Décomposants de Goldbach et géométrie des nombres
Denise Vella-Chemla
26 février 2023

1. Présentation de deux exemples pour appréhender la modélisation choisie

On situe le problème de la recherche des décomposants de Goldbach dans la géométrie des nombres de Minkowski. Regardons 2 exemples pour fixer les idées. On cherche les décomposants de Goldbach du nombre 40. On sait que certains d'entre eux, ceux qui sont supérieurs à la racine de 40, s'ils existent, ne sont divisibles par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{40}$ (pour être des nombres premiers) et ne partagent aucune classe de congruence avec 40 selon les modules premiers inférieurs à $\sqrt{40}$ (pour que leur complémentaire soit premier).

On représente les nombres sur un treillis de nombres de Minkowski ainsi : les nombres qui partagent un reste sont sur une même droite. On ne s'intéresse qu'aux restes dans les divisions par 3 ou 5, les deux seuls nombres premiers impairs inférieurs à $\sqrt{40}$. Il y a quelques points multiples car $3 \times 5 < \dfrac{n}{2}$.

Voici le treillis des nombres :

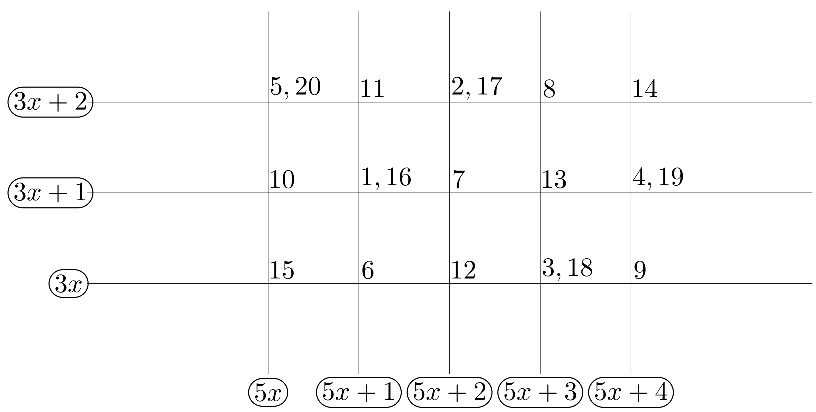

Figure 1 : positionnement des nombres dans un treillis de Minkowski
pour illustrer la recherche des décomposants de Goldbach de 40

Les décomposants de Goldbach s'ils existent ne peuvent être sur les deux bords inférieur et gauche du rectangle des nombres étiquetés (nombres divisibles par 3 ou 5) et ne peuvent appartenir à aucune droite à laquelle 40 appartient. La droite éliminée ici est la droite des $3x+1$ ($40 \equiv 1 \pmod 3$).

On symbolise par la couleur les hyperplans (là des droites) éliminés par les congruences de $n = 40$ (on utilise le mélange de couleur vert pour le nombre 10 qui est à la fois un $5k$ et un $3k' + 1$ et le mélange de couleur violet pour le nombre 15 qui est à la fois un $3k$ et un $5k'$).

Voici le treillis des nombres, on a omis la direction correspondant au nombre premier 2, qui aurait permis d'éliminer les nombres pairs, pour éviter d'avoir à passer à la troisième dimension sur ce minuscule exemple, seuls les nombres impairs 11 et 17 n'appartiennent pas aux hyperplans (ici des droites) auxquelles 40 appartient, ainsi qu'aux hyperplans nuls. Ne restent que 11 et 17 qui sont bien les décomposants de Goldbach de 40 supérieurs à $\sqrt{40} = 6, \ldots.$

