

Conjecture de Goldbach, parcours eulérien et point fixe en dimension 1

Denise Vella-Chemla

2 mars 2026.

1. Introduction

La conjecture dite *conjecture paire de Goldbach*, qui date de 1742 ([8])¹, énonce que tout nombre pair n supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers² (voir [12] pour un compte-rendu historique à son sujet). Elle a intéressé de nombreux savants (tels que Cantor [5] qui a vérifié, à l'époque à la main, qu'elle était vraie pour tous les nombres jusqu'à 1000, ou Laisant [10] qui a proposé un procédé expérimental permettant de la vérifier). Est proposée ci-après une modélisation de la conjecture de Goldbach qui est basée sur l'idée de considérer certaines sommes égales à n comme des points du plan \mathbb{N}^2 . On place les nombres p_k et $n - p_k$, avec p_k un nombre premier compris entre 3 et $n - 3$, l'un, p_k , sur l'axe des abscisses, et l'autre, $n - p_k$, sur l'axe des ordonnées. La modélisation utilise la notion de parcours³ eulérien et un théorème concernant la bisection de collier.

2. Représentation des décompositions de n en sommes $p_k + (n - p_k)$, avec p_k un nombre premier, dans le plan \mathbb{N}^2

Appelons E_n l'ensemble des nombres premiers impairs compris entre 3 et $n - 3$ inclus.

On note E'_n l'ensemble des nombres $n - p_k$ avec $p_k \in E_n$.

E_n et E'_n ont même cardinal.

$$E_n = \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n - 3, p_k \text{ est un nombre premier}\}$$

$$E'_n = \{n - p_k \mid p_k \in E_n\}.$$

Par commodité, on représente les points qui sont utiles pour la justification par des points (x, y) dans un carré C de côté de longueur n , carré dont les sommets sont les points $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, n)$ et (n, n) . Les nombres premiers p_k sont positionnés sur l'axe des abscisses. Les nombres $n - p_k$ sont positionnés sur l'axe des ordonnées.

On trace dans le carré C un réseau de droites :

- chaque droite verticale a pour équation $x = p_k$ pour chaque nombre premier $p_k \in E_n$;
- chaque droite horizontale a pour équation $y = n - p_k$ pour chaque nombre $n - p_k \in E'_n$.

L'ensemble U_n des points d'intersection du réseau de droites dans le carré C est défini par

$$U_n = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in E_n, y \in E'_n\}.$$

1. On trouve aussi la phrase latine “*Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis*”, traduisible en “*Mais tout nombre pair est composé d'un, deux ou trois nombres premiers.*” dans un écrit posthume, publié en 1701, de Descartes (cf. [2] et [3]).

2. On considérera ici seulement les nombres pairs supérieurs à 4, comme sommes de deux nombres premiers impairs.

3. On dit aussi *chemin* (*path* en anglais, un joli mot, mais *parcours* est chouette à cause de “Pars! Cours!”).

L'ensemble U_n est de cardinal⁴ $\#(E_n \times E'_n) = (\#E_n)^2$.

Exemples : Donnons pour exemples les ensembles E_{16} , E'_{16} , E_{24} et E'_{24} . On a

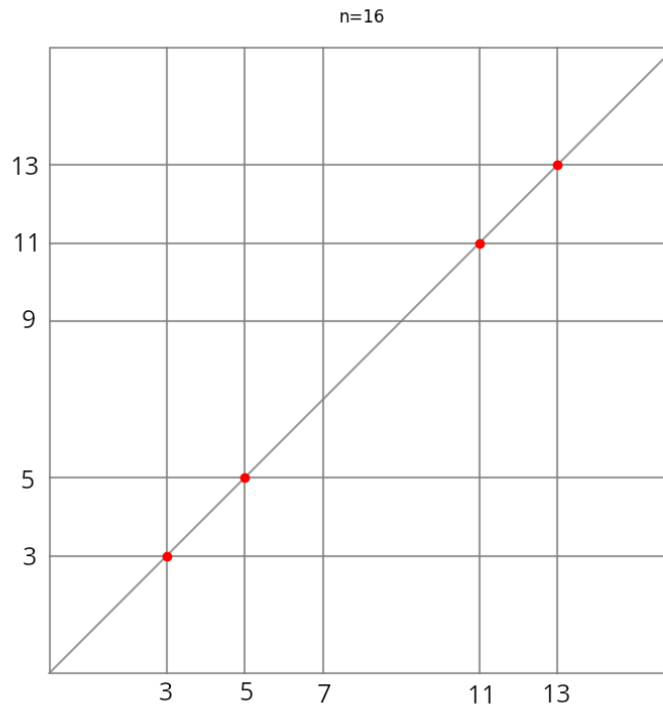
$$\begin{array}{l|l|l} E_{16} = \{3, 5, 7, 11, 13\} & \#E_{16} = 5 \quad (\#E_{16} \text{ est impair}). & E'_{16} = \{13, 11, 9, 5, 3\} \\ E_{24} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} & \#E_{24} = 7 \quad (\#E_{24} \text{ est impair}). & E'_{24} = \{21, 19, 17, 13, 11, 7, 5\} \end{array}$$

