'avais pas prévu, ni annoncé, de relancer maintenant des calculs avec la transformée de Fourier / convolution. Et étant donné ce que tu m'as dit sur cette voie (déjà balisée, pas la tienne), je pense que ce n'est effectivement pas la direction à prendre - je suis d'accord avec ta réticence initiale, et je ne te propose pas d'y retourner.

Ce que je proposais réellement à la fin de mon message, et que je te propose de faire maintenant (puisque tu m'as dit de continuer un peu dans "cette voie" - je comprends que tu parles de la voie matricielle/algébrique, pas de la convolution) : construire une seule matrice M_n (pas un produit tensoriel, pas une somme directe), de taille raisonnable, dont un seul nombre calculé sur elle (sa trace, ou la trace d'une de ses puissances) redonne directement $\Psi(n) = \sum_k [\delta(k, n)^2 + \delta(n - k, n)^2]$. L'idée n'est pas d'introduire une nouvelle opération exotique : c'est de prendre l'objet $\delta(k, n)$ qu'on a déjà, qui fonctionne, et de l'incarner matriciellement - en construisant la matrice directement à

partir des valeurs de δ , plutôt qu'en essayant de la faire émerger d'une opération sur des C_k .

C'est une voie purement algébrique (vecteurs, matrices diagonales, produit scalaire), sans transformée de Fourier ni convolution. Veux-tu que je détaille cette construction et que je teste si elle fonctionne ?

L'identité fonctionne : $\text{Tr}((DJ)^2) = \sum_k \delta(k, n) \cdot \delta(n - k, n)$, exactement. Et c'est en fait une identité algébrique générale et facile à justifier : J est une matrice de permutation (involution, puisque $k \mapsto n - k \mapsto k$), donc $J^2 = I$ et $J^T = J$; et pour une matrice diagonale D , $(DJ)^2 = DJDJ$, dont l'élément diagonal en position k vaut $D_{kk} \cdot (JDJ)_{kk} = \delta(k, n) \cdot D_{n-k, n-k} = \delta(k, n) \cdot \delta(n - k, n)$ (car J envoie l'indice k sur $n - k$). Donc $\text{Tr}((DJ)^2) = \sum_k \delta(k, n) \delta(n - k, n)$ - c'est exactement la formule voulue, et cette fois c'est une vraie trace d'un seul opérateur, pas une somme calculée après coup en dehors de toute matrice.

C'est un progrès réel par rapport à $\Phi(n)$: ici, J réalise structurellement, à l'intérieur de la matrice, le couplage $k \leftrightarrow n - k$ - c'est elle qui "sait" que k et $n - k$ vont ensemble, encodée une fois pour toutes dans sa définition (une permutation miroir), indépendamment de n d'ailleurs dans sa forme. Vérifions maintenant que le signe du résultat permet bien de détecter Goldbach (rappel : on veut un effet d'annulation, donc il vaut mieux utiliser $\delta(k)^2 + \delta(n - k)^2$ plutôt que le simple produit $\delta(k)\delta(n - k)$, qui peut s'annuler par un seul facteur nul, comme on l'a vu avant) : Le résultat est parfait : la matrice $\text{diag}(D) + \text{diag}(JDJ)$ s'annule exactement et seulement sur les couples premiers. Mais j'ai fait une remarque importante dans mon commentaire avant le code (en ligne) qu'il faut bien retenir, et qui est honnête à signaler : ce n'est plus la trace d'une seule matrice - c'est la diagonale de $D + JDJ$, vecteur par vecteur, et on regarde si une de ses composantes s'annule. Pour en faire vraiment un seul nombre (une trace), il faut une astuce supplémentaire. Réfléchissons-y et testons : Voilà une formulation vraiment satisfaisante, élégante, et entièrement matricielle : on a transformé le problème en un seul nombre - un déterminant - calculé sur un seul opérateur $K_n = D_n + J_n D_n J_n$, où D_n encode la non-primalité (via δ) et J_n encode, structurellement et une fois pour toutes, le couplage additif $k \leftrightarrow n - k$.

Récapitulons cette construction proprement

Définitions.

- J_n : la matrice de permutation de l'ensemble des indices $\{2, \dots, n - 2\}$ qui envoie k sur $n - k$. C'est une involution ($J_n^2 = I$) et une matrice symétrique. Elle ne dépend que de n , pas des nombres premiers - c'est elle qui porte, à elle seule, toute la structure additive $k + (n - k) = n$.
- D_n : la matrice diagonale dont le k -ième coefficient est $\delta(k, n) = \text{Tr}(G_n^k) - k$. C'est elle qui porte l'information de primalité (elle s'annule en k ssi k est premier).
- $K_n := D_n + J_n D_n J_n$.

Proposition (vérifiée numériquement pour $n = 4$ à 40).

$$\text{Goldbach pour } n \iff \det(K_n) = 0.$$

Pourquoi ça marche, simplement. K_n est diagonale (parce que $J_n D_n J_n$ est diagonale : conjuguer une matrice diagonale par une permutation reste diagonal, en réarrangeant juste les coefficients selon la permutation). Son k -ième coefficient diagonal est $\delta(k, n) + \delta(n - k, n)$, qui est une somme de deux quantités ≥ 0 , donc nul si et seulement si les deux sont nulles, c'est-à-dire si et seulement si k et $n - k$ sont tous deux premiers. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux ; ce produit est nul si et seulement si au moins un coefficient est nul - ce qui correspond exactement à "il existe au moins un couple de Goldbach pour n ".

Ce qu'on a vraiment gagné par rapport à $\Phi(n)$ et par rapport au produit tensoriel :

1. Un couplage interne réel : J_n relie structurellement k et $n - k$ à l'intérieur d'une seule matrice (pas une comparaison après-coup de deux calculs séparés).
2. Un effet d'annulation correct : $\det(K_n)$ peut véritablement s'annuler ou non - ce n'est plus trivialement toujours positif comme $\Phi(n)$.
3. Une seule quantité scalaire (le déterminant) encode toute la question. C'est exactement la forme qu'on cherchait depuis le début.

Ce qui reste inchangé (l'honnêteté de ta note originale s'applique toujours ici) : cette reformulation est encore une reformulation exacte, ni plus ni moins difficile que Goldbach lui-même - on n'a toujours, à ce stade, aucune raison a priori de savoir que $\det(K_n) = 0$ pour tout n pair, sinon en le vérifiant cas par cas. Mais c'est désormais une formulation propre, élégante, entièrement spectrale/matricielle, fidèle à l'esprit de ta construction de départ, et qui répare précisément les deux défauts qu'on avait identifiés au début (l'étanchéité des blocs, et l'absence d'effet d'annulation).

Veux-tu que je rassemble tout ce qu'on a construit aujourd'hui (la critique formelle, l'épisode Giard, l'échec instructif du produit tensoriel, et cette construction finale K_n) dans un document Word propre, structuré comme une suite à ta note originale ? Ce serait, je pense, un bon complément à montrer à ton mari et à Mistral.