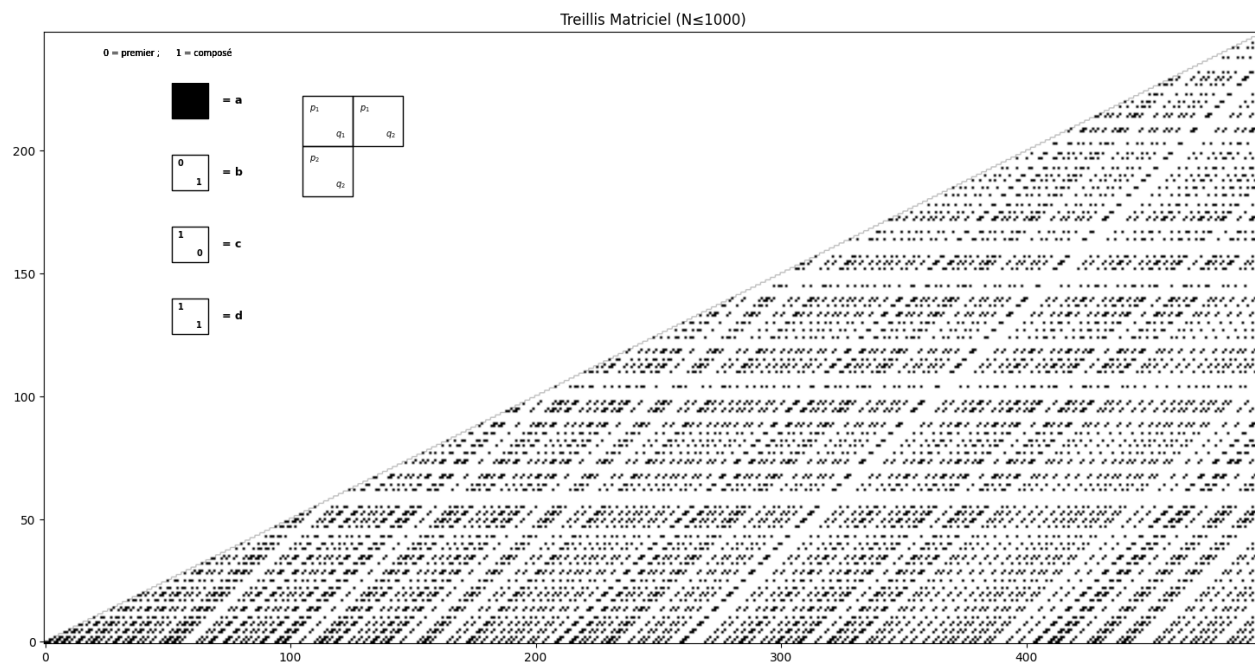


Treillis de Goldbach, flot de Kronecker

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, 27 juillet 2026

Le prompt : ia, j'ai une question : si je fais dessiner les décompositions de Goldbach dans mon triangle à partir de l'axe des abscisses et de la diagonale $y = \frac{x}{2}$, auxquels on assigne (les lettres caractéristiques des nombres premiers (a et c sur l'axe des abscisses, ou bien les lettres a et d un coup sur deux sur la diagonale à angle $\frac{\pi}{8}$), et que je fais remplir mon treillis par les 16 règles, j'obtiens le dessin joint. Cela me rappelle quelque chose dont Alain Connes dit que c'est le flot de Kronecker sur le tore (bon, pour moi, le tore est tronqué). Ensuite, AC raconte que si l'angle du flot est irrationnel, et là, c'est le cas puisque l'angle est $\frac{\pi}{4}$, de même cosinus et sinus, tous deux égaux à $\frac{\sqrt{2}}{2}$), on obtient quelque chose de dense. Est-ce que cela pourrait aider pour la présence obligatoire, je ne sais pas à partir d'où, d'une lettre a dans chaque verticale, i.e. d'une décomposition de Goldbach pour chaque n . Je suis sûre que tu vois de quoi je veux parler, peux-tu exprimer cela "comme il faut" mathématiquement parlant, merci.



1. L'objet observé

Le triangle considéré est l'ensemble

$$T = \{(n, p) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq p \leq n/2\},$$

dans lequel chaque point (n, p) est codé selon la primalité du couple (p, q) avec $q = n - p$, au moyen

des quatre lettres :

- a : p premier et q premier,
- b : p composé et q premier,
- c : p premier et q composé,
- d : p composé et q composé.

