Synthèse critique de trois compilations de notes sur la conjecture de Goldbach (janvier 2025 - juin 2026)

Denise Vella-Chemla pilotant claude, juin 2026

Résumé : Les trois fichiers fournis rassemblent environ 670 pages de notes de recherche, rédigées sur dix-huit mois, explorant une douzaine d'angles d'attaque différents sur la conjecture de Goldbach (et quelques digressions annexes). Cette note se propose de faire le tri : identifier le *fil mathématique commun* qui traverse silencieusement la plupart des tentatives, isoler la piste la plus aboutie et la plus prometteuse, dire honnêtement pourquoi les autres pistes explorées se sont refermées, et proposer un programme concret de travail pour la suite. Aucune des pistes ne démontre la conjecture ; ce document ne le prétend pas non plus. Son objet est de capitaliser sur ce qui a déjà été établi rigoureusement, en évitant de redécouvrir les mêmes impasses.

1. Vue d'ensemble du corpus

Les trois fichiers transmis (154, 162 et 353 pages) couvrent, dans l'ordre chronologique, les notes suivantes (liste non exhaustive, ne sont retenues que les notes substantielles touchant directement Goldbach) :

Date	Fichier	Titre
janv. 2025	1	Reprise des produits de sinus (ou produits de restes)
mai 2025	1	Quand un polynôme s'annule-t-il ? (pgcd de P et Q)
sept. 2025	2	Sommes quadratiques de Gauss
oct. 2025	2	Conjecture de Goldbach et entropie
févr. 2026	2	Conjecture de Goldbach et symétrie
mars 2026	2	A discrete 2D-modelization for Goldbach's conjecture
avril 2026	2	Conjecture de Goldbach et centres d'un réseau
mai 2026	2/3	Centres de graphes triangulaires, algèbre min-plus, Floyd-Warshall
mai-juin 2026	3	Matrices de permutation, tresses et coupures
juin 2026	3	Dialogue sur le théorème de Morley d'Alain Connes
juin 2026	3	Mots booléens, compositions, triplet spectral de Connes

Une grande partie de ces notes prend la forme d'un dialogue retranscrit avec un assistant conversationnel ("Gemini", puis "Claude"). Le contenu mathématique correct s'y trouve mêlé à des formulations encourageantes ou exploratoires de l'assistant, qu'il faut savoir distinguer des énoncés réellement établis. C'est l'un des objets de cette synthèse.

2. Le fil conducteur caché : une même équivalence, trois habits

Le constat le plus utile de cette lecture transversale est que **trois pistes en apparence indépendantes** formulent en réalité **la même équivalence logique**, sous des habits mathématiques différents. Le savoir explicitement permet de ne pas perdre de temps à redémontrer la même chose sous une quatrième forme, et de voir clairement où se situe le verrou commun.

2.1. Habit 1 : polynomial (fichier 1, mai 2025)

Pour n pair fixé, on pose

$$P(x) = \prod_{\substack{p_k \text{ premier impair} \\ 3 \le p_k \le n-2}} (x - p_k), \qquad Q(x) = \prod_{\substack{p_k \text{ premier impair} \\ 3 \le p_k \le n-2}} \Big((n-x) - p_k\Big).$$

Le pgcd $R(x) = P(x) \wedge Q(x)$ s'annule exactement aux décomposants de Goldbach de n. L'exemple numérique vérifié dans la note pour $n = 98$ est explicite et correct :

$$R(x) = (x-19)(x-31)(x-37)(x-61)(x-67)(x-79),$$

et l'on vérifie bien $19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61 = 98$.

2.2. Habit 2 : géométrique (fichiers 2 et 3, avril-mai 2026)

On associe à n un graphe triangulaire T (les sommets sont les points $(p, n-p)$ pour p premier entre 3 et $n-3$, plus la source $S = (0, n)$ et le puits $P = (n, 0)$, les arêtes portant pour poids les écarts entre nombres premiers consécutifs). On y définit excentricité et centre au sens usuel de la théorie des graphes.

