

Conjecture de Goldbach et Formule du Crible de Poincaré

Denise Vella-Chemla

3/6/9

1 Introduction

Dans cette note est présentée une méthode de calcul d'une borne inférieure pour le nombre de décomposants de Goldbach qui pourrait amener à une démonstration de la conjecture de Goldbach.

2 Présentation d'un exemple qui explicite la méthode de calcul d'une borne inférieure pour le nombre de décomposants de Goldbach

Intéressons nous au cas $2x = 60$ (ou bien $x = 30$). On va noter dans un tableau par des 0 le fait que certains nombres soient divisibles par les nombres impairs compris entre 3 et $2 * \lfloor \sqrt{30} \rfloor + 1$.

57	55	53	51	49	47	45	43	41	39	37	35	33	31	
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	
				0	–	–	–	–	–	–	–	0	–	<i>divisibilité par 11</i>
			0	–	–	0	–	–	–	–	–	0	–	<i>divisibilité par 9</i>
		0	–	0	–	–	–	–	0	–	0	–	–	<i>divisibilité par 7</i>
	0	–	–	–	–	0	–	–	–	–	0	–	–	<i>divisibilité par 5</i>
0	–	–	0	–	–	0	–	–	0	–	–	0	–	<i>divisibilité par 3</i>

Sur la dernière ligne, on constate que 3 divisant 30 (ou 60), les nombres dont la somme vaut 60 (comme 3 et 57, ou bien 9 et 51) sont simultanément divisibles par 3.

Même constat sur la ligne montrant la divisibilité par 5.

Par contre, 7, 9 et 11 ne divisant pas 30, la divisibilité des nombres a été codée en noir pour les nombres inférieurs à 30 et en bleu pour ceux supérieurs à 30.

Les colonnes ne contenant aucun zéro fournissent trivialement les décomposants de Goldbach les plus grands pour le nombre pair 60, puisque ces colonnes correspondent à des nombres qui ne sont divisibles par aucun des nombres impairs compris entre 3 et $2\sqrt{x} + 1$, i.e. des nombres premiers.

On calcule aisément le nombre $f(2x, j)$ de cases de la ligne j de la grille associée à $2x$ contenant un zéro. Pour cela, posons $impair = 2 * j + 1$ et

$$moitie = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor.$$

$f(2x, j)$ se calcule alors par la formule suivante :

$$f(2x, j) = \left\lfloor \frac{(moitie - j + 1) * tempo}{impair} \right\rfloor.$$

avec $tempo$ qui vaut 1 si $impair$ divise $2x$ ou qui vaut 2 si $impair$ ne divise pas $2x$.

Pour chaque module impair $2 * j + 1$ pris indépendamment, la probabilité qu'une case de la ligne j contienne un zéro est égale à $\frac{f(2x, j)}{moitie}$.

En combinatoire, le principe d'inclusion-exclusion permet d'exprimer le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une réunion finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Il se traduit directement en termes de probabilités.

Il est attribué au mathématicien Abraham de Moivre, et connu également (lui ou sa version probabiliste) sous le nom de formule du crible de Poincaré. On applique cette formule lorsqu'on veut calculer la probabilité qu'au moins un événement, parmi plusieurs événements indépendants, se réalise.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, appelons A_1, \dots, A_n les n ensembles finis contenant les indices des colonnes de chaque ligne contenant un zéro, la formule pour les ensembles finis s'écrit :

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right)$$

Appliquer la formule du crible de Poincaré nous permet d'obtenir une borne inférieure $f(2x)$ pour le nombre de colonnes de la grille associée à $2x$ qui ne contiennent aucun zéro. On note que le nombre calculé est d'ailleurs strictement inférieur au nombre de décomposants de Goldbach du nombre pair $2x$ que l'on considère puisque notre méthode ne permet d'obtenir que les décomposants de Goldbach de $2x$ les plus grands. On obtient une borne strictement inférieure au nombre de colonnes sans zéro car une observation simple des zéros noirs en diagonale à l'extrémité gauche des grilles montrent que ces probabilités ne sont pas indépendantes dans la réalité (dit autrement, le premier nombre non nul divisible par 5 est exactement égal au premier nombre non nul divisible par 3 augmenté de 2).

