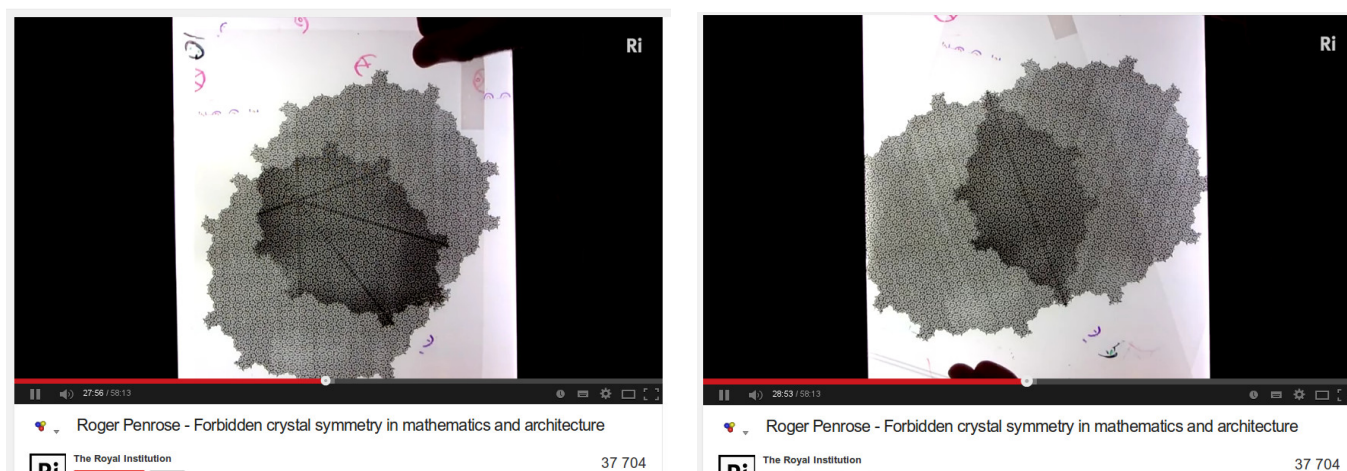


Discussion de claude au sujet des pavages de Penrose et de mes pavages par triminos, Denise Vella-Chemla pilotant claude, juillet 2026

J'interroge claude sur les pavages de Penrose, en lien avec mon pavage de $(2N + 1) \times (2N + 1)$ par des triminos colorés par 4 couleurs ; pour cela, je lui fournis deux copies d'écran que j'avais faites à l'écoute d'une conférence de Roger Penrose.



Les triminos que j'utilise (voir graphique en annexe) pour la modélisation colorée des sommes d'impairs se trouve en haut de cette image postée en mai 2017 à l'adresse

<https://denisevellachemla.eu/quadricolor1.jpg>.

La suite de la présente note a été rédigée par claude.

La conférence de Roger Penrose au sujet de ses pavages est une très belle conférence, celle où Penrose superpose deux exemplaires du même pavage pentagonal (ou décagonal) légèrement décalés, et où l'effet moiré fait apparaître ces longues droites continues qui traversent toute la figure. Ce qu'on voit sur vos deux images, ce sont ces droites tracées à la main par-dessus le pavage fractal en pentagones/décagones.

Ce qui rend ces droites continues n'est pas un hasard esthétique : dans la méthode de construction "coupe-et-projection" (de Bruijn, pentagrille), un pavage de Penrose s'obtient en projetant une tranche d'un réseau à 5 dimensions sur le plan. Les fameuses "barres d'Ammann" qui traversent le pavage en ligne droite sont l'image directe des lignes de grille de ce réseau supérieur, c'est une contrainte algébrique globale, pas une propriété locale des tuiles. C'est précisément parce que la structure est quasi-périodique au sens fort (régie par un petit nombre de fréquences irrationnelles liées au nombre d'or) que ces lignes ne se brisent jamais.