Remarque : Un nombre pair qui est le double d'un nombre premier p_k (comme $38 = 2 \times 19$, ou $94 = 2 \times 47$) vérifie trivialement la conjecture de Goldbach, car ce nombre étant de la forme $2p_k$, il a une décomposition en somme de la forme $n = 2p_k = p_k + p_k$ quel que soit p_k un nombre premier ; un tel nombre est la somme de deux nombres premiers confondus (identiques). Leur graphique (voir ci-dessous) associé présente un point rouge au centre du carré, à l'intersection de la droite verticale (d'équation $x = p_k$), et de la droite horizontale (d'équation $y = p_k$) (et donc à l'intersection des deux diagonales du carré).

3. Illustration graphique d'un exemple

Pour illustrer la modélisation, on va traiter le cas $n = 16$ en caractérisant les décomposants de Goldbach de 16 qui sont 3 et 13 d'une part, et 5 et 11, d'autre part.

La figure 1 montre le carré représentant les décompositions de Goldbach du nombre $n = 16$ en rouge sur la diagonale ascendante (il s'agit des points $(3, 3)$, $(5, 5)$, $(11, 11)$ et $(13, 13)$).



4. On utilise le symbole $\#E$ pour désigner le cardinal de l'ensemble E .

FIG. 1 : L'exemple du carré pour $n = 16$.

Pour $n = 16$, on a vu que $\#E_{16} = 5$ est impair. Le réseau U_n contient $\#E_{16} = 25$ points.

4. Passer du plan à la ligne via un parcours eulérien

Un théorème d'Euler démontre que tout graphe dont tous les sommets sont de degré pair (sauf 2) contient un parcours eulérien de ses arêtes (i.e. qui passe par toutes les arêtes du graphe) une fois et une seule.

On choisit de transformer notre graphe des deux manières illustrées suivantes, selon qu'il contient un nombre pair ou impair de sommets (on rajoute au graphe tel qu'on l'avait considéré initialement les deux droites horizontales d'équations $x = 0$ et $x = n$ et les deux droites verticales $y = 0$ et $y = n$). On se place dans le cas général dans lequel tous les écarts entre nombres premiers successifs sont différents (bien qu'ils soient représentés par des segments de même taille sur les graphiques) ; on les note a, b, c, d dans le premier cas, et a, b, c, d, e dans le second, pour exemples (la généralisation se fait avec des indices génériques pour les cas pair et impair). Les deux points que l'on souhaite particulariser pour notre objectif (qui est de trouver un point à égale distance de l'un et l'autre de ces points), en leur associant un degré impair, ont été notés par un point bleu. On rajoute des arcs de façon à ce que tous les autres sommets du graphe soient de degré pair.

Premier cas : le nombre d'écarts entre les nombres premiers considérés (en n'oubliant pas l'écart entre 0 et le plus petit nombre premier considéré, et l'écart entre le plus grand nombre premier considéré et n) est un nombre pair (remarque : le premier écart (qui est égal au premier nombre premier considéré, i.e. le plus petit élément de E_n) et le dernier écart (qui est égal à $n - p_{\max}$, l'écart entre n un nombre pair et p_{\max} , le plus grand nombre premier de E_n) sont quant à eux impairs, alors que tous les autres écarts sont pairs (tous les autres écarts sont entre deux nombres premiers impairs, donc ils sont pairs)).