En annexe 1 est fourni le programme qui calcule les décomposants de Goldbach des nombres pairs compris entre 22 et 100 par la méthode des sinusoides présentée dans la note [6] ainsi que son résultat en annexe 2. En annexe 3 sont fournies les représentations graphiques par des grilles de la divisibilité des nombres de 3 à $2x - 3$ pour les nombres pairs $2x$ compris entre 22 et 100.

Le calcul du nombre de colonnes sans zéro estimé par ce calcul sommaire (voir programme en annexe 4 et son résultat en annexe 5) nous montre qu'il

est toujours supérieur ou égal à 1 à partir du nombre pair 36. Dans l'annexe 3 sont fournis pour chaque nombre pair le nombre effectif de colonnes sans zéro ainsi que le nombre de colonnes sans zéro calculé par l'application de la formule du crible de Poincaré. Il doit être aisé de démontrer que la probabilité ainsi calculée ne sera jamais nulle pour tout nombre pair supérieur ou égal à 36.

Bibliographie

- [1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
- [2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impériale 3, 1751, p.10-31.
- [4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
- [5] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss, 20 mai 2009.
- [6] D. Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach, Conjecture des nombres premiers jumeaux, test de primalité et sinusoides, 27 mai 2009.
- [7] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.

Annexe 1 : Source du programme de calcul des décomposants de Goldbach des nombres pairs de 22 à 100

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{
    const double pi=acos(-1) ;
    int x, ligne, colonne, moitié, decomp ;
    float tempol, tempo2 ;
    int tab[100][100] ;