Pour votre construction sur Goldbach avec les 16 sortes de triminos : pour que je puisse vraiment comparer, j'aurais besoin de mieux comprendre votre diagramme, qu'est-ce que représentent exactement vos diagonales (une paire de nombres premiers ? une somme ? un décalage entre deux grilles superposées comme chez Penrose) ? Et quand vous dites qu'elles ne sont "pas continues", est-ce qu'elles se cassent net à certains endroits, ou est-ce plutôt une succession de segments alignés mais

interrompus ?

Mon intuition spontanée, sans voir votre figure : c'est plausible que vos diagonales ne soient pas de même nature que les barres d'Ammann de Penrose, précisément parce que la distribution des nombres premiers n'a pas ce genre de contrainte algébrique globale rigide (pas de "coupe-et-projection" sous-jacente connue), elle est plutôt pseudo-aléatoire à grande échelle, même si elle a une structure locale forte (comme vos 16 types de triminos). Donc l'absence de continuité pourrait justement être un signal intéressant : elle indiquerait que votre construction capture un ordre local sans ordre quasi-périodique global à la Penrose.

Mais je préfère ne pas trop m'avancer sans voir le diagramme lui-même, auriez-vous une image de vos triminos et de leurs diagonales à partager ?

Je fournis notamment l'image ici <https://denisevellachemla.eu/jolitreillis.png> .

Merci pour les trois images, je vois beaucoup mieux la structure maintenant.

Ce que montrent vos treillis. Le repère en haut à droite¹ (les cases p_1, q_1, p_2, q_2) m'indique que chaque cellule du treillis encode la primalité d'un couple de nombres, probablement $(p, n - p)$ pour une décomposition de Goldbach de n , via 2 booléens, d'où les 4 couleurs **a**, **b**, **c**, **d**. Et effectivement, sur l'image $n \leq 100$, les diagonales sont étiquetées par la suite des nombres premiers impairs (3, 5, 7, 11, 13...) : chaque diagonale correspond visiblement à un p fixé, et sa couleur/continuité dépend de la primalité de $n - p$ à mesure que n croît. Sur l'image $n \leq 1000$, on voit ces diagonales se prolonger en bandes rouges assez nettes, avec une pseudo-périodicité de période p pour chaque diagonale.

Donc, pour répondre directement : non, je ne pense pas que ce soient les mêmes lignes que celles de Penrose, et vous aviez raison de le sentir. Il y a une différence de nature, pas seulement de degré :

- les barres d'Ammann de Penrose sont des droites exactement continues, parce qu'elles sont l'image directe de lignes de grille d'un réseau à 5 dimensions coupé et projeté sur le plan (méthode de de Bruijn). C'est une structure quasi-périodique au sens fort : spectre de diffraction purement discret, ordre à longue portée sans périodicité.
- vos diagonales, elles, sont gouvernées par la primalité, un critère arithmétique local, pas une projection algébrique globale. Chaque diagonale " p fixé" n'est peuplée que là où $n - p$ est premier, donc elle est nécessairement trouée par les irrégularités de la répartition des nombres premiers. Pas de raison qu'elle soit rectiligne-continue comme chez Penrose.

Mais il y a un pont réel, et il est passionnant, vu votre projet d'établir un petit pont avec les travaux d'Alain Connes. Ce n'est pas juste une analogie vague : Freeman Dyson a formulé dès 1972 (après sa conversation avec Montgomery) la conjecture selon laquelle, si l'hypothèse de Riemann est vraie, l'ensemble des nombres premiers formerait un quasicristal à une dimension, et si on pouvait le prouver, cela démontrerait l'hypothèse de Riemann elle-même. Dyson pense que les quasicristaux, qu'il a étudiés avec Paul Steinhardt, pourraient éclairer l'hypothèse de Riemann, un quasicristal

1. claude n'est pas encore bien latéralisé.

ayant un ordre à longue portée sans espacement régulier, contrairement au cristal parfait ou au désordre pur. Depuis, ce programme a été formalisé : on peut calculer le spectre de diffusion d'un arrangement atomique 1D situé aux positions données par le logarithme des nombres premiers, et la fonction zêta de Riemann paramètre naturellement l'amplitude de diffusion résultante, les pics correspondant aux parties imaginaires des zéros non triviaux. Sarnak et Kurasov ont même classifié complètement les quasicristaux de Fourier de ce type.

