

L'opérateur K_n ne permet pas de discriminer les décomposants de Goldbach

Denise Vella-Chemla pilotant claude, 20260726

1. Résumé

Le texte *Treillis de Goldbach et opérateur prolate arithmétique* (D. Vella-Chemla, pilotant les ia mistral et gemini, 25 juillet 2026 <https://denisevellachemla.eu/mistral-CG-spectrale-deux-projections-dvc-20260725.pdf>) propose un opérateur $K_n = P_n F Q_n F^* P_n$, construit par analogie avec l'opérateur prolate $K_\Lambda = P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ d'Alain Connes, et énonce (théorème 7) que n admet une décomposition de Goldbach si et seulement si $K_n \neq 0$.

Cette note montre, par un contre-exemple explicite, que cette équivalence est fausse, puis identifie la raison structurelle de l'échec : contrairement à la paire $(P_\Lambda, \widehat{P}_\Lambda)$ de Connes, qui oppose deux variables duales incompatibles (position et fréquence sur $\mathbb{R}$), les projecteurs P_n et Q_n de la construction arithmétique sont diagonaux dans une seule et même base, et la transformée de Fourier discrète insérée entre les deux ne joue aucun rôle de séparation.

2. Rappel de la construction

Pour n pair, on note $p_j = 3 + 2j$ les petits sommants, $q_j = n - p_j$ leurs compléments, et $\chi(k) = 0$ si k est premier, 1 sinon. On pose, pour m la longueur commune des suites,

$$P_n = \text{diag}(1 - \chi(p_0), \dots, 1 - \chi(p_{m-1})), \quad Q_n = \text{diag}(1 - \chi(q_0), \dots, 1 - \chi(q_{m-1})),$$

deux projecteurs orthogonaux diagonaux (valeur 1 à l'indice j si p_j , resp. q_j , est premier).

Soit F la matrice de la transformée de Fourier discrète normalisée sur $\mathbb{C}^m$,

$$F_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{m}} \omega^{jk}, \quad \omega = e^{2i\pi/m}.$$

L'opérateur prolate arithmétique est défini par

$$K_n = P_n F Q_n F^* P_n.$$

Le théorème 7 du texte source affirme :

n admet une décomposition de Goldbach si et seulement si $K_n \neq 0$.

3. Contre-exemple

Prenons $m = 9$ et choisissons artificiellement les supports de primalité de sorte que P_n soit non nul uniquement aux indices $\{0, 1, 2\}$ et Q_n uniquement aux indices $\{5, 6, 7\}$, deux ensembles disjoints.

Par construction, il n'existe alors *aucun* indice j tel que p_j et q_j soient simultanément premiers : la décomposition de Goldbach correspondante n'existe pas, dans le formalisme même de la définition 2 du texte source.

Le calcul explicite de $K_n = P_n F Q_n F^* P_n$ pour cette configuration donne :

$$K_n \neq 0, \quad \text{Sp}(K_n) \approx \{0.813, 0.184, 0.003, 0, 0, \dots\}.$$

Un cas encore plus extrême, un seul indice premier de chaque côté, aux deux extrémités opposées de l'intervalle des indices, donne de même $K_n \neq 0$, avec $\text{Sp}(K_n) \approx \{0.111, 0, \dots, 0\}$.

Le théorème 7 est donc faux : $K_n \neq 0$ n'implique pas l'existence d'une décomposition de Goldbach.

4. Diagnostic

La preuve proposée dans le texte source s'appuie sur l'idée que "l'interception séquentielle par les filtres de Fourier" empêcherait K_n de capter une amplitude non nulle en l'absence de coïncidence d'indice. Cette intuition est erronée pour la raison suivante :

Proposition 1. *La matrice de Fourier discrète $F \in M_m(\mathbb{C})$ n'a aucune entrée nulle : $|F_{j,k}| = \frac{1}{\sqrt{m}}$ pour tous j, k . Par conséquent, dès que $P_n \neq 0$ et $Q_n \neq 0$ (c'est-à-dire dès qu'il existe au moins un p_j premier et au moins un q_j premier, sans condition de coïncidence d'indice), on a génériquement $K_n \neq 0$.*

Autrement dit, $K_n \neq 0$ équivaut essentiellement à "il existe un petit sommant premier *et*, indépendamment, un grand sommant premier", une condition presque toujours vraie dès que n n'est pas minuscule, et sans rapport avec la coïncidence des deux primalités au même indice qui définit Goldbach.

Remarque : le calcul des valeurs propres de K_n pour $n = 40$ et $n = 98$ (les deux cas testés par l'autrice) confirme l'absence de lien avec les décomposants de Goldbach eux-mêmes :

n	décomposants de Goldbach	premières valeurs propres de K_n
40	(3, 37), (11, 29), (17, 23)	1, 1, 0.778, 0.333, 0, ...
98	(19, 79), (31, 67), (37, 61)	0.958, 0.877, 0.830, 0.667, ...

Ce sont des nombres génériques d'algèbre linéaire, sans signification arithmétique repérable.

5. Pourquoi les projections sur les première et seconde coordonnées n'ont rien à voir avec les projections P_λ et $\widehat{P}_\lambda$ de Connes

Dans la construction de Connes (*Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, section VIII), P_Λ est la projection de coupure en *position* sur $L^2(\mathbb{R})$,

$$P_\Lambda = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}) ; \xi(x) = 0, |x| > \Lambda\},$$

tandis que $\widehat{P}_\Lambda = \mathcal{F}P_\Lambda\mathcal{F}^{-1}$ en est la coupure duale en *fréquence*. Ces deux variables sont incompatibles au sens du principe d'incertitude, et c'est précisément cette incompatibilité qui rend non trivial le produit $P_\Lambda\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$. Le fait, classique et non trivial, qu'un opérateur différentiel du second ordre (l'opérateur sphéroïdal prolate de Landau, Pollak et Slepian) commute avec cette paire de projections est un résultat spécifique à la dualité position/fréquence sur $\mathbb{R}$; il ne se généralise pas automatiquement à une paire arbitraire de projecteurs conjugués par une transformée de Fourier discrète.

Dans la construction arithmétique, P_n et Q_n sont deux projecteurs diagonaux dans la *même* base (l'indice j des petits sommants) : ce ne sont pas deux variables duales, mais deux sous-ensembles du même ensemble d'indices. La transformée de Fourier discrète F , insérée entre les deux, ne joue le rôle d'aucune dualité arithmétique établie (elle ne correspond ni à $\log p$, ni à une variable conjuguée reconnue dans la théorie des nombres) : c'est un simple changement de base générique, dont la propriété structurelle pertinente (densité totale, absence d'entrée nulle) est justement ce qui rend le théorème 7 faux.

6. Conclusion

L'opérateur K_n , tel que défini, ne permet pas de discriminer les décomposants de Goldbach des nombres impairs composés ou de complémentaire à n composés : le contre-exemple de la section 2 le montre directement, et la proposition de la section 3 en donne la raison structurelle. L'analogie avec l'opérateur prolate de Connes reste, en l'état, une analogie de vocabulaire (projections, transformée de Fourier, valeurs propres) plutôt qu'une correspondance mathématique : il faudrait, pour qu'une telle correspondance existe, identifier une véritable variable arithmétique *duale* du petit sommant p , jouant vis-à-vis de p le rôle que joue la fréquence vis-à-vis de la position chez Connes. Cette question reste ouverte.