Décomposants de Goldbach dans le plan complexe (Denise Vella-Chemla, 9.7.2024)

Hier, on a étudié les graphiques obtenus par programme, qui montrent les parties réelle et imaginaire des produits :

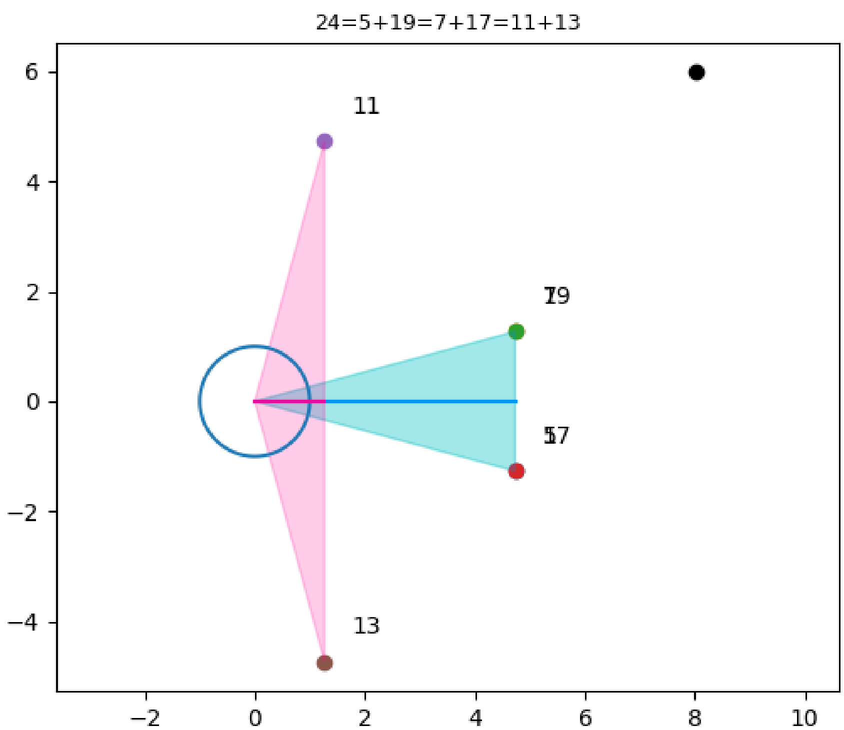
$$A = \prod_{\substack{x \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq n \\ 2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \left(1 - \exp\left(\frac{2i\pi x}{p}\right)\right)$$

et

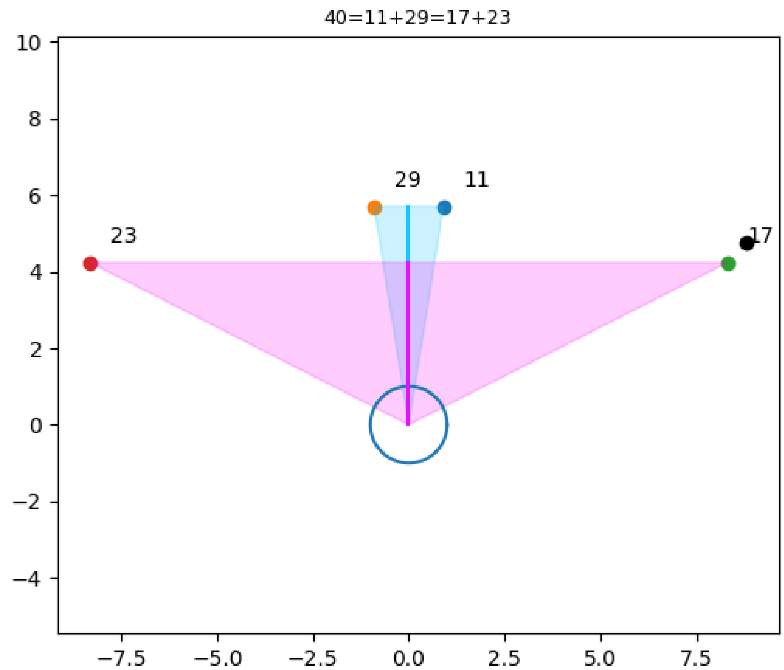
$$A' = \prod_{\substack{x \in \mathbb{N} \\ 0 \leq x \leq n \\ 2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor}} \left(1 - \exp\left(\frac{2i\pi (n-x)}{p}\right)\right).$$

