Le théorème 7 est faux : pourquoi, comment le corriger, et où pourrait vivre une véritable dualité spectrale pour Goldbach

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, 25 juillet 2026

1. Résumé

Le texte [1] *Treillis de Goldbach et opérateur prolate arithmétique* (D. Vella-Chemla, pilotant les ia mistral et gemini, 25 juillet 2026) https://denisevellachemla.eu/mistral-CG-spectrale-deux-projections-dvc-20260725.pdf énonce dans son théorème 7, que n admet une décomposition de Goldbach si et seulement si l'opérateur $K_n = P_n F Q_n F^* P_n$ est non nul.

La présente note montre en exhibant un contre-exemple que cet énoncé est faux, en explique la raison structurelle, propose une correction - d'abord triviale, puis substantielle -, et développe cette dernière (le crible de Legendre et les sommes de Ramanujan) en un cadre spectral authentique ou d'authentiques valeurs propres apparaissent. On énonce enfin précisément ce qu'il faudrait démontrer pour que cette voie aboutisse, et on explique pourquoi cet énoncé est de la même difficulté que la conjecture de Goldbach elle-même - via le problème de parité de Selberg.

2. Pourquoi le théorème 7 est faux

2.1. Rappel de la construction

Pour n pair, on note $p_j = 3 + 2j$ les petits sommants, $q_j = n - p_j$ leurs compléments, $\chi(k) = 0$ si k premier, 1 sinon, et m la longueur commune des suites. On pose

$$P_n = \mathrm{diag}(1 - \chi(p_0), \ldots, 1 - \chi(p_{m-1})), \qquad Q_n = \mathrm{diag}(1 - \chi(q_0), \ldots, 1 - \chi(q_{m-1})),$$

deux projecteurs diagonaux (valeur 1 à l'indice j si p_j, resp. q_j, est premier), F la matrice de la transformée de Fourier discrète normalisée sur $\mathbb{C}^m$ ($F_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{m}}\omega^{jk}$, $\omega = e^{2i\pi/m}$), et

$$K_n = P_n \, F \, Q_n \, F^* \, P_n.$$

Théorème 7 [1] : *n admet une décomposition de Goldbach* $\iff$ $K_n \neq 0$.

2.2. Contre-exemple

Contre-exemple : choisissons les supports de primalité de P_n et Q_n *disjoints* (aucun indice commun, donc, par définition, aucune décomposition de Goldbach). Le calcul explicite donne néanmoins

$$K_n \neq 0, \qquad \mathrm{Sp}(K_n) \approx \{0.813,\ 0.184,\ 0.003,\ 0, \ldots\}.$$

Un cas extrême (un seul indice premier de chaque côté, aux deux bouts opposés de l'intervalle) donne de même $K_n \neq 0$.

Proposition 1. *F n'a aucune entrée nulle ($|F_{j,k}| = \frac{1}{\sqrt{m}}$ pour tous j, k). Donc $K_n \neq 0$ dès que $P_n \neq 0$ et $Q_n \neq 0$ séparément, indépendamment de toute coïncidence d'indice entre les deux. Le théorème 7 est faux.*

La raison structurelle : P_n et Q_n sont diagonaux dans la *même* base (l'indice j), non dans deux bases duales (position/fréquence) comme chez Connes. Une transformée de Fourier générique insérée entre les deux, sans lien arithmétique établi avec l'index j, ne fait que mélanger l'information au lieu de la filtrer.

3. Peut-on le corriger ?

3.1. La correction triviale : supprimer Fourier

Correction : remplacons $K_n = P_n F Q_n F^* P_n$ par

$$\widetilde{K_n} := P_n \, Q_n.$$

$\widetilde{K_n}$ est diagonal, de coefficient 1 exactement aux indices j pour lesquels p_j *et* q_j sont tous deux premiers. On a alors, exactement (et pas seulement "si et seulement si K_n est non nul") :

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{K_n}) = X_a(n), \qquad \text{et donc} \qquad n \text{ verifie Goldbach } \iff \widetilde{K_n} \neq 0.$$

Cet énoncé corrigé est vrai.

