

1. Définitions de base

Pour un entier pair $n \geq 6$, on parcourt les décompositions $n = p + q$ avec p, q impairs, $p \leq q$, $p = 2j + 3$ ($j \geq 0$). On code chaque décomposition par une lettre selon la primalité de p et q :

- **a** = $(0, 0) \rightarrow p$ premier, q premier (“premier+premier”)
- **b** = $(1, 0) \rightarrow p$ composé, q premier
- **c** = $(0, 1) \rightarrow p$ premier, q composé
- **d** = $(1, 1) \rightarrow p$ composé, q composé

(convention : 0 = premier, 1 = composé.)

Fait clé : n vérifie Goldbach $\iff$ il existe au moins une case **a** dans la colonne n du treillis.

2. Les 16 règles de composition

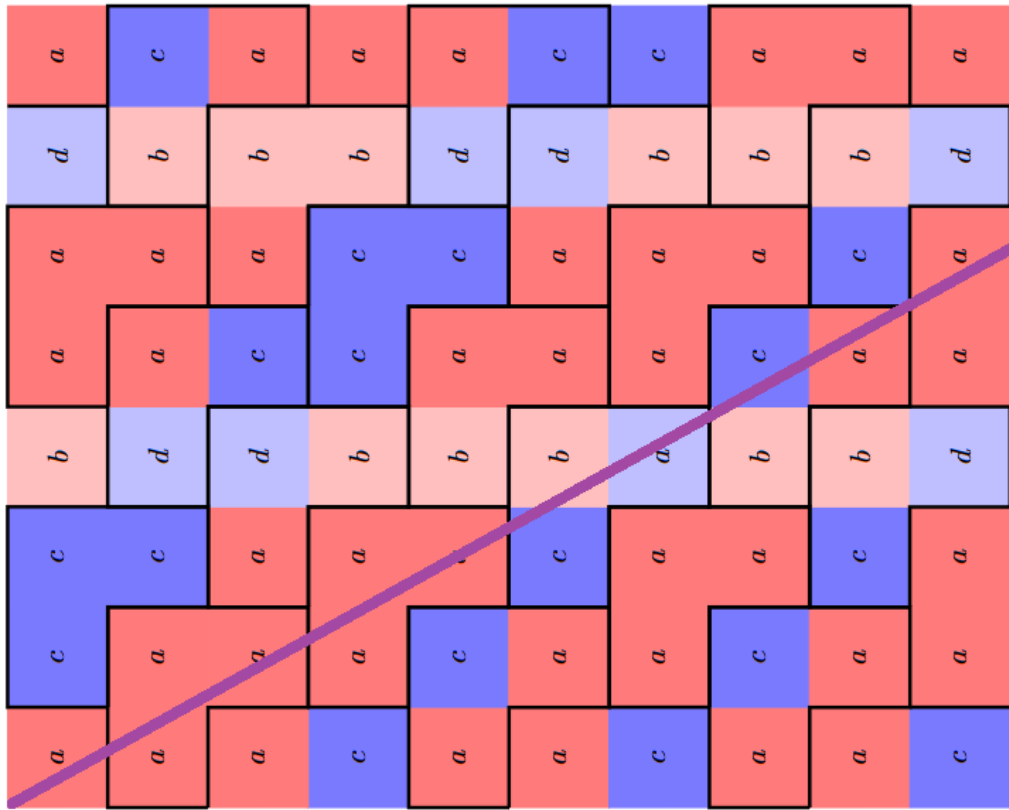
L'article *Treillis de Goldbach et opérateur prolata arithmétique* (25 juillet 2026) énonce la règle de composition comme

$$L((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, y_2).$$

aa $\rightarrow$ a	ab $\rightarrow$ b	ac $\rightarrow$ a	ad $\rightarrow$ b
ba $\rightarrow$ a	bb $\rightarrow$ b	bc $\rightarrow$ a	bd $\rightarrow$ b
ca $\rightarrow$ c	cb $\rightarrow$ d	cc $\rightarrow$ c	cd $\rightarrow$ d
da $\rightarrow$ c	db $\rightarrow$ d	dc $\rightarrow$ c	dd $\rightarrow$ d

3. L'invariance par décalage du pavage - question tranchée

Question posée par Denise : le pavage par trimino (zone sous la ligne violette en escalier, marches de hauteur 1 / longueur 2) admet 6 pavages “voisins” obtenus en décalant tous les triminos d'un cran (droite, gauche, haut, bas, diagonale haut-droite, diagonale bas-gauche), et ces 6 pavages respectent eux aussi les 16 règles. Est-ce que ça pourrait forcer l'existence d'un **a** par colonne ?