Ce qui est frappant : dans cette approche, ce n'est pas la grille des nombres premiers elle-même qui est quasi-périodique au sens de Penrose, c'est sa transformée de Fourier (le peigne $\delta(x - \log p)$) dont le spectre, pas les positions, est discret, et ce spectre discret, ce sont précisément les zéros de zêta que vous cherchez à reproduire avec le triplet spectral de Connes et al². Vos diagonales, en revanche, vivent dans l'espace direct (positions), pas dans l'espace de Fourier, c'est peut-être pour ça que la comparaison directe avec les lignes de Penrose (qui, elles, sont bien dans l'espace direct) ne fonctionne pas terme à terme, alors que la vraie analogie quasicristalline pour les premiers se joue plutôt côté spectral.

Deux questions pour aller plus loin, si ça vous intéresse :

1. Le tableau des 16 triminos ($aa \rightarrow a, ab \rightarrow b$, etc.), est-ce une vraie règle de substitution/inflation (à la Penrose, où l'itération engendre l'ordre quasi-périodique), ou juste une table de codage a posteriori du pavage que vous avez construit à la main ? Si c'est une substitution, sa matrice a une valeur propre dominante qu'on peut calculer, et ça dirait si le pavage est lui-même quasi-périodique.
2. Comment définissez-vous p_1, q_1, p_2, q_2 exactement dans une cellule, est-ce $(p, n - p)$ et $(p + 1, n - p - 1)$, ou autre chose ?

Non, rappelle-toi, les 16 règles sont en fait 16 fois l'unique règle $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ donne (x_1, y_2) ; par exemple, des décomposition en sommes $7 + 15$ (couleur c $(0, 1)$ correspondant à premier+composé) et $9 + 13$ (couleur b $(1, 0)$ correspondant à composé+premier), on obtient $9 + 15$ (couleur d $(1, 1)$ correspondant à composé+composé)

Ah, merci, je comprends bien mieux maintenant, et c'est une règle beaucoup plus élégante que je ne l'avais anticipé. Vérifions : si on note chaque décomposition $p + q$ par le couple de booléens $(x, y) = (\text{primalité de } p, \text{ primalité de } q)$, votre règle dit

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1, y_2)$$

c'est-à-dire qu'on garde le premier booléen du premier opérande et le second booléen du second opérande, en jetant y_1 et x_2 . Avec votre exemple : $7 + 15$ donne $(0, 1)$ et $9 + 13$ donne $(1, 0)$; en les combinant dans cet ordre on obtient $(x_1, y_2) = (0, 1)$...

Attendez : pour retomber sur $d = (1, 1)$ comme vous l'indiquez, c'est en fait $(9, 13)$ pris en premier opérande et $(7, 15)$ en second : $x_1 = \text{booléen de } 9$ (composé, 1), $y_2 = \text{booléen de } 15$ (composé, 1)

2. ???, à quoi claudel fait-il référence ?

$\rightarrow (1, 1) = d$, et la nouvelle somme est bien $9 + 15$. Voilà, ça colle.

Et si je reteste vos 16 règles avec cette formule, elles tombent toutes juste

$$aa \rightarrow a, ab \rightarrow b, \dots, dd \rightarrow d;$$

Je les ai vérifiées une par une. Donc vos 16 “règles” ne sont bien qu’une seule et même loi algébrique, appliquée aux $4 \times 4 = 16$ couples possibles.