    for (x=13 ; x <= 50 ; x++)
    {
        std::cout << "\n" ;
        moitié = (x-1)/2 ;
        for (ligne = 1 ; ligne <= floor(sqrt(x)) ; ligne++)
            for (colonne = 1 ; colonne <= moitié ; colonne++)
            {
                tab[ligne][colonne] = 1 ;
                tempol = ((colonne-ligne)*pi)/(2*ligne+1) ;
                if ((sin(tempol) < 0.00001) && (sin(tempol) > -0.00001))
                    tab[ligne][colonne] = 0 ;
                tempo2 = ((colonne-(x%(2*ligne+1))+ligne)*pi)/(2*ligne+1) ;
                if ((sin(tempo2) < 0.00001) && (sin(tempo2) > -0.00001))
                    tab[ligne][colonne] = 0 ;
            }
        for (colonne = 1 ; colonne <= moitié ; colonne++)
        {
            decomp = 1 ;
            for (ligne = 1 ; ligne <= floor(sqrt(x)) ; ligne++)
                if (tab[ligne][colonne] == 0) decomp = 0 ;
            if (decomp == 1)
            {
                std::cout << 2*colonne+1 << "_est_un_décomposant_de_" ;
                std::cout << 2*x << "\n" ;
            }
        }
    }
}
```

Annexe 2 : Résultat du programme de calcul des décomposants de Goldbach des nombres pairs de 22 à 100

13 est un décomposant de 26
11 est un décomposant de 28
11 est un décomposant de 30
13 est un décomposant de 30
13 est un décomposant de 32
11 est un décomposant de 34
17 est un décomposant de 34
13 est un décomposant de 36
17 est un décomposant de 36
19 est un décomposant de 38
11 est un décomposant de 40