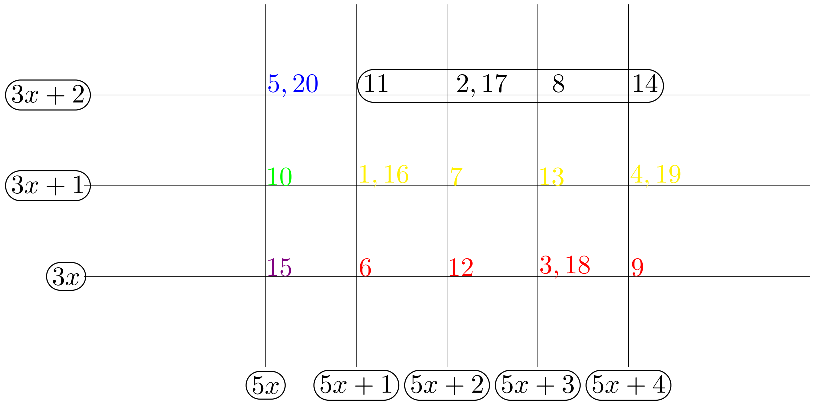

Figure 2 : décomposants de Goldbach de $n = 40$ en noir

Pour $n = 98$, on n'a plus de points multiples car $3 \times 5 \times 7 > \dfrac{n}{2}$. Pour des raisons de lisibilité, les nombres qui sont aux points entiers d'un réseau parallélépipède rectangle ont été représentés en séparant les différents "étages de l'immeuble" (les plans à troisième coordonnée constante, cette troisième coordonnée étant le reste modulaire d'un nombre selon le module 7). Les segments des hyperplans (ici des plans) auxquels 98 appartient ont été notés en rouge.

Les décomposants de Goldbach de 98 ne partagent aucun plan avec lui et ne peuvent appartenir aux "plans bords" qui contiennent les nombres divisibles par 3, 5 ou 7.

On imagine aisément comment le problème se généralise à un polytope de $\mathbb{Z}^d$ avec d le nombre de nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.
Le problème de la recherche d'un décomposant de Goldbach de n un nombre pair, qui soit supérieur à $\sqrt{n}$ s'est transformé en la recherche d'un point dans la grille de nombres de Minkowski :

> *n étant associé à un point de la grille des nombres, un décomposant de Goldbach de n, supérieur à $\sqrt{n}$, est un autre point D ($D \neq 1$ et de $D \neq n-1$) de la grille tel que D n'a aucune coordonnée nulle et D et n ont toutes leurs coordonnées différentes 2 à 2 (comme dans les exemples présentés, on a omis le module 2, il est également nécessaire que D soit impair et différent de 1 ou $n-1$).*

2. Détour par le premier chapitre du roman "Le Spectre d'Atacama" de Danye Chéreau, Alain Connes et Jacques Dixmier, 2018[1]

On résume ce qui nous intéresse ici dans le chapitre en question par la formule du nombre de cassures nécessaires pour couper une tablette de chocolat(de taille $m \times n$ en carrés de chocolat individuels ; ce nombre de cassures est égal à $nm - 1$. Voir l'extrait du chapitre en annexe.

[1] légèrement modifié.