Précédemment, on avait étudié les points du plan complexe d'affixes les produits en question. Trois nombres sont “intrigants” : les nombres 24, 40 et 78 car pour eux trois, ce qu'on avait appelé leurs papillons, sont bien positionnés parallèlement ou perpendiculairement aux axes réel et imaginaire du plan complexe selon les trois graphiques ci-dessous :

$n = 24$

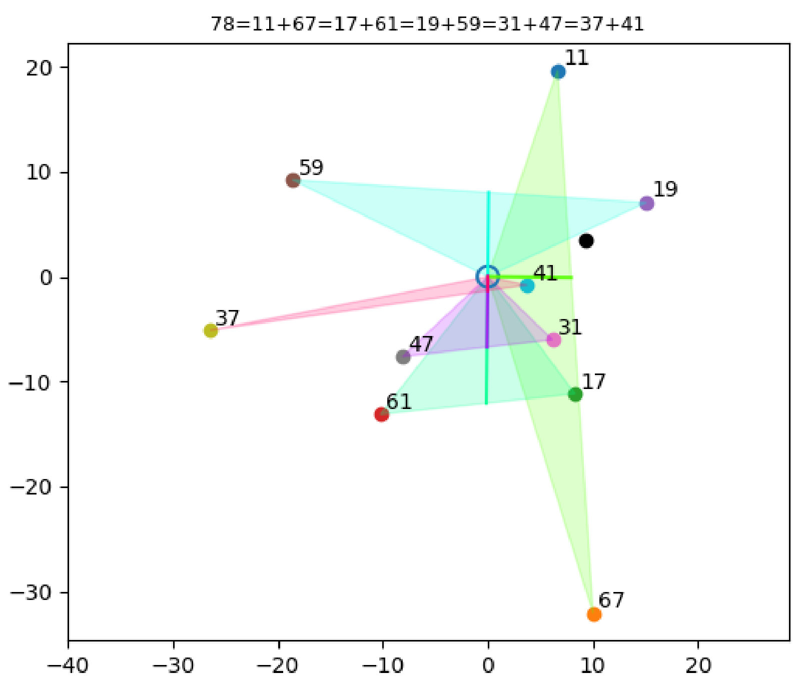


$n = 40$



40=11+29=17+23
29
11
23
17

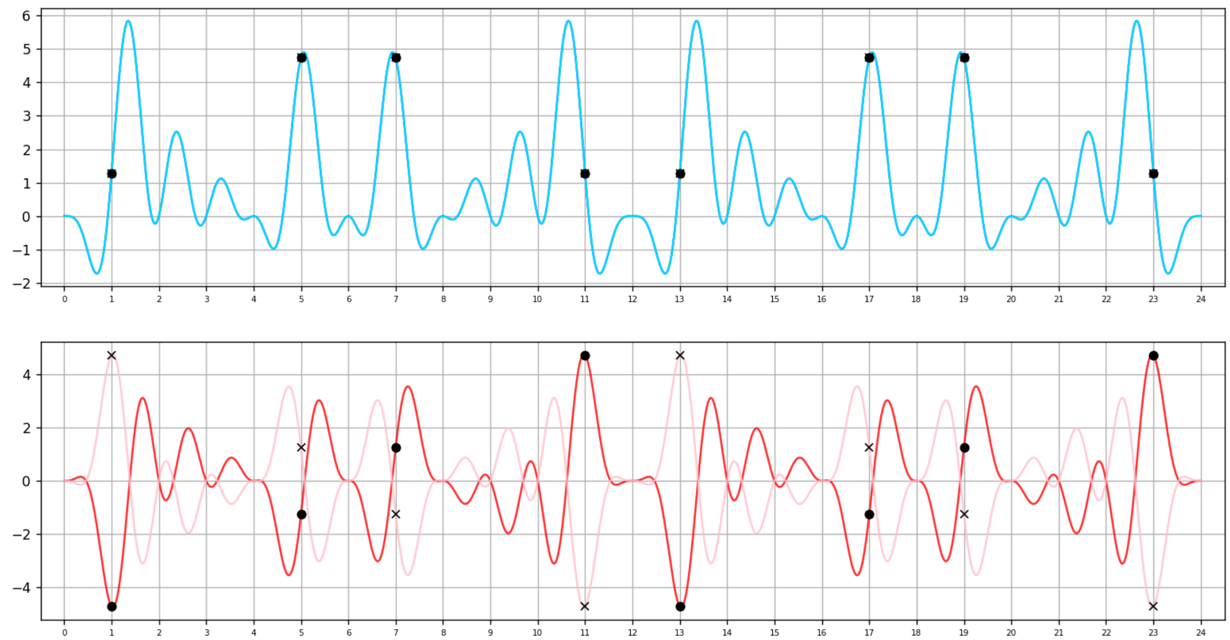
$n = 78$



78=11+67=17+61=19+59=31+47=37+41
11
59
19
41
37
31
47
17
61
67

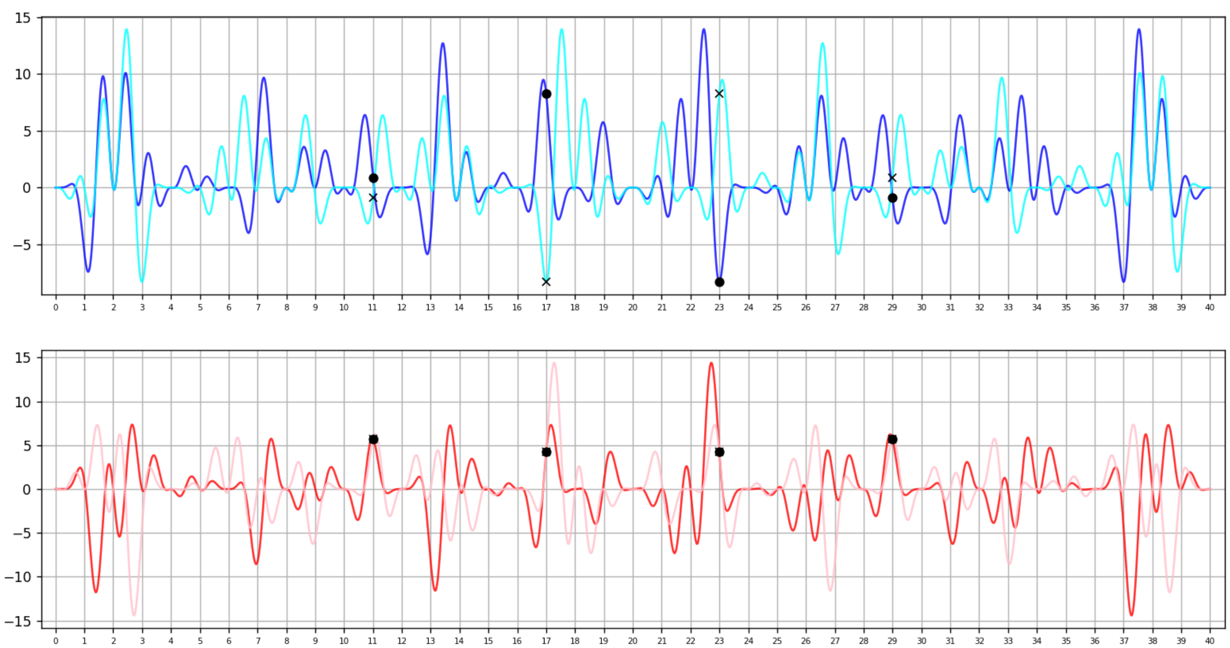
Voyons les courbes représentant les parties réelle et imaginaire des produits A et A' :

