Analyse de conformité du programme `python` de l'ia chatgpt avec la construction spectrale de Connes-Consani-Moscovici telle qu'indiquée dans leur article de référence et la construction de matrice de Galerkin de l'article de Connes-van-Suijlekom

Denise Vella-Chemla, 22 juillet 2026

1. Résumé

Ce document compare le programme Python pédagogique `ccm_zeros.py` avec la construction mathématique présentée principalement dans *Zeta Spectral Triples* de Connes, Consani et Moscovici [2]. L'objectif est de distinguer les formules effectivement implémentées des spécifications de l'article et d'identifier précisément les simplifications introduites pour obtenir un programme court et compréhensible.

2. Conclusion en une page

Le programme implémente correctement la structure centrale suivante :

$$\lambda^2 \longrightarrow L = \log(\lambda^2) \longrightarrow \tau_{n,m} \longrightarrow (\varepsilon_N, \xi_\lambda) \longrightarrow R(z) \longrightarrow \text{racines}.$$

La construction de la matrice τ reprend la décomposition de la forme quadratique de Weil en :

- terme de pôle
- terme archimédien
- terme non archimédien.

Les écarts majeurs avec les expériences de l'article sont cependant :

1. le programme utilise la double précision IEEE-754 ;
2. il utilise $N = 10$, alors que les expériences publiées utilisent notamment $N = 120$;
3. il calcule les racines du numérateur par `numpy.roots`, méthode fragile pour les degrés et précisions concernés ;
4. il ne construit pas explicitement toute la perturbation de rang un $D_{\log}^{(\lambda,N)}$;
5. il ne construit pas le prolate wave operator PW_λ ;
6. il ne réalise pas l'étude systématique de convergence en N et λ.

Le programme est donc une **traduction pédagogique partielle fidèle dans sa structure**, mais non une reproduction numérique de référence des résultats à 50, 100 ou plusieurs centaines de chiffres.

3. Paramètre L

L'article utilise :

$$L = 2 \log \lambda.$$

Le programme reçoit λ^2 et pose :

$$L = \log(\lambda^2).$$

Ces deux expressions sont exactement égales.

Pour $\lambda^2 = 13$:

$$\lambda = \sqrt{13}, \qquad L = \log 13.$$

4. Troncature de Fourier

Le programme utilise les indices :

$$n = -N, \dots, N,$$

et construit une matrice de dimension :

$$2N + 1.$$

Cela correspond à la troncature de l'espace engendré par les fonctions V_n avec $|n| \leq N$.

Les pôles du générateur de dilatation sont :

$$\frac{2\pi n}{L}.$$

Cette partie est conforme à la construction de l'article.

5. Partie archimédienne

Le programme calcule :

$$\alpha_L(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \rho(x)\, dx,$$

$$\beta_L(n) = \frac{1}{L} \int_0^L x \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \rho(x)\, dx,$$

et

$$\gamma_L(n) = \int_0^L \left(\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) - e^{-x/2}\right) \rho(x)\, dx + c(L) + w(L).$$

La matrice archimédienne utilisée est :

$$W_R(V_n, V_m) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_L(m) - \alpha_L(n)}{n - m}, & n \neq m, \\ 2\gamma_L(n) - 2\beta_L(n), & n = m. \end{cases}$$

Cette partie correspond à la structure explicitement donnée dans l'article.

Le programme utilise :

$$\rho(x) = \frac{e^{x/2}}{2\sinh x}.$$

La correction locale près de $x = 0$ est une précaution numérique, et non une modification de la définition mathématique.

6. Partie arithmétique : puissances premières

Le programme parcourt :

$$k = p^j \leq \lambda^2$$

et associe à chaque terme le poids :

$$\frac{\log p}{\sqrt{k}}.$$

C'est bien la fonction de von Mangoldt :

$$\Lambda(p^j) = \log p.$$

Le programme inclut donc les puissances premières, et non uniquement les nombres premiers. Cette distinction est importante et conforme à la formule explicite de Weil.

7. Matrice de Weil

Le programme utilise :

$$\tau_{n,m} = \mathrm{pole}_{n,m} - \mathrm{arch}_{n,m} - \mathrm{prime}_{n,m}.$$

Le terme de pôle est :

$$32L\sinh^2\left(\frac{L}{4}\right)\frac{L^2 - 16\pi^2 mn}{(16\pi^2 m^2 + L^2)(16\pi^2 n^2 + L^2)}.$$

Pour $n \neq m$, le terme arithmétique est :

$$\sum_{k=p^j\leq\lambda^2}\frac{\Lambda(k)}{\sqrt{k}}\,\frac{\sin\left(\dfrac{2\pi m\log k}{L}\right) - \sin\left(\dfrac{2\pi n\log k}{L}\right)}{\pi(n-m)}.$$

Pour $n = m$, ce terme vaut :

$$\sum_{k=p^j\leq\lambda^2}\frac{\Lambda(k)}{\sqrt{k}}2\left(1 - \frac{\log k}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi n\log k}{L}\right).$$

La structure de la matrice est donc conforme à la forme quadratique de Weil tronquée.