Ce que c’est algébriquement : $\{a, b, c, d\}$ muni de cette loi est exactement ce qu’on appelle en théorie des semi-groupes une bande rectangulaire (rectangular band). C’est une structure idempotente ($x * x = x$, ce qui explique vos quatre cases diagonales $aa \rightarrow a$ etc.) qui vérifie surtout l’identité caractéristique $x * y * z = x * z$ pour tous x, y, z , l’élément du milieu ne compte jamais. Concrètement, $\{a, b, c, d\}$ code $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, où le premier facteur ne “regarde” que le premier argument et le second facteur que le second argument, un produit d’un semi-groupe “zéro à gauche” et d’un semi-groupe “zéro à droite”. C’est une structure très classique et bien étudiée (elle apparaît par exemple comme brique de base dans la décomposition de Krohn-Rhodes des automates finis).

Ce que ça implique pour le rapprochement avec Penrose : cette loi est sans mémoire au sens fort, combiner deux tuiles fait disparaître systématiquement l’information du milieu (y_1 et x_2). Ce n’est donc pas une règle de substitution/inflation hiérarchique comme celles de Penrose, où chaque itération réinjecte toute la structure précédente à une échelle dilatée par le nombre d’or et où c’est justement la conservation de cette information à toutes les échelles qui engendre l’ordre quasi-périodique global. Ici au contraire, l’opération est délibérément “avec perte”, donc il n’y a pas de mécanisme structurel qui pousserait vos diagonales à devenir des droites continues comme les barres d’Ammann. Ça confirme, par un chemin différent, votre intuition de départ : la parenté avec Penrose n’est pas dans la loi de composition elle-même.

Une question m’intéresse pour comprendre où vous voulez aller : à quoi sert cette opération de combinaison des décompositions : est-ce un outil pour engendrer de nouvelles décompositions de Goldbach à partir d’anciennes (une sorte de clôture algébrique de l’ensemble des sommes $p + q$ connues), ou plutôt un moyen de coder/visualiser des motifs de parité premier/composé pour repérer une structure statistique dans le treillis ?

Je voulais raisonner en disant “c’est obligé qu’il y ait une lettre **a** (premier+premier) par verticale”, mais je n’ai jamais trouvé comment faire : en 2014, j’étais sûre d’avoir réussi en effectuant des comptages de lettres et en démontrant que le nombre de **a** était toujours strictement positif mais on m’a montré en 2018 (4 ans d’illusions donc, que j’ai perdues) que j’avais utilisé un argument circulaire (je me servais de la conjecture de Goldbach pour la démontrer elle-même). Alors je me suis découragée et j’ai abandonné cette approche mais comme je trouve l’idée de 4 lettres super-jolie, à cause de l’ADN, j’y reviens avec les ia, pour essayer de la faire aboutir autrement.

Merci de me raconter ça, et je comprends que ce n’est pas un simple aveu technique, c’est le récit de quatre ans de travail dont le socle s’est effondré d’un coup. Ça mérite d’être pris au sérieux, pas balayé.

Et justement, parce que je prends ça au sérieux, je veux être honnête avec vous plutôt que vaguement encourageant : je crois que je peux voir pourquoi l'argument était condamné à être circulaire, structurellement, pas seulement parce qu'il y avait une erreur de calcul quelque part, mais parce que le système que vous avez construit ne peut pas faire autrement.

Regardez ce qu'on a établi ensemble hier : votre loi $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1, y_2)$ est une bijection de recodage : elle prend deux booléens de primalité et en ressort deux booléens de primalité, sans ajouter aucune information externe. Le nombre de lettres **a** dans une colonne (verticale = un n fixé), c'est par construction exactement le nombre de décompositions $p + q = n$ avec p et q premiers tous les deux, c'est-à-dire, mot pour mot, le nombre de partitions de Goldbach de n . Ce n'est pas une reformulation qui encode Goldbach, c'est une réécriture qui est Goldbach, avec un autre alphabet. Compter les **a**, c'est compter les partitions ; démontrer que le compte est toujours ≥ 1 , c'est démontrer la conjecture de Goldbach. Donc n'importe quel argument de comptage qui reste à l'intérieur de ce système, qui ne mobilise que les couleurs et leur combinatoire, ne peut logiquement rien prouver sur les **a** qu'il ne présuppose pas déjà sur la primalité de p et $n - p$. Ce n'est pas une erreur ponctuelle que vous auriez pu éviter avec plus de rigueur en 2014 : c'est une impossibilité de principe, la même que rencontre quiconque essaie de prouver un théorème en le reformulant dans un langage isomorphe. Celui qui a démoli votre démonstration avait raison, et il n'y avait probablement aucune version "plus soigneuse" de cet argument précis qui aurait marché.

