Arbre de restes améliorable par l'apport de Bombieri-Vinogradov : ce qui est acquis, ce qui reste heuristique, Denise Vella-Chemla pilotant claude, juillet 2026 [1]

1. Résumé

On reformule précisément le phénomène de "partage de décomposants Goldbach" observé sur les feuilles de l'arbre de restes comme une question de répartition des nombres premiers dans une progression arithmétique de module $M(n) = \text{ppcm}(2, \ldots, n)$. On explique à quel régime de croissance de n (en fonction de x) chacun des trois outils - Siegel-Walfisz, Bombieri-Vinogradov, hypothèse de Riemann généralisée - s'applique, et on montre que le phénomène observé est d'une nature *linéaire* (transfert d'un décomposant déjà connu), distincte de la question *bilinéaire* authentique que pose Goldbach binaire. On situe enfin l'obstruction de parité, qui limite ce que n'importe quel argument de crible pur, même nourri par un excellent niveau de distribution, peut prouver.

2. Reformulation modulaire de l'arbre de restes

Rappelons la construction. À l'étage n, un chemin dans l'arbre est déterminé par les restes d'un entier modulo $2, 3, 4, \ldots, n$ successivement. Une feuille non vide de niveau n correspond à un n-uplet de restes compatibles, et par le théorème des restes chinois généralisé (les modules $2, \ldots, n$ ne sont pas premiers entre eux, mais la compatibilité des restes équivaut exactement à la donnée d'une unique classe modulo leur ppcm), une feuille étiquetée correspond *exactement* à une classe de résidu

$$a \pmod{M(n)}, \qquad M(n) := \text{ppcm}(2, 3, \ldots, n).$$

C'est bien ce que vous observez : le nombre de feuilles étiquetées est $M(n)$ (et non $n!$), et les nombres d'une même feuille forment la progression arithmétique $a, a + M(n), a + 2M(n), \ldots$

3. Le phénomène de partage, reformulé

Soit n un entier pair, et p un de ses décomposants Goldbach : p et $n - p$ premiers. Votre observation empirique est que n et $n + M(n)j$ (même feuille) partagent souvent un décomposant commun. Fixons p et demandons : *$n + M(n)j$ partage-t-il ce p précis ?* Cela revient à demander si

$$(n - p) + M(n)\, j$$

est premier, pour $j = 1, 2, \ldots$ C'est une question de répartition des nombres premiers dans la progression arithmétique de raison $M(n)$ et de premier terme $a := n - p \bmod M(n)$ (sous réserve que $\gcd(a, M(n)) = 1$, ce qui est le cas générique dès que $p > n$).

Remarque : c'est une question *linéaire* : on part d'un p déjà su premier, et on demande la primalité d'un *seul* autre nombre, $n - p + M(n)j$. Ce n'est pas encore la question binaire de Goldbach elle-même, qui exige de trouver *simultanément* p et $n - p$ premiers, sans qu'aucun des deux ne soit

1. analyse de la note *Arbres de nombres et conjecture de Goldbach*, Denise Vella-Chemla, 2007, https://denisevellachemla.eu/arbres.pdf).

donné au départ. Ce point compte : c'est ce qui fait que le phénomène de partage, aussi joli soit-il, ne peut pas à lui seul redémontrer Goldbach - il ne fait que redistribuer des décomposants déjà acquis.

4. Ce que l'on sait, sans conjecture, sur les premiers dans une progression de module $M(n)$

Il faut distinguer trois régimes selon la taille de $M(n)$ par rapport à x (l'ordre de grandeur des nombres considérés).

4.1. Croissance de $M(n)$

Par le théorème des nombres premiers appliqué à la fonction de Tchebychev ψ,

$$\log M(n) = \log \operatorname{ppcm}(2, \dots, n) = \psi(n) \sim n \qquad (n \to \infty),$$

donc $M(n)$ croît *exponentiellement* en n : $M(n) \approx e^n$. Un arbre de niveau $n = 5$ a déjà $M(5) = 60$; un arbre de niveau 20 a $M(20) = \operatorname{ppcm}(2, \dots, 20) = 232792560 \approx 2.3 \times 10^8$. La profondeur de l'arbre est très coûteuse en fonction de la taille du plus grand module considéré.

