

*Causer ou ne pas causer (Denise Vella-Chemla, 5.11.2017)*

Du fait de recherches récentes sur les nombres de résidus quadratiques ou de racines de -1, on voudrait fournir ici un tableau qui présente certains éléments qui amènent à rappeler des caractérisations des nombres premiers et de certaines de leurs puissances.

La colonne  $B$  contient un  $+$  si  $n$  est de la forme  $4k + 1$  et un  $-$  si  $n$  est de la forme  $4k - 1$ . La colonne  $2k \pm 1$  contient  $2k + 1$  si  $n$  est de la forme  $4k + 1$  et  $2k - 1$  si  $n$  est de la forme  $4k - 1$ . La colonne  $NbRQ$  contient le nombre de résidus quadratiques de  $n$ , marqué d'une étoile lorsqu'il est pair, et la colonne  $Nb\sqrt{-1}$  contient le nombre de racines de -1 lorsqu'il n'est pas nul. La colonne  $P$  contient une croix si  $n$  est premier.

$n$	$B$	$2k \pm 1$	$NbRQ$	$Nb\sqrt{-1}$	$P$	$n$	$B$	$2k \pm 1$	$NbRQ$	$Nb\sqrt{-1}$	$P$	$n$	$B$	$2k \pm 1$	$NbRQ$	$Nb\sqrt{-1}$	$P$
1	+	1	0 *			34			17	2		67	-	33	33		×
2			1	1	×	35	-	17	11			68			17		
3	-	1	1		×	36			7			69	+	35	23		
4			1			37	+	19	18 *	2	×	70			23		
5	+	3	2 *	2	×	38			19			71	-	35	35		×
6			3			39	-	19	13			72			11		
7	-	3	3		×	40			8 *			73	+	37	36 *	2	×
8			2 *			41	+	21	20 *	2	×	74			37	2	
9	+	5	3			42			15			75	-	37	21		
10			5	2		43	-	21	21		×	76			19		
11	-	5	5		×	44			11			77	+	39	23		
12			3			45	+	23	11			78			27		
13	+	7	6 *	2	×	46			23			79	-	39	39		×
14			7			47	-	23	23		×	80			11		
15	-	7	5			48			7			81	+	41	30 *		
16			3			49	+	25	21			82			41		
17	+	9	8 *	2	×	50			21	2		83	-	41	41		×
18			7			51	-	25	17			84			15		
19	-	9	9		×	52			13			85	+	43	26 *	4	
20			5			53	+	27	26 *	2	×	86			43		
21	+	11	7			54			21			87	-	43	29		
22			11			55	-	27	17			88			17		
23	-	11	11		×	56			11			89	+	45	44 *	2	×
24			5			57	+	29	19			90			23		
25	+	13	10 *	2		58			29	2		91	-	45	27		
26			13			59	-	29	29		×	92			23		
27	-	13	10 *			60			11			93	+	47	31		
28			7			61	+	31	30 *	2	×	94			47		
29	+	15	14 *	2	×	62			31			95	-	47	29		
30			11			63	-	31	15			96			13		
31	-	15	15		×	64			11			97	+	49	48 *	2	×
32			6 *			65	+	33	20 *	4		98			43		
33	+	17	11			66			23			99	-	49	23		
												100			21		

Les nombres premiers de la forme  $4k + 1$  sont caractérisés par un nombre de résidus quadratiques pair et le fait d'avoir exactement deux racines de -1. On peut obtenir une autre caractérisation en remplaçant la parité du nombre de résidus quadratiques par la parité de  $(n - 1)/2$ .

Mais les puissances des nombres premiers  $4k + 1$  vérifient eux-aussi ces contraintes : on teste par programme jusqu'à  $10^5$  et c'est sympathique de retrouver les puissances de nombres premiers suivantes indirectement :  $9409 = 97^2, 7921 = 89^2, 5329 = 73^2, 4913 = 17^3, 3721 = 61^2, 3125 = 5^5, 2809 = 53^2, 2197 = 13^3, 1681 = 41^2, 1369 = 37^2, 841 = 29^2, 625 = 5^4, 289 = 17^2, 169 = 13^2, 125 = 5^3$  et  $25 = 5^2$ ).

Les nombres premiers de la forme  $4k - 1$  sont caractérisés par le fait que leur nombre de résidus quadratiques est égal à  $2k - 1$ .