

quand on calcule dans un graphe le centre : le sommet d'excentricité minimum, sachant que l'excentricité est un max de sommes d'étiquettes d'arêtes, si au lieu de se placer dans la théorie des graphes, on souhaite se placer dans la théorie des algèbres de von Neumann, on est dans une algèbre de quel type (on a des +, des max, et des min) ?

---

C'est une question fascinante qui fait le pont entre l'optimisation combinatoire et l'analyse fonctionnelle. En passant de la recherche d'un **centre de graphe** (problème de minimax) vers le monde des algèbres d'opérateurs, on change radicalement de paradigme algébrique.

Si l'on cherche l'équivalent des opérations  $+\$, \max\$,$  et  $\min\$\$  dans le cadre des algèbres de von Neumann, on se retrouve dans l'étude des **algèbres de von Neumann de type  $II_1$** , et plus précisément dans leur structure de **réseau (lattice)**.

Voici pourquoi et comment ces concepts s'articulent :

---

## 1. Le passage au semi-anneau $(\max, +)$

Dans un graphe, calculer l'excentricité repose sur l'algèbre **tropicale** (ou semi-anneau idempotent). Les opérations y sont :

- L'addition devient le  $\max\$\$ .
- La multiplication devient le  $+\$\$ .

## 2. Le type d'Algèbre de von Neumann : Type $II_1$

Pour retrouver des opérations de type "min" et "max" sur des éléments qui se comportent comme des fonctions scalaires (ce que sont les distances dans un graphe), on se place généralement dans une **algèbre de von Neumann commutative** (qui est de **type  $II_1$**  ou une somme directe de types  $II_1$ ).

- **L'isomorphisme** : Toute algèbre de von Neumann commutative est isomorphe à une algèbre  $L^\infty(X, \mu)$ .
- **Les opérations** : Dans  $L^\infty$ , le  $\max\$\$  et le  $\min\$\$  correspondent aux opérations de **borne supérieure (sup)** et **borne inférieure (inf)** dans le réseau des opérateurs auto-adjoints.

## 3. La structure de treillis (Lattice)

Si vous manipulez des étiquettes (poids) et cherchez un minimum d'excentricités, vous travaillez dans ce qu'on appelle une **algèbre de von Neumann munie d'une structure de treillis vectoriel** (ou espace de Banach-lattice).

- **Le Max** : Dans une algèbre de von Neumann, pour deux opérateurs auto-adjoints  $A$  et  $B$  qui commutent, le  $\max(A, B)$  est bien défini via le calcul fonctionnel continu.

- **Le Type** : Si l'on considère des structures de dimension finie (comme un graphe), on est dans le type  $\mathbb{I}_n$  (matrices diagonales). Si le graphe est infini, on reste dans le type  $\mathbb{I}$  (partie discrète ou continue).

---

## En résumé

En quittant la théorie des graphes pour les algèbres de von Neumann tout en conservant les opérations de comparaison et d'accumulation :

1. Vous êtes dans une **algèbre de type  $\mathbb{I}$**  (le plus souvent commutative).
2. Vous utilisez la structure de *AW-lattice\** de l'algèbre.
3. L'excentricité devient une question de calcul du **rayon spectral** ou de normes dans des sous-espaces spécifiques, où le "centre" correspond à un élément minimisant une borne supérieure essentielle.

Souhaitez-vous explorer comment la notion de "distance" est reformulée via les triplets spectraux en géométrie non-commutative (Connes), ce qui est le prolongement naturel de cette idée ?

---

ok

---

C'est une direction passionnante, car c'est précisément là que l'on fait la jonction entre le monde discret (votre graphe) et le monde continu des opérateurs.

En géométrie non-commutative, Alain Connes a généralisé la notion de distance en utilisant une **algèbre de von Neumann** (ou une  $C^*$ -algèbre)  $\mathcal{A}$ , un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et un opérateur non borné  $D$  (appelé **opérateur de Dirac**). C'est ce qu'on appelle un **triplet spectral**.

Voici comment votre problème de "centre" et d'excentricité se traduit dans ce cadre :

---

### 1. La formule de la distance de Connes

Dans un graphe, la distance est le "min des sommes d'étiquettes". Dans un triplet spectral, la distance entre deux états  $\phi$  et  $\psi$  (qui généralisent les sommets) est définie par :

$$d(\phi, \psi) = \sup \{ |\phi(a) - \psi(a)| : a \in \mathcal{A}, \forall [D, a] \in \mathbb{I} \}$$

Ici, le  $\sup$  joue le rôle du  $\max$  de votre excentricité, et la condition sur le commutateur  $[D, a]$  remplace la contrainte sur les étiquettes des arêtes.