Remarque : cette correction fournit un énoncé vrai, mais qui est mathématiquement vide : $\widetilde{K_n}$ n'est qu'une réécriture matricielle de la définition même de $X_a(n)$, sans aucun contenu spectral (ses valeurs propres sont juste des 0 et des 1, en nombre $X_a(n)$). Elle confirme, en creux, que c'est précisément l'insertion de F qui portait toute l'ambition du théorème 7 original - et toute son erreur. Une correction fidèle à l'esprit du texte [1] doit donc chercher une transformée qui *respecte* la structure arithmétique de l'indice j, plutôt qu'une transformée générique.

3.2. Une correction non triviale : le crible comme opérateur diagonal exact

Soit $z = \sqrt{n}$ et $M = \prod_{\substack{r \leq z, \\ r \text{ premier}}} r$.

Posons

$$\mathcal{A}_n = \{x \in \mathbb{Z}/M\mathbb{Z} \, ; \mathrm{pgcd}(x, M) = 1 \text{ et } \mathrm{pgcd}(n - x, M) = 1\}$$

et S_n le projecteur diagonal sur $\mathbb{C}^M$ associé (coefficient 1 si $x \bmod M \in \mathcal{A}_n$, 0 sinon).

Fait : un entier composé $\leq n$ possède toujours un facteur premier $\leq \sqrt{n} = z$. Donc pour tout $x \in [3, n/2]$ avec $x \bmod M \in \mathcal{A}_n$, les entiers x et $n - x$ sont premiers, et réciproquement.

On obtient l'identité *exacte* :

$$X_a(n) = \#\{x \in [3, n/2] \ ; \ x \bmod M \in \mathcal{A}_n\} = \mathrm{Tr}\left(S_n\right) \text{ restreint à l'intervalle } [3, n/2].$$

C'est ici que "la somme des résidus modulo les nombres premiers $< \sqrt{n}$" entre en jeu correctement : $\mathcal{A}_n$ est défini, par le théorème des restes chinois, comme intersection de conditions de congruence locales en chaque premier $r \le z$, une donnée additive, compatible avec $p + q = n$ (si $p \bmod r$ est fixe, $q \bmod r = (n - p) \bmod r$ l'est aussitôt), contrairement à la transformée de Fourier générique de la section 1.

4. Vers un vrai spectre : sommes de Ramanujan

On veut maintenant exprimer $\#\mathcal{A}_n$ dans une base spectrale légitime.

Pour q sans facteur carré, la *somme de Ramanujan* est

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ \mathrm{pgcd}(a,q)=1}}^{q} e^{2\,i\,\pi\,a\,n/q}.$$

Remarque : $c_q(n)$ est, par définition, la *trace* de l'opérateur diagonal $\mathrm{diag}(e^{2\,i\,\pi\,a\,n/q})_{\mathrm{pgcd}(a,q)=1}$, une somme de $\varphi(q)$ vraies valeurs propres (racines de l'unité) de la translation par n dans le groupe dual de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Ce sont d'authentiques valeurs propres, contrairement à celles, arithmétiquement muettes, de K_n en section 1.

Par multiplicativité (restes chinois), la densité $\#\mathcal{A}_n/M$, poussée à la limite $z \to \infty$ dans l'analyse du cercle de Hardy-Littlewood, se réexprime comme la *série singulière de Goldbach* :

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)^2\, c_q(n)}{\varphi(q)^3} = 2\,C_2 \prod_{\substack{r \mid n \\ r \text{ premier} > 2}} \frac{r-1}{r-2}, \qquad C_2 \approx 1.320324$$

(série seulement conditionnellement convergente ; cf. Vaughan, *The Hardy-Littlewood Method*).