17 est un décomposant de 40
11 est un décomposant de 42
13 est un décomposant de 42
19 est un décomposant de 42
13 est un décomposant de 44
17 est un décomposant de 46
23 est un décomposant de 46
11 est un décomposant de 48
17 est un décomposant de 48
19 est un décomposant de 48
13 est un décomposant de 50
19 est un décomposant de 50
23 est un décomposant de 52
13 est un décomposant de 54
17 est un décomposant de 54
23 est un décomposant de 54
13 est un décomposant de 56
19 est un décomposant de 56
17 est un décomposant de 58
29 est un décomposant de 58
13 est un décomposant de 60
17 est un décomposant de 60
19 est un décomposant de 60
23 est un décomposant de 60
29 est un décomposant de 60
19 est un décomposant de 62
31 est un décomposant de 62
17 est un décomposant de 64
23 est un décomposant de 64
13 est un décomposant de 66
19 est un décomposant de 66
23 est un décomposant de 66
29 est un décomposant de 66
31 est un décomposant de 68
17 est un décomposant de 70
23 est un décomposant de 70

29 est un décomposant de 70
 19 est un décomposant de 72
 29 est un décomposant de 72
 31 est un décomposant de 72

 31 est un décomposant de 74
 37 est un décomposant de 74

 17 est un décomposant de 76
 23 est un décomposant de 76
 29 est un décomposant de 76

 17 est un décomposant de 78
 19 est un décomposant de 78
 31 est un décomposant de 78
 37 est un décomposant de 78

 19 est un décomposant de 80
 37 est un décomposant de 80