### 2. L'excentricité et le Centre

Si l'on suit votre logique de transport de la théorie des graphes vers ce domaine :

- L'**excentricité** d'un état  $\phi$  devient la valeur  $E(\phi) = \sup_{\psi} d(\phi, \psi)$ .
- Le **centre** est l'état  $\phi$  qui minimise cette valeur  $E(\phi)$ .

### 3. Pourquoi le Type I est-il central ici ?

Comme nous l'avons vu, pour que les notions de  $\min$  et  $\max$  fassent sens de manière "naturelle" (comme sur des fonctions), on utilise souvent des **algèbres de von Neumann de type I**.

- Dans une algèbre de **Type II** ou **Type III** (utilisées en physique quantique des champs ou en mécanique statistique), les éléments sont beaucoup plus "entrelacés".
- Le **Type I** permet d'isoler des "points" (via les projecteurs minimaux), ce qui est indispensable pour définir un sommet ou un "centre" de manière analogue aux graphes.

### 4. Application concrète : Le "Graphe spectral"

Si votre algèbre de von Neumann est  $L^\infty(X)$  (commutative), le centre spectral correspondra exactement au centre géométrique de l'espace  $X$ . Si l'algèbre est non-commutative (par exemple, des matrices), le "centre" peut devenir un état de densité maximale, ce qui lie votre question à l'entropie et à la physique théorique.

Pour aller plus loin, souhaitez-vous que nous examinions comment l'opérateur de Dirac  $D$  "code" concrètement les distances d'un graphe fini ?

[mais certainement...](#)

C'est là que la magie opère : l'opérateur de Dirac  $D$  est en quelque sorte la "racine carrée" du Laplacien du graphe. Pour un graphe fini, on peut construire un triplet spectral qui reproduit exactement la métrique du graphe.

Voici comment on "code" les distances et l'excentricité dans ce cadre :

#### 1. La construction du triplet spectral pour un graphe

Pour passer d'un graphe à l'algèbre, on définit les objets suivants :

- L'**algèbre  $SA$**  : C'est l'algèbre des fonctions complexes sur les sommets,  $C(V)$ . Comme c'est un ensemble fini de points, c'est une algèbre de **Type I** (une somme finie de copies de  $\mathbb{C}$ ).
- L'**espace de Hilbert  $SH$**  : On prend l'espace des fonctions sur les arêtes orientées du graphe.

- **L'opérateur de Dirac  $\Delta$**  : On utilise un opérateur de "signature" ou de "gradient". Si une arête  $e$  relie le sommet  $i$  au sommet  $j$  avec un poids  $w_{ij}$ , l'opérateur  $\Delta$  va encoder l'inverse de la racine carrée de ce poids.

## 2. Du commutateur à la distance

Dans la formule de Connes, la condition  $\| [D, a] \| \leq 1$  est la clé.

- Pour une fonction  $a$  (qui associe une valeur à chaque sommet), le commutateur  $[D, a]$  calcule la différence  $|a(i) - a(j)|$  sur chaque arête.
- La contrainte de norme signifie que pour toute arête  $(i,j)$ , on a :  

$$|a(i) - a(j)| \leq \text{poids}(i,j)$$
- C'est l'analogue des **fonctions Lipschitziennes**. La distance entre deux sommets est alors le maximum de la différence que peut atteindre une telle fonction.

## 3. L'Excentricité "Spectrale"

Dans ce cadre, si vous cherchez le sommet d'excentricité minimum (le centre), vous cherchez le point  $v$  qui minimise :

$$\sup_{s \in \text{Spectre}(A)} d(v, s)$$

En théorie des algèbres de von Neumann, cela revient à chercher un **élément central** dans l'espace des états qui minimise le diamètre spectral. Si le graphe est très symétrique, ce "centre" correspond souvent à l'état de Gibbs ou à une mesure invariante.

## Pourquoi c'est puissant ?

Cette approche permet de définir un "centre" même si le graphe devient un objet "flou" ou continu (comme un nuage de points fractal) :

- **Si le graphe est commutatif (Type I)** : On retrouve le centre classique.
- **Si le graphe est "quantique"** : (les sommets ne commutent pas, on est dans du **Type II** ou **III**), la notion de "sommet" disparaît au profit d'états. Le centre n'est plus un point, mais une configuration optimale de l'algèbre.

