

1. Résumé

Cette note formalise deux choses précisément, dans le but explicite qu'un lecteur extérieur puisse s'en saisir. D'abord, le mécanisme exact par lequel le "miracle de Slepian" est utilisé en pratique : un opérateur tridiagonal stable ne fournit pas directement les valeurs propres recherchées, mais sert à extraire des vecteurs propres, qui sont ensuite réinjectés dans l'opérateur instable d'origine pour en obtenir les valeurs propres par quotient de Rayleigh. Ensuite, la question, restée ouverte ici, de savoir si un mécanisme analogue pourrait exister pour l'opérateur de crible arithmétique S_n construit dans une note précédente, et pourquoi, même en cas de réponse positive, cela ne lèverait pas l'obstruction de fond déjà identifiée (problème de parité de Selberg).

2. Le mécanisme de Slepian, précisément

2.1. Les deux opérateurs

Soit A l'opérateur de limitation temps-frequence (chez Slepian : noyau $\frac{\sin 2\pi W(k-n)}{\pi(k-n)}$ sur $\mathbb{C}^N$; chez Connes et al. : la matrice τ des programmes `chat-gepetto-2.py`, censée approcher les parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann). A a un spectre sévèrement resserré en plateau (beaucoup de valeurs propres très proches les unes des autres près de 1, puis chute brutale) : ses vecteurs propres sont donc numériquement mal définis (deux vecteurs associés à des valeurs propres presque égales sont numériquement indiscernables).

Soit T l'opérateur tridiagonal de Slepian, qui *commute* avec A :

$$T_{xx} = \left(\frac{N-1-2x}{2}\right)^2 \cos(2\pi W), \quad T_{x,x+1} = T_{x+1,x} = \frac{x(N-x)}{2}, \quad [A, T] = 0.$$

Le spectre de T est bien séparé (simple, sans quasi-dégénérescence) : ses vecteurs propres ψ_n se calculent de façon numériquement stable par toute méthode standard (LAPACK, méthode QL/QR pour matrices tridiagonales symétriques).

2.2. Pourquoi la commutation ne suffit pas à elle seule

Fait : deux opérateurs qui commutent partagent les mêmes vecteurs propres (dans le cas non dégénéré), mais ont en général des valeurs propres *différentes*.

Le tridiagonal T fournit donc les bons vecteurs ψ_n , mais ses propres valeurs propres χ_n (celles de T) ne sont *pas* les valeurs propres λ_n de A que l'on cherche - ce sont deux suites de nombres différentes, associées aux mêmes directions propres.

Mécanisme : [Réinjection stable]

On procède en deux temps :

1. diagonaliser T (stable) pour obtenir les vecteurs propres ψ_n .
2. réinjecter chaque ψ_n dans A via le quotient de Rayleigh :

$$\lambda_n = \frac{\langle \psi_n, A \psi_n \rangle}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle}.$$

Cette dernière étape est un simple produit matrice-vecteur suivi d'un produit scalaire, une opération numériquement inoffensive, *une fois qu'on dispose déjà d'un bon ψ_n* . L'instabilité de A ne se manifestait que dans la recherche directe de ses vecteurs propres, pas dans l'évaluation d'un quotient de Rayleigh en un vecteur déjà connu.

C'est donc une combinaison, avec répartition précise des rôles : le stable donne les directions, l'instable (réinjecté) donne les grandeurs. Aucun des deux opérateurs seuls ne suffit.

3. Le dual arithmétique légitime (rappel)

Une note précédente (<https://denisevellachemla.eu/claude-2-theoreme7-correction-et-crible-dvc-20260726.pdf>) a établi que, contrairement au couple (P_n, Q_n) du texte source (diagonaux dans la même base, donc sans dualité réelle), le couple légitime en arithmétique est :

- S_n , projecteur diagonal sur $\mathbb{C}^M$ ($M = \prod_{r \leq \sqrt{n}} r$), valant 1 sur les résidus x tels que $\gcd(x, M) = \gcd(n - x, M) = 1$;
- les caractères de Dirichlet modulo $q \mid M$, dont les sommes de Ramanujan $c_q(n) = \sum_{\gcd(a, q)=1} e^{2i\pi an/q}$ sont d'authentiques valeurs propres d'un opérateur de translation.