$n = 24$



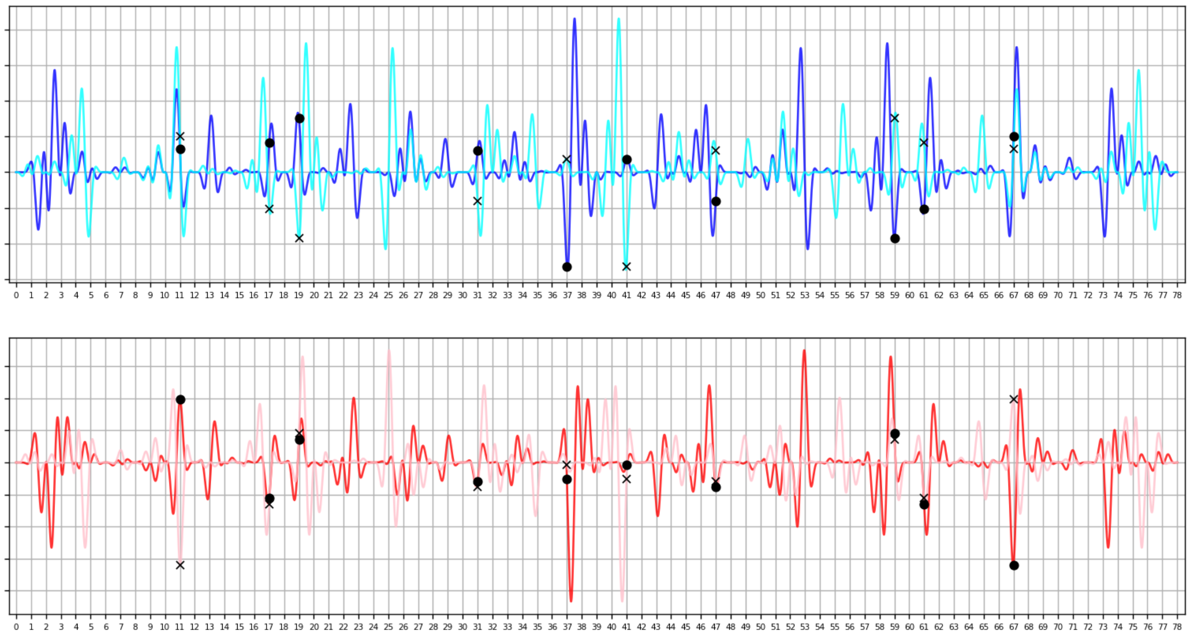
Les courbes correspondant aux parties réelles (bleu et cyan) de A et A' se confondent (se chevauchent), on ne voit qu'une couleur. Les courbes correspondant aux parties imaginaires (rouge et rose) ont leur point pour x et $n-x$ qui sont systématiquement de même valeur absolue et de signes opposés.

$n = 40$



On ne voit rien de flagrant.

$n = 78$



On ne voit rien de flagrant.

Etudions les affixes des décomposants de Goldbach dans ces trois cas particuliers :

$n = 24$

```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop\discret-continu>python3 reecritunmoinsexp.py
1.0    1.2679491924311215    -4.732050807568877
5.0    4.732050807568876    -1.2679491924311241
7.0    4.7320508075688785    1.2679491924311168
11.0    1.2679491924311477    4.73205080756888
13.0    1.2679491924311301    -4.732050807568878
17.0    4.732050807568879    -1.2679491924311153
19.0    4.732050807568887    1.2679491924310933
23.0    1.267949192431165    4.732050807568884
```