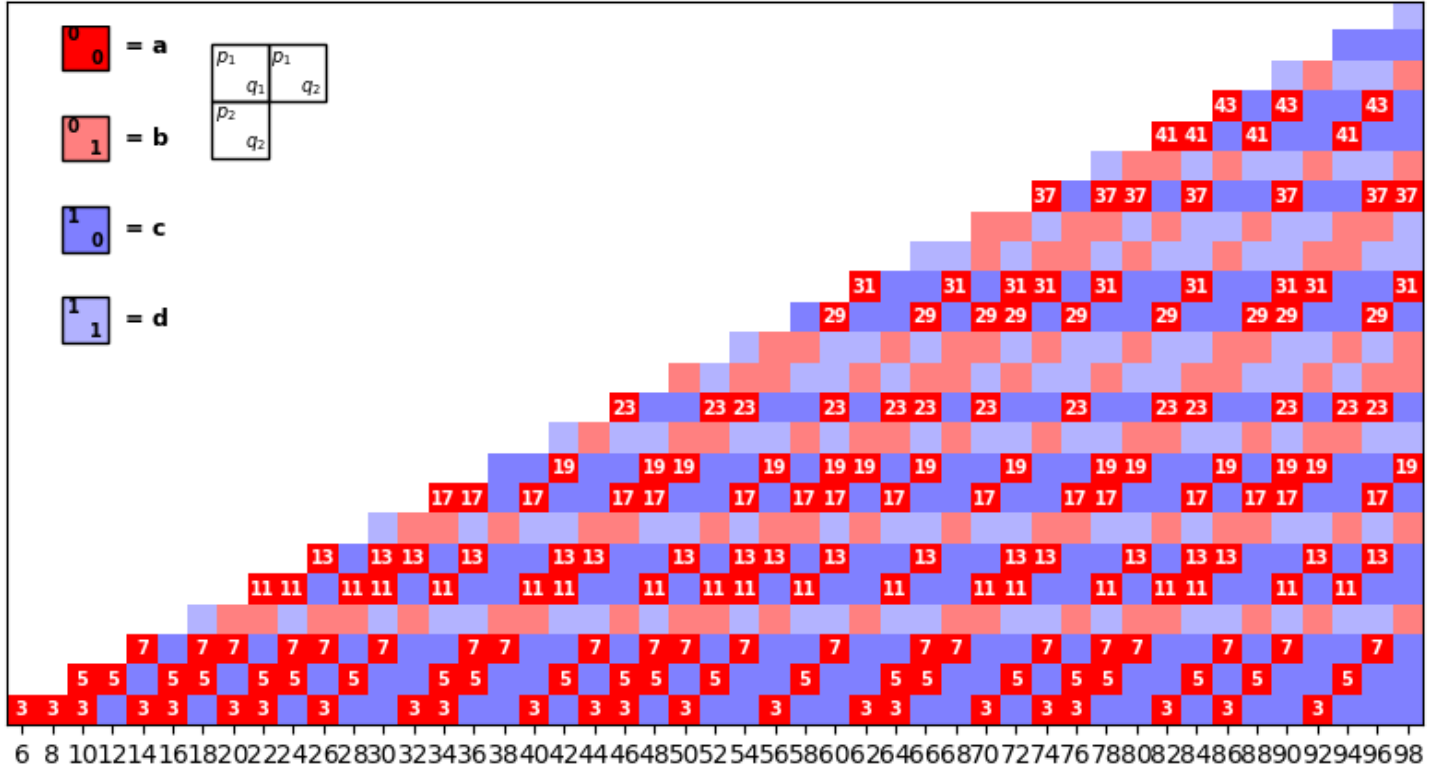


Réponse (établie par un test croisé avec le code mistral “treillis aléatoire”) : le code de l’ia mistral remplace la suite des nombres premiers par une suite aléatoire de même densité asymptotique (probabilité $\frac{1}{\ln n}$ par entier) et obtient un pavage qui respecte exactement les mêmes 16 règles quand on le pave par des triminos (avec les 7 façons différentes de délimiter les triminos sur le plan).