La quantité $\text{Tr}(S_n)$ restreinte à $[3, n/2]$ vaut exactement $X_a(n)$, et se développe, via ces caractères, en la série singulière $\mathfrak{S}(n) = \sum_q \mu(q)^2 c_q(n) / \varphi(q)^3$.

4. La question ouverte

Question : existe-t-il un opérateur T_n , simple (idéalement creux, par exemple tridiagonal ou peu dense), agissant sur le même espace que S_n (ou sur l'espace naturel des caractères de Dirichlet modulo M), tel que :

- (i) T_n commute avec S_n (ou avec l'opérateur dont la trace pondérée reconstruit $\mathfrak{S}(n)$) ;
- (ii) le spectre de T_n est simple et bien séparé (pas de plateau de quasi-dégénérescence), permettant un calcul numériquement stable de ses vecteurs propres ;
- (iii) les vecteurs propres de T_n , réinjectés par quotient de Rayleigh dans S_n (mécanisme de la section 1.2), redonnent des quantités arithmétiquement interprétables (idéalement liées à $X_a(n)$ ou aux termes de $\mathfrak{S}(n)$) ?

Remarque : un tel opérateur, s'il existe, n'est pas garanti par la seule existence de la dualité résidus/caractères : la commutation de Slepian est un fait spécifique (lié à la structure de l'équation d'onde en coordonnées sphéroïdales prolates), pas une conséquence automatique de toute dualité de Fourier. La littérature récente montre néanmoins que ce phénomène (dit de *bispectralité*, au sens de Duistermaat-Grünbaum) n'est pas unique au cas de Slepian : par exemple, la matrice de Pascal

$(T_N)_{jk} = \binom{j+k}{j}$ a été récemment montrée bispectrale, commutant avec une matrice de Jacobi tridimensionnelle explicite (Cameron, Serpa *et al.*, 2024). C'est donc une question qui a des précédents récents et une méthodologie établie (théorie de la bispectralité, souvent via des symétries de type algèbre de Lie ou des récurrences hypergéométriques) : c'est un véritable point d'entrée pour quiconque voudrait reprendre cette piste, non une speculation isolée.

Remarque [Mise en garde, essentielle]

Même en cas de réponse positive à la Question ouverte, cela ne changerait *rien* à l'obstruction de fond établie dans la note précédente. Le rôle de T_n serait purement calculatoire : rendre $\mathfrak{S}(n)$ et $X_a(n)$ plus faciles à *calculer* numériquement pour un n donné. Cela n'apporterait aucune information nouvelle sur le terme d'erreur $R(n) = X_a(n) - \frac{n}{2}\mathfrak{S}(n)/(\ln n)^2$, dont le contrôle uniforme en n reste, lui, précisément bloqué par le problème de parité de Selberg (voir note précédente, section 4). Un miracle de Slepian arithmétique, s'il existe, serait un outil numérique élégant - pas une voie de contournement de la difficulté mathématique.

5. Conclusion

Le mécanisme de Slepian n'est pas un raccourci : c'est une répartition précise du travail entre un opérateur stable (qui donne les vecteurs propres) et l'opérateur d'intérêt (réinjecté pour donner les valeurs propres). La question de son analogue arithmétique, pour l'opérateur de crible S_n et les sommes de Ramanujan, est formulée ici aussi précisément que possible, avec référence à un précédent récent (bispectralité de la matrice de Pascal) montrant que ce n'est pas hors de portée méthodologique. Mais quelle que soit sa réponse, elle ne toucherait que le confort de calcul, non l'obstacle mathématique de fond, qui reste celui identifié précédemment.