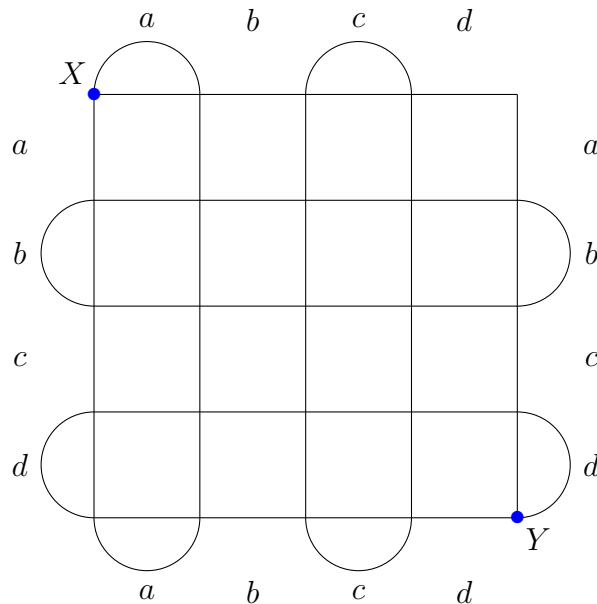


FIGURE 2 : cas où $\#E_n$ est impair

Second cas : le nombre d'écarts entre les nombres premiers considérés (en n'oubliant pas l'écart entre 0 et le plus petit nombre premier considéré, et l'écart entre le plus grand nombre premier considéré et n) est un nombre impair

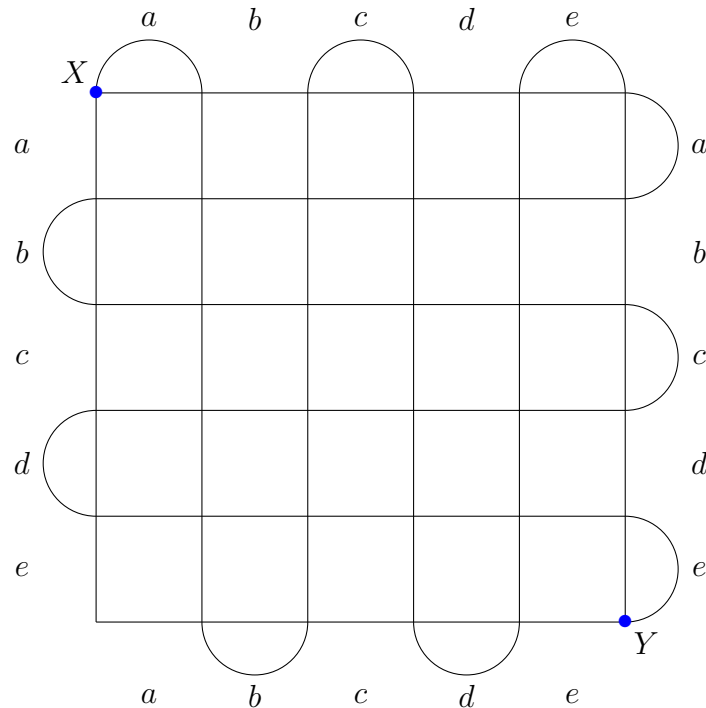


FIGURE 3 : cas où $\#E_n$ est pair

Un graphe ainsi modifié contient un parcours eulérien du sommet $X = (0, n)$ au sommet $Y = (n, 0)$ car puisqu'il n'a que deux sommets de degré impair (X et Y justement), le théorème d'Euler assure qu'il en est ainsi. On lira avec intérêt les références d'Alain Connes [6] et André Sainte-Laguë [11] qui décrivent le parcours eulérien du jeu de l'icosion de Hamilton, et permettent d'appréhender agréablement la notion de symétrie mathématique.

5. Utiliser le théorème du point fixe de Brouwer

Pour rappeler le théorème du point fixe, traduisons deux paragraphes du livre de Timothy Gowers, *The companion to mathematics*, [9].

Une passagère est dans le train Paris-Londres et elle a une bouteille d'eau avec elle. Prouver qu'il y a au moins un moment de son voyage auquel le volume de l'air dans la bouteille, comme fraction du volume de la bouteille elle-même, est exactement égal à la fraction du voyage qu'elle a effectué jusqu'alors (par exemple, la bouteille peut être remplie aux $2/5$, et donc vide aux $3/5$, au moment précis où la dame a parcouru $2/5$ de la distance totale que le train doit parcourir de Paris à Londres. Notons qu'on ne suppose pas que la bouteille est pleine au début du voyage et vide à la fin du voyage.