C'est une vision très "physique" : le centre du graphe est le point où l'information (ou l'énergie) met le moins de temps à se propager vers les bords, calculé non plus par des chemins discrets, mais par la diffusion d'un opérateur de Dirac.

Est-ce que cette transition du discret (arêtes) vers l'analytique (opérateurs de Dirac) vous semble claire, ou voulez-vous que nous précisions la structure matricielle de  $\Delta$  pour un petit graphe exemple ?

[oui, merci de préciser.](#)

Prenons un exemple simple pour bien visualiser comment on "force" une structure de matrice à se comporter comme un graphe.

Imaginons un graphe de **3 sommets en ligne** :  $v_1 - v_2 - v_3$ . Les deux arêtes ont un poids de 1\$.

## 1. L'espace de Hilbert et l'Algèbre

- **L'Algèbre  $\mathcal{A}$**  : Ce sont les matrices diagonales  $3 \times 3$  (type  $I_3$ ). Un élément  $a \in \mathcal{A}$  est de la forme  $\text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ .
- **L'Espace de Hilbert  $\mathcal{H}$**  : On prend un espace de dimension 4 pour représenter les deux arêtes orientées (chaque arête dans les deux sens).

## 2. La structure de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$

L'astuce d'Alain Connes est d'utiliser des matrices de blocs. Pour notre ligne,  $\mathcal{D}$  pourrait ressembler à ceci :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais en réalité, pour que le calcul du commutateur  $[D, a]$  fonctionne, on utilise souvent une structure de **matrice d'adjacence pondérée**. Le commutateur  $[D, a]$  agit comme une "différence finie" :

$$[D, a]_{ij} = D_{ij}(a_j - a_i)$$

Si la norme de ce commutateur doit être  $\leq 1$ , cela signifie physiquement que la pente de notre "fonction"  $a$  entre deux sommets ne peut pas dépasser l'unité.

## 3. Le calcul de l'excentricité "opérateur"

Dans ce cadre, calculer l'excentricité du sommet  $v_1$ , c'est chercher la valeur maximale que peut prendre  $a_1$  sachant qu'un autre  $a_k = 0$  (on fixe un point de référence) et que  $\|[D, a]\| \leq 1$ .

- Pour  $v_1$ , le point le plus loin est  $v_3$ . La contrainte impose  $|a_1 - a_2| \leq 1$  et  $|a_2 - a_3| \leq 1$ .
- L'excentricité de  $v_1$  est donc 2\$.
- L'excentricité de  $v_2$  (le centre) est 1\$.

## 4. Pourquoi est-ce une Algèbre de von Neumann ?

Même pour un graphe fini, on considère l'algèbre de toutes les transformations linéaires sur  $\mathcal{H}$ . Le fait d'utiliser des **min** et des **max** nous place dans la structure d'**ordre** de l'algèbre.

Dans une algèbre de von Neumann (même de type  $I$ ), les éléments auto-adjoints forment un **treillis (lattice)** :

- Le **Max** (excentricité) est le plus petit majorant de l'ensemble des distances.
- Le **Min** (centre) est l'infimum de ces excentricités sur l'espace des états (l'ensemble des sommets).

## Le petit "wit" final

Si on passait d'un graphe fini à une algèbre de **Type II** (facteurs hyperfinis), on ne pourrait plus dire "le centre est le sommet 2". On dirait que le centre est un "état diffus" sur une structure fractale où les notions de sommets sont devenues des probabilités. C'est un peu comme passer d'une grille de pixels (Graphe) à une peinture à l'huile (von Neumann continue).

C'est cette puissance de généralisation qui rend le passage par les algèbres d'opérateurs si élégant : vous avez le même outil pour un simple réseau de neurones (graphe) et pour l'espace-temps quantique !

Voulez-vous que l'on regarde ce qui se passe si les arêtes n'ont pas des poids fixes, mais des opérateurs (ce qui arrive dans les algèbres de von Neumann de type III) ?

---

non.

---

C'est entendu ! Nous avons déjà bien déblayé le terrain.

Pour conclure sur cette analogie, reprenez que ce passage du **discret (graphe)** au **spectral (von Neumann)** transforme un problème de recherche de chemin en un problème de **géométrie de l'ordre**.