8. Extraction de l'état minimal

Le programme diagonalise :

$$\tau v = \varepsilon v$$

et prend la plus petite valeur propre :

$$\varepsilon_N = \min \mathrm{Spec}(\tau).$$

Le vecteur propre correspondant est appelé ξ_λ.

Cette étape est conforme au rôle du vecteur propre minimal de la forme quadratique de Weil.

Le programme normalise ensuite :

$$\|\xi_\lambda\|_2 = 1.$$

Cette normalisation ne change pas les zéros de la fonction rationnelle : multiplier tous les coefficients par une constante non nulle ne change pas ses racines.

9. Première différence majeure : précision numérique

L'article réalise ses expériences avec une précision multiprécision élevée.

Le programme utilise des nombres `float64`, soit environ 15–16 chiffres décimaux significatifs.

Il est donc impossible de reproduire avec fiabilité des erreurs annoncées de l'ordre de :

$$10^{-30}, \quad 10^{-50}, \quad 10^{-100},$$

avec ce programme.

Même si les formules sont correctes, le calcul est limité par :

- la précision de la quadrature ;
- la précision de la matrice ;
- la précision de la diagonalisation ;
- la précision du calcul des racines.

C'est le principal écart entre le programme pédagogique et le programme Rust haute précision de référence.

10. Deuxième différence majeure : $N = 10$ au lieu de $N = 120$

La version pédagogique utilise :

$$N = 10, \qquad 2N + 1 = 21.$$

L'article utilise notamment :

$$N = 120$$

dans ses expériences numériques.
Le choix $N = 10$ est parfaitement acceptable pour comprendre la mécanique de la construction, mais il ne permet pas de reproduire les résultats publiés.

La comparaison pertinente avec les expériences de l'article exige au minimum une configuration de type :

$$\lambda = \sqrt{13}, \qquad N = 120,$$

avec une arithmétique multiprécision.

11. La fonction rationnelle

Le programme définit :

$$R(z) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\xi_n}{z - \dfrac{2\pi n}{L}}.$$

L'article utilise la convention équivalente :

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{\xi_n}{\dfrac{2\pi n}{L} - z}.$$

Les deux expressions diffèrent par un signe global :

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z}.$$

Les zéros sont donc identiques.

Cette partie est conceptuellement conforme à la relation entre le vecteur propre minimal et le déterminant régularisé de l'opérateur tronqué.

12. Troisième différence majeure : calcul des racines par polynôme

Le programme met la fonction rationnelle au même dénominateur :

$$R(z) = \frac{P(z)}{\displaystyle\prod_{n=-N}^{N} (z - 2\pi n/L)}$$

et calcule les racines de P par :

`numpy.roots`.

Mathématiquement, cette transformation est correcte.

Numériquement, elle est fragile, car les coefficients du polynôme sont obtenus par des produits et des annulations qui deviennent mal conditionnés lorsque N augmente.

Une implémentation fidèle devrait plutôt :

1. conserver la fonction rationnelle ;
2. utiliser une arithmétique multiprécision ;
3. localiser les zéros par une méthode stable ;
4. ou exploiter directement la structure spectrale de l'opérateur.

Le programme actuel ne doit donc pas être utilisé pour prétendre à une précision extrême.

13. Ordre des zéros

Le programme trie les racines selon leur partie réelle puis compare les racines positives avec :

$$14.134725\ldots, \quad 21.022039\ldots, \quad 25.010857\ldots$$

Cette comparaison est utile mais trop naïve pour une validation complète.

Il faut distinguer :

- les racines de la fonction rationnelle tronquée ;
- les valeurs propres de l'opérateur spectral ;
- les zéros de $\zeta(1/2 + it)$.

Le fait qu'une racine soit proche d'un zéro de Riemann ne prouve pas à lui seul qu'elle est le zéro de même indice dans une théorie de convergence.

Une validation correcte doit apparier les spectres, contrôler l'ordre et répéter l'expérience lorsque N et λ varient.

14. Quatrième différence : l'opérateur $D_{\log}^{(\lambda,N)}$ n'est pas construit explicitement

L'article construit une perturbation de rang un de l'opérateur de dilatation :

$$D_{\log} V_j = \frac{2\pi j}{L} V_j.$$

Le programme ne construit pas explicitement cette perturbation.

Il utilise directement la formule donnant la fonction rationnelle associée au vecteur ξ_λ.

C'est une réduction pédagogique légitime, mais le programme n'est pas une implémentation complète de toute la construction opératorielle.

15. Cinquième différence : le prolate wave operator est absent

L'article introduit :

$$PW_\lambda = -\partial_x\Big((\lambda^2 - x^2)\partial_x\Big) + (2\pi\lambda x)^2.$$

Le programme ne construit pas cet opérateur.

Il ne calcule donc pas :

- les fonctions propres prolate ;
- les valeurs propres h_0 et h_4 ;
- l'approximation k_λ de ξ_λ ;
- l'erreur relative entre ξ_λ et k_λ ;
- le test de la prédiction de type λ^{-2}.

Il ne reproduit donc pas le volet prolate de l'article.

16. Symétrisation numérique

Le programme remplace finalement τ par :

$$\frac{\tau + \tau^T}{2}.$$

Mathématiquement, la matrice exacte est symétrique.

La symétrisation numérique est donc raisonnable, mais elle masque les éventuelles erreurs d'implémentation ou d'arrondi.

Pour une validation, il serait préférable de mesurer avant symétrisation :

$$\|\tau - \tau^T\|.$$

17. Quadrature

Les intégrales exactes de l'article sont remplacées par une quadrature de Gauss-Legendre d'ordre fini, par exemple :

$$\texttt{quad\_order} = 300.$$

Cette approximation est acceptable pour un programme pédagogique, mais elle doit être contrôlée par une étude de convergence :

$$300,\ 500,\ 800, \ldots$$

Sans cette vérification, une variation des résultats peut provenir de la quadrature plutôt que de la construction spectrale.

18. Ce qui n'est pas une différence

Certaines différences apparentes ne sont pas des erreurs :

18.1. Le choix de λ^2 comme entrée

Le programme utilise λ^2 car l'article fait intervenir la coupure arithmétique :

$$p \leq \lambda^2.$$

C'est une convention d'entrée pratique.

18.2. Le signe de la fonction rationnelle

Les dénominateurs $z - a$ et $a - z$ ne changent les zéros que par un facteur global -1.

18.3. La normalisation de ξ

Multiplier ξ par une constante non nulle ne modifie pas les zéros de $R(z)$.

19. Tableau final

Élément	Article	Programme Python
L	$2\log\lambda$	$\log(\lambda^2)$, identique
Modes	$-N, \ldots, N$	conforme
Dimension	$2N+1$	conforme
α, β, γ	formules exactes	quadrature numérique
Puissances premières	$\Lambda(p^j)$	conforme
Matrice de Weil	forme quadratique tronquée	structure conforme
Précision	multiprécision	float64
Troncature expérimentale	notamment $N = 120$	$N = 10$
Vecteur minimal	oui	oui
$D_{\log}^{(\lambda,N)}$	construit explicitement	non
Prolate PW_λ	présent	absent
Racines	calcul haute précision/stable	`numpy.roots`
Convergence	étudiée	non étudiée systématiquement

20. Conclusion détaillée

Le programme doit être décrit comme une :

traduction pédagogique partielle de la construction CCM

et non comme une reproduction complète du programme de référence ou des expériences numériques de l'article.

La partie la plus solide est :

forme quadratique de Weil
↓
matrice tronquée
↓
état minimal
↓
fonction rationnelle

Les principales corrections à apporter pour une version réellement quantitative sont :

multiprécision
+
$N \approx 120$
+
racines calculées de manière stable
+
contrôles de convergence

Enfin, la version Python actuelle ne permet pas de conclure que les zéros calculés reproduisent ceux de Riemann avec la précision annoncée dans l'article. Elle permet en revanche de comprendre et d'explorer la chaîne mathématique centrale sur laquelle repose la construction.

21. Références

- A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, *Zeta Spectral Triples*, arXiv :2511.22755v1. https://arxiv.org/pdf/2511.22755
- A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, *Zeta zeros and prolate wave operators : semilocal adelic operators*, Annals of Functional Analysis, 2024.
  Prépublication sur Arxiv https://arxiv.org/pdf/2310.18423v2

- A. Connes, W. D. van Suijlekom, *Quadratic Forms, Real Zeros and Echoes of the Spectral Action*, arXiv :2511.23257.
https://arxiv.org/pdf/2511.23257