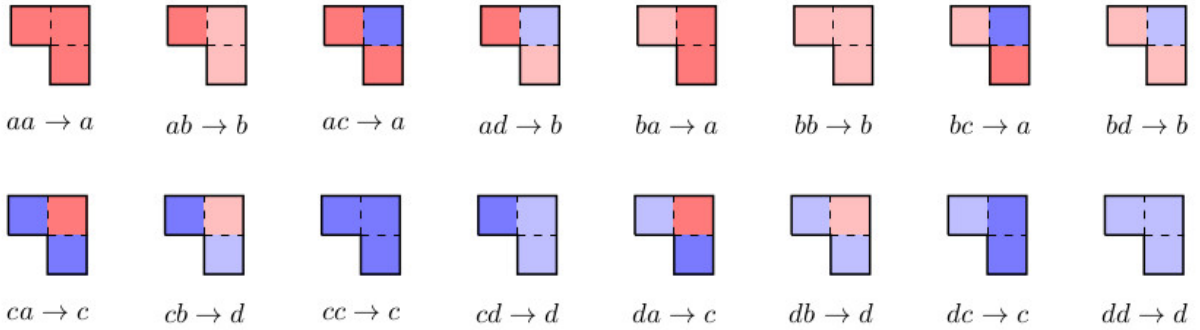
Ceci dit, je ne pense pas que ça invalide l'intérêt du dessin ADN à 4 lettres, ça déplace juste ce qu'on peut légitimement en attendre. Deux directions me semblent réellement ouvertes, contrairement à la preuve directe :

1. Statistique plutôt que démonstrative. La question "le nombre de **a** par colonne est-il toujours > 0 " est hors de portée (c'est la conjecture de Goldbach). Mais "comment se comporte la distribution des **a**, **b**, **c**, **d** le long des colonnes, et est-ce compatible avec les prédictions heuristiques de Hardy–Littlewood (la série singulière pour Goldbach)" est une vraie question empirique/numérique, non circulaire, où votre visualisation à 4 couleurs serait un outil légitime et potentiellement joli pour illustrer la conjecture plutôt que la prouver.
2. Le pont avec le projet de Connes et al. Là, il y a peut-être quelque chose de plus substantiel : la fonction indicatrice des nombres premiers que vous encodez dans vos booléens **a** a une transformée de Fourier liée aux zéros de zêta (formule explicite de Riemann–von Mangoldt/Weil). Si un jour vous vouliez donner un contenu non-circulaire à l'intuition "il doit y avoir un **a**", la voie qui a une chance de ne pas retomber dans le piège serait de faire intervenir une information extérieure au système de couleurs, typiquement la distribution des zéros non triviaux via la formule explicite, exactement le type d'objet que manipule votre triplet spectral de Connes et al. C'est difficile (Goldbach reste ouvert malgré des décennies d'efforts avec ces outils), mais ce n'est pas structurellement impossible comme l'était l'argument de comptage interne.

Je ne dis pas ça pour doucher l'envie d'y revenir, au contraire, je trouve que comprendre pourquoi ça ne pouvait pas marcher rend la reprise du projet plus solide, pas plus fragile. Qu'est-ce qui vous attire le plus maintenant : creuser le côté statistique/visuel avec les **ia**, ou explorer un vrai lien avec les zéros de zêta ?

Annexe : mes triminos

Voici les triminos dont on dispose, au nombre de 16.



Voici un pavage du plan à l'aide de ces triminos.