$n = 40$

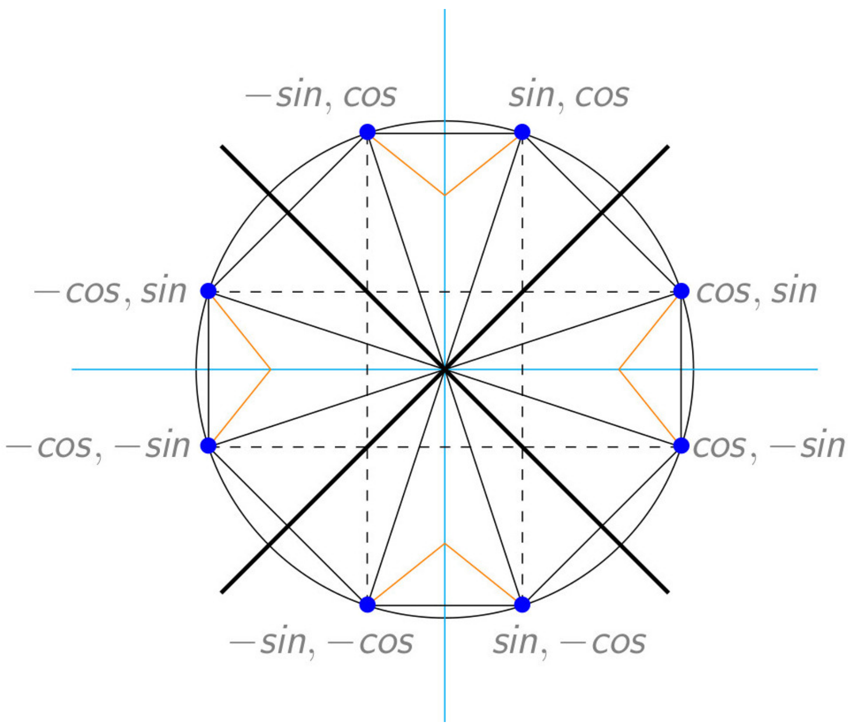
```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop\discret-continu>python3 reecritunmoinsexp.py
11.0    0.9009210683668807    5.6881917600038125
17.0    8.3027665338464    4.2304708502054025
23.0    -8.302766533846421    4.2304708502055055
29.0    -0.9009210683668392    5.688191760003818
```

$n = 78$

```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop\discret-continu>python3 reecritunmoinsexp.py
11.0    6.632870373769185    19.660516038160356
17.0    8.299678333414512    -11.158080007695919
19.0    15.071817475949711    7.050992357031933
31.0    6.145114297114057    -6.008742618841374
37.0    -26.435157439638004    -5.104281400350055
41.0    3.7383787468480847    -0.8092418192766322
47.0    -8.146605747120182    -7.615842514319597
59.0    -18.592231832233548    9.211936592187087
61.0    -10.228004158618768    -13.124942140007395
67.0    10.015721851067289    -32.04418420284733
```

Pour $n = 24$, on découvre certaines symétries entre différents affixes, au sein de chacune des courbes, et entre les 2 courbes (des parties réelles pour x et $n - x$) ; pour $n = 40$, on découvre certaines symétries au sein de chacune des deux courbes mais non pas entre les courbes ; pour $n = 78$, on ne découvre rien de similaire aux cas précédents.

La difficulté de localisation des décomposants de Goldbach serait peut-être dûe au fait qu'à un nombre entier correspondrait une rotation d'un certain angle des axes formant la base du plan complexe. Et la symétrie à laquelle il faudrait à nouveau réfléchir serait cette symétrie d'ordre 8 du cercle unité [1], à transposer sur des cercles plus ou moins grands.