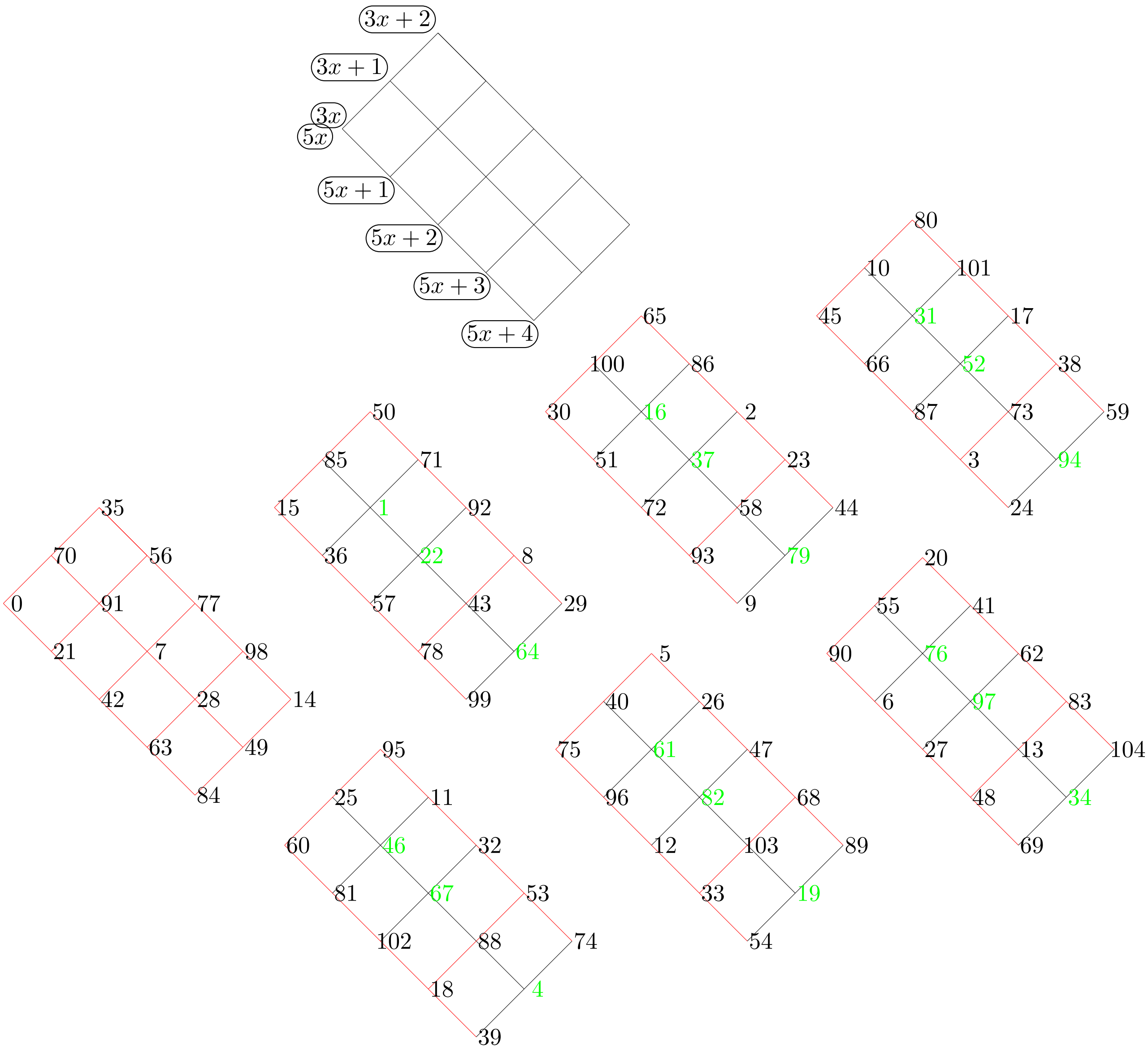

Figure 3 : en vert, nombres restant dans le treillis une fois éliminés :

- les nombres de reste nul dans une division par 3 (lignes rouges en bords inférieurs des étages du treillis),
- les nombres de reste nul dans une division par 5 (lignes rouges en bords gauches des étages du treillis),
- les nombres de reste nul dans une division par 7 (lignes rouges dans toute la “plaque” des $7x$),
- les nombres de reste identique au reste de 98 dans une division par 3 (lignes rouges $3x+2$ à chaque étage),
- les nombres de reste identique au reste de 98 dans une division par 5 (lignes rouges $5x+3$ à chaque étage),
- les nombres de reste identique au reste de 98 dans une division par 7 (déjà éliminés : lignes rouges dans toute la “plaque” des $7x$).

3. Retour au problème de la recherche des décomposants de Goldbach de n supérieurs à $\sqrt{n}$, vus comme les points intérieurs d'un treillis de Minkowski

On a vu que les décomposants de Goldbach sont les points intérieurs des régions obtenues en effectuant au maximum deux cassures par direction[2], chaque direction correspondant à l'un des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$. Pour que les cassures correspondant au reste 0 selon tout module soient bien des cassures "dénombrables" (et non pas des bords, que l'on ne casse pas), on considère des parallélépipèdes dont les faces sont des rectangles de taille $(p_i+1)(p_j+1)$ avec p_i, p_j deux nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

En généralisant l'exercice qu'Armand Lafforêt propose à la passagère de l'avion dans la section 2 à la dimension k, on a que la taille de la k-tablette (avec $k = \pi(\sqrt{n})$) est

$$\prod_{\substack{p_i \text{ premier} \\ p_i \leq \sqrt{n}}} (p_i+1)$$

et que le nombre de cassures nécessaire pour, en fin de processus, n'avoir plus que des unités (i.e. ne plus avoir aucun point intérieur, à un croisement du maillage de Minkowski) est égal à

$$A = \prod_{\substack{p_i \text{ premier} \\ p_i \leq \sqrt{n}}} (p_i+1) - 1.$$

Or le nombre de cassures maximum pour ne conserver que des décomposants de Goldbach de n supérieurs à $\sqrt{n}$ est égal à $B = 2 \times (\pi(\sqrt{n}) - 1)$ avec $\pi(x)$ la notation habituelle pour le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