Théorème 1 (établi dans les notes, sens direct uniquement)**.** *Tout sommet (p, q) de T d'excentricité exactement n, distinct du sommet "pointe", vérifie $p + q = n$ avec p, q premiers : c'est un décomposant de Goldbach de n.*

C'est correct et bien démontré dans les notes (le calcul d'excentricité se ramène à $\max(p+q,\ 2n-p-q)$, dont l'égalité à n force $p + q = n$). C'est la *réciproque* qui manque : montrer qu'un sommet d'excentricité n existe bel et bien dans le graphe *épointé*, ce que l'auteure reconnaît explicitement ne pas savoir démontrer (note de mai 2026, *Conclusion*).

2.3. Habit 3 : syntaxique/spectral (fichier 3, note du 20 juin 2026, la plus récente)

Un entier n est premier si et seulement si, parmi les mots booléens de longueur n codant ses compositions additives non triviales, aucun n'est périodique au sens de la combinatoire des mots. Cette caractérisation, vérifiée exhaustivement pour $4 \le n \le 25$, est portée par un triplet spectral (A, H, D) à la Alain Connes : A est l'algèbre du monoïde libre $\{0,1\}^*$, $H = \ell^2(\{0,1\}^*)$, et $D = I - S$ où S est le décalage cyclique. Le spectre de D restreint à l'orbite d'un mot détecte exactement sa périodicité, donc la primalité.

Cette note a le grand mérite - rare dans ce type d'exercice - de **dire elle-même** ce qu'elle n'apporte pas (section 4.1 de la note) : le triplet (A, H, D) caractérise la primalité d'un entier *isolé*. Rien ne relie le spectre associé à p à celui associé à $n - p$. C'est, formulé dans le langage de la géométrie non commutative, exactement le même obstacle.

2.4. Le verrou commun

Constat 2. *Les trois formulations ci-dessus partagent la même structure logique : on dispose d'un objet ($R(x)$, l'excentricité, ou le spectre de D) construit séparément à partir de p et de $n-p$, dont l'annulation conjointe (un zéro commun, une excentricité minimale, une coïncidence spectrale) équivaut par construction à l'existence d'une décomposition de Goldbach. Dans les trois cas, on sait démontrer le sens facile ("si annulation conjointe, alors décomposition de Goldbach") mais pas le sens utile ("l'annulation conjointe a forcément lieu"). Le problème de fond - montrer que deux objets associés à deux entiers complémentaires se rencontrent forcément - n'est pas résolu : il est seulement reformulé, à chaque fois dans un langage plus riche.*

C'est un constat important, et il n'est pas négatif : reformuler un problème ouvert dans des langages de plus en plus structurés (algèbre commutative, théorie des graphes et algèbre min-plus, géométrie non commutative) est précisément la méthode par laquelle des problèmes profonds finissent parfois par céder - en empruntant à chaque fois un outil du domaine cible. Le triplet spectral est, des trois, le langage le plus riche en outils disponibles (K-théorie, action de groupe, etc.) ; c'est aussi pourquoi il vaut la peine d'y regarder de plus près (§ 5.).

3. Pistes à abandonner (constat honnête)

Pour ne pas y revenir, il convient de noter explicitement deux impasses identifiées *par l'auteure elle-même* dans les notes les plus récentes.