C’est la preuve empirique que :

- la lettre en (p, q) ne dépend que de deux fonctions indépendantes : $u(p)$ sur l’axe p , $v(q)$ sur l’axe q (ou la diagonale des q).
- la règle de composition (x_1, y_2) est une **tautologie géométrique** de la grille : elle recolle juste “le bit lu sur l’axe p ” et “le bit lu sur l’axe q ”, quelle que soit la suite de bits choisie (premiers, aléatoire, ou même une suite adversariale construite pour éviter toute coïncidence).
- donc les 6 pavages décalés sont valides pour n’importe quelle suite u, v , l’invariance ne dépend pas de l’arithmétique des nombres premiers.

Treillis Matriciel ($N \leq 100$)



Conclusion : cette invariance ne peut pas, à elle seule, forcer l'existence d'un $\mathbf{a}$ par colonne, car elle serait vraie même dans un monde où on choisirait exprès u et v pour qu'aucune colonne n'ait jamais de $\mathbf{a}$. Une propriété vraie pour tout choix de suite ne peut pas être le levier qui force la coïncidence.

Ce qui est réellement spécifique aux nombres premiers (et donc les vraies pistes) :

1. leur densité $\approx \frac{1}{\ln k}$, qui rend chaque colonne "riche" en candidats ;
2. l'absence de corrélation adverse entre positions des premiers sur l'axe p et sur l'axe q .

Ce point 2 est exactement ce que l'opérateur prolata K_n (section 4.) cherche à capturer.

4. L'opérateur prolata arithmétique K_n - problème identifié dans la preuve du théorème 7

Rappel de la construction (note du 25 juillet, <https://denisevellachemla.eu/mistral-CG-spectrale-deux-projections-dvc-20260725.pdf>) :

$$\begin{aligned} P_n &= \text{diag}(1 - a_n), \\ Q_n &= \text{diag}(1 - b_n) \quad (\text{projecteurs de primalité}), \\ F &= \text{transformée de Fourier discrète} \end{aligned}$$

normalisée, $K_n = P_n F Q_n F^* P_n$.

Le théorème 7 affirme : n admet une décomposition de Goldbach $\iff K_n \neq 0$.

Problème trouvé (calcul de trace) : par cyclicité de la trace,

$$\text{Tr}(K_n) = \text{Tr}(Q_n F^* P_n F) = \sum_{\substack{k \text{ tel que } q_k \text{ est} \\ \text{un nombre premier}}} \sum_{\substack{j \text{ tel que } p_j \text{ est} \\ \text{un nombre premier}}} |F_{jk}|^2 = \frac{r_p \cdot r_q}{m}$$

où r_p, r_q sont les nombres de premiers respectivement parmi les p_j et les q_j , et m la longueur des vecteurs.

Cette trace ne dépend que du nombre de premiers sur chaque axe, jamais du fait qu'un même indice j_0 porte un premier sur les deux axes simultanément.

Conséquence : $K_n \neq 0$ dès qu'il y a au moins un p_j premier ET au moins un q_k premier, même s'ils ne sont jamais au même indice, donc **même s'il n'existe aucune décomposition de Goldbach pour n .**

Le théorème 7 est donc faux tel qu'énoncé, et la preuve informelle donnée dans l'article ("l'interception séquentielle par les filtres de Fourier fait que l'opérateur ne peut capturer d'amplitude non nulle [si pas de coïncidence]") est incorrecte.

Pourquoi ça casse : sans F , l'opérateur "naturel" $K'_n = P_n Q_n P_n$ (produit de diagonales) détecte trivialement et exactement la coïncidence d'indice ($K'_n \neq 0 \iff \exists j$, coïncidence). Mais F est une matrice pleine à coefficients de même module ($1/\sqrt{m}$ partout) : elle *étale* l'information de P_n sur toutes les coordonnées avant que Q_n ne filtre. Ça transforme un test **ponctuel** (même indice) en un test **global et presque toujours vrai** (au moins un premier quelque part sur chaque axe), qui ne dit rien sur Goldbach.

Question ouverte identifiée, potentiellement intéressante : quelle transformation (à la place de F , ou combinée à F) préserverait la sensibilité locale aux coïncidences d'indices tout en apportant un véritable outil spectral (valeurs propres, lien avec les travaux de Connes sur les zéros de zêta) ? C'est là, probablement, que se trouve la vraie difficulté et le vrai intérêt de l'approche.