Voyons dans un tableau les valeurs de A et B pour n allant du carré d'un nombre premier au carré du nombre premier suivant.

n	$k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$	$\pi(k)-1$	$B = 2(\pi(k)-1)$	$A = \prod_{\substack{p_i \text{ premier} \\ p_i \leq \sqrt{n}}} (p_i+1) - 1$
de 10 à 24	3	1	2	$4-1=3$
de 26 à 48	5	2	4	$4\times 6-1=23$
de 50 à 120	7	3	6	$4\times 6\times 8-1=191$
de 122 à 168	11	4	8	$4\times 6\times 8\times 12-1=2304$
de 170 à 288	13	5	10	$4\times 6\times 8\times 12\times 14-1=32255$

Il y a ainsi de plus en plus de points de croisements du maillage qui ne sont pas "cassés", et qui, s'ils sont impairs, différents de 1 ou $n-1$ et inférieurs à $n/2$, sont autant de décomposants de Goldbach des nombres pairs considérés, ces points de croisements du maillage ayant été obtenus après avoir effectué deux cassures par direction, pour chaque direction correspondant à un nombre premier impair inférieur à $\sqrt{n}$.

On ne sait pas comment démontrer que l'un au moins des points qui n'étaient pas sur l'une des cassures (cassures pour éliminer les nombres de la forme $p_k \times x$ avec p_k un nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ - qui sont donc des nombres composés - et cassures pour éliminer les nombres appartenant à l'une des droites auxquelles n appartient - ces nombres ont leur complémentaire à n qui

[2]Pour la démonstration, se reporter à http://denise.vella.chemla.free.fr/jade1.pdf.

est composé) est forcément différent de 1, et est différent de $n-1$ et est inférieur à $n/2$, ce qui en fait un décomposant de Goldbach de n.

4. Ajout : la jolie multiplication par 16

On cherche dans ce treillis de taille $3 \times 5 \times 7$ une opération qui "fixerait" les $3k+1$ sur leur "ligne de nage" (en fait leur plan vertical ici), ainsi que les $5x+1$, les $5x+2$, les $5x+4$ dans leur couloir ou les $7x$ dans leur plan. On prend la multiplication par 16 (qui transforme un $7x$ en $7x$, un $3x+1$ en $3x'+1$, etc., dans la mesure où 16 est congru à l'unité mod 3 et 5). Cette multiplication par 16 transforme le triangle (64, 79, 4) en lui-même, ou bien son triangle symétrique (34, 19, 94) en lui-même en leur faisant subir une rotation de leurs sommets dans l'ordre énoncé. Il nous faudrait un argument qui assurerait l'existence d'un point (non congru à 0, non congru à n) sous prétexte qu'il serait fixe dans ce genre de transformation mais on n'arrive pas à trouver un tel argument (cf la démonstration de Don Zagier pour les nombres premiers $4k+1$ sommes de deux carrés).

On dessine cette multiplication par 16 "en petit", ci-dessous : elle laisse invariants les triangles (34, 19, 94), (64, 79, 4) mais également le triangle (31,76,61) ou le triangle (37,67,22). On a positionné dans ces triangles les décomposants qui interviennent dans les 3 décompositions de Goldbach de 98, $19+79 = 31+67 = 37+61$. Ils sont ainsi tous fixes par multiplication par 16^3. Malgré la découverte de ces transformations de triangles qui a été guidée par une intuition géométrique très classique, on n'a toujours pas l'argument qui assure l'existence d'un décomposant de Goldbach au moins.