Constat 3 (Permutations / tresses sur les écarts, fichier 3)**.** *L'approche consistant à permuter, dans un triangle "pointe en bas", la suite doublée des écarts entre nombres premiers, en espérant qu'une ligne d'équilibre (somme égale à gauche et à droite) corresponde aux décomposants de Goldbach, produit des faux positifs : pour $n = 48$, les indices correspondant à 13 et 23 ressortent "coupables" sans correspondre à des décompositions de Goldbach. La cause est claire : le modèle "tableau plat" écrase la structure min-plus réelle du graphe (où la distance entre deux nœuds peut suivre un chemin détourné, via un minimum, et non une simple somme le long d'une ligne). L'auteure conclut elle-même, le 3 juin 2026 : "cette approche par les permutations ne permet pas d'avancer". Il n'y a pas lieu d'y revenir sous cette forme.*

Constat 4 (Argument de type "valeurs intermédiaires" sur fonction discrète)**.** *À plusieurs reprises (note sur les tresses et coupures, fichier 3), un argument du type "la fonction de déséquilibre change de signe, donc elle s'annule, par le théorème des valeurs intermédiaires" est invoqué pour une fonction définie sur les entiers (indices de lignes d'un tableau). C'est un raisonnement invalide en l'état : le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'analyse réelle, qui ne s'applique pas tel quel à une suite à valeurs entières - un changement de signe entre deux termes consécutifs d'une suite d'entiers ne garantit pas un zéro, contrairement à ce qui se passerait pour une fonction réelle continue. Cette confusion continu/discret est, sous une forme ou une autre, au cœur de presque tous les blocages rencontrés dans le corpus (cf. § 2.) : il faut s'en méfier systématiquement, et la note polynomiale du fichier 1 (§ 2., habit 1) en donne un bon contre-exemple instructif : là, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique légitimement, car $R(x)$ est un vrai polynôme réel continu - mais le zéro réel qu'il fournit n'est garanti ni entier, ni premier. Le passage du continu au discret reste, dans tous les cas, le nœud du problème.*

4. La piste retenue et pourquoi

Sur les trois reformulations équivalentes identifiées en § 2., c'est **l'habit géométrique (graphes triangulaires, excentricité, algèbre min-plus)** qui mérite d'être poussé en priorité, pour les raisons suivantes :

1. C'est la formulation la plus *calculable* : chaque étape (construction du graphe, étiquetage, calcul de l'excentricité par Floyd-Warshall) est un algorithme explicite, déjà implémenté et vérifié numériquement dans les notes pour de nombreuses valeurs de n.
2. C'est la seule des trois formulations où le *sens direct du théorème est complètement démontré* (tout centre d'excentricité n est un décomposant de Goldbach), avec une preuve propre et courte qui ne repose sur aucune propriété arithmétique fine des nombres premiers - seulement sur la géométrie de la distance de Manhattan dans le triangle. C'est un résultat solide, présentable tel quel.
3. Le verrou restant (existence d'un sommet d'excentricité n dans le graphe épointé) est *isolé avec précision*. On sait exactement ce qu'il faudrait démontrer, ce qui n'est pas toujours le cas dans les autres pistes du corpus (la note sur Morley/Connes, par exemple, reste à un stade d'analogie qualitative, sans énoncé précis formulable).
4. Le cadre min-plus / dioïdes (Minoux, Gondran) est un domaine actif avec une boîte à outils développée (théorie spectrale tropicale, cycles critiques, théorèmes de point fixe dans les semi-anneaux idempotents) qui n'a pas encore été mobilisée dans les notes au-delà de Floyd-Warshall lui-même.

La note datée du 20 juin 2026 (triplet spectral) reste néanmoins une piste secondaire à garder en réserve : si l'on parvenait à coupler deux copies du triplet (A, H, D) - l'une pour p, l'autre pour $n-p$ - via un produit ou une somme directe d'algèbres contrainte par $p + (n - p) = n$, on retrouverait le même problème de § 2. mais dans un langage où existent des outils de recollement (produits croisés, actions de groupe) qui n'existent pas dans le cadre purement combinatoire. C'est spéculatif, mais c'est une direction de travail identifiable, et l'auteure elle-même semble la pressentir en formulant aussi précisément ce qui manque.

5. Proposition de programme de travail

Voici, dans l'ordre où il semble raisonnable de les essayer, des prolongements concrets de la piste retenue (§ 4.), formulés pour éviter les deux impasses du § 3.