 23 est un décomposant de 82
 29 est un décomposant de 82
 41 est un décomposant de 82

 17 est un décomposant de 84
 23 est un décomposant de 84
 31 est un décomposant de 84
 37 est un décomposant de 84
 41 est un décomposant de 84

 19 est un décomposant de 86
 43 est un décomposant de 86

 17 est un décomposant de 88
 29 est un décomposant de 88
 41 est un décomposant de 88

 17 est un décomposant de 90
 19 est un décomposant de 90
 23 est un décomposant de 90
 29 est un décomposant de 90
 31 est un décomposant de 90
 37 est un décomposant de 90
 43 est un décomposant de 90

 19 est un décomposant de 92
 31 est un décomposant de 92

 23 est un décomposant de 94
 41 est un décomposant de 94
 47 est un décomposant de 94

 17 est un décomposant de 96
 23 est un décomposant de 96
 29 est un décomposant de 96
 37 est un décomposant de 96
 43 est un décomposant de 96

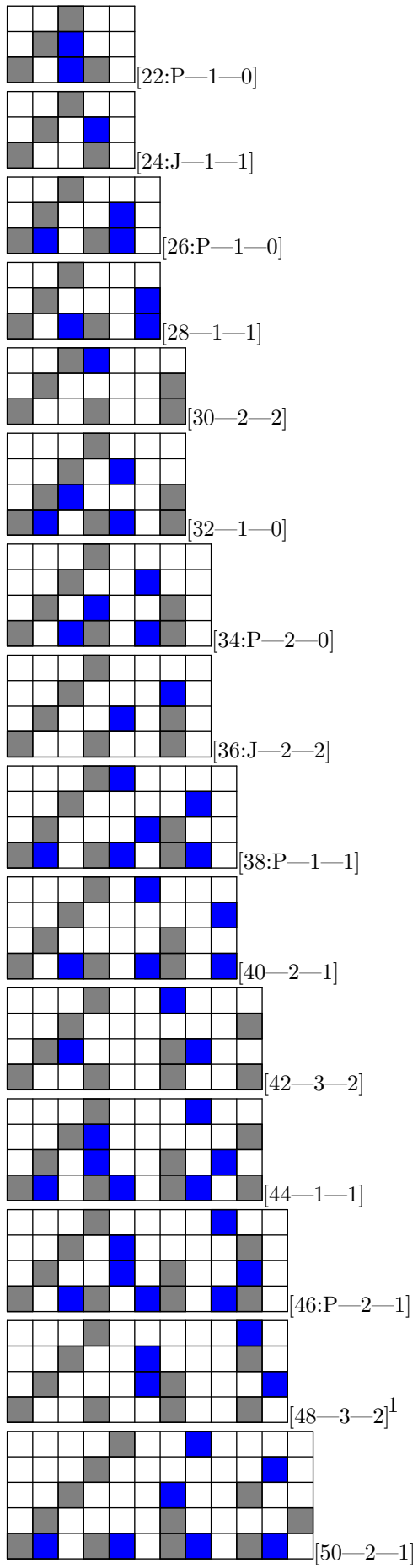
 19 est un décomposant de 98
 31 est un décomposant de 98
 37 est un décomposant de 98

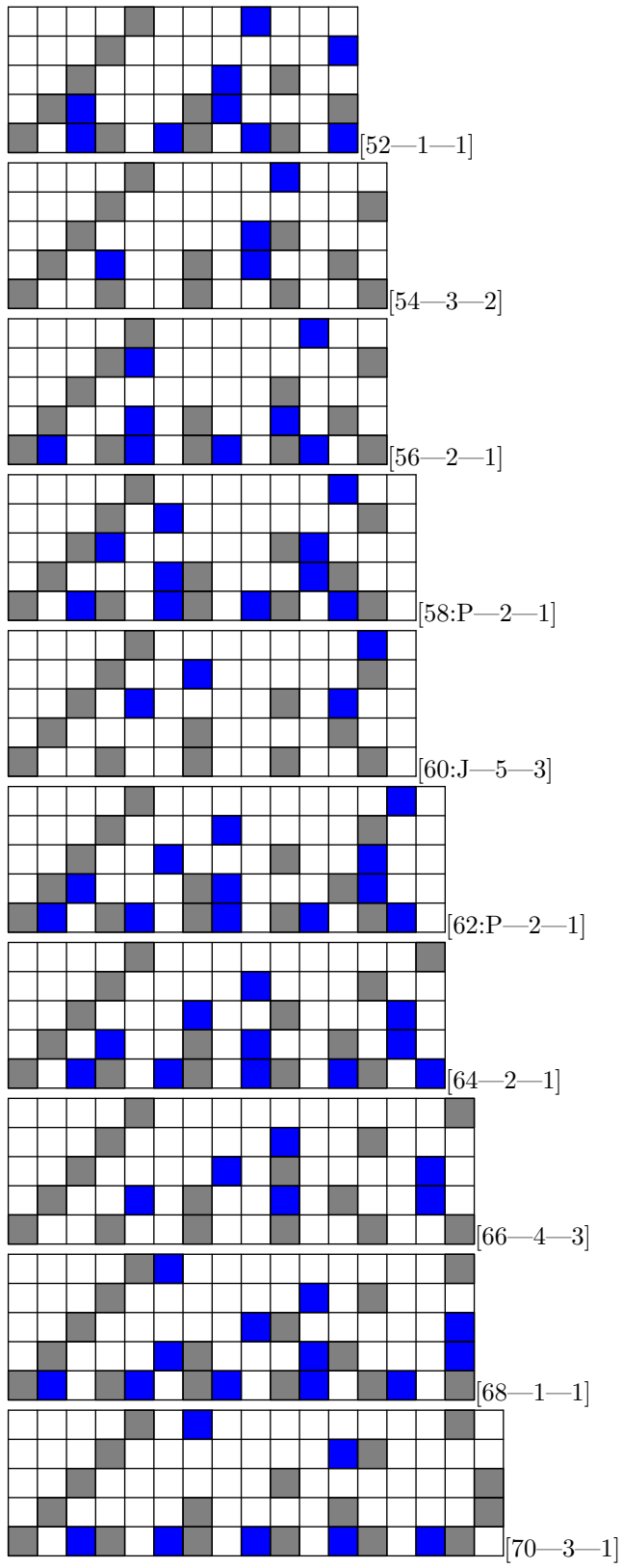
 17 est un décomposant de 100
 29 est un décomposant de 100
 41 est un décomposant de 100
 47 est un décomposant de 100

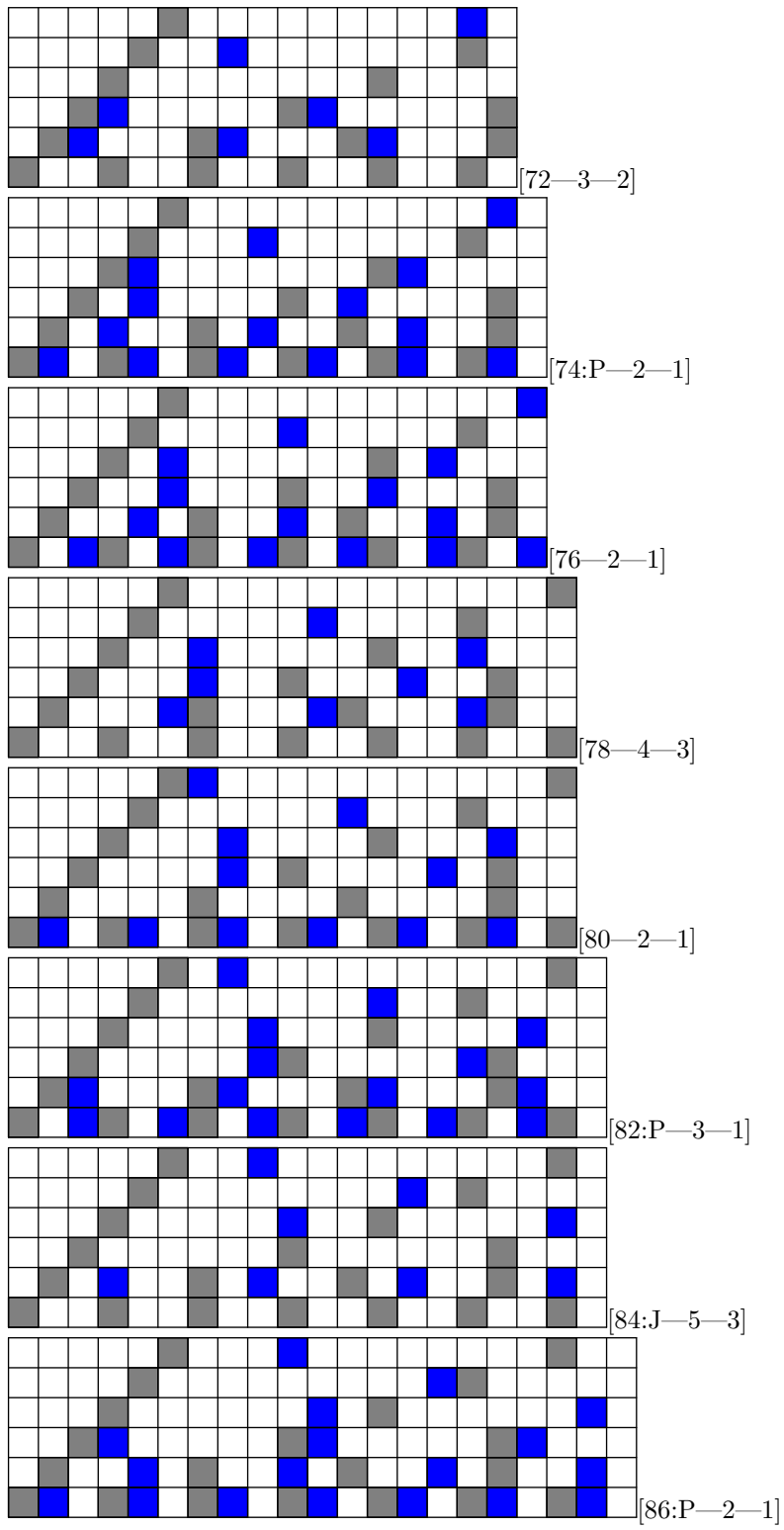
Annexe 3 : Représentation graphique de la divisibilité

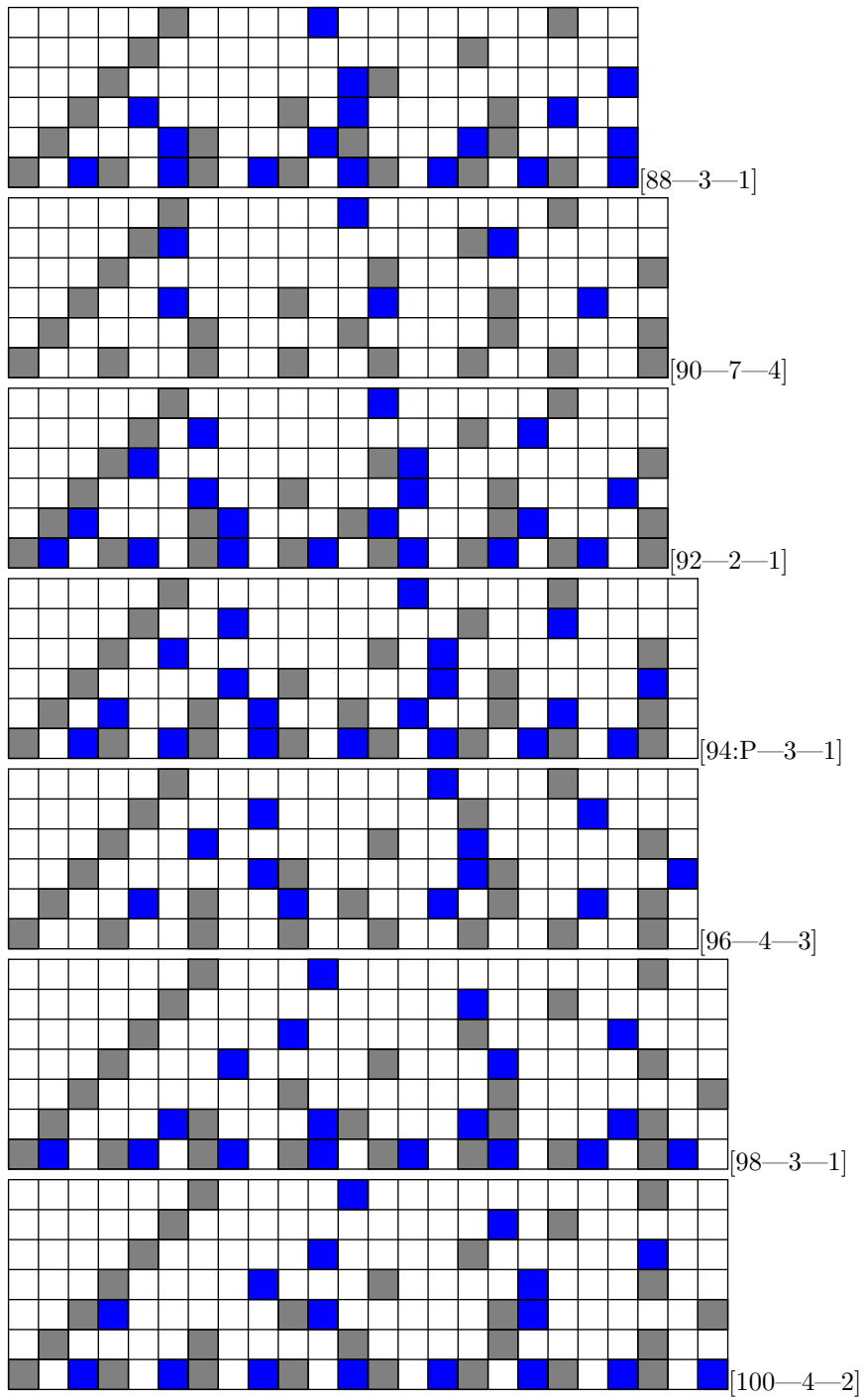
Les grilles suivantes sont à lire de la manière suivante : pour chaque nombre pair $2x$ compris entre 22 et 100, la colonne i pour i compris entre 1 et $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$