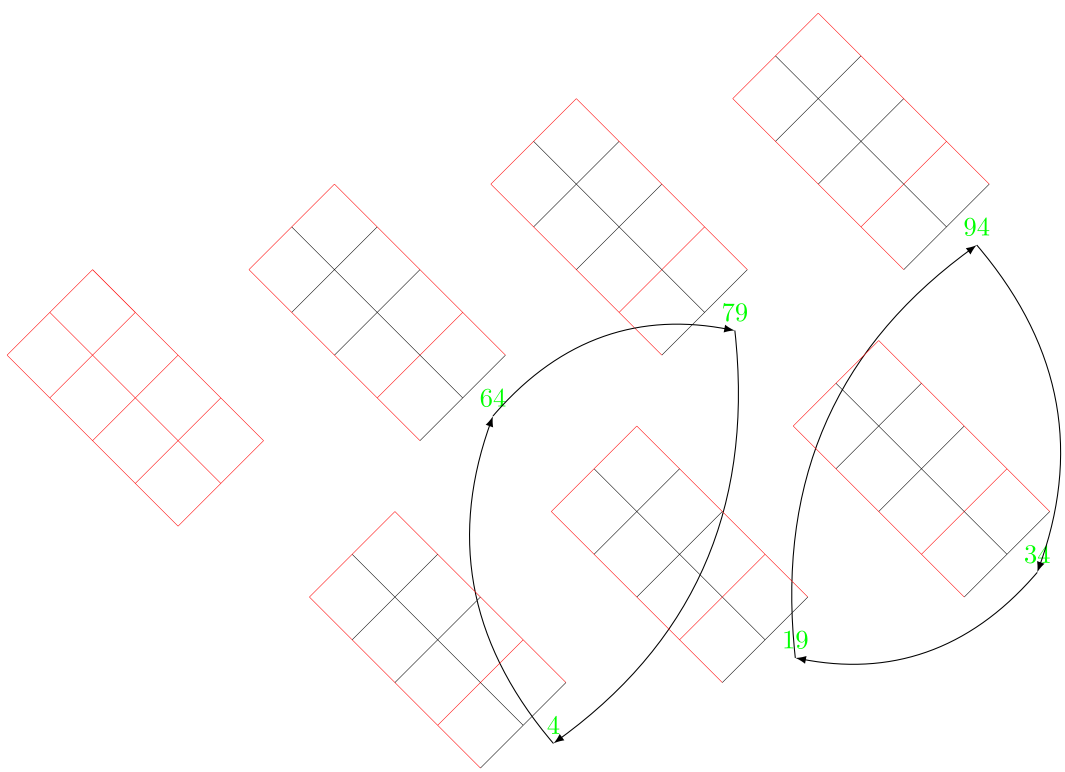

Figure 4 : deux petits triangles fixes par multiplication par 16.

Annexe : extrait du premier chapitre du roman “Le Spectre d’Atacama” de Danye Chéreau, Alain Connes et Jacques Dixmier, 2018[3]

- Votre tablette de chocolat, par exemple, pourrait m’aider à vous donner un avant-goût des maths. Supposez que je vous demande le nombre de cassures nécessaire pour découper la tablette en carrés de chocolat individuels.

Armand laisse sa voisine contempler sa tablette puis se mettre à couper une rangée de quatre carreaux. Et là elle s’amuse à réduire sa rangée en petits carreaux, mais reste perplexe.

- J’ai expérimenté avec une rangée de quatre carreaux, et j’ai constaté qu’il suffisait de trois cassures, dit-elle en lui tendant une nouvelle rangée.
- Effectivement. Si je prends cette rangée de quatre carreaux, dit-il joignant le geste à la parole, on voit qu’il suffit de trois cassures, mais on s’aperçoit aussi que, de toute façon, il faut toujours exactement trois cassures pour réduire une rangée de 4 carreaux en 4 carreaux individuels.
- Oui. Mais pour ma grande tablette en entier ?
- Si vous me permettez, je peux essayer de vous guider. Votre tablette est de longueur 6 et de largeur 4, et il est plus difficile de réfléchir au problème dans ce cas particulier que dans le cas général où longueur et largeur peuvent être choisies à loisir.
- D’accord. Si je comprends bien, vous me proposez de remplacer un problème particulier par de nombreux autres ? Je suis désolée, mais en quoi cela va-t-il être plus facile ?
- L’intérêt d’avoir généralisé le problème initial, c’est que l’on peut maintenant prendre des tablettes plus simples, et c’est exactement le geste que vous avez fait en prenant une rangée de quatre carreaux. Manifestement vous avez compris ce qui se passe pour une tablette d’une seule rangée.