5.1. Étape 1 : reformuler le verrou comme un problème de cycle critique en algèbre min-plus

Le graphe triangulaire épointé T, muni de son étiquetage par les écarts entre nombres premiers, définit une matrice M dans le semi-anneau $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$. L'existence d'un sommet d'excentricité minimale égale à n équivaut à une propriété sur le spectre min-plus de M (la théorie des cycles critiques de Gaubert-Akian-Cohen donne un cadre précis pour ce type d'énoncé sur des graphes pondérés finis). Il faudrait formuler précisément, dans ce langage, ce que l'on cherche à montrer - et vérifier d'abord si la propriété recherchée est même *vraie* pour des familles de graphes

similaires non liées aux nombres premiers (un test de robustesse utile : remplacer la suite des écarts entre premiers par une suite générique d'entiers de même croissance moyenne, et voir si la propriété d'existence d'un centre d'excentricité n persiste ou non - si elle persiste pour des suites génériques, le problème devient un énoncé de théorie des graphes pur, indépendant de l'arithmétique, donc potentiellement plus abordable ; si elle échoue pour des suites génériques, alors c'est bien une propriété arithmétique fine des écarts entre nombres premiers qui est en jeu, et il faut la nommer).

5.2. Étape 2 : tester numériquement la robustesse de l'énoncé

Avant tout travail théorique supplémentaire, un test numérique simple et peu coûteux : pour chaque n pair de 6 à quelques milliers, vérifier que le graphe triangulaire épointé T_n possède *toujours* au moins un centre d'excentricité exactement n distinct de la pointe (et pas seulement d'excentricité minimale parmi les sommets restants, ce qui est trivialement vrai). Les notes vérifient déjà ceci pour n jusqu'à une centaine ; étendre la vérification à plusieurs ordres de grandeur supplémentaires (disons jusqu'à 10^5 ou 10^6, ce qui est numériquement abordable avec Floyd-Warshall optimisé ou plus simplement par calcul direct des deux distances $p+q$ et $2n-p-q$) donnerait une indication solide de la robustesse de la conjecture géométrique sous-jacente, indépendamment de sa démonstration.

5.3. Étape 3 : chercher un contre-exemple structuré à l'argument naïf, pour comprendre où il échoue exactement

La piste des permutations a échoué pour $n = 48$ aux index 13 et 23. Comprendre *précisément* pourquoi ces deux indices produisent un faux positif (quelle est la structure des chemins min-plus qui les contourne) donnerait probablement la clé de ce qui distingue un vrai centre d'un faux candidat - et donc un indice solide sur la nature du verrou de l'étape 1.

5.4. Étape 4 (spéculative) : tenter le couplage spectral

Si les étapes précédentes aboutissent à une formulation min-plus précise, il vaut la peine de chercher un pont avec le triplet spectral de la note du 20 juin 2026 : la matrice d'adjacence min-plus du graphe triangulaire et l'opérateur $D = I - S$ sur les mots booléens partagent une même origine combinatoire (les écarts/compositions). Un travail de traduction entre les deux langages pourrait révéler un invariant commun qui, dans l'un des deux cadres, se prête à un argument de point fixe ou de recouvrement (à la Tucker/Sperner, comme évoqué dans la note de mars 2026, fichier 2) qui échappe à l'autre.

6. Conclusion

Le corpus transmis contient un travail substantiel, honnête et bien documenté. La plupart des pistes explorées convergent, sans que cela soit dit explicitement nulle part dans les notes, vers une seule et même difficulté de fond : faire se rencontrer deux objets construits séparément à partir de p et de $n-p$. La piste géométrique (graphes triangulaires, excentricité, algèbre min-plus) est celle qui formule ce problème de la façon la plus précise et la plus calculable, avec un théorème partiel solide déjà acquis. C'est elle qu'il est recommandé de poursuivre, suivant le programme du § 5., en gardant le triplet spectral de la dernière note comme réserve de méthodes pour la dernière étape.