4.2. Régime 1 : Siegel-Walfisz (modules très petits, inconditionnel mais inefficace)

Théorème 1 (Siegel-Walfisz)**.** *Pour tout $A > 0$, il existe $C(A) > 0$ tel que pour $q \leq (\log x)^A$ et $\gcd(a, q) = 1$,*

$$\pi(x; q, a) = \frac{\operatorname{li}(x)}{\varphi(q)} + O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right),$$

uniformément en a.

C'est le théorème qui garantirait rigoureusement votre phénomène de partage *si* $M(n) \leq (\log x)^A$. Compte tenu de $M(n) \approx e^n$, cela impose

$$n \lesssim A \log \log x,$$

c'est-à-dire des arbres *extrêmement peu profonds* par rapport à la taille des nombres traités (croissance en $\log \log x$, non en $\log x$). Concrètement, pour des nombres de l'ordre de 10^{12}, cela n'autorise guère plus que $n \approx 6$ ou 7 - exactement l'ordre des arbres que vous testez à la main. Le théorème existe, mais la constante $C(A)$ est *inefficace* (elle dépend, via l'hypothétique zéro de Siegel, d'une manière non-calculable en général) : cela ne gêne pas la qualité asymptotique de l'énoncé, mais interdit d'en tirer un résultat numériquement explicite pour un x donné sans hypothèse supplémentaire.

4.3. Régime 2 : Bombieri-Vinogradov (modules jusqu'à $\sqrt{x}$, mais en moyenne)

Théorème 2 (Bombieri-Vinogradov, 1965)**.** *Pour tout* $A > 0$*, il existe* $B = B(A) > 0$ *tel que, avec* $Q = x^{1/2}(\log x)^{-B}$*,*

$$\sum_{q\le Q} \max_{y\le x} \max_{\substack{a \\ \gcd(a,q)=1}} \left| \pi(y;q,a) - \frac{\mathrm{li}(y)}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}.$$

C'est ici que la profondeur de l'arbre peut vraiment croître avec x : $M(n) \le Q = x^{1/2-\varepsilon}$ autorise

$$n \lesssim \left(\tfrac{1}{2} - \varepsilon\right) \log x,$$

un gain qualitatif énorme par rapport au régime précédent (linéaire en $\log x$, non plus en $\log\log x$).

Remarque : [Le point qu'il faut garder à l'esprit] Bombieri-Vinogradov **ne dit pas** que *chaque* module $q \le Q$ se comporte individuellement bien - il borne une somme (ou un max) *sur l'ensemble* des $q \le Q$. Un module particulier isolé, comme votre $M(n)$ fixé pour un n donné, pourrait en principe être l'un des rares modules “exceptionnels” (associés à un hypothétique zéro de Siegel) sans que le théorème s'en trouve contredit - seule la moyenne est garantie petite. C'est pourquoi Bombieri-Vinogradov s'utilise presque toujours en sommant sur *une famille* de modules (comme dans les cribles), non en l'appliquant à un module unique choisi à l'avance. Si l'on veut s'appuyer sur le théorème de Bombieri-Vinogradov pour votre construction, il faudrait donc sommer le phénomène de partage sur une famille de niveaux n (ou de modules $M(n)$ voisins), plutôt que de le fixer sur un seul arbre.

4.4. Régime 3 : si l'hypothèse de Riemann généralisée était vraie

Sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour les fonctions L de Dirichlet, on a $\pi(x;q,a) = \mathrm{li}(x)/\varphi(q) + O(\sqrt{x}\log x)$ uniformément en $q \le x^{1-\varepsilon}$ essentiellement sans perte - cela permettrait des arbres de profondeur $n \lesssim (1-\varepsilon)\log x$, mais reste hors de portée inconditionnelle.