Elle fait un nouvel essai, puis réfléchit quelques instants.

- Ah oui, cela devient plus clair. Il faudra quatre cassures pour une rangée de cinq carreaux. Et ce sera pareil pour toutes les tablettes avec une seule rangée de carreaux : il faudra une cassure de moins que le nombre de carreaux.
- Très bien, vous comprenez vite. Maintenant je vous laisse réfléchir à ce qui se passe pour une tablette de longueur 2 et de largeur 2. [...] Vous verrez qu’au bout d’un moment, après avoir pris suffisamment d’exemples, vous allez comprendre le cas général.
- Chiche !
- Je préfère ne pas vous donner la réponse tout de suite, car l’un des plaisirs des maths est de chercher et de trouver par soi-même. Divulguer trop tôt la réponse gâche le plaisir. La gourmande est ravie. Ses yeux brillent. L’envie de chercher la saisit. Il la laisse se concentrer sur le reste de sa tablette. [...]

[3] légèrement modifié.

- J'ai bien essayé toutes les manières de découper une tablette carrée de quatre carreaux, je constate qu'il faut toujours trois cassures. J'ai aussi essayé avec une tablette rectangulaire de trois carreaux par deux, ce qui fait six carreaux au total : il faut alors cinq cassures.

- Quelle intuition avez-vous à ce stade ?

- Eh bien, avec quatre carreaux il faut toujours trois cassures, quelle que soit la configuration des carreaux, avec cinq carreaux il faut quatre cassures, avec six carreaux c'est cinq. J'aurais donc tendance à dire que le nombre de cassures est égal au nombre de carreaux moins un, mais je ne vois pas trop comment en être sûre dans tous les cas.

- Effectivement, reprend Armand, le mathématicien fait ici une constatation : dans tous ces exemples, le nombre de cassures est indépendant de la manière de procéder et est égal au nombre de carreaux moins un.
  Voici comment il démontre que cela reste vrai dans le cas général : il va avancer comme on gravit une échelle. Il fait l'hypothèse que sa constatation est vraie, d'un point de vue mathématique, pour toutes les tablettes dont la taille, c'est-à-dire le nombre de carreaux, est plus petite que le nombre d'échelons, de marches, qu'il vient de gravir.

- Si je vous suis, j'ai atteint la sixième marche, puisque j'ai essayé toutes les tablettes jusqu'à six carreaux.

- Exactement. Et je vais vous expliquer comment on peut toujours passer à la marche suivante. Imaginons une tablette légèrement plus grande. Nous allons la casser en deux parties, peu importe où. Comme on a franchi les marches précédentes, on sait que pour chacune de ces deux parties le nombre de cassures est égal au nombre de carreaux moins un.

- Et si je vous suis toujours, on sait aussi que cela est vrai quelle que soit la manière de procéder dans chacune des deux parties.

- Oui! Récapitulons. La tablette initiale peut se voir comme la réunion des deux parties que nous avons séparées. Des cassures, il en faut donc le nombre de carreaux de la première partie moins 1 plus le nombre de carreaux de la deuxième partie moins 1, ce qui nous donne la somme du nombre de carreaux de chacune des parties moins 2. Or la somme du nombre de carreaux de chacune des parties n'est autre que le nombre total de carreaux de la tablette initiale. Mais n'oublions pas que nous avons au départ cassé la tablette en deux. Il faut donc ajouter cette première cassure au décompte, et là où nous soustrayions 2, nous ne devons donc plus retirer que 1. Finalement, on arrive ainsi au résultat final : il faut une cassure de moins que le nombre de carreaux de la tablette de départ. Cette manière de procéder en gravissant un à un les échelons est une méthode générale de démonstration qui s'appelle la récurrence.

- C'est fascinant. Mais il va quand même falloir que je joue avec ce truc de l'échelle pour me l'approprier.

- Cet exemple illustre la démarche du mathématicien. Un problème peut paraître compliqué à première vue, mais lorsqu'on a le bon point de vue, lorsqu'on pense juste, on arrive au résultat presque sans effort. On sait que pour votre tablette de longueur 6 et de largeur 4, il faudra toujours 23 cassures !