La solution, si vous ne l'avez pas déjà vue, est étonnamment simple. Pour chaque x entre 0 et 1, soit $f(x)$ la proportion d'air dans la bouteille, en fonction de x , la proportion du trajet déjà parcourue. Alors $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout x puisque le volume de l'air dans la bouteille ne peut pas être négatif et ne peut pas non plus excéder le volume de la bouteille. Si maintenant on définit $g(x) = x - f(x)$, alors on voit que $g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$. Puisque $g(x)$ varie continûment selon x , il doit y avoir un instant auquel $g(x) = 0$, et donc auquel $f(x) = x$, qui est ce que l'on souhaitait.

Ce que nous venons de démontrer est une forme légèrement déguisée d'un des théorèmes de point fixe les plus simples. On pourrait l'énoncer plus formellement ainsi : si f est une fonction continue de l'intervalle fermé $[0, 1]$ dans lui-même, alors il doit exister un x tel que $f(x) = x$. Cet x est appelé un *point fixe* de f . (On déduit ce résultat du théorème de la valeur intermédiaire, un résultat basique d'analyse qui énonce que si g est une fonction continue de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} telle que $g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$, alors il doit exister x tel que $g(x) = 0$.)

6. Justification de la conjecture de Goldbach

Au lieu des variables “ratio du volume d'air rapporté au volume total de la bouteille” et “ratio du trajet déjà effectué rapporté au trajet total” de l'exemple de la passagère du train, on prend ici comme deux variables à lier les deux distances qui séparent un point du chemin eulérien M dont on va fournir la manière paramétrée dont on le parcourt au point X d'une part, et la distance qui sépare ce même point M de Y d'autre part. Le théorème du point fixe de Brouwer assure l'existence d'un point qui est à la même distance de X qu'il l'est de Y , parce que la ligne constituée par le parcours eulérien est un convexe compact. Le point à égale distance de X et Y est donc situé sur la diagonale ascendante d'un carré tel qu'on l'a défini pour coder les sommes, et le théorème de Brouwer garantirait⁵ de ce fait l'existence d'un décomposant de Goldbach pour tout entier pair n supérieur à 4.

Pour parcourir continûment chacun des intervalles successifs contenus dans le parcours eulérien, on utilise la fonction classique de parcours continu à paramètre d'un intervalle $[p, q]$ définie par $x(t) = p + t(q - p)$ avec t le paramètre variant continûment de 0 à 1, ce qui permet d'être en p à l'instant 0 et en q à l'instant 1 ; la fonction fait prendre à $x(t)$ toutes les valeurs entre p et q ; on fait cela sur chacun des intervalles du parcours et on cumule les longueurs des différents intervalles parcourus, au fur et à mesure du parcours eulérien. Les mesures des différents intervalles sont notées autour du carré sur les graphiques ; quand on a parcouru telle distance jusqu'à l'origine d'un segment à parcourir qui est de telle taille, on cumule la distance parcourue par la fonction paramétrée sur ce petit segment à la distance parcourue jusque-là.

Notre problème est le suivant : l'espace qu'on a choisi et l'idée du parcours eulérien nous font utiliser sur notre espace comme outil de mesure ce qu'on a coutume d'appeler la distance de Manhattan, ou distance de norme 1, qui suit les bords d'un rectangle pour aller d'un point à un autre au lieu de passer “directement” par la diagonale, c'est-à-dire par la distance la plus courte, à vol d'oiseau. Le point fixe qu'on a en tête, sur la ligne du parcours eulérien de tous les intervalles nous semble devoir se situer grosso-modo au milieu du fil, c'est-à-dire qu'on a tendance à imaginer qu'il se trouve dans un certain petit rayon autour du centre du carré. Mais cette idée ne semble pas correspondre à

5. bien noter le conditionnel, on est très loin d'être au bout de nos peines...

l'un des points fixes qui nous intéressent sur la diagonale, et qui sont quant à eux à égale distance euclidienne (ou de Manhattan) de X et Y , qui est bien plus courte comme on le constate sur le carré de 16 (par exemple, en allant un sommet à droite et 5 sommets vers le bas en partant du sommet haut-gauche du carré, pour atteindre le décomposant de Goldbach 3 de 16 qui est le point rouge sur la diagonale le plus bas et le plus à gauche, un chemin de 6 arêtes donc (en oubliant leur longueur), mais ce chemin est bien plus court que les 48 arêtes nécessaires pour parcourir la moitié du parcours eulérien).