5. Ce que cela n'apporte pas : la question bilinéaire et l'obstruction de parité

La véritable difficulté de Goldbach n'est pas de propager un décomposant déjà connu (§ 2), mais de **prouver l'existence d'au moins un** $p \le n$ tel que p et $n - p$ soient *simultanément* premiers, sans supposer aucun des deux acquis. Sous forme de somme,

$$G(n) = \sum_{p\le n} \Lambda(p)\,\Lambda(n-p),$$

et il s'agit de montrer $G(n) > 0$ (en fait $G(i) \sim \mathfrak{S}(n)\,n$, conjecture de Hardy-Littlewood). C'est une somme **bilinéaire** en les deux variables premières simultanément, et c'est précisément ce type de somme que Vinogradov a appris à contrôler (formes bilinéaires de type II) pour les problèmes additifs impliquant un nombre *impair* de nombres premiers (3 nombres premiers, où l'obstruction de parité ne joue pas). Bombieri-Vinogradov y intervient alors comme brique de contrôle des sommes de type I dans le montage du crible, exactement comme dans :

- le théorème de Chen (1966) : tout nombre pair suffisamment grand est $p + P_2$ (somme d'un nombre premier et d'un produit d'au plus deux nombres premiers), obtenu par un crible combiné utilisant le niveau de distribution donné par Bombieri-Vinogradov ;
- le théorème de Montgomery-Vaughan (1975) : l'ensemble des nombres pairs *ne satisfaisant pas* Goldbach a une densité nulle, quantifiée $O(x^{1-\delta})$.

Remarque : [Obstruction de parité] **Un point qu'il serait malhonnête de passer sous silence** : les méthodes de crible pur (même alimentées par un niveau de distribution meilleur que Bombieri-Vinogradov, voire par l'hypothèse de Riemann généralisée) ne peuvent **pas**, à elles seules, distinguer un nombre premier d'un produit de deux nombres premiers dans le poids du crible - c'est l'obstruction de parité de Selberg. C'est exactement pourquoi Chen obtient $p + P_2$ et non $p + p'$: le saut de P_2 à P_1 (un vrai nombre premier) sur le second terme est précisément ce qu'aucun raffinement du niveau de distribution, seul, ne peut fournir. Un renforcement de Bombieri-Vinogradov (même conjectural, type Elliott-Halberstam) ne lève pas cette obstruction ; il faudrait une méthode qui sorte du cadre du crible pur (comme le fait la méthode du cercle pour les problèmes à un nombre impair de variables).

6. Bilan et pistes concrètes

1. Le phénomène de partage que vous observez est réel et se démontre *conditionnellement* par Siegel-Walfisz pour $n \lesssim \log\log x$ (rigoureux mais peu profond), et deviendrait démontrable pour des arbres nettement plus profonds ($n \lesssim \frac{1}{2}\log x$) via Bombieri-Vinogradov, *à condition* de reformuler l'énoncé comme une moyenne sur une famille de modules $M(n)$ voisins plutôt que sur un $M(n)$ isolé.
2. Ce phénomène, même rendu rigoureux, ne redémontre pas Goldbach : il ne fait que transférer un décomposant déjà acquis le long d'une progression arithmétique - c'est un énoncé linéaire, pas bilinéaire.
3. La vraie question bilinéaire (existence d'*un* décomposant pour n un nombre pair lui-même, sans rien supposer de connu) se heurte à l'obstruction de parité, qui n'est pas contournée par un meilleur niveau de distribution.
4. Piste concrète et à votre portée : plutôt que de chercher à faire porter tout le poids sur un seul arbre profond, tester numériquement (sur des familles de $M(n)$ voisins, disons $M(n)$ et $M(n)\pm$ un petit diviseur commun) si le *taux* de partage observé empiriquement (dans votre exemple avec $n = 122$, 8 décomposants partagés sur 11 translatés) est compatible quantitativement avec la densité attendue $1/\varphi(M(n)) \cdot x/\log x$ - cela donnerait une vérification numérique fine de la prédiction Siegel-Walfisz/Bombieri-Vinogradov sur *votre* construction spécifique, ce qui serait déjà un résultat intéressant en soi, indépendamment de Goldbach.
5. Piste plus ambitieuse et plus incertaine : formaliser la somme sur les feuilles d'un niveau n comme une somme de type I dans un crible à la Chen restreint à votre famille de progressions $M(n)$, pour voir si la structure arborescente offre un poids de crible plus efficace que le crible standard - mais il faudrait alors se heurter de front à l'obstruction de parité mentionnée ci-dessus, qui ne disparaît pas parce que le crible est présenté différemment.