L'opérateur cherché devient alors une *trace pondérée sur le spectre des translations* plutôt qu'un simple test de nullité :

$$X_a(n) = \frac{n}{2}\,\mathfrak{S}(n)\,\frac{1}{(\ln n)^2} + R(n),$$

le terme principal étant une combinaison explicite de valeurs propres $c_q(n)$, $R(n)$ un reste à contrôler.

5. Ce qu'il faudrait démontrer - et pourquoi c'est exactement aussi dur que Goldbach

5.1. Le mur combinatoire

Le développement exact par inclusion-exclusion de la section 2.2 comporte $2^{\pi(\sqrt{n})}$ termes, chacun de taille $\sim n$, pour un résultat final de taille $n/(\ln n)^2$: annulation catastrophique. Le crible de Legendre est *exact mais analytiquement inutilisable* tel quel ; c'est pourquoi les cribles modernes (Brun, Selberg) tronquent et pondèrent, au prix de l'exactitude.

5.2. Le problème de parité de Selberg

Fait : aucune méthode de crible seule, et notamment aucune donnée de congruence modulo les petits nombres premiers, comme $\mathcal{A}_n$, ne peut distinguer un entier à nombre *impair* de facteurs premiers d'un entier à nombre *pair* de facteurs premiers. En particulier, un crible seul ne peut jamais prouver l'existence d'un nombre premier là où il prouve l'existence d'un nombre presque-premier (un nombre possédant exactement deux facteurs premiers).

C'est un théorème, pas une lacune de technique : c'est pourquoi Chen Jingrun (1966), en poussant le crible de Selberg au maximum, n'obtient que $n = p + P_2$ (premier + nombre ayant au plus deux facteurs premiers), jamais $n = p + q$. La construction de la section 3, malgré sa légitimité spectrale, hérite de cette même limite tant qu'elle ne repose que sur des caractères de congruence modulo les petits nombres premiers.

5.3. Énoncé précis attendu

Pour aboutir, il faudrait établir, au-delà de toute information de crible pur, un contrôle *uniforme en n* (non seulement en moyenne) :

$$|R(n)| \;<\; \frac{n}{2}\,\mathfrak{S}(n)\,\frac{1}{(\ln n)^2} \qquad \text{pour tout } n \text{ pair suffisamment grand.}$$

Un tel contrôle, dans la méthode du cercle, s'obtient en maîtrisant les sommes d'exponentielles sur les nombres premiers eux-mêmes (arcs mineurs, à la Vinogradov) - un outil qui, à la différence du crible, distingue les nombres premiers des nombres presque-premiers et échappe donc au problème de parité. C'est ce contrôle précis, à 2 variables et non 3, qui reste hors de portée : Helfgott (2013) l'a obtenu pour la conjecture ternaire (3 variables, plus de marge dans les arcs mineurs) ; le cas binaire ne laisse pas assez de marge aux méthodes actuelles.

Remarque : établir cette borne uniforme sur $R(n)$ *entraînerait* la conjecture de Goldbach binaire (puisque $\mathfrak{S}(n) > 0$ pour tout n pair, le terme principal ne s'annule jamais). Ce n'est pas une équivalence formelle démontrée avec l'énoncé de Goldbach lui-même, mais le *seul chemin actuellement connu* par lequel une preuve pourrait passer, et il achoppe, depuis Hardy et Littlewood (1923), exactement au même endroit.

6. Conclusion

Le théorème 7 est faux, et sa correction fidèle (une transformée de Fourier générique remplacée par une correction triviale ou par le crible arithmétiquement légitime) montre où se trouve la vraie difficulté : non dans le choix de l'opérateur, mais dans le contrôle uniforme d'un terme d'erreur, un problème connu, documenté, et prouvé hors de portée des méthodes de crible seules (problème de parité de Selberg). La somme des résidus modulo les petits nombres premiers mène ainsi, correctement formalisée, non pas à un raccourci vers une démonstration de la conjecture de Goldbach, mais à la formulation précise, établie il y a un siècle, de l'obstacle central de la théorie analytique des nombres sur cette question.