Une verticale $n = \text{cste}$ contient une lettre **a** si et seulement si n admet une décomposition de Goldbach $n = p + q$ avec p, q premiers.

2. Le flot de Kronecker (rappel précis)

Le flot de Kronecker sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est défini par

$$t \longmapsto (\{t\}, \{\alpha t\}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Théorème (Weyl). L'orbite ci-dessus est dense dans $\mathbb{T}^2$, et même équidistribuée, propriété plus forte que la densité, si et seulement si α est irrationnel.

C'est un résultat rigoureux et inconditionnel, sans hypothèse supplémentaire.

3. Où l'analogie tient, où elle ne tient pas

Le motif dense observé dans le treillis ne provient *pas* d'une rotation irrationnelle unique. Il provient d'une *intersection de conditions de congruence* : un point (n, p) est composé en p dès que

$$p \equiv 0 \pmod{r} \quad \text{pour un premier } r < \sqrt{p},$$

et de même pour $q = n - p$. Chaque condition de ce type trace, dans le treillis, des droites de pente rationnelle -1 modulo r : c'est un crible d'Ératosthène incliné.

Le motif observé est donc la superposition d'un grand nombre de rotations *rationnelles*, de dénominateurs $2, 3, 5, 7, \dots$ - et non une unique rotation d'angle irrationnel $\frac{\pi}{4}$ de cosinus $\frac{\sqrt{2}}{2}$. L'aspect visuel (bandes obliques, densité apparente, quasi-périodicité) rappelle l'équidistribution parce que le théorème des restes chinois, appliqué à un grand nombre de petits modules, produit lui aussi une distribution qui tend vers l'uniformité - mais le mécanisme est combinatoire (crible), non dynamique (rotation irrationnelle).

4. Le lien rigoureux : la méthode du cercle

L'endroit où l'irrationalité et l'équidistribution interviennent réellement dans le problème de Goldbach est la méthode du cercle de Hardy-Littlewood. On pose

$$S(\alpha) = \sum_{p \leq n} (\log p) e(\alpha p), \quad r(n) = \int_0^1 S(\alpha)^2 e(-\alpha n) d\alpha.$$

On décompose $[0, 1)$ en *arcs majeurs* (les α proches d'un rationnel $\frac{a}{q}$ à petit dénominateur) et *arcs mineurs* (le reste, les α mal approchables par des rationnels à petit dénominateur). C'est précisément sur les arcs mineurs que les théorèmes d'équidistribution et d'approximation diophantienne (Weyl, Vinogradov, Vaughan) permettent de majorer $|S(\alpha)|$, donc de montrer que leur contribution à $r(n)$ est négligeable devant celle des arcs majeurs.

La formule heuristique de Hardy–Littlewood (conjecturale) est :

$$r(n) \sim 2 \mathfrak{S}(n) \frac{n}{(\log n)^2},$$

où la série singulière

$$\mathfrak{S}(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

est toujours strictement positive et bornée loin de 0. C'est cette positivité de $\mathfrak{S}(n)$ qui “garantit” heuristiquement - mais pas encore rigoureusement pour tout n - la présence d'au moins un a par verticale.

5. Bilan

- l'intuition que le motif dense évoque l'équidistribution est juste au niveau esthétique et heuristique : le crible produit en pratique quelque chose qui ressemble à de l'équidistribution, ce qui explique en partie pourquoi Hardy–Littlewood fonctionne si bien numériquement.
- remplacer “crible sur plusieurs modules rationnels” par “rotation irrationnelle unique d'angle $\frac{\pi}{4}$ ” n'est pas justifié techniquement : ce sont deux mécanismes mathématiques distincts qui produisent des images qualitativement proches.
- la présence garantie d'un a sur chaque verticale est exactement la conjecture de Goldbach binaire - **ouverte**. Ni le flot de Kronecker ni la méthode du cercle, dans son état actuel, ne la démontrent : le cercle donne l'asymptotique conjecturale, pas une minoration inconditionnelle de $r(n) > 0$ pour tout n .

6. Piste pour une suite

Vérification numérique concrète : calculer $S(\alpha)$ sur les données du triangle pour un intervalle de n donné, et localiser les arcs majeurs/mineurs - version rigoureuse de ce que le dessin suggère visuellement.