

On s'intéresse aux nombres de nombres premiers inférieurs aux puissances de 10 successives qu'on trouve par programme. $\pi(x) = 25$, le nombre de nombres premiers inférieurs à 100 "ressemble" à 28, le septième nombre triangulaire $\Delta_7 = \frac{7 \times 8}{2}$.

On cherche de quels nombres triangulaires les nombres de nombres premiers sont les plus proches. Jusqu'à 10^8 , on trouve les nombres triangulaires fournis dans le tableau ci-dessous. On note en regard les différences entre la fonction $li(x)$ de Gauss et les nombres $\pi(x)$ ou bien entre "nos" nombres triangulaires et les $\pi(x)$ en question. Ces calculs sympathiques nous ramène au Eureka que Gauss nota dans son journal, lorsqu'il découvrit que tout nombre est la somme de trois nombres triangulaires¹ le 10 juillet 1796.

x	$\pi(x)$	Δ_k	$li(x) - \pi(x)$	$\Delta_k - \pi(x)$
10^2	25	$\Delta_7 = 28$	5	3
10^3	168	$\Delta_{18} = 171$	10	3
10^4	1 229	$\Delta_{49} = 1225$	17	4
10^5	9 592	$\Delta_{138} = 9 591$	38	1
10^6	78 498	$\Delta_{396} = 78 606$	130	208
10^7	664 579	$\Delta_{1152} = 664 128$	339	451
10^8	5 761 455	$\Delta_{3394} = 5 761 315$	754	140
10^9	50 847 534	$\Delta_{10\ 084} = 50 848 570$	1701	1036

On cherche alors dans OEIS une séquence d'entiers qui ressemblerait le plus possible à la séquence 7,18,49,138, etc. On trouve la séquence $a(n) = \frac{1 + 2^n + 3^n}{2}$ mais cette séquence aurait amené au nombre triangulaire $T_{397} = 79\ 003$ au lieu de T_{396} , puis à $T_{1\ 158} = 671\ 061$ au lieu de $T_{1\ 152}$, puis à $T_{3\ 409} = 5\ 812\ 345$ au lieu de $T_{3\ 394}$ et $T_{10\ 098} = 50\ 989\ 851$ au lieu de $T_{10\ 084}$ et alors, les écarts faibles à $\pi(x)$ pour les petites valeurs de x s'envolent d'une manière complètement rédhitoire : $505 \gg 130$ pour 10^6 , $6482 \gg 339$ pour 10^7 , $50890 \gg 754$ pour 10^8 , $142317 \gg 1701$ pour 10^9 .

Il faudrait trouver une façon plus judicieuse de passer d'un nombre triangulaire au suivant.

On utilise la calculatrice en ligne à l'adresse <https://fr.planetcalc.com/5992/> pour approximer la fonction qui à 10^2 associe 7, à 10^3 associe 18, à 10^4 associe 49, à 10^5 associe 138, à 10^6 associe 396, à 10^7 associe 1152 et à 10^8 associe 3394. La calculatrice en ligne fournit la fonction $f(x) = 0.8207x^{0.4492}$, avec un coefficient de corrélation de 0.9983, une erreur relative moyenne de 3.8473%, et un coefficient de détermination de 0.9966. Malheureusement, les triangulaires calculés par cette fonction $T_6, T_{18}, T_{51}, T_{144}, T_{406}, T_{1144}, T_{3219}$ sont bien trop éloignés des valeurs de $\pi(x)$ pour convenir. On a à nouveau donné un coup d'épée dans l'eau.

1. cf. <http://denisevellachemla.eu/eureka3t.jpg> et http://www.persee.fr/doc/rhs0048-7996_1956_n_um9_14_346.