Rajouté le 4 mars, suite à la lecture de l'article de Knuth sur l'IA Claude : après tout, est-ce qu'on ne serait pas face à un problème de topologie ? Auquel cas, les longueurs des arêtes (les distances entre deux nombres premiers successifs de E_n , la valeur du plus petit d'entre eux, la valeur du plus grand d'entre eux) n'auraient pas d'importance. Le nombre d'arêtes dans les deux cas (voir les deux figures 2 et 3) est $2n^2 + 4n$, un nombre pair ; s'il était possible de démontrer qu'il existe forcément un parcours eulérien de X à Y dont la première partie contient exactement la moitié des arêtes de chaque sorte (et la seconde partie également, par voie de conséquence), on serait sauvée.

Si je me dis que les longueurs n'ont pas d'importance, et que je rajoute un arc de X à Y , alors tous les sommets sont de degré 4 ; en chaque sommet, j'étiquette les arcs par n, s, e, o selon que l'arête est au nord, au sud, à l'est ou à l'ouest du sommet en question. Je peux associer à chaque point une image par une fonction qui calcule sa distance à X d'une part et sa distance à Y d'autre part sous la forme de deux mots sur l'alphabet $A = \{n, s, e, o\}$ et un théorème dans le genre du théorème des points antipodaux sur la sphère assure peut-être que j'ai deux points antipodaux (qui correspondent sur la représentation par un carré aux points par exemple (3,3) et (13,13) pour $n = 16$, ou (19,19) et (79,79) pour $n=98$) qui ont des images "qui se correspondent" (mais on n'arrive pas à trouver une même image pour deux points, le théorème des points antipodaux parle de "deux points antipodaux ayant même image" (le chemin pour aller de X à (3, 3) est *esssss* et le chemin pour aller de Y à (13, 13) est *onnnnn*). On imagine bien qu'il faut dire que $o = e^*$ et que $s = n^*$, mais on ne sait pas bien avancer davantage pour l'instant.

Références

- [1] Michèle Audin, *Géométrie*, 2006, éd. EDP Sciences.
- [2] C. Adam, P. Tannery, *Œuvres de Descartes - Physico-mathematica, Compendium Musicae, Regulae ad directionem ingenii - Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance*, chap. vol. X, Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes. III : Numeri polygoni, édit. Amsterdam, 1701, p. 1-4. Copie MS. : Leyde, Bibliothèque de l'Université, Hug. 29 ex Hug. 27, 1908.
- [3] G. Belgioioso, *René Descartes : Opere Posthume 1650-2009*, Bompiani – il pensiero occidentale, 2009.
- [4] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, *Mathematische Annalen*, LXXI, 71, 1912, p. 97-115, <https://eudml.org/doc/158520>.
- [5] Georg Cantor, *Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach*, 1894, Assoc. franç. Caen, XXIII, 117-134.
- [6] Alain Connes, *Symétries* (Symmetries, Newsletter de l'European Mathematical Society, n° 54, p. 11, décembre 2004), Magazine Pour la Science, n°292, février 2001.
- [7] Leonhard Euler, *Solutio problematis queatis ad Geometriam situs pertinentis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Vol. 8, 1736, 128–140.

- [8] Christian Goldbach, *Lettre de Christian Goldbach à Leonhard Euler (XLIII, 00765)*, Correspondances mathématiques et physiques de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle (lettre à Euler en allemand), Académie Impériale des Sciences, Saint-Petersbourg, 1988, P. H. Fuss éd., 125–129, <http://eulerarchive.MAA.org>.
- [9] Timothy Gowers, *The Princeton companion to mathematics*, (éditeurs associés : June Barrow-Green, Imre Leader) Princeton University Press, Princeton et Oxford, 2008.
- [10] Charles-Ange Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la Société Mathématique de France : Vie de la Société, n° 25, 1897, 208-211.
- [11] André Sainte-Laguë, *Avec des nombres et des lignes, récréations mathématiques*, Vuibert, 1937.
- [12] Robert-Charles Vaughan, *Goldbach's conjectures : a historical perspective*, Open problems in Mathematics, Springer International Publishing 2016, 479-520.