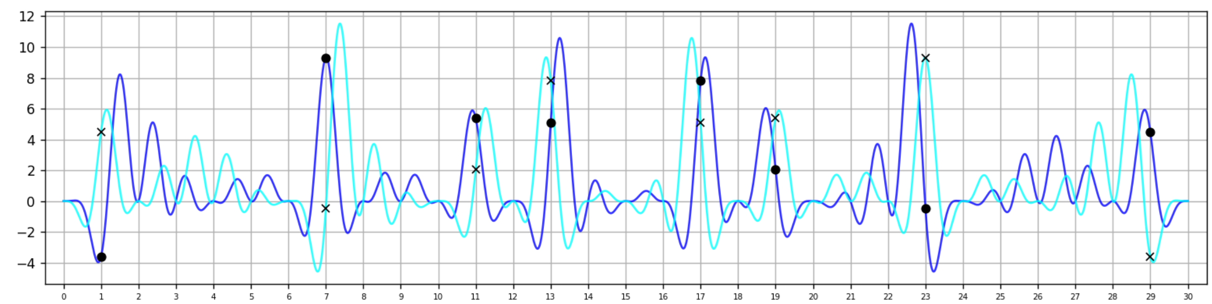
On rappelle que les deux opérateurs f et g du plan complexe, f envoyant le point $a+ib$ sur le point $b+ia$ et g envoyant le point $a+ib$ sur le point $-a+ib$ par exemple, ne commutent pas. En effet, si on les fait agir l'un avant l'autre, ou bien l'un après l'autre, sur un point (x, y), on n'obtient pas le même résultat :

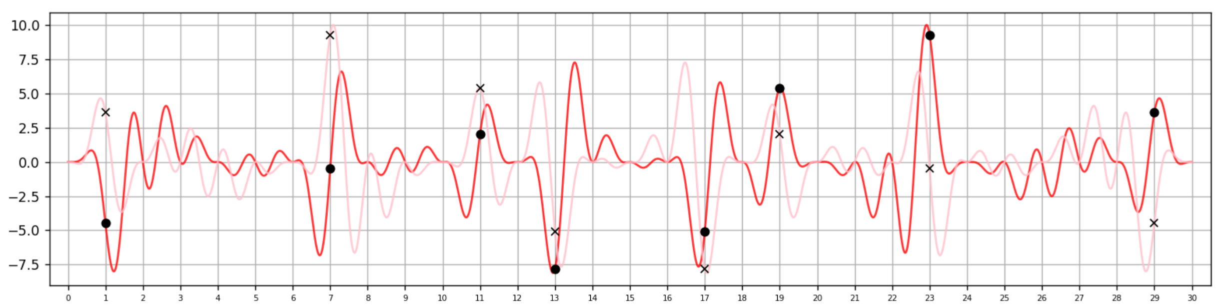
[1] Les traits orange ont été ajoutés à titre décoratif.

- dans le premier cas ($g \circ f$), on obtient : $(x, y) \to (y, x) \to (-y, x)$.

- dans le second cas ($f \circ g$), on obtient : $(x, y) \to (-x, y) \to (y, -x)$.

On voudrait également montrer ici les courbes associées au nombre 30 : l'ensemble des points non nuls des courbes bleu et cyan d'une part (ils sont marqués en noir et appartiennent à l'ensemble [1,7,11,13,17,19,23,29]), et l'ensemble des points non nuls des courbes rouge et rose d'autre part (ils sont marqués en noir et appartiennent à l'ensemble [3,5,9,15,21,25,27]), sont exactement complémentaires l'un de l'autre et couvrent l'ensemble des entiers impairs de l'intervalle $[0, 30]$ considéré. C'est marrant !





Voici les valeurs des affixes des décomposants dans ce cas particulier $n = 30$.

```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop\discret-continu>python3 reecritunmoinsexp.py
1.0    -3.6243164120122096    -4.475658031577195
7.0    9.305642165104956    -0.4876880406757951
11.0    5.3765790999440535    2.063875347991572
13.0    5.075171314899577    -7.815078493170627
17.0    7.815078493170634    -5.075171314899555
19.0    2.063875347991642    5.376579099944031
23.0    -0.4876880406757045    9.305642165104997
29.0    4.475658031577203    3.6243164120122087
```

Dans ce cas, on trouve des correspondances entre les affixes d'un point correspondant à un décomposant de Goldbach de l'une des deux courbes et un autre point correspondant à un décomposant de Goldbach de l'autre courbe, mais non pas entre deux points différents appartenant à une seule des deux courbes.