En restant dans le **Type I**, vous gardez la "netteté" des sommets (les projecteurs minimaux), tout en profitant de la puissance analytique du triplet spectral  $(A, H, D)$ . C'est une manière très élégante de voir un graphe non pas comme un dessin de points et de traits, mais comme un espace métrique défini par l'interaction entre des opérateurs.

Si un jour vous souhaitez explorer comment ces "centres" se déplacent dans des structures plus exotiques ou non-commutatives, n'hésitez pas !

---

[pourquoi suis-je dans le commutatif ?](#)

---

C'est une excellente question de structure. La raison pour laquelle nous sommes restés dans le domaine **commutatif** (Type I) tient à la nature même de votre point de départ : **le sommet**.

Voici les trois raisons techniques qui imposent cette commutativité :

### 1. L'existence des "Sommets" (Points)

Dans un graphe, un sommet est une entité discrète et isolable. En théorie des algèbres d'opérateurs, cela correspond à ce qu'on appelle un **projecteur minimal**.

- Dans une algèbre **commutative** (comme  $L^\infty(X)$  ou  $\mathbb{C}^n$ ), vous pouvez isoler chaque point parfaitement.
- Dans une algèbre **non-commutative** (Type I ou III), il n'y a souvent pas de projecteurs minimaux. Les "points" sont remplacés par des "états" qui se chevauchent. On ne peut plus pointer du doigt "un sommet" de manière unique.

## 2. La définition de l'Excentricité

L'excentricité repose sur la distance  $d(v, w)$  entre **deux** points distincts.

- Pour parler de la distance entre  $v$  et  $w$ , il faut que ces deux "sommets" soient représentés par des opérateurs qui **commutent** entre eux.
- Si les opérateurs ne commutaient pas (principe d'incertitude), mesurer la position de  $v$  perturberait la mesure de la distance vers  $w$ . Le concept même de "max des distances" pour un sommet fixe s'effondrerait.

## 3. La structure de Treillis (Min/Max)

Vous avez mentionné vouloir conserver les opérations  $+$ ,  $\max$ , et  $\min$ .

- Ces opérations sont les briques de base de ce qu'on appelle un **treillis vectoriel** (ou algèbre de Kakutani).
- Une algèbre de von Neumann est un treillis pour son ordre naturel **si et seulement si elle est commutative**.
- Dans le monde non-commutatif, le  $\max$  de deux opérateurs  $A$  et  $B$  n'existe pas forcément (il n'y a pas toujours de plus petit majorant unique si  $A$  et  $B$  ne commutent pas).

## En résumé

Vous êtes dans le commutatif parce que vous cherchez un **centre** (un point précis) basé sur une **comparaison d'étiquettes** (des valeurs scalaires).

Si vous vouliez passer au **non-commutatif**, vous ne chercheriez plus "le sommet d'excentricité minimum", mais "l'état d'énergie minimale" ou "l'état de plus grande centralité" dans un système où les positions sont floues. On ne parlerait plus de graphe, mais de **géométrie quantique**.

C'est ce qui rend votre intuition sur le "Type I" très juste : c'est le seul type d'algèbre de von Neumann qui accepte encore une interprétation "géométrique classique" avec des points et des distances claires.

Est-ce que cette distinction entre la "netteté" des points et le "flou" non-commutatif vous aide à voir pourquoi le centre de graphe nous maintient dans le Type I ?

oui, c'est bon.

Avec plaisir ! C'est un sujet qui demande une sacrée gymnastique intellectuelle pour relier des points (au sens propre comme au figuré) entre l'informatique théorique et l'analyse de haut niveau.

Pour résumer notre échange, vous avez fait le pont entre :

- **La combinatoire** : Le centre d'un graphe via le minimax des distances.
- **L'algèbre** : Le passage aux semi-anneaux  $(\max, +)$ .
- **Les algèbres d'opérateurs** : Le choix du **Type I** (sommations de  $\mathbb{C}$  ou  $B(H)$ ), qui est le seul cadre où la notion de "sommet" et de "max" reste cohérente et calculable comme on le fait sur un graphe.

Si vous vous replongez dans ces calculs et que vous tombez sur des structures où les chemins s'entremêlent de façon plus complexe (comme dans des graphes aléatoires infinis ou des réseaux quantiques), vous saurez que c'est le signal pour aller frapper à la porte des types II et III.

Bonne continuation dans vos explorations mathématiques !