correspond à l'un des deux nombres impairs $2i + 1$ et $2x - 2i - 1$. Les lignes quant à elles correspondent aux nombres impairs de 3 (en bas de la grille) à $2\sqrt{x} + 1$ (en haut de la grille). Le fait de colorier une case en noir (resp. en bleu) signifie que le nombre correspondant à la ligne divise celui correspondant à la colonne, celui-ci étant compris entre 3 et x (resp. celui-ci étant compris entre x et $2x$). À droite de chaque grille, on fournit le nombre pair considéré, la lettre P pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre premier ou la lettre J pour signifier que ce nombre est le double d'un nombre pair entre deux nombres premiers jumeaux. Puis est fourni le nombre effectif de colonnes sans zéro du tableau, qui correspondent aux décompositions de Goldbach du nombre pair considéré qui font intervenir les nombres premiers les plus grands, et enfin, le nombre calculé par la formule du crible de Poincaré, dont on voit qu'elle est systématiquement inférieure ou égale au nombre de colonnes sans zéro de la grille. Le problème est que ce second nombre est nul pour les nombres pairs 22, 26, 32 et 34 mais l'on pressent qu'il ne doit pas être difficile de démontrer qu'il ne s'annulera plus jamais pour tout nombre pair supérieur ou égal à 36.









Annexe 4 : Programme de calcul d'une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach de 2x un nombre pair compris entre 22 et 100

```

#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{
    int i, j, impair, moitie, racine ;
    double res, resglob, tempo ;

    for (i = 22 ; i <= 1000 ; i = i+2)
    {
        res = 0.0 ;
        resglob = 0.0 ;
        racine = sqrt(i/2) ;
        for (j = 1 ; j <= racine ; j++)
        {
            impair = 2*j+1 ;
            moitie = ((i/2)-1)/2 ;
            if (i % impair == 0) tempo = 1.0 ;
            else tempo = 2.0 ;
            res = ceil(((moitie-j+1)*(tempo/(double)(impair)))) ;
            res = res / moitie ;
            resglob = resglob+res-resglob*res ;
        }
        std::cout << "f(" << i << ")_=-" << floor(moitie*(1-resglob)) << "\n" ;
    }
}

```

Annexe 5 : Résultat du programme de calcul d'une borne inférieure au nombre de décomposants de Goldbach de 2x un nombre pair compris entre 22 et 100

```

proba(26) = 0.851852 f(26) = 0
proba(28) = 0.814815 f(28) = 1
proba(30) = 0.708455 f(30) = 2
proba(32) = 0.900042 f(32) = 0
proba(34) = 0.912109 f(34) = 0
proba(36) = 0.743652 f(36) = 2
proba(38) = 0.887974 f(38) = 1
proba(40) = 0.843164 f(40) = 1
proba(42) = 0.7696 f(42) = 2
proba(44) = 0.8992 f(44) = 1
proba(46) = 0.896728 f(46) = 1
proba(48) = 0.759033 f(48) = 2
proba(50) = 0.869792 f(50) = 1
proba(52) = 0.898727 f(52) = 1
proba(54) = 0.812288 f(54) = 2
proba(56) = 0.895716 f(56) = 1
proba(58) = 0.921461 f(58) = 1
proba(60) = 0.757021 f(60) = 3
proba(62) = 0.898311 f(62) = 1
proba(64) = 0.898311 f(64) = 1
proba(66) = 0.791718 f(66) = 3
proba(68) = 0.903297 f(68) = 1
proba(70) = 0.883354 f(70) = 1
proba(72) = 0.827737 f(72) = 2
proba(74) = 0.91524 f(74) = 1
proba(76) = 0.91524 f(76) = 1
proba(78) = 0.839734 f(78) = 3
proba(80) = 0.897156 f(80) = 1
proba(82) = 0.927172 f(82) = 1
proba(84) = 0.808393 f(84) = 3
proba(86) = 0.917208 f(86) = 1
proba(88) = 0.907468 f(88) = 1
proba(90) = 0.781757 f(90) = 4
proba(92) = 0.925338 f(92) = 1
proba(94) = 0.923022 f(94) = 1

```

proba(96) = 0.835048 f(96) = 3
proba(98) = 0.918155 f(98) = 1
proba(100) = 0